

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT MASZYN PRZEPEŁYWOWYCH

**TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF
FLUID-FLOW MACHINERY**

**PRACE
INSTYTUTU MASZYN PRZEPEŁYWOWYCH**



100



GDAŃSK 1996

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machines

*

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

Wydanie publikacji dofinansowane zostało przez PAN ze środków DOT uzyskanych z Komitetu Badań Naukowych

EDITORIAL BOARD – RADA REDAKCYJNA

TADEUSZ GERLACH * HENRYK JARZYNA * JERZY KRZYŻANOWSKI
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ * WŁODZIMIERZ J. PROSNIAK
JÓZEF ŚMIGIELSKI * ZENON ZAKRZEWSKI

EDITORIAL COMMITTEE – KOMITET REDAKCYJNY

EUSTACHY S. BURKA (EDITOR-IN-CHIEF – REDAKTOR NACZELNY)
JAROSŁAW MIKIELEWICZ
EDWARD ŚLIWICKI (EXECUTIVE EDITOR – REDAKTOR) * ANDRZEJ ŻABICKI

EDITORIAL OFFICE – REDAKCJA

Wydawnictwo Instytutu Maszyn Przepływowych
Polskiej Akademii Nauk
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. poczt. 621,
☎ (0-58) 46-08-81 wew. 141, fax: (0-58) 41-61-44,
e-mail: esli@imppan.imp.pg.gda.pl

ISSN 0079-3205

Chronicle – Kronika

An early contribution of W. Natanson into the development of the idea of extended thermodynamics during the period of 1896-1904 is presented in the *Chronicle*. Particular attention is paid to the reconstruction of the mathematical model worked out by Natanson. As a final result, two yet unknown points of Natanson's achievements, i.e. the thermokinetic variational principle and coercion hypothesis are rediscovered and revised.

Kronikę poświęcono omówieniu wkładu W. Natansona w rozwój idei rozszerzonej termodynamiki, jaki dokonał się w latach 1896-1904. Szczególnie wiele uwagi poświęcono rekonstrukcji podstaw oryginalnego modelu matematycznego, opracowanego przez Natansona. Dwa nieznane elementy tego modelu, tj. termokinetyczna zasada wariacyjna i hipoteza koercji są ponownie wyprowadzone i uzasadnione.

**Władysław Natanson,
prekursor rozszerzonej termodynamiki**

**Ladislavus Natanson,
the Pioneer of Extended Thermodynamics**

1. Wprowadzenie

Władysław Natanson (1864-1937), wybitny krakowski teoretyk i epistemolog fizyki, znany jest z późniejszych prac, głównie z optyki gazów. Wiedza o wcześniejszych jego pracach, dotyczących termodynamiki nierównowagowej jest niewielka, i to zarówno w krajowych jak i zagranicznych środowiskach. Często też, jak to zwykle bywa z „*myślą niekrzykliwą, a wielką*”, w ogóle się o nim, jako termodynamiku, nie pamięta.

Naszym zamierzeniem jest rewindykacja termodynamicznych prac Natansona dokonana na tle współczesnych, kończących wiek XX-ty, koncepcji badawczych termodynamiki. Naszą tezę, do której pragniemy czytelnika przekonać, jest nieznanym dotychczas fakt, że profesor Natanson był pionierem podejścia do termodynamiki, które dziś znane jest pod nazwą *rozszerzona termodynamika* [1, 2].

Z analizy oryginalnych prac Natansona wynika iż był on świadom tego, że pracuje w dziedzinie *odrębnej* od termostatyki i termodynamiki. Zjawiska, które nie są ani całkowicie odwracalne ani całkowicie dysypujące energię, podlegają prawom dziedziny, którą Natanson nazwał **TERMOKINETYKĄ**¹, a któremu to pojęciu, nie bacząc na semantyczne różnice, odpowiada dzisiejsze anglosaskie **EXTENDED**

¹patrz Natanson [20]: *Oblicze natury*, str. 49, [26, str. 461]

THERMODYNAMICS. Nazwę *termokinetika* prawdopodobnie zaczerpnął Natanson z kinetycznej teorii gazów. Może być ona określona jako nauka o cieple, która swe matematyczne korzenie ma w kinetycznej teorii gazów, i to zarówno tej w wersji Maxwella [3] jak i Boltzmann [4].

Naszą analizę rozpoczynamy od przypomnienia tych istotnych elementów termodynamiki, na których tle będą wyraźnie widoczne oryginalne osiągnięcia W. Natansona. Przejdziemy, następnie, do prezentacji motywacji dla których Natanson podjął swe badania. Dalej, zrekonstruujemy matematyczny model *termokinetiki* zawarty w czterech głównych termokinetycznych pracach Natansona [22, 23, 26, 28]. Punktem kulminacyjnym analizy jest pierwsza zasada wariacyjna rozszerzonej termodynamiki [23] nie mająca po dziś dzień współczesnego odpowiednika. Osobiste refleksje autorów dotyczące niektórych meandrów w rozwoju rozszerzonej termodynamiki zakończą ten esej.

Chcemy podkreślić, że zadanie jakie sobie i czytelnikowi stawiamy jest niezwykle i jedyne w swoim rodzaju. Niecodziennie spotykamy bowiem dzieło pojedynczego człowieka mające już formę rozwiniętą i kompletną, które prawie po stu latach zostaje, w wielkim zbiorowym wysiłku, powtórzone. Jednakże już przy pomocy zupełnie innych narzędzi, innych metod badawczych i innej sytuacji fizyki eksperymentalnej. Będziemy się starali przekonać czytelnika, iż mimo upływu stu lat i ponownego odkrycia przez rozszerzoną termodynamikę wielu ważnych elementów teorii to dwa główne jej elementy: termokinetyczna zasada wariacyjna i hipoteza o współlistnieniu między inercją a koercją² są jeszcze wciąż dla współczesnych badaczy nieznane. Ze zwykłej analizy dat wynika, że w tym przypadku geniusz Natansona wyprzedził nas równo o 100 lat.

2. Status rozszerzonej termodynamiki

Nauka ta powszechnie uważana jest za dyscyplinę młodą, została odkryta, rozwinięta i ugruntowana w ostatnich dwóch dziesięcioleciach przez takich badaczy jak I. Müller, G. Lebon, D. Jou, J. Casas-Vazques, L. S. Garcia Colin i inni. Dynamiczny i spontaniczny wzrost wiedzy i zasięgu tej nowej gałęzi teorii pola spowodował semantyczny bałagan, który profesor J. Kestin określił swego czasu³ jako „*termodynamiczną wieżę Babel*”. Obecność w literaturze przedmiotu zbyt wielu pojęć, które czasami w przeszłości używano w innym kontekście, stwarza zasadną trudność we właściwej percepcji rozszerzonej termodynamiki. Polski czytelnik miał okazję zetknąć się z falowymi równaniami konstytutywnymi już w pracach Szaniawskiego [5], Kaliskiego [6], Madejskiego [7], a ostatnio w interesującej monografii Sieniutycz [8]. Stąd też posiada on, prawdopodobnie, własną opinię w tej sprawie. Można przypuszczać, że jest to mało pozytywna opinia. Każdy termodynamik dostrzeże, że już w samej nazwie *extended thermodynamics*

²temu zagadnieniu poświęcony jest esej pt. *Inercja i Koercja; dwa podstawowe pojęcia ogólne w teorii zjawisk fizycznych*, str. 35-50 [20]

³J. Kestin [9] (1993)

jej twórcy zadbali o wyrażenie matematycznych różnic, które dzielą tę wiedzę od klasycznej nierównowagowej termodynamiki. Nie zadbali jednakże o podkreślenie jakościowo nowej sytuacji fizycznej. Tak oto na przykład, współcześni weterani rozszerzonej termodynamiki [2, str.41] nieudolnie wprowadzają czytelnika w istotę rzeczy:

„*Naszym zadaniem jest przedstawić teorię, która wykracza poza klasycznie sformułowaną termodynamikę. Czynimy to poprzez poszerzenie przestrzeni podstawowych zmiennych niezależnych o nowe zmienne nierównowagowe występujące w równaniach bilansu. Następnie proponujemy równania konstytutywne dla tych nierównowagowych strumieni, ...etc.*”.

