

POLSKA AKADEMIA NAUK

INSTYTUT MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF
FLUID-FLOW MACHINERY

PRACE
INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

99



GDAŃSK 1995

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machines

Wydanie publikacji dofinansowane zostało przez PAN ze środków DOT uzyskanych z Komitetu Badań Naukowych

RADA REDAKCYJNA – EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH * HENRYK JARZYNA * JERZY KRZYŻANOWSKI
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ * WŁODZIMIERZ J. PROSNAK
JÓZEF ŚMIGIELSKI * ZENON ZAKRZEWSKI

KOMITET REDAKCYJNY – EDITORIAL COMMITTEE

EUSTACHY S. BURKA (REDAKTOR NACZELNY – EDITOR-IN-CHIEF)
JAROSŁAW MIKIELEWICZ
EDWARD ŚLIWICKI (REDAKTOR – EXECUTIVE EDITOR) * ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA – EDITORIAL OFFICE

Wydawnictwo Instytutu Maszyn Przepływowych
Polskiej Akademii Nauk
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. poczt. 621,
☎ (0-58) 46-08-81 wew. 141, fax: (0-58) 41-61-44,
e-mail: tjan@imppan.imp.pg.gda.pl

ISBN 83-01-95102-2
ISSN 0079-3205

Kronika – Chronicle

W *Kronice* przedstawiono krytyczną analizę oraz rekonstrukcję modelu matematycznego eteru uniwersalnego, opracowanego przez Osborne'a Reynoldsa w roku 1902, umieszczając ją w tle osiągnięć innych uczonych, takich jak Kelvin, Maxwell, czy Whittaker. Podstawą analizy jest bardzo obszerna praca Reynoldsa pt.: *The Sub-Mechanics of the Universe*, opublikowana w jego pracach zebranych.

The Chronicle is devoted to the critical analysis and reconstruction of the mathematical model of universal aether put forward by Osborne Reynolds in 1902, which is presented in the light of achievements of other scholars like Kelvin, Maxwell and Whittaker. The point of departure for the analysis is Osborne Reynolds' extensive work *The Sub-Mechanics of the Universe* published amongst his collected works.

Uwagi o „Sub-mechanice wszechświata” Osborne’a Reynoldsa

Remarks on Osborne Reynolds’ ”The sub-mechanics of the universe”

1. Problematyka eteru uniwersalnego

Historię jednolitej teorii pola należałoby, zarówno z przyczyn merytorycznych jak i historycznych, podzielić na kilka charakterystycznych etapów. Etapem pierwszym, pierwotnym, byłby długi okres rozpoczynający się, prawdopodobnie, od mechaniki perypatetyków, a kończący się na Kartezjuszu. Był to, jak wiadomo, czas formowania się pytań i pojęć oraz czas słownego przepowiadania fizyki. Okres drugi, między eterem Kartezjusza a eterem Maxwella¹, był już okresem budowania pierwszych sprawnych modeli matematycznych. Dzięki zmaganiom takich dziewiętnastowiecznych uczonych jak A. Fresnel, A. L. Cauchy, S. S. Poisson, G. Green, G. G. Stokes, G. B. Airy, J. Mac Cullagh, C. Lamé, J. Boussinesq, W. Thomson, F. Neumann, E. Skiba, powstały zręby teorii pola w dzisiejszym rozumieniu tego pojęcia. Modele eteru były wtedy główną siłą napędzającą rozwój hydrodynamiki, teorii sprężystości, termodynamiki, teorii grawitacji, elektryczności i magnetyzmu².

¹wyczerpujące opracowania można znaleźć w monografii Whittakera: *A history of the theories of aether and electricity*, Vol. 1, 1910 oraz w artykule W. Frejłaka: *Kwart. Historii Nauki i Techniki*, 25(1980)

²dwa przykłady są znamienne: pierwszy to miara metryczna w eterze Greena (Green: *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 7(1839), która przeszła do teorii ośrodków ciągłych jako miara odkształcenia

Dalszy, często burzliwy, rozwój modeli matematycznych i fizycznych eteru trwał od pracy J. Clarka Maxwella³ aż do pojawienia się nowego paradygmatu opartego na szczególnej teorii względności. Wtedy to na pewien okres pojęcie to zostało uznane za zbędne w fizyce⁴ i powróciło, przynajmniej na łono teorii grawitacji, w postaci tensora metrycznego. Współczesna fizyka (circa 1980) dalej fascynuje się zagadnieniem modelu jednolitego, przeprowadzając badania na gruncie takich modeli jak wielowymiarowe kontinuum MacLarena-Kaluzy-Kleina, supersymetrie, czy superstruny. W modelach tych poszukuje się jednego wspólnego dla wszystkich sił natury podłoża, określanego często jako „stan próżni”⁵. Ponieważ powszechnie odrzucono mechaniczną interpretację pól cechowanych stąd pytanie typu: „Czy bozony pośredniczące są skwantowanymi modami deformacji eteru?” jest poza zakresem zainteresowań fizyki.

Zanalizowanie okresu 1862-1905 jest dziełem samym w sobie, niemniej pragnąc podać w miarę kompletne tło dla pracy Reynoldsa trzeba wrócić do szeregu profesjonalnych opracowań⁶ i niektórych oryginalnych prac⁷. Z własnych bibliograficznych badań autorów nie wynika, że istnieje jakiś nieznanый model eteru, na którym Reynolds mógłby bazować. Wśród nieznanых w literaturze modeli trzeba wymienić: model eteru oparty na grupie symetrii $T(3) \supset SO(3)$, przedstawiony przez Helmholtza w jego pracy habilitacyjnej⁸, jednolity model grawitacji i elektromagnetyzmu Craiga⁹, oparty na symetrii cechowania $T(4) \supset SO(4)$ lecz realizowany nad trójwymiarowym kontinuum¹⁰. W tym gronie powinien znaleźć się polski teoretyk Edward Skiba¹¹, który dał podstawy teorii eteru wyższego rzędu¹².