Powstaje zasadne pytanie czytelnika zniechęconego poszerzonymi przestrzeniami, czy aby rozszerzona termodynamika nie jest nieudolnym tworem matematyków zafascynowanych pewną formalną możliwością. Czy ta dziedzina opisuje rzeczywiście nowe zjawiska nie ujmowalne w zeszytniałe ramy klasycznej termodynamiki. Pytanie w takim duchu skierował J. Kestin do G. Lebona [10] pragnąc widocznie aby ten odwołał się do nowych zjawisk fizyki występujących w materii skondensowanej, miast dalszego szermowania argumentem rozszerzonych przestrzeni. Okazuje się jednak, że najlepszą odpowiedź na to pytanie znajdujemy nie w pośpiechu napisanych monografiach wybitnych autorów [1, 2], ale w eseju samego Natansona zatytuowanym *Inercja i Koercja; dwa pojęcia ogólne w teorii zjawisk fizycznych*. I to do studiowania niego właśnie chcemy czytelnika zachęcić⁴.

Trzeba podkreślić jednakże, że z punktu widzenia doświadczeń związanych z matematycznym modelowaniem równań konstytutywnych (lub równań stanu) zasięg rozszerzonej termodynamiki jest dość precyzyjnie wyznaczony. W ogólnej teorii równań konstytutywnych rozszerzona termodynamika jest szczególnym przypadkiem zajmującym się modelowaniem zjawisk, które wykazują tzw. słabą nielokalność w czasie. Aby opisać słabą nielokalność w czasie wystarczy użyć pierwszej pochodnej po czasie w równaniach ewolucyjnych na strumień masy, pędu, ciepła oraz strumień prądu elektrycznego. Oczywiście, nie jest też szczytem abstrakcji wyobrazić sobie materiał silnie nielokalny (druga pochodna) w czasie, czy też materiał słabo nielokalny w przestrzeni. Wszystkie te fenomenologiczne modele materiałów podpadają, ostatecznie pod teorię materiałów nielokalnych – znaną zapewne czytelnikom 4 tomowej *Continuum Physics* wydanej pod redakcją Eringeną.

Trudności dostarcza raczej niezwykła różnorodność sytuacji fizycznych, w których równania konstytutywne słabo nielocalne w czasie są używane. Przykładowo,

⁴ „Bez lepkości, bez oporów, bez tarcia, bez rozluźnienia, zmiękczenia, rozplątnięcia się, bez zwątlenia i ujednolajnienia budowy, bez jej zupełnego niekiedy skruszenia, bez przewodnictwa, dyfuzji, rozcieńczenia, bez zwichrzenia, skłócenia, zmieszania co było rozdzielne, bez wessania, pochłonięcia, przeobrażenia, przerobienia, rozsypania lub rozproszenia energii, bez obniżenia się sprawności i gotowości do pracy – nie ma na ogół, oprócz kilku może wyjątków, zjawisk w Naturze. Takie są procesy nieodwracalne, niepowrotne strony lub oblicza zjawisk, niekiedy drobne przymieszki, zakłócenia podrzędne, spadające nawet do zupełnej nicości, niekiedy przeciwnie żywioły główne, górujące nad resztą zjawiska”, Natanson [20], str. 24

rozszerzone równanie konstytutywne Ohma⁵

$$\tau \frac{d}{dt} \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_e = \kappa \mathbf{E} = \kappa \text{grad} \varphi \quad (1)$$

o dodatkowy człon zawierający elektryczny czas relaksacji τ było wynalezione jeszcze przed pracą Maxwella [12]. Użył je W. Thompson do wprowadzenia tzw. równania telegrafistów opisującego efekty powstające w kablu telefonicznym przeziętym przez Atlantyk. Równanie (1) było badane, z różnym skutkiem, m.in. przez Boussinesqa, Heaviside'a, Poincaré'go, Picarda, Birkelanda, Voigta wcale nie z punktu widzenia rozszerzonej termodynamiki. Odegrało ono jeszcze raz poważną rolę gdy, po odkryciu nadprzewodnictwa, posłużyło Londonowi do sformułowania fenomenologicznego modelu nadprzewodnictwa elektrycznego. Prawdopodobnie dostarczyło ono impulsu badawczego, S. Sieniutyczowi, który wykreował ostatnio pojęcie nadprzewodnictwa cieplnego [8]. Matematycznie, nadprzewodnictwo odpowiada sytuacji gdy drugi człon w równaniu (1) wypada i transport, który ono opisuje, staje się bezprzeszkodowy, nadprzewodzący.

Zjawiska cieplne mają swoją autonomiczną historię⁶ daleko wykraczającą poza kinetyczną teorię gazów Maxwella czy tzw. hiperboliczne równania Maxwella-Cattaneo. Niektóre fakty mogą być nawet szokujące dla czytelnika nieobezanego w meandrach historii termodynamiki. Okazuje się bowiem, że falowe modele transportu ciepła były powszechnie akceptowanym paradygmatem w latach 1830-1851, czyli jeszcze przed ustanowieniem przez Rankine'a [13] współcześnie obowiązującej interpretacji ciepła, temperatury, entropii etc. Dzisiejsza rozszerzona termodynamika pamiętać nie raczy⁷ o tym wczesnym dorobku, pozostawiając sobie otwartą furtkę do nadużywania słowa *new*.

Krótkotrwałość falowych modeli ciepła⁸ wiąże się z pewnego rodzaju sytuacją dyskomfortu jaka powstała po odkryciu prawa zachowania energii. Wyjściem dla wszystkich był model Rankine'a tak przekonujący i sprawny, że skutecznie pozwolił zapomnieć o dziedzictwie falowej teorii ciepła.

Pracę Maxwella [12] z 1867 r. traktuje się jako „*mgliste początki*” rozszerzonej termodynamiki. Współcześni weterani odwołują się do niej chętnie zwłaszcza wtedy gdy im brak argumentów. Ukrywają oni wtedy własną ignorancję pod stylistyczną figurą: „*Już Maxwell w 1867 podał, że...*” wkładając często w usta Maxwella opinie, których nigdy nie wypowiedział. Praca Maxwella zawiera kompletną strukturę logiczną rozszerzonej termodynamiki, w miarę kompletne wyprowadzenia i podstawy oraz główne, do dziś niezmienione, wnioski fizyczne. Fizycy

⁵ w równaniu tym oznaczono: $\mathbf{j}_e$ – wektor strumienia gęstości prądu, $\mathbf{E}$ – wektor pola elektrycznego, κ – współczynnik przewodnictwa właściwego, φ – potencjał oraz przez $\text{grad} \varphi$ – operator brania przestrzennego gradientu

⁶ S. Brush, [17] (1970)

⁷ Wyjątkiem jest praca Grmeli i Teichmanna [18].

⁸ Falowa teoria ciepła powstała w opozycji do kalorycznej teorii ciepła. Jej pionierem jest A. M. Ampère. Wśród weteranów tego podejścia wymienić: G. Lamé'go, D. Brewstera, J. Forbesa, W. Westa, R. Hare'go, J. Johnsona, C. C. Dersona, A. Baumgarthera i wielu innych, o których pamięta tylko historia termodynamiki.

są na ogół złymi historykami fizyki⁹ i dlatego pozwalamy sobie na przypuszczenie, że jedynymi osobami, które przestudiowały Maxwella jest Kirchhoff [14] i Natanson [19]. Ostatnie rozdziały książki Kirchhoffa były znane również Natansonowi, który kilkakrotnie się do nich odwołuje. Stan wiedzy młodego Natansona, jego zrozumienie i interpretacja prac Poissona, Maxwella, Boltzmann, Kirchhoffa najlepiej uwidacznia się w jego pierwszej książce zatytułowanej *Wstęp do Fizyki Teoretycznej* [19]. Będzie dla nas wygodnym przyjąć, że od tego punktu rozpoczyna się oryginalny wkład Natansona w rozwój rozszerzonej termodynamiki¹⁰.

3. Motywacje Natansona

Podział zjawisk na zwrotne (odwracalne) i nieodwacalne (dysypujące) był fundamentalnym faktem empirycznym, który Natanson sobie uświadamiał z niezwykłą precyzją. Zdawał sobie również sprawę z tego jak silnie zjawiska odwracalne i nieodwracalne są z sobą splecione – pisał o nich bowiem tak [20, str. 21]:

„W przemianach zwrotnych, w odwracalnych podzjawiskach fizycznych różne znane nam postaci energii uczestniczą swobodnie, przybierając coraz inne i nowe wejścia i kształty i z nich na powrót wracając do pierwotnych własności. Lecz pod tą ruchliwą i zmienną chwiejbą wydarzeń, pod tą niejako igraszką Natury kryje się trwała i posępna robota. Odwracalnym podzjawiskom towarzyszą zwykle nieodwracalne, które nie odbywają się wstecz, które nie zmieniają kierunku gdy część odwracalna zjawiska cofa się, zawraca i odbywa się przeciwnie niż przedtem”.

Zjawiska nieodwracalne są wszędzie, występują z różnym natężeniem i znikają do zera w próżni. Toteż według Natansona większość zjawisk podlega grze dwóch czynników – bezwładności i koercji. Termodynamika ma naturalną skłonność do separacji tych dwóch czynników i traktowania zjawisk albo jako wyłącznego wpływu inercji (odwracalna dynamika) albo koercji (np. w pełni nieodwracalny przepływ ciepła, masy, pędu, itd.). Odwołując się do zjawisk cieplnych Natanson zauważa, że Fourier tworząc model przepływu ciepła, założył, że przepływ jest zawsze wprost proporcjonalny do bodźca. *„Jest to myśl bliska prawdy lecz tylko jej bliska. Czynność bodźca polega nie tylko na sprawianiu przepływu; okazuje się ona tem także, że natężenie przepływu nieustannie się zmienia. Ilość przepływającą bodziec nie tylko zmusza do płynięcia; nadto nadaje jej pewien impet”.*

Termokinetyka, według Natansona, zajmuje się unifikacją przewodnictwa cieplnego, dyfuzji materii, lepszego transportu pędu w jeden „dyfuzyjny” model, w którym przepływy ciepła nazywa się dyfuzją energii zaś tarcie wewnętrzne – dyfuzją pędu. Zadaniem termokinetyki jest rozszerzenie pod pewnym względem zwykle pojmowanych zjawisk dyfuzyjnych. Według klasycznych (Fourierowskich) modeli

⁹Wyjątkiem potwierdzającym tę regułę jest Clifford Ambroży III Truesdell, jedyny współcześnie żyjący badacz, który przestudiował około 25 tysięcy oryginalnych artykułów dotyczących XIX-owej teorii pola

¹⁰Spiritus movens działalność Natansona mógł być W. Gąsiewski jego gimnazjalny nauczyciel fizyki, wybitny mechanik i statystyk znany najbardziej z pracy [15]. W. Gąsiewski jest pierwszym przykładem bezrobotnego fizyka tyle, że pod zaborem rosyjskim

dyfuzji wielkości takie jak masa, pęd, energia cieplna rozchodzą się w materialnym kontinuum bez określonej prędkości. Punktem wyjściowym termokinetiki jest traktowanie zjawisk dyfuzyjnych jako *pozostałości*, która trwa po przejściu fali niekoniecznie poruszającej się nieskończenie szybko. Inaczej mówiąc, termokinetika proponuje taką postać modelu dyfuzji (masy, pędu, energii), w której zaburzenia, pozostawiając za sobą „dyfuzyjny ogon”, będą poruszać się ze skończoną prędkością. Jeśli klasyczny Fourierowski model dyfuzji ciepła jest przypadkiem całkowitego rozpraszania energii użytecznej, zaś kraniec przeciwny stanowią zjawiska odwracalne opisane przez termodynamikę, to poszerzony, termokinetyczny model dyfuzji jest przypadkiem częściowo odwracalnym i częściowo dysypatywnym. Według rozszerzonej termodynamiki „czynność bodźca polega nie na samym tylko wytwarzaniu termodynamicznego strumienia lecz nadto i na zmienianiu z biegiem czasu jego natężenia”.

Całkowicie dysypatywne (koercyjne) działanie bodźca ściera się z jego działaniem odwracalnym (inercyjnym). Stosunek tych obu działań definiuje czas reakcji nazywany przez Natansona „czasem zluźniania”¹¹.

4. Rekonstrukcja modelu matematycznego

4.1. Równanie fundamentalne¹³

Zakładamy, że ruch gazu składa się z ruchu jako całości (r. molarney) oraz ruchu jaki miałyby cząsteczki w gazie nieruchomym (r. molekularny)¹⁴

$$\mathbf{u} + \xi = (u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z) + (\xi\mathbf{e}_x + \eta\mathbf{e}_y + \zeta\mathbf{e}_z). \quad (2)$$

Ruch molekularny charakteryzuje się tym, że jego przeciętne $\bar{\xi} = 0$ po całym elemencie kontrolnym $dv = dx dy dz$ zanikają. Oznaczamy przez n ilość cząsteczek w objętości kontrolnej, przez Q dowolną funkcję prędkości $\mathbf{u} + \xi$, przez d/dt operator pochodnej substancjalnej, zaś przez $\delta/\delta t$ operator wyrażający wpływ spotkań lub działań wzajemnych.