W niniejszej pracy podejmujemy się próby zrewaloryzowania modelu eteru uniwersalnego, opracowanego przez Osborne’a Reynoldsa¹³ w roku 1902. Podstawą analizy jest 251-stronicowy artykuł [40] zatytułowany *The Sub-Mechanics of the Universe*, wyprowadzający komplet równań opisujących eter Reynoldsa. Mechaniczne kontinuum, które Reynolds buduje dla swego eteru, nie ma jednak

Greena (np. Cz. Woźniak: *Dynamika ośrodków ciągłych*, 1968), przykład drugi to miara naprężeń Maxwella (Phil. Mag. 1861), która do hydrodynamiki przeszła za sprawą Eckarta (Phys. Fluids, 3(1960), a do teorii sprężystości za sprawą Eshelby’ego (J. Elasticity, 5(1975))

³J. Clark Maxwell: Phil. Mag. I, II (1861), III, IV (1862)

⁴L. Kostro, U. Gdański, 1992

⁵współczesny synonim eteru, Aitchison, Contemp. Phys., 26(1985)

⁶np. monografie Whittakera i Schaffnera

⁷Buijs-Ballot: Ann Physik, 103(1858), 240; Korn: *Eine Theorie der Gravitation ...*, 1898; Thomson: Proc. Roy. Soc. Edin., 8(1871), 577; Lodge: Phil. Trans., 184(1893), 727; Larmor: Phil. Trans., A185(1894)

⁸Helmholtz: Nachr. Ges. Wiss. Gött., 9(1868)

⁹Craig: Amer. J. Math., 20(1898)

¹⁰fizycy zajmujący się geometryzacją teorii pola wiedzą, iż jest to „prawie dobre włókno ale nad złą rozmaitością”

¹¹Skiba: Pam. AU, 1(1874)

¹²modele z wyższymi gradientami były rozwijane na gruncie teorii ośrodków ciągłych dopiero w latach sześćdziesiątych; Cz. Woźniak: *Dynamika ośrodków ciągłych*, 1968

¹³pierwszą publiczną informacją jest wykład z 10. czerwca 1902

żadnego odniesienia do wcześniejszych modeli¹⁴, które zazwyczaj opierają swe równania na tzw. przesłankach fenomenologicznych. Model Reynoldsa jest modelem kwantowo-statystycznym wyposażonym w równania konstytutywne, otrzymane w oparciu o skomplikowane techniki uśredniania oraz, zapożyczoną z kinetycznej teorii gazów, techniką budowania równań momentowych. Ostatecznym rezultatem wysiłków Reynoldsa jest kontinuum wyposażone w pewną strukturę, podobne w swej istocie do współczesnych kontinuumów dwupłynowych¹⁵. Obie te cechy, tzn. kwantowo-statystyczne podejście do budowania równań konstytutywnych na strumienie masy, pędu i energii oraz „dwupłynowość” z charakterystyczną wymianą masy energii i pędu między fazami, stawiają eter Reynoldsa wśród oryginalnych i pionierskich rozwiązań XIX-wiecznej teorii pola.

2. Odkrycie dylatacji ośrodków ziarnistych (1885 – 1886)

Wielkie hipotezy zazwyczaj rodzą się w wyniku szczęśliwych skojarzeń. Przy najmniej tak było w przypadku Lorda Kelvina, gdy podsumowując wyniki pracy *O ruchu wiru*¹⁶ odkrył mechanizm ruchu swobodnego cząstki względem eteru. Taką szczęśliwą siłą sprawczą, w przypadku Osborne’a Reynoldsa, było odkrycie zjawiska objętościowego „spuchnięcia” ośrodka ziarnistego poddanego siłom dystorsyjnym¹⁷. Zjawisko to, nazwane przez Reynoldsa „*dilatancy*”, obserwujemy w codziennej praktyce w magazynach zbożowych, czy w czasie spacerów plażą. Piasek, niezależnie od frakcji i stopnia nasycenia wodą, obciążony ciężarem stopy „puchnie” wokół niej o wiele więcej niż wynosi objętość tej części stopy, która znajduje się w piasku. Ta niespotykana w innych modelach cecha mechaniczna bierze się z nieliniowości równania (konstytutywnego), łączącego dystorsję τ , ciśnienie p i zmianę objętości Θ w następujący związek

$$\Theta = a_1 p + a_2 \tau^2, \quad (1)$$

w którym współczynniki a_1 , a_2 pełnią rolę pewnego rodzaju stałych typu Hooke’a, a ich wartość jest funkcją wilgotności i kształtu ziaren piasku. Co więcej, Reynolds używając w swym eksperymencie dużej sztywnej sfery zauważył, iż gęstość ośrodka, będąca funkcją sposobu upakowania ziaren oraz wielkości dylatacji Θ zmienia się wokół jego „laboratoryjnej stopy” w sposób eksponencjalny, oscylując między gęstością minimalną a maksymalną (rys.1).

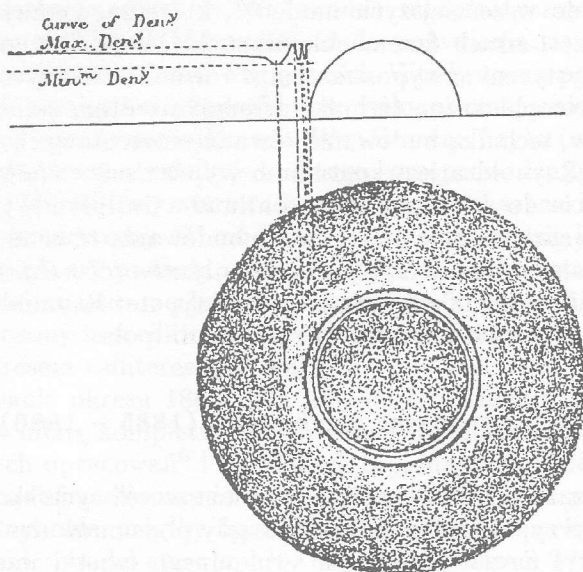
Experyment ten nadawał się do demonstracji również w wersji, gdy gumowa

¹⁴chyba najbardziej zbliżonym jest model Kelvina: Phil. Mag., 24(1887), również FitzGerald: Nature, 1889, który z pewnością był inspirowany odkryciem turbulencji przez Reynoldsa: Phil. Trans., 174(1883)

¹⁵Landau: J. Phys. USSR, 5, 1941; Enz.: Rev. Mod. Phys., 46(1974), Modele dwupłynowe używane są dziś w zagadnieniach nadprzewodnictwa, nadciekłości, fizyce przepływów dwufazowych. Mechaniczny model eteru Maxwella (Phil. Mag. 1861, 1862) nosi już pewne cechy „dwupłynowości”

¹⁶Kelvin: Trans. Roy. Soc. Edin., 25(1868), Zagadnienie stosunku ruchu swobodnego w eterze do pierwszej zasady dynamiki zostało również pozytywnie rozwiązane w eterze Reynoldsa

¹⁷Reynolds: Phil. Mag., 20(1885)



Rys. 1. Oscylacje gęstości wokół sztywnej sfery

kula wypełniona piaskiem i wodą zawierała w sobie inną dużo mniejszą kulę. Obie połączone były szklaną rurką wyposażoną w hydrauliczną pompkę. Po wielu latach pomysł ten uzupełniony współczesną technologią, został opatentowany¹⁸ i służy dziś do produkcji materiałów tłumiących. Eksperyment Reynoldsa demonstrujemy współcześnie, podając zainteresowanym dwie jednakowo wyglądające i jednakowo ważące kulki gumowe, prosząc by upuścili je na podłogę. Zwykła kulka odbijać się będzie wielokrotnie, kulka Reynoldsa nie odbija się wcale.

Było to niezwykle zjawisko, ale również wzór (1) oceniany z punktu widzenia teorii pola był czymś niespotykanym. Przypomnijmy bowiem, że liczne teorio-polowe modele eteru opisywane były tylko liniowymi równaniami konstytutywnymi¹⁹. Znany jest tylko jeden wcześniejszy przypadek nieliniowego równania konstytutywnego eteru. Jest to równanie typu

$$\tau = b_1 \Theta + b_2 \gamma^2, \quad (2)$$

użyte przez Cauchy'ego²⁰ w jego trzeciej teorii eteru, w którym b_1 , b_2 grają rolę uogólnionych stałych Hooke'a. Jest ciekawym, że i to równanie ma, pewnego rodzaju, analog w praktyce codziennej (kuchennej). Zmiana odkształcenia ścinania γ wywołana mieszadłem miksera powoduje powstanie prostopadłej siły τ i wspinanie się cieczy na mieszadło (tzw. efekt Weissenhoffa)²¹.

¹⁸Rosenberg, 1971

¹⁹Lorentz: *Aether theories* ..., 1927; Korn: *Eine Theorie* ..., 1898

²⁰Cauchy: *Euvres*, 2(1848)

²¹Truesdell & Toupin: *Hand der Phys.*, par. 299, (1960)

Reynolds analizując oddziaływanie dwóch sfer²² zanurzonych w ziarnisty ośrodek pokazuje jeszcze jedną niezwykłą jego cechę. Siła wzajemnego oddziaływania sfer, jest bowiem proporcjonalna do iloczynu objętości sfer podzielonego przez kwadrat odległości między nimi²³. Innymi słowy, ośrodek ziarnisty spełnia podstawowy warunek Maxwella jaki stawiany jest kandydatowi na eter grawitacyjny²⁴. W tej sytuacji Reynolds²⁵ wypowiada hipotezę, że „ponieważ kontinuum gęsto upakowanych sztywnych sfer ma zdolność wywoływania siły grawitacyjnej jak również wydaje się być zdolne do przenoszenia fal ciepła i światła, wywoływania sił kohezji oraz efektów wynikających z separacji dwóch ładunków elektrycznych to jest ono kandydatem do roli eteru uniwersalnego (a dilatant theory of ether)”.

Myśl tę kontynuuje Reynolds²⁶ w następnym artykule, który już nieco odważniej, bo nawet w tytule, informuje o zamierzeniach autora. Sam autor, czytając swój artykuł przed członkami Royal Institute of Great Britain wydaje się zdumiony wynikami swych badań i przemysleń stwierdzając, że: „rozmaite próby szukania wszechmogącego eteru²⁷ spełniającego takie funkcje jak: transmisja fal świetlnych, wywoływanie siły grawitacyjnej, wywoływanie kohezji, sprężystości tarcia między stykającymi się molekułami, zjawiska elektryczne i magnetyczne oraz swobodny ruch ciał, mogą wreszcie zakończyć się sukcesem”. Jest to wyraźne nawiązanie do programu Maxwella stawianego przed współczesnymi modelami eteru²⁸.

Analizując bliżej artykuł Maxwella odnosimy wrażenie, że potraktował on temat, nie encyklopedycznie, a raczej „gazetowo”, dając popularny wykład dla tłumów. Clark Maxwell był, jak wiadomo, autorem tylko jednego artykułu²⁹, w którym wiele wysiłku włożył w zbudowanie eteru świetlnego, stąd być może jego brak zainteresowania „eterem wszechmogącym”. Przypuszczać również można, że ukazujące się w latach 70. i 80. prace Kelvina³⁰, miały większą moc sprawczą niż w pośpiechu przygotowany artykuł Maxwella³¹. Clark Maxwell jest jednak dla Reynoldsa ważnym punktem odniesienia. Przypomnijmy, że w 1886 roku, mimo że siedem lat po śmierci Maxwella, Reynolds mógł jeszcze odczuwać sprawę odkrycia zjawiska *thermal transpiration*. Obaj uczeni opublikowali w 1879 roku w Philosophical Transaction of Royal Society of London³², prace na ten temat z tym,

²² Reynolds: Phil. Mag., 20, p. 214

²³ ibidem, p. 215

²⁴ Maxwell: Enc. Brit., 1875, 764

²⁵ Reynolds: ibidem, 216

²⁶ Reynolds, Proc. R. I. G. B., 11(1886), 218

²⁷ „an all-pervading ether”