Równanie fundamentalne Maxwella¹⁵ ma postać następującą

$$\frac{d}{dt}(\bar{Q}n) + \text{div}(n\bar{Q} \otimes \bar{\xi}) + \text{div}(\mathbf{u})\bar{Q}n = \frac{\delta}{\delta t}(\bar{Q}n) + n\left(\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \mathbf{u}}\right). \quad (3)$$

Niech pierwszą wielkością bilansowaną będzie masa cząsteczki $Q \equiv m$. Wtedy

$$\bar{Q} \otimes \bar{\xi} = \bar{m}\bar{\xi} = 0, \quad \bar{Q}n = \rho, \quad \bar{Q} = m \quad \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad (4)$$

¹¹dzisiejszy odpowiednik „czasu relaksacji” [1,11]

¹³patrz Natanson [19], [21,22], [25]

¹⁴Zachowujemy tu, w większości, oryginalne oznaczenia Natansona takie jak np. składowe $u, v, w, \xi, \eta, \zeta, q_x, q_y, q_z$, itd.

¹⁵Maxwell [12] eq. (73) p. 72

a z równania fundamentalnego (3) otrzymujemy równanie ciągłości:

$$\frac{d}{dt}\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (5)$$

Mnożąc równanie (3) przez m i uwzględniając przy tym równanie ciągłości (5) możemy przekształcić je w następujące wyjściowe równanie fundamentalne¹⁶

$$\rho \frac{d}{dt} \overline{Q} + \operatorname{div}(\rho \overline{Q \otimes \xi}) = \rho \frac{\delta}{\delta t} \overline{Q} + \rho \left(\mathbf{f} \cdot \overline{\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{u}}} \right). \quad (6)$$

Zaznaczmy, że objętość kontrolna dv porusza się z prędkością molarną $\mathbf{u}$ co czyni zasadnym udział pochodnej substancjalnej d/dt w równaniu (6).

4.2. Równanie bilansu pędu

Kładąc w równaniu fundamentalnym (6) za funkcję Q

$$Q = \mathbf{u} + \xi, \quad (7)$$

wraz z¹⁷

$$\overline{Q} = \mathbf{u}, \quad \overline{Q \otimes \xi} = \overline{\xi \otimes \xi}, \quad \frac{\delta}{\delta t} \overline{Q} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{u}} = 1 \quad (8)$$

otrzymujemy następujące równanie bilansu pędu

$$\rho \frac{d}{dt} \mathbf{u} + \operatorname{div}(\rho \overline{\xi \otimes \xi}) = \rho \mathbf{Q}. \quad (9)$$

4.3. Równie bilansu energii

Kładziemy w równaniu fundamentalnym (6)

$$Q = (\mathbf{u} + \xi) \cdot (\mathbf{u} + \xi) = (u + \xi)^2 + (v + \eta)^2 + (w + \xi)^2 \quad (10)$$

i uwzględniając dalej, że

$$\overline{Q} = \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \cdot \xi + \xi \cdot \xi} = \mathbf{u}^2 + \overline{\xi^2} + \overline{\eta^2} + \overline{\zeta^2}, \quad (11)_1$$

$$\overline{Q \otimes \xi} = \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \xi} + \overline{\mathbf{u} \cdot \xi \xi} + \overline{\xi \cdot \mathbf{u} \xi} + \overline{\xi \cdot \xi \xi} = 2\overline{\mathbf{u} \cdot \xi \xi} + \mathbf{q}, \quad (11)_2$$

¹⁶Natanson [26] paragraf 1, rów. 5. W stosunku do odpowiedniego równania Maxwella [12, eq. (75)] Natanson dodatkowo wprowadza człon z siłą $\mathbf{f}$. Rozciągnęliśmy w tym członie zasięg uśredniania w stosunku do Natansonowego oryginału aby uniknąć nieporozumień co do kolejności wykonywania operacji $\partial Q / \partial \mathbf{u}$ – obliczanie tej wielkości wymaga elementarnych wiadomości z różniczkowania funkcji tensorowych względem argumentu tensorowego.

¹⁷znakiem $\otimes$ oznaczyliśmy Gibbsowską operację brania iloczynu diadycznego, $\mathbf{1} = \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$ oznacza tzw. idemfaktory Gibbsa. Operacja dywergencji jest zdefiniowana jako prawostronne zwężenie wzięte na iloczynie diadycznym operatora nabla

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\overline{\rho Q} \otimes \xi) &= \operatorname{div}(\rho \mathbf{q}) + 2\operatorname{div}(\overline{\rho \xi \otimes \xi} \cdot \mathbf{u}) = \\ &= \operatorname{div}(\rho \mathbf{q}) + 2\operatorname{div}(\overline{\rho \xi \otimes \xi} \cdot \mathbf{u}) + 2(\overline{\rho \xi \otimes \xi}) \cdot \nabla \otimes \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (11)_3$$

$$\frac{\delta}{\delta t} \overline{Q} = \frac{\delta}{\delta t} \overline{\xi^2} + \frac{\delta}{\delta t} \overline{\eta^2} + \frac{\delta}{\delta t} \overline{\zeta^2} = 0, \quad (\text{założenie}), \quad (11)_4$$

$$\overline{\rho \mathbf{f} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{u}}} = 2\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}. \quad (11)_5$$

Uwzględniając dalej, że $\overline{\xi \otimes \xi}$ jest miarą symetryczną, zastąpimy gradient prędkości $\nabla \otimes \mathbf{u}$ w (11)₃, poprzez symetryczny tensor w prędkości deformacji $\mathbf{d} = 1/2(\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla)$.

Równanie fundamentalne przyjmuje teraz postać

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt}(\mathbf{u}^2 + \overline{\xi^2}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{q}) + 2\operatorname{div}(\overline{\rho \xi \otimes \xi}) \cdot \mathbf{u} + \\ + 2[\overline{\rho \xi \otimes \xi}] \cdot \mathbf{d} = 2\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (12)$$

Podstawiając w miejsce $\rho \mathbf{f}$ lewą część równania ruchu (9) mamy ostatecznie¹⁸ bilans energii

$$\rho \frac{d}{dt}(\overline{\xi^2}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{q}) + 2\{\overline{\rho \xi \otimes \xi}\} \cdot \mathbf{d} = 0. \quad (13)$$

Strumień ciepła wynika z (11)₂ i jest zdefiniowany jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} = (\overline{\xi \cdot \xi})\xi = (\overline{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2})\xi \mathbf{e}_x + (\overline{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2})\eta \mathbf{e}_y + \\ + (\overline{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2})\zeta \mathbf{e}_z = q_x \mathbf{e}_x + q_y \mathbf{e}_y + q_z \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (14)$$

Zauważmy również, że Q przyjęte w (10) jest równe śladowi wziętemu na diadzie $(\mathbf{u} + \xi) \otimes (\mathbf{u} + \xi)$. Możemy stąd wnioskować, że rezultat identyczny do (13) możemy otrzymać jeśli najpierw podstawimy do równania fundamentalnego $Q = (\mathbf{u} + \xi) \otimes (\mathbf{u} + \xi)$ a następnie weźmiemy ślad. Odnotujemy również, że molekularne prędkości ξ określają strumień pędu $\Pi = \overline{\rho \xi \otimes \xi}$. W szczególności ślad $p = 1/3 \operatorname{tr} \Pi = 1/3 \rho (\overline{\xi^2} + \overline{\eta^2} + \overline{\zeta^2})$ wyraża średnie ciśnienie gazu – będzie ono równe ciśnieniu termodynamicznemu gdy $\overline{\xi \eta} = \overline{\xi \zeta} = \overline{\eta \zeta} = 0$ a wartości $\overline{\xi^2}, \overline{\eta^2}, \overline{\zeta^2}$ nie będą się od siebie różnić. Temperaturę bezwzględną T Natanson wprowadza przy pomocy związku

$$2c_v T = \overline{\xi^2} + \overline{\eta^2} + \overline{\zeta^2} = \overline{\xi^2} = 3 \frac{p}{\rho}. \quad (15)$$

w którym c_v oznacza ciepło właściwe gazu w stałej objętości.