²⁸ Maxwell: Enc. Brit., 1875

²⁹ Maxwell: Phil. Mag., 1861, 1862

³⁰ W. Thomson: Proc. R.S. Edin., 8(1871)

³¹ Maxwell był, jak się wydaje, niezbyt dobrym encyklopedystą. Inny jego artykuł do Enc. Brit. dotyczący teorii kapilarności jest jeszcze gorzej przygotowany. Proszę zwrócić uwagę, że liczni bibliografści Maxwella nigdy nie wspominają o jego bibliotece – głównym narzędziu encyklopedysty

³² Maxwell: Phil. Trans., 170(1879), 231; Reynolds: Phil. Trans., 170(1879), 727

że Reynolds o jeden numer później³³. Maxwell wykonując „szczotki” swego przedostatniego artykułu zdążył jeszcze skrytykować Reynoldsa, po czym ten zwrócił się ze skargą do G. G. Stokesa³⁴. Ostatecznie Maxwell przyznał prymat Reynoldswi. To wydarzenie musiało pozostawić niewątpliwie ślad w pamięci Profesora Reynoldsa, gdyż wielokrotnie w omawianej pracy³⁵ podkreśla miejsca, w których poszedł dalej od Maxwella, czy to go ulepszając, czy rozbudowując.

Praca z 1886 roku jest więc wnikliwym spojrzeniem na możliwości ośrodka ziarnistego. Sformułował w niej Reynolds postulat nieskończoności eteru, przy jednoczesnym ograniczeniu jego brzegów, które muszą zawierać ciągle te same ziarna w tym samym upakowaniu³⁶.

3. Lata 1886 – 1902

W styczniu 1902 r. najważniejsza, najdłuższa (251 stron *in octavo*), ostatnia praca 60-letniego Osbourne’a Reynoldsa zatytułowana *Sub-mechanika wszechświata* była gotowa do druku. Ponieważ redakcja Philosophical Transaction zaproponowała skrócenie artykułu, Reynolds zdecydował się umieścić go w trzecim, osobnym tomie swych prac zebranych³⁷ i w tej postaci jest on dziś dostępny. Należy przypuszczać, że artykuł był pisany w latach 1896-1901, gdyż lata wcześniejsze, zaraz po 1886, były dla Reynoldsa okresem normalnej inżynierskiej pracy³⁸. Napisał w tym czasie 18 artykułów (na 521 stronach³⁹), dotyczących aktualnych zagadnień inżynierii, dokonując po drodze szeregu odkryć. Między innymi, odkrył mechanizm smarowania i opracował jego hydrodynamiczną teorię, odkrył mechanizm tarcia tocznego, mechanizm nanoszenia piasku w ujściach rzek i na ich zakrętach, opracował teorię zadławionych przepływów powietrza w dyszach, odkrył zjawisko odparowania rozprężnego (flashingu), odkrył mechanizm powstawania turbulencji, opracował teorię turbulencji i dyspersji, podał mechanizmy determinujące zachowanie się powierzchni międzyfazowej, opracował teorię ruchu łyżwy po lodzie. Jego prace cechuje podobna metodologia. Można zawsze w nich znaleźć oryginalny eksperyment⁴⁰, model matematyczny, obliczenia, końcowe inżynierskie

³³Z powodu niezwykle pieczołowicie przygotowywanego 119. stronicowego artykułu. Praca Reynoldsa zawiera własny eksperyment, własną teorię i krytyczne porównania. Praca Maxwella, pomyślana jako odpowiedź na pomysł Boltzmanna z 1871r., zawiera tylko matematyczny model

³⁴Jackson, Univ. Manchester, 1994

³⁵Reynolds: *The sub-mechanics of the universe*, 1903

³⁶Reynolds: Proc. R. I. G. B. 11(1886), 219

³⁷Reynolds: *The sub-mechanics of the universe*, 1903

³⁸Allen: *The life and work of O. Reynolds*, 1968

³⁹Tyle artykułów zdecydował się umieścić w drugim woluminie swych prac zebranych. Dziewiętnastą pracę nie drukowaną w Vol. II jest artykuł *On the mechanical equivalent of heat*, Phil. Trans., 190(1897), 301-423 napisany wspólnie z W. H. Moory. Część pracy wykonana i napisana przez współautora prof. Reynoldsa jest zaznaczona w tekście

⁴⁰W jednym przypadku, teorii zadławionych przepływów powietrza, oparł się na eksperymencie Wilde’a; Henry Wilde: *On the velocity with which air rushes into a vacuum and on some phenomena attending the discharge of atmospheres of higher into atmospheres of lower density*,

wzory i wskazówki praktyczne. Zasięg zagadnień, jakimi się wtedy Reynolds zajmował, nie jest już do ogarnięcia w XX wieku. Wiedza w kierunkach wyznaczonych przez jego pionierskie prace jest tak zaawansowana, że nie jest do pomyślenia współczesny uniwersalista na miarę Reynoldsa. Nie będzie też niezręcznym nazywanie go Leonardo da Vinci inżynierii XIX-wiecznej.

Tematyka eteru nie jest obecna w wyżej wspomnianych pracach z lat 1886-1902. Ale w jednej z jego literackich prac, tzn. obszernym eseju na temat życia i działalności J.P. Joule'a⁴¹, omawiając słynne przemówienie Joule'a wygłoszone w zachrystii kościoła św. Anny⁴², Reynolds nagle odsyła czytelnika do załącznika nr 1, w którym tłumaczy pojęcie eteru. Dowiadujemy się z niego, że to teorię eteru Hooke'a (Micrographia, 1664) i Lavoisiera (Traité Elementaire du Chimie) uważa Reynolds za wyjściowe i podstawowe. Również z tego eseju dowiadujemy się, że Reynolds dokładnie przestudiował pionierski artykuł W. J. M. Rankine'a⁴³ oraz że był świadomy znaczenia pojęcia „molekularna teoria ciepła”, które właśnie Rankine'owi zawdzięczamy. Można przypuszczać, że Reynolds doskonale rozumiał gdzie leżą różnice między molekularną a kinetyczną teorią ciepła, oraz że był świadom dłaczego Kelvin, widząc upór Maxwella, wprowadził mu do modelu „demonia sortującego”. Podkreślamy tu szczególnie zagadnienie różnic molekularnej i kinetycznej teorii ciepła, gdyż, jak wnioskujemy z jego pracy, Reynolds wychodząc ze wspólnego punktu starowego obu teorii, sformułowanego jeszcze przez G. G. Stokesa⁴⁴, próbuje znaleźć pewien kompromis.

Z lektury prac Profesora Reynoldsa dowiadujemy się też, że nie studiował on dzieł swoich poprzedników ani współczesnych mu uczonych, nawet jeśli artykuł któregoś stykał się z jego własnym artykułem⁴⁵ w tym samym woluminie. Z lektury wspomnień jego ucznia J. J. Thomsona⁴⁶ wynika, że Reynolds prawdopodobnie był w bibliotece tylko dwa razy. Pierwszy, kiedy przygotowywał swój wykład inauguracyjny⁴⁷, a drugi raz gdy pisał ww. esej o Joule'u. Możemy więc z dużą pewnością zakładać, że nie znane były mu teorio-polowe modele Kelvina-FitzGerald⁴⁸, Pearsona⁴⁹, Larmora⁵⁰ czy Lorentza⁵¹. Wyjątkiem są wszystkie trzy prace Maxwella dotyczące kinetycznej teorii gazów, które Rey-

Proc. Manchester Literary and Phil. Soc., 25(1886), 17-34. We wszystkich pracach Reynolds zaznacza że eksperymenty powstały przy współudziale techników Joe Chidzey'a i Thomasa Foster

⁴¹O. Reynolds: Proc. Manch., Lit. Phil., Soc., 60(1892), 18

⁴²J. P. Joule: *On matter, living forces and heat*, Odczyt w zachrystii kościoła św. Anny, Manchester, 1847

⁴³Rankine: Phil. Mag., 2(1851), Rankine, Proc. Roy. Soc. Edin., 6(1868-1869)

⁴⁴G. Stokes: Cambridge Phil. Trans., 8(1845)

⁴⁵Lodge: Phil. Trans., 184(1893)

⁴⁶Allen: O. Reynolds Cent. Sym. 1994

⁴⁷pt.: *The Progress of Engineering considered with respect to the Social Conditions of this country*, Owens College, Manchester, Opening of the Session 1868-1869

⁴⁸W. Thomson: Phil. Mag., 24(1887)

⁴⁹Pearson: Proc. London Math. Soc., 20(1889)

⁵⁰Larmor: Phil. Trans., 185(1894), 186(1885), 190(1897)

⁵¹patrz bibliografia [w] H. A. Lorentz: *Aether theories and aether models*, 1927

nolds przestudiował w detalach⁵². J. Allen w swoim bibliograficznym opracowaniu wspomina, że Reynolds, podobnie jak Lew Landau, był typem geniusza, który nie studiował literatury przed rozwiązaniem problemu, lecz krok po kroku analizował go znajdując oryginalne rozwiązania⁵³.

Przechodzimy teraz do rekonstrukcji teorii Reynoldsa ujętej w dwóch następnych rozdziałach. Natomiast rozdział siódmy, omawiający implikacje teorii Reynoldsa, poprzedzony jest krótkim omówieniem (rozdział 6) kwantowej teorii eteru w pierwszych dziesięcioleciach XX wieku.

4. Rekonstrukcja modelu fizycznego

Wszechświat wypełniony jest aż po swoje granice gładkimi i sztywnymi sferami (primordians) o tej samej średnicy równej $\sigma = 5.534 \cdot 10^{-18}$ cm. Gęstość sfery jest kilkaset razy większa od gęstości najgęstszych materiałów ziemskich⁵⁴. W pustej przestrzeni kosmicznej sfery upakowane są regularnie i maksymalnie gęsto, lecz mimo to mogą wykonywać krótko zasięgowe ruchy o zasięgu $\lambda = 8.612 \cdot 10^{-28}$ cm z małą szybkością względną $\alpha'' = 67.77$ cm/s. Podstawowe ciśnienie tła, które utrzymuje sfery w ścisłym sąsiedztwie jest olbrzymie, jak na ziemskie warunki, i przekracza wiele tysięcy razy moduły sprężystości najtrwalszych metali. Ciśnienie tła i maksymalna gęstość upakowania związane są poprzez małą temperaturę tła⁵⁵.

Materia występuje zawsze w postaci sporcjowanej, jest ona bowiem brakiem jednej, dwu lub n sfer w normalnym upakowaniu. Te defekty, będące tylko pustymi miejscami nazywa się *ujemnymi nierównościami*. Pojedyncza ujemna nierówność nie ma masy ani inercji, jej ruch raz wygenerowany trwa wiecznie⁵⁶. Polega on na nieustannym przesuwaniu się sfer na puste miejsca⁵⁷. Maksymalna prędkość przesyłania sygnałów, mimo że α'' jest małe, wynosi $\tau = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s i jest równa prędkości światła. Masa i inercja są możliwe do zaobserwowania dopiero między dwoma (albo wieloma) ujemnymi nierównościami, które z uwagi na zjawisko dyfuzji wykazują tendencję do przyciągania się. Każde dwie ujemne nierówności podlegają również empirycznym prawom mechaniki, tzn. prawu zachowania masy Daltona, prawu zachowania energii Joule'a⁵⁸ i trzem zasadom dynamiki Newtona.