¹⁸Natanson [26] paragraf 2, rów. (4)

4.4. Równanie ewolucji strumienia ciepła

Kolejna wielkość bilansowana jest związana z potrójnym iloczynem diadycznym $(\mathbf{u} + \xi) \otimes (\mathbf{u} + \xi) \otimes (\mathbf{u} + \xi)$ w postaci zwiężenia

$$Q = (\mathbf{u} + \xi) \otimes (\mathbf{u} + \xi) \cdot (\mathbf{u} + \xi). \quad (16)$$

Zależności potrzebne w równaniu fundamentalnym (6) obliczamy następująco:

$$\overline{Q} = \mathbf{u}\mathbf{u}^2 + \mathbf{u}\overline{\xi \cdot \xi} + \overline{\xi \mathbf{u} \cdot \xi} + \overline{\xi \xi \cdot \mathbf{u}} + \overline{\xi \xi \cdot \xi}, \quad (17)_1$$

$$\overline{Q \otimes \xi} = 2\overline{(\mathbf{u} \cdot \xi)\mathbf{u} \otimes \xi} + \overline{\xi^2 \mathbf{u} \otimes \xi} + \overline{\mathbf{u}^2 \xi \otimes \xi} + 2\overline{\mathbf{u} \cdot \xi \xi \otimes \xi} + \overline{(\xi \cdot \xi)\xi \otimes \xi}, \quad (17)_2$$

$$\frac{\delta}{\delta t} \overline{Q} = \mathbf{u} \frac{\delta}{\delta t} \overline{\xi^2} + \frac{\delta}{\delta t} \overline{(\mathbf{u} \cdot \xi)\xi} + \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{q}, \quad (17)_3$$

$$\mathbf{f} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{f} \overline{(\mathbf{u} + \xi)^2} + 2\mathbf{f}[\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \overline{\xi \otimes \xi}]. \quad (17)_4$$

Po podstawieniu do (6) otrzymujemy¹⁹

$$\begin{aligned} & \rho \frac{d}{dt} [(\mathbf{u}^2 + \overline{\xi^2})\mathbf{u} + 2\overline{(\mathbf{u} \cdot \xi)\xi} + \mathbf{q}] + \\ & + \text{div} [2\rho \overline{(\mathbf{u} \cdot \xi)\mathbf{u} \otimes \xi} + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{q} + \rho \mathbf{u}^2 \overline{\xi \otimes \xi} + 2\overline{(\mathbf{u} \cdot \xi)\xi \otimes \xi} + \overline{(\xi \cdot \xi)\xi \otimes \xi}] = \\ & = \rho \frac{\delta}{\delta t} [\overline{\xi^2} \mathbf{u} + 2\overline{(\mathbf{u} \cdot \xi)\xi} + \mathbf{q}] + \rho \mathbf{f}(\mathbf{u}^2 + \overline{\xi^2}) + 2\mathbf{f}[\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \rho \overline{\xi \otimes \xi}]. \end{aligned} \quad (18)$$

Jest to najogólniejsza postać tzw. równań Maxwella-Cattaneo na ewolucję strumienia ciepła $\mathbf{q}$ w przypadku gdy wyjściowym równaniem fundamentalnym jest równanie (6). Niestety równanie to zawiera dalsze nowe niewiadome stąd też wymagane są uzupełniające, ale już algebraiczne, równania domknięcia.

4.5. Równanie ewolucji strumienia pędu

Kładąc

$$Q = (\mathbf{u} + \xi) \otimes (\mathbf{u} + \xi) \quad (19)$$

w równaniu (6) oraz uwzględniając przy tym, że

$$\overline{Q} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \overline{\xi \otimes \xi}, \quad (20)_1$$

$$\overline{Q \otimes \xi} = \mathbf{u} \otimes \overline{\xi \otimes \xi} + \overline{\xi \otimes \mathbf{u} \otimes \xi} + \overline{\xi \otimes \xi \otimes \xi}, \quad (20)_2$$

¹⁹Natanson [26], paragraf 3, rów. (2). W oryginale równanie to zajmuje 33 wiersze. W stosunku do swojego wcześniejszego rozwiązania [22] paragraf 2, rów. (10) Natanson podaje kompletną postać uzupełnioną o pięć dodatkowych członów oznaczonych przez, $(n) = 1, 2, 3, 4, 5$, w równaniu (18)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \overline{Q \otimes \xi}) &= \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \Pi + \Pi \otimes \mathbf{u} + \overline{\rho \xi \otimes \xi \otimes \xi}) = \\ &= \operatorname{grad} \Pi \cdot \mathbf{u} + \Pi \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div}(\Pi) \otimes \mathbf{u} + \Pi \operatorname{grad}^T \mathbf{u} + \operatorname{div}(\overline{\rho \xi \otimes \xi \otimes \xi}), \end{aligned} \quad (20)_3$$

$$\rho \frac{\delta}{\delta t} \overline{Q} = \frac{\delta}{\delta t} \Pi, \quad \Pi \equiv \overline{\rho \xi \otimes \xi}, \quad (20)_4$$

$$\rho(\mathbf{f} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} Q) = \rho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{f} + \mathbf{f} \otimes \mathbf{u}). \quad (20)_5$$

otrzymamy następujące równanie ewolucyjne na strumień pędu Π

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Pi + \operatorname{grad} \mathbf{u} \Pi + \Pi \operatorname{grad}^T \mathbf{u} + \operatorname{div}(\overline{\rho \xi \otimes \xi \otimes \xi}) + \\ + \mathbf{u} \otimes (\rho \partial_t \mathbf{u} + \rho \operatorname{grad}^T \mathbf{u} + \operatorname{div} \Pi) + (\rho \partial_t \mathbf{u} + \rho \operatorname{grad}^T \mathbf{u} + \operatorname{div} \Pi) \otimes \mathbf{u} = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \Pi + \rho(\mathbf{u} \otimes \mathbf{f} + \mathbf{f} \otimes \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (21)$$

Zakładając, że równania bilansu pędu (9) będą spełnione to z (21) możemy otrzymać ściśle równanie ewolucyjne na strumień Π . Rozdzielmy wpierw gradient prędkości na część symetryczną $\mathbf{d} = \mathbf{d}^T$ i antysymetryczną $\mathbf{w} = -\mathbf{w}^T$

$$\operatorname{grad} \mathbf{u} = \mathbf{u} \otimes \nabla = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla) + \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \nabla - \nabla \otimes \mathbf{u}) = \mathbf{d} + \mathbf{w}. \quad (22)$$

Otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi + (\operatorname{grad} \Pi) \mathbf{u} + (\mathbf{d} + \mathbf{w}) \Pi + \Pi (\mathbf{d} + \mathbf{w}^T) + (\operatorname{div} \mathbf{u}) \Pi + \operatorname{div}(\overline{\rho \xi \otimes \xi \otimes \xi}) = \frac{\delta}{\delta t} \Pi. \quad (23)$$

Jest to kompletne równanie ewolucji strumienia pędu oparte na równaniu fundamentalnym (6). Jednakże, tylko pięć spośród sześciu składowych równania (23) jest niezależnych, bowiem równanie bilansu energii (13) uczestniczy w (23) w sposób uwikłany. Dzieje się tak ponieważ $\operatorname{tr} \Pi = \rho(\overline{\xi^2} + \overline{\eta^2} + \overline{\xi^2})$ oraz ma miejsce założenie (11)₄ o tym, że ślad $\operatorname{tr}(\frac{\delta}{\delta t} \Pi) \equiv 0$ jest niedysypatywny. Uwzględniając dalej, że:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{w} \Pi) = \operatorname{tr}(\Pi \mathbf{w}^T) = 0, \quad \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$C_{12}[\operatorname{div}(\overline{\rho \xi \otimes \xi \otimes \xi})] = \operatorname{div}[\overline{\rho(\xi \cdot \xi) \xi}] = \operatorname{div}(\rho \mathbf{q})$$

możemy pokazać, że ślad równania (23) jest identyczny z wcześniej wyprowadzonym równaniem energii (13).

Natanson był świadomy tego faktu toteż zaproponował wydzielone równania ewolucyjne na bezśladowy strumień pędu P^{20} i ciśnienie p

$$\mathbf{P} = \Pi - \frac{1}{3} p \mathbf{1}, \quad p = \operatorname{tr}(\overline{\rho \xi \otimes \xi}) \quad (24)$$

²⁰Natanson [26] paragraf 7, rów. (2), oraz [25] [31] [32]

w następującej postaci²¹:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{P} + [(\mathbf{d} + \mathbf{w})\Pi + \Pi(\mathbf{d} + \mathbf{w}^T) - \frac{2}{3}\text{tr}(\Pi\mathbf{d})] + \\ + (\text{div}\mathbf{u})\mathbf{P} + \text{div}[\rho(\xi \otimes \xi - \frac{1}{3}\xi^2\mathbf{1}) \otimes \xi] = \frac{\delta}{\delta t}\mathbf{P}. \end{aligned} \quad (25)$$

4.6. Równanie dyfuzji masy

Natanson rozpatruje tylko szczególny przypadek równań Maxwella, gdy gaz o gęstości ρ , prędkościach: głównej $\mathbf{u}$ i pobocznej ξ wnika do nieruchomego ciała stałego o gęstości ρ_s i o charakterystycznej stałej dyfuzji A . Strumień dyfuzji $\mathbf{j} = \rho\mathbf{u}$ spełnia równanie ewolucji analogiczne do równania (9) mianowicie²²:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j} - \frac{\delta}{\delta t}\mathbf{j} + \text{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \rho\overline{\xi \otimes \xi}) = \rho\mathbf{f}_m \quad (26)$$

4.7. Hipoteza koercji²³

Źródłem nieodwracalności w równaniu fundamentalnym (6) jest pochodna $\delta/\delta t\overline{Q}$. W statystycznym podejściu Boltzmanna wielkość ta opisywana jest odpowiednią całką zderzeń. Według Natansona, podejściem zgodnym z fenomenologią będzie hipoteza koercji zezwalająca na następujące przybliżenie w równaniach (17), (20), (26)

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t}\mathbf{q} &= -\frac{\mathbf{q}}{\tau_q}, \\ \frac{\delta}{\delta t}\Pi &= -\frac{\Pi}{\tau_\Pi}, \\ \frac{\delta}{\delta t}\mathbf{j} &= -\frac{\mathbf{j}}{\tau_j}, \end{aligned} \quad (27)$$

gdzie τ_q, τ_Π, τ_j są właściwymi dla dyfuzji ciepła, pędu i masy czasami zluźniania (relaksacji).

4.8. Przewodzenie ciepła w nieruchomym przewodniku

Założymy, że $\mathbf{u} = 0$ oraz $\frac{\partial}{\partial t}\rho = 0$. Równanie ewolucji strumienia ciepła $\mathbf{q}$ (18) wraz z hipotezą koercji (27)₁ upraszcza się do

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{q}) + \frac{1}{\tau_q}\mathbf{q} + \rho\mathbf{R} = 0. \quad (28)$$

²¹Natanson [26], paragraf 7, rów. (5) (6) (10). Nasze równanie (25) nie ma identycznej postaci z trzema skalarnymi równaniami Natansona gdyż nieco inaczej definiuje on człon pod znakiem dywergencji

²²Natanson [26], paragraf 6, rów. (4), $\mathbf{f}_m$ jest siłą termodynamiczną określoną przez gradient ρ

²³Opisana ona jest w szeregu pracach Natansona poczynwszy od [23] poprzez [25-28], a skończywszy na eseju [20]

Równanie to po podstawieniu do równania bilansu energii (13) daje hiperboliczne równanie przewodnictwa ciepła

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\xi}^2 + \frac{1}{\tau_q} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\xi}^2 - \operatorname{div}(\rho \mathbf{R}) = 0, \quad (29)$$

w którym temperatura bezwzględna jest dana równaniem (15). Człony związane z dywergencją wymagają równań domknięcia, w przeciwnym razie układ byłby niedookreślony. Najprostszym algebraicznym domknięciem na $\mathbf{R}$, które Natanson przyjmuje za Maxwelllem jest²⁴

$$\mathbf{R} = \frac{10}{3} c_v \mathbf{I} \operatorname{grad} T, \quad (30)$$

gdzie $\mathbf{I} = \bar{\xi}^2 \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \bar{\eta}^2 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \bar{\xi}^2 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$ jest diadyczną miarą termicznego oporu.

4.9. Schemat logiczny termokinetiki

Kończąc swą pracę na temat uogólnionej teorii dyfuzji masy, pędu i energii [26] Natanson przedstawia schemat ogólny rozszerzonej termodynamiki, dla każdej, dowolnej wielkości bilansowej Q i odpowiadającego jej strumienia f oraz strumienia F odpowiadającego strumieniowi f .

Są to:

– równania bilansu

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{Q} + \operatorname{div} f = 0, \quad (31)$$

– równania ewolucji

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \frac{1}{\tau_f} f + F = 0, \quad (32)$$

– algebraiczne równania domknięcia

$$F = a^2 \operatorname{grad} \bar{Q}. \quad (33)$$

Złożone razem dają równanie zasadnicze na $\bar{Q}$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{Q} + \frac{1}{\tau_f} \frac{\partial}{\partial t} \bar{Q} - a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} \bar{Q}) = 0. \quad (34)$$

W zależności od tego czy wielkość bilansowana jest skalarem, wektorem czy diadą drugiego rzędu ilość składowych równania (34) jest odpowiednio równa jeden, trzy i sześć. Gdy człon z drugą pochodną zanika wtedy zjawisko jest *całkowicie rozpraszające*. Jeśli natomiast $\tau_f = \infty$ to energia użyteczna bodźca nie rozprasza się wcale i gromadzi się tworząc „*impet płynącej ilości Q*”. Mówimy wówczas o zjawisku odwracalnym. Jednakże w rzeczywistych zjawiskach czas relaksacji τ_f nie jest ani zerem ani nieskończonością toteż oba aspekty: koercja i inercja mają w nim swój permanentny udział.