⁵² Reynolds również przejmuje od Maxwella oznaczenia niektórych obiektów np. Q, ξ, n, N

⁵³ Ta oryginalność może być dla współczesnego czytelnika utrudnieniem, gdyż zakłada ona, że czytelnik nic o problemie nie wie. Niektóre rzeczy można przecież tłumaczyć albo w długim oryginalnym toku rozumowania albo krócej, wykorzystując elementy wiedzy przeciętnego czytelnika. Rozwlekłość stylu pisania Reynoldsa można również tłumaczyć jego niezwykłą pedanterią z jaką podchodził do inżynierii, tłumacząc często, że ta sztuka nie ma nic wspólnego ze sztukami pięknymi

⁵⁴ tzn. $\rho = 22$ g/cm³

⁵⁵ czy 2.74°K ? brak obliczeń tej wielkości

⁵⁶ wyraźne nawiązanie do zasady Macha

⁵⁷ z dokładnością do pierwszego przybliżenia

⁵⁸ Joule był uczniem Daltona – obaj z Manchesteru

Tylko relacje podlegające pod te empiryczne prawa mechaniki mogą być przedmiotem naszego zmysłowego poznania. Eter nie podlega takiemu poznaniu, gdyż jest opisywany wyłącznie prawami „sub-mechaniki”. Antymateria utworzona jest przez nadmiar n sfer (*nierówności dodatnich*) i podlega siłom odpychającym, dążącym do jej rozproszenia. Stąd też, jeśli nawet ilość nierówności dodatnich jest taka sama jak ilość nierówności ujemnych, te pierwsze są niezwykle rzadko spotykane. Zjawiska elektryczne wywołuje *nierówność złożona*, będąca swego rodzaju parą nierówności dodatniej i ujemnej.

W swoim *Magnum Opus* Reynolds wykazuje, że główne zjawiska i cechy fizyczne materii mogą być wyprowadzone i uzasadnione z jednego mechanicznego eteru. Te dziesięć głównych zjawisk i cech fizycznych tłumaczone jest w sposób następujący:

1. *Uniwersalne prawo grawitacji* wraz z prawem przyciągania, odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości między ujemnymi nierównościami, są wynikiem działania dylatacji⁵⁹. Zmiana odległości mas powoduje zmianę wewnętrznego odkształcenia wywołującą powstanie krzywizny w normalnym upakowaniu sfer. Wymiar ziarna jest miarą intensywności oddziaływania grawitacyjnego, gdyż pomnożony przez krzywiznę eteru oraz ciśnienie tła określa potencjał z jakim eter oddziałuje z materią.
2. *Propagacja światła* wywołana gwałtownym odwróceniem w nierówności złożonej. Fale w gęsto upakowanym ośrodku ziarnistym mogą być zarówno podłużne jak i poprzeczne. Siła tłumiąca fale podłużne, mimo że prędkość ich propagacji jest 2.4 razy większa od prędkości światła, jest tak duża, że praktyczny ich zasięg wynosi kilkaset centymetrów (x - rays). Fale poprzeczne, propagując się z prędkością światła, nie wykazują żadnej istotnej tendencji do tłumienia⁶⁰.
3. *Kohezja i napięcie powierzchniowe* są wynikiem złożenia oddziaływań grawitacyjnych i elektrycznych. Ponieważ oddziaływania grawitacyjne są ponad tysiąc bilionów razy mniejsze od elektrycznych, stają się one ważne tylko wtedy, gdy odległość jest rzeczywiście mała.
4. *Sprężystość materii* jest skutkiem wzajemnego przestrzennego uporządkowania ruchu ujemnych nierówności.
5. *Absorpcja światła* wynika z tego, że molekuly są zdolne do wyemitowania całego spektrum wewnętrznych oscylacji. Mogą one pochłaniać energię fali świetlnej w takim stopniu, w jakim będą ją zamieniać na promieniowanie ciepłe.

⁵⁹z dokładnością tylko do pierwszego przybliżenia

⁶⁰Spadek energii fali o $1/e^2 \cong 1/8$ następuje po 56 milionach lat. Spadek ten jest potrzebny aby wytłumaczyć czarność nieba ciemną nocą, które w przeciwnym razie winno mieć pewną jasność, (tzw. paradoks Olbersa)

- 6 *Reakcje chemiczne* mogą zachodzić po przejściu fali poprzecznej o dużej częstotliwości. Zdażają się wtedy koincydencje między możliwymi stanami drgań molekuł a okresem fal krótkich. Podobne efekty mogą również być wywołane kolizją między ujemnymi nierównościami.
- 7 *Dyspersja fal świetlnych* odpowiada różnemu skróceniu fal w zależności od efektów absorpcji światła przez molekuly.
- 8 *Ugięcie światła* jest wynikiem przejścia z ośrodka ziarnistego o mniejszej gęstości do ośrodka o gęstości większej.
- 9 *Odbicie fal* zależy od tego, czy propagacja odbywa się w ośrodku o normalnym upakowaniu, czy w ośrodku z dużą ilością negatywnych nierówności.
- 10 *Swobodny ruch materii* nie przedstawia żadnego problemu. Materia może przesuwać się przez ośrodek ziarnisty bez żadnego oporu i vice versa, ośrodek ziarnisty może przesuwać się przez ujemne nierówności i otaczające je powierzchnie osobliwe, bez występowania efektu unoszenia eteru⁶¹.

5. Rekonstrukcja modelu matematycznego

Ponieważ nie mamy żadnych empirycznych przesłanek na temat sub-mechaniki ośrodka ziarnistego, rozważania nasze oprzemy z konieczności na jednym zasadniczym postulatcie dotyczącym postaci hipotetycznego równania transportu. Będzie to jedyne narzędzie badania wielkości mechanicznych ośrodka ziarnistego, którym są sub-masa, sub-energia i sub-pęd⁶². Niech Q oznacza którąś z tych wielkości mechanicznych zawartych w kontrolnej objętości v poruszającej się z prędkością w . Równania transportu (bilansu)

$$\partial_t \iiint_v \rho Q \, dv = \iint_{\partial v} J_Q \underline{n} dS + \iiint_v {}_p Q \rho \, dv, \quad (3)$$

stwierdzają, że całkowita zmiana ilości Q w v jest spowodowana jej przekroczeniem przez granice v w formie strumienia J_Q oraz wewnętrzną produkcją ${}_p Q$. Wykonanie pochodnej czasowej na całce po lewej stronie (3) odbywa się wg reguły Reynoldsa⁶³

$$\partial_t \iiint_v \rho Q \, dv = \iiint_v \left[\partial_t(\rho Q) + \text{grad}(\rho Q)w + \rho Q \text{div } w \right] dv. \quad (4)$$

⁶¹ Dane do tego rozdz. pochodzą z rozdz. I, XIV i XV pracy Reynoldsa

⁶² Tym pojęciom odpowiadają współczesne; masa wirtualna, pseudoenergia i pseudopęd

⁶³ Rów. (15) w *The sub-mechanics of the universe*. Równanie to odkrył dla mechaniki Truesdell (*Kinematics of Vorticity*, 1954). Clifford Ambroży III Truesdell jest, jak dotychczas, jedynym badaczem, który nie bez pewnych sukcesów, studiował dzieło Reynoldsa

Ponieważ objętość kontrolna zawiera miliony sfer, takie prawo bilansowania jest zbliżone do bilansowania fenomenologicznego, zakładającego istnienie rozciągłych efektów oraz wielkości średnich. Odpowiednie bilanse sub-pędu, sub-masy i sub-energii, wynikające z rów. (3), mają klasyczne postaci⁶⁴

$$\begin{aligned}\partial_t \rho &= -\operatorname{div}(\rho \underline{u}), \\ \partial_t \underline{M} &= -\operatorname{div}(\underline{p} + \rho \underline{u} \otimes \underline{u}), \\ \partial_t E &= -\operatorname{div}(\underline{E} \underline{u} + \underline{p} \underline{u}) + \underline{p} \cdot \operatorname{grad} \underline{u},\end{aligned}\quad (5)$$

gdzie $\underline{u}$ jest prędkością ośrodka o gęstości ρ , $\underline{M} = \rho \underline{u}$ jego sub-pęd, $2E = \rho \underline{u}^2$ jego *vis viva*⁶⁵, zaś $\underline{p}$ i $\rho \underline{u} \otimes \underline{u}$ to, odpowiednio, przewodzący i unoszący strumień sub-pędu. Równania (5) wraz z równaniami bilansu: momentu sub-pędu, $\underline{p} = \underline{p}^{T66}$, położenia sub-pędu⁶⁷, położenia sub-masy⁶⁸ i położenia *vis viva*⁶⁹ stanowią możliwy komplet równań uzyskany z (3). Ośrodek ziarnisty tym wyróżnia się od innych, że przyjmuje się⁷⁰ $\underline{p} \cdot \operatorname{grad} \underline{u} \equiv 0$, co fizycznie oznacza, że energia kinetyczna zawiera całą energię zawartą w objętości v .

Ruch ziaren, nierówności, powierzchni osobliwości jaki dociera na poziom objętości kontrolnej v powinien być, zdaniem Reynoldsa, rozseparowany na odwracalny ruch średni i całkowicie dysypatywny, względny ruch cieplny. Aby to było możliwe należy ośrodek myślowo podzielić na dwa przenikające się płyny (fazy), średni i względny, z następującą regułą addytywnego rozseparowania pola prędkości:

$$\underline{u} = \underline{u}'' + \underline{u}'. \quad (6)$$

Wzajemny przekaz sub-masy, energii i pędu z jednej fazy do drugiej zapewnia dodatkowa powierzchnia wewnętrznej wymiany (rys. 2) ze strumieniem $J_{u' \otimes u'} \equiv \rho''(\underline{u}' \otimes \underline{u}')^{71}$. Jest on wprowadzony poprzez zwykłe dodanie i odjęcie go w równaniu sub-pędu (5)₂. W wyniku żmudnych operacji układ trzech równań (5) zamienia się w układ 6 równań dla ośrodka dwufazowego: (7)⁷², (8)⁷³, (9)⁷⁴

$$\begin{cases} \partial_t \rho'' + \operatorname{div}(\underline{u} \rho'') = \partial_T \rho'', \\ \partial_t \rho' + \operatorname{div}(\underline{u} \rho') = -\partial_T \rho''. \end{cases} \quad (7)$$

⁶⁴ibidem, równania (15), (33), (40)

⁶⁵Reynolds stara się rozróżnić pojęcie energii kinetycznej od pojęcia *vis viva*

⁶⁶ibidem, rów. (36A)

⁶⁷ $\partial_t(\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) + \underline{p} + \rho \underline{u} \otimes \underline{u} = \operatorname{div}(\underline{x} \otimes [\underline{p} + \rho \underline{u} \otimes \underline{u}])$ ibidem, rów. (35)

⁶⁸ibidem, rów.(22)

⁶⁹ibidem, rów. (54)

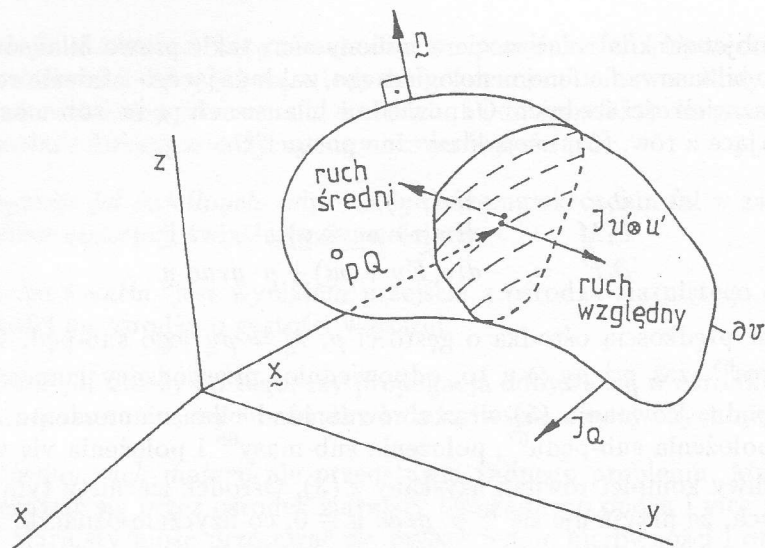
⁷⁰ibidem, par. 31, rów. (44) $[\underline{p} \cdot \operatorname{grad} \underline{u} \equiv \operatorname{tr}(\underline{p} \operatorname{grad}^T \underline{u})]$