²⁴Natanson [26] paragraf 4 rów. (12)

4.10. Zasada wariacyjna termodynamiki

W klasycznej teorii pola zasada Hamiltona jest nadrzędną zasadą wariacyjną, której podlegają wszystkie zjawiska odwracalne. W roku 1871 termostatyka została wyrażona w terminach zasady Hamiltona przez węgry Szily'go [16]. Jego rozwiązanie zastosowane z powodzeniem przez Helmholtza i J.J. Thomsona dało asumpt Natansonowi do poszukiwań zasady wariacyjnej obejmującej zarówno termostatykę (zjawiska całkowicie odwracalne) jak i termodynamikę (zjawiska całkowicie dysypatywne). Punkt wyjściowy Natansona jest taki sam jak jego poprzedników: termokinetykę należy wpierw zapisać w terminach mechaniki analitycznej Lagrange'a definiując odpowiednie zmienne uogólnione q_α i uogólnione siły Lagrange'a R_α $\alpha = 1, 2, \dots, k$.

Zasada termokinetyczna stwierdza, że pomiędzy $t = t_0$ a $t = t_1$ zjawiska odbywają się tak, iż warunek²⁵

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \{ \delta T - \delta U + R_\alpha \delta q_\alpha + \delta Q \} = 0 \quad (35)$$

jest spełniony. Obejmuje on wariacje energii kinetycznej δT , energii wewnętrznej δU , pracy oraz ilości ciepła δQ przez układ pochłoniętej. Ponieważ $\delta Q = \delta^0 Q + \delta' Q$ dzieli się na ciepło skompensowane i nieodwracalne to zasada (35) pretenduje do opisanego zjawisk zarówno częściowo odwracalnych jak i częściowo dysypatywnych. Aby to było możliwe Natanson wyraża części nieodwracalne poprzez funkcje dysypacyjną Rayleigha Φ

$$\delta' Q = 2\Phi \delta t, \quad (36)$$

sprowadzając ją tym samym do tzw. zjawisk pseudodynamicznych. Kluczem termokinetycznej zasady jest hipoteza koercji zakładająca, że zmiana $\frac{\delta \Phi}{\delta t}$ jest proporcjonalna do chwilowej wartości Φ . Jeśli τ jest pewnym charakterystycznym czasem zluźniania odpowiadającym temu co aktualnie zawiera Φ to²⁶

$$\frac{\delta \Phi}{\delta t} = -\frac{2\Phi}{\tau} \quad (37)$$

zachodzi w sąsiedztwie stanu równowagi. Równanie (37) nazywa Natanson „*równaniem zwalniania*” i okazuje się ono sprawdzać w przypadku lepkiego przepływu cieczy Naviera-Stokesa, dyfuzji masy, przepływu prądu elektrycznego oraz przepływu ciepła.

Praca [23] zawiera wiele jeszcze niezinterpretowanych, elementów i jej pełna analiza jest wciąż godna uwagi. Pomocna w studiach nad tą pracą byłaby praca następna [24], w której Natanson podał zastosowania zasady termokinetycznej w teorii przejść fazowych. Praca [24] sama w sobie jest również godna rewindykacji

²⁵Natanson [23] paragraf 2 rów. (1)

²⁶Natanson [23] paragraf 14 rów. (8)

zawiera bowiem rozszerzenie zasady wariacyjnej Gibbsa na przypadek ogólniejszy.

Cykl prac Natansona, podpadający pod zakres badań nad rozszerzoną termodynamiką, obejmuje wiele jego prac z lat 1895-1904. Koncentrowały się one głównie na szczegółowych zagadnieniach.

Na przykład, prace [29,31-34] dotyczą teorii płynów lepkich z relaksacją; zagadnienia małych ruchów nałożonych na skończone²⁷ w płynach z relaksacją poświęcona jest praca [27]. Praca [30] dotyczy Lagrange'owskiego opisu²⁸ równań ewolucyjnych (23), praca [28] opisu przewodzenia ciepła w płynach poruszających się. Wspólnym elementem startowym tych prac jest zunifikowany opis zjawisk częściowo-odwracalnych, częściowo nieodwracalnych, hipoteza koercji oraz Maxwellowskie równanie fundamentalne (6).

5. Epilog

Dorobek Natansona w dziedzinie rozszerzonej termodynamiki obejmuje 14 prac, które oprócz tego, że ukazały się w języku ojczystym, posiadały też wersję angielską (*Phil. Magazine*), niemiecką (*Zf. für Phys. Chem.*), francuską (*Bull. Inter. l'Academie de Sci. et de Lettres de Cracovie*). Mimo tak dużego rozpowszechnienia ich znajomość była i jest znikoma. Zwłaszcza dziwi brak zainteresowania ze strony teoretyków, którzy w tym czasie tzn. na przełomie wieków, wkładali wiele wysiłku w przebudowę modeli jednowymiarowych na trójwymiarowe.

Wśród polsko-języcznych uczonych prace Natansona najdokładniej przestudiował Stanisław Zaremba, profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego, współtwórca podstaw polskiej szkoły matematycznej. Stawiał on Natansonowi dwa zarzuty [35], z których jeden okazał się być słuszny. Chodzi mianowicie o zarzut, że równania ewolucyjne (np. rów. (23) i (18)) strumieni masy, pędu i ciepła nie spełniają pierwszej zasady dynamiki Newtona. Przez wiele lat uważano, iż powodem tego stanu rzeczy nie jest równanie fundamentalne (6) lecz liczne uproszczenia arbitralnie dokonywane podczas wyprowadzeń [37]. Dopiero stosunkowo niedawno Ingo Müller wykazał [38], że odpowiedzialność za ten istotny mankament ponosi samo równanie fundamentalne (6). Zaproponował on również modyfikację równania (6) tak aby spełniało pierwszą zasadę dynamiki. Jego rozwiązanie nazywa się w literaturze „objective but frame-dependent”. Jednakże ostatecznie to rozwiązanie również nie może być akceptowalne bowiem nie spełnia tzw. zasady kontrawariantności wymagającej aby wszystkie równania fizyki (w tym również równania konstytuujące materiał) były niezależne od układu odniesienia.

Inną drogą niż Müller poszedł Zaremba [35]. Zaproponował on a'prioryczną modyfikację równania ewolucji strumienia pędu, która spełniała pierwszą zasadę dynamiki i jednocześnie nie była zależna od układu odniesienia. Było to w roku

²⁷Równania falowe z charakterystycznymi dwoma prędkościami dźwięku (zamrożoną i równowagową) i charakterystyczną ich budową są wspólne dla wielu zagadnień. M. in. A. Szaniawski [5] uzyskał równanie analogiczne dla zagadnienia propagacji dźwięku w przepływie pęcherzykowym.

²⁸To podejście odkrył niezależnie Grmela i Teichmann [18].

1903, na dwa lata przed tym jak odkryto, że pierwszą zasadę dynamiki winny również spełniać równania elektrodynamiki Maxwella. Zaremba „nie poszedł za ciosem” i o odkryciu z 1905 roku, nazwanym później szczególną teorią względności, miał swój własny pogląd. Dał temu wyraz wiele lat później gdy w 1927 opublikował [36] swoją własną interpretację elektrodynamiki Maxwella. Praca ta od razu została uznana za wsteczną a podejście mające swe źródła w pracy z 1903 roku za niewłaściwe. Toteż, możemy przypuszczać, że obaj autorzy: Natanson i Zaremba pozostawali w sytuacji dyskomfortu chociaż z zupełnie innych powodów.

Mamy nadzieję, że wyniki badań wybitnego polskiego uczonego Władysława Natansona w dziedzinie rozszerzonej termodynamiki, mimo że naszkicowane po bieźnie w niniejszej pracy, pozwalają zaliczyć profesora Natansona do pionierów tej gałęzi termodynamiki. Sądźmy na podstawie przeprowadzonych wywodów, że jego nazwisko winno się znaleźć w gronie takich luminarzy termodynamiki rozszerzonej jak D. Poisson, G. Piola, J. Clerk Maxwell, G. R. Kirchhoff czy P. Duhem.

Literatura

- [1] Müller I., Ruggeri T.: *Extended thermodynamics* in: Springer Tracts. Natur. Phil., ed. C. Truesdell, 37 (1993).
- [2] Jou D., Casas-Vázquez J., Lebon G.: *Extended irreversible thermodynamics*, Springer-Verlag, Berlin (1993).
- [3] Lebon G., Jon D., Casas-Vázquez J.: *Questions and answers about a thermodynamic theory of the third type*, Contem. Phys. 33 (1992), 41-51.
- [4] Garcia Colin L.: *Extended non-equilibrium thermodynamics, scope and limitations*, Rev. Mexicana de Fisica 34 (1988), 344-366.
- [5] Szaniawski A.: *Rozchodzenie się małych zaburzeń w mieszaninie cieczy z pęcherzykami gazu*, Rozpraw. Inż. 71 (1957), 269-329.
- [6] Kaliski S.: *Falowe równanie przewodnictwa cieplnego*, Biuletyn WAT 24 (1965), 25-42.
- [7] Madejski J.: *Temperaturowe fale relaksacyjne w gazach*, Sym. Dynam. Konstrukcji, Rzeszów 47-52 (1968).
- [8] Sieniutycz S.: *Conservation laws in variational thermo-hydrodynamics*, Kluwer Academic Rub. Dordrecht (1994).
- [9] Kestin J.: *Thermodynamics (an Essay)* in: Zagadnienia Maszyn Przepływowych, Proc. of Conf. on 90th Anniversary of Robert Szewalski, ed. E. Burka, Gdańsk (1993), 319-34.

- [10] Kestin J.: *List do Profesora G. Lebona*, Brown University, Dec. 2 1992 (informacja prywatna).
- [11] Bilicki Z.: *Koncepcja parametrów wewnętrznych na tle tendencji w termodynamice procesów nieodwracalnych i jej zastosowanie w przepływach dwufazowych*, Zeszyt Nauk. IMP PAN 421 (1994) 1-26.
- [12] Clerk Maxwell J.: *On the dynamical theory of gases*, Phil. Trans. Royal Soc. London 157 (1867), 49-88.
- [13] Rankine W. T. M.: *On the centrifugal theory of elasticity as applied to gases and vapours*, Phil. Mag. 2 (1851), 509-542.
- [14] Kirchhoff G.R.: *Vorlesungen über die Theorie der Wärme*, 1894.
- [15] Gąsiewski W.: *O naturze ruchu wewnątrz elementu płynnego*, Pamiętnik Akad. Krakow. 17 (1890), 135-142.
- [16] Średniawa B.: *History of theoretical physics at Jagellonian University of Cracow in XIX th Century and in the first half of XX th Century*, Zeszyty Naukowe UJ, Prace Fizyczne 24 (1985), 1-238.
- [17] Brush S.G.: *The wave theory of heat*, The British J. Hist. Sci. 5 (1970), 145-167.
- [18] Grmela M., Teichmann J.: *Langrangian formulation of the Maxwell-Cattaneo hydrodynamics*, Int. J. Engng Sci. 21 (1983), 297-313.
- [19] Natanson W.: *Wstęp do Fizyki Teoretycznej*, Warszawa, 1890, 1-457.
- [20] Natanson W.: *Oblicze Natury*, Druk. Anczyca i spółki, Kraków, 1924, 1-231.
- [21] Natanson W.: *O znaczeniu kinetycznym funkcji dysypacyjnej*, Rozprawy Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Akademii Umiejętności w Krakowie (RWMP) 29 (1894), 171-180.
- [22] Natanson W.: *O energii kinetycznej ruchu ciepła i o funkcji dysypacyjnej odpowiedniej*, RWMP 27 (1895), 273-278.
- [23] Natanson W.: *O prawach zjawisk nieodwracalnych*, RWMP 30 (1896) 309-336.
- [24] Natanson W.: *O wpływie ruchu na stany skupienia*, RWMP 35 (1899) 220-246.
- [25] Natanson W.: *O prawach tarcia wewnętrznego*, RWMP 41 (1901), 223-240.
- [26] Natanson W.: *O prawach zjawisk dyfuzyjnych*, RWMP 41 (1901), 447-461.

- [27] Natanson W.: *O rozchodzeniu się małych ruchów w płynach lepkich*, RWMP 42 (1902), 28-44.
- [28] Natanson W.: *O przewodnictwie cieplnym poruszającego się gazu*, RWMP 42 (1902), 70-77.
- [29] Natanson W.: *O funkcji dysypacyjnej płynów lepkich*, RWMP 42 (1902), 399-404.
- [30] Natanson W.: *O zastosowaniu równań Lagrange'a w teorii tarcia wewnętrznego*, RWMP 43 (1903), 179-194
- [31] Natanson W.: *O stopniu przybliżenia pewnych równań w teorii tarcia wewnętrznego*, RWMP 43 (1903), 195-222.
- [32] Natanson W.: *Uwagi nad teorią zluźniania*, RWMP 43 (1903), 595-615.
- [33] Natanson W.: *O pewnej własności podwójnego załamania światła w cieczach odkształcalnych mogącej posłużyć do wyznaczania ich czasu zluźniania*, RWMP 44 (1904), 2-24.
- [34] Natanson W.: *Uwagi nad pracami prof. Zaremby, dotyczącymi się teorii podwójnego załamania światła w cieczach odkształconych*, RWMP 44 (1904), 133-143.
- [35] Zaremba S.: *O pewnej udoskonalonej teorii relaksacji*, RWMP 43 (1903), 482-502.
- [36] Zaremba S.: *Sur le changement du systeme de référence pour un champ électromagnetique déterminé*, Ann. Soc. Pol. de Math. 6 (1927), 8-49.
- [37] Truesdell C.: *Correction of two errors in the kinetic theory that have been used to cast unfounded doubt upon the principle of material frame indifference*, Meccanica 11 (1967), 196-199.
- [38] Müller I.: *On the frame dependence of stress and heat flux*, Arch. Rat. Mech. Anal. 45 (1972), 241-250.

Gdańsk, w lutym 1996

Janusz Badur (IMP PAN w Gdańsku),
Jarosław Mikielewicz (IMP PAN w Gdańsku)