⁷¹Wielkość ta jest dziś nazywana naprężeniem Reynoldsa. Reynolds nie definiuje explicite wewnętrznych strumieni dla sub-masy i sub-energii, chociaż występują one w równaniach konstytutywnych (15) i (17)

⁷²ibidem, rów. (64) i (65)

⁷³ibidem, rów. (71)

⁷⁴ibidem, rów. (74) i (75)



Rys. 2. Objętość kontrolna v wraz z dodatkowym strumieniem naprężeń Reynoldsa $Ju' \otimes u'$

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{M}'' - \partial_{tc} \tilde{M}'' = \rho'' \partial_T \underline{u}'' + \partial_T \rho'' \underline{u}'', \\ \partial_t \tilde{M}' - \partial_{tc} \tilde{M}' = \operatorname{div} \underline{p} - \rho'' \partial_T \underline{u}'' - u'' \partial_T \rho''. \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \partial_t(\rho'' E'') - \partial_{tc}(\rho'' E'') = \rho'' \underline{u} \cdot \partial_T \underline{u}'' + 0.5 \underline{u}''^2 \partial_T \rho'', \\ \partial_t(\rho E - \rho'' E'') - \partial_{tc}(\rho E - \rho'' E'') = \partial_{tp}(\rho E - \rho'' E''), \end{cases} \quad (9)$$

w którym nie wszystkie pojęcia mają proste wytłumaczenie. Gęstość jest *ex cathedra* addytywnie dekomponowana na $\rho = \rho'' + \rho'^{75}$, sub-pęd średni wynosi $\tilde{M}'' = \rho'' \underline{u}''$, względny $\tilde{M}' = \rho \underline{u} - \rho'' \underline{u}''$, $2\rho'' E'' = \rho'' \underline{u}''^2$. Pochodna totalna jest określona jako⁷⁶

$$\partial_T \underline{u}'' \equiv \partial_t \underline{u}'' + \operatorname{div}(\underline{u}'' \otimes \underline{u}''). \quad (10)$$

Zaś definicję na pochodną unoszenia ∂_{tc} i przewodzenia ∂_{tp} , jako że wymagają określenia dodatkowych strumieni, odsunięte są do modelowania konstytutywnego.

Równania ośrodka dwufazowego, powyżej wypisane, nie wychodzą jednak wiele poza granice ogólności. Stąd też niektóre z nich należy przybliżyć jednym lub kilkoma prostymi równaniami, tzn. wymagającymi prostych równań domknięcia. Jednakże równania domknięcia dla (7–9), gdybyśmy próbowali je znaleźć winny spełniać aż 16 warunków zgodności⁷⁷. Takiego zadania Reynolds nie podejmuje, proponując w zamian teorię pierwszego przybliżenia, w którym dwa ogólne równania sub-energii zastąpione są trzema przybliżonymi równaniami o następującej

⁷⁵ibidem, rów. (63)

⁷⁶ibidem, rów. (63A)

⁷⁷ibidem, par. 42

formie⁷⁸:

$$0.5\partial_t(\rho'' \underline{u}''^2) = 0.5\partial_{tc''}(\rho'' \underline{u}''^2) - \operatorname{div}(\underline{p}'' \underline{u}'' + \rho'' \{\underline{u}' \otimes \underline{u}'\} \underline{u}'') + (\rho'' \{\underline{u}' \otimes \underline{u}'\}'' + \underline{p}) \cdot \operatorname{grad} \underline{u}'' . \quad (11)$$

$$0.5\partial_t(\rho'' \underline{u}'^2)'' = 0.5\partial_{tc''}(\rho'' \underline{u}'^2)'' + 0.5\partial_{tc'}(\rho(\underline{u}'^2)')'' - \operatorname{div}(\underline{p}\underline{u})'' + \operatorname{tr}(\underline{p} \operatorname{grad} \underline{u})'' + (\underline{p}'' + \rho'' \{\underline{u}' \otimes \underline{u}'\}'') \cdot \operatorname{grad} \underline{u}'' . \quad (12)$$

$$0.5\partial_t(\rho \underline{u}^2 - \rho'' \underline{u}''^2) = 0.5\partial_{tc''}(\rho \underline{u}^2 + \rho'' \underline{u}''^2) + 0.5\partial_{tc'}(\rho \underline{u}^2)' + 0.5\partial_{tc'}(\rho(\underline{u}'^2)')'' + \operatorname{div}[\rho'' \{\underline{u}' \otimes \underline{u}'\}'' \underline{u}'' - (\underline{p}\underline{u})'] . \quad (13)$$

Są to odpowiednio równania bilansu sub-energii ruchu średniego (11), energii średniej ruchu względnego (12) i energii względnej ruchu względnego. W rozdz. 7 pokażemy, że równanie (12) i (13) można sprowadzić do, odpowiednio, identycznego i podobnego równania różniczkowego w teorii turbulencji $k - \epsilon$. Równania te kończą etap formułowania równań opisujących, który to fakt Reynolds podkreśla wypisując ich kompletną formę w paragrafie 67. swojej pracy.

Etap budowania równań konstytutywnych dla wyróżnionych w równaniach (7-13) strumieni jest niezwykle skomplikowany, gdyż wymaga statystycznej analizy ruchu względnego, jak również modernizacji Maxwellowskiej procedury uśredniania⁷⁹. Co więcej, podstawowymi, nieznanymi funkcjami w podejściu statystycznym jest zbiór $(N, \alpha, \underline{u}'', \sigma, \lambda)$ siedmiu funkcji, które nie do końca przystają do jedenastu równań (7-13), bo np. brak tu jest pola $\underline{u}'$. Oznacza to, że niektóre z jedenastu równań będą tożsamościowo spełnione. Zwłaszcza usunięcie pola $\underline{u}'$, które w wyniku technik całkowania sprytnie wyeliminowano, jest postępowaniem w stosunku do pracy z 1895⁸⁰, w której pole $\underline{u}'$ aproksymowano funkcjami trygonometrycznymi.

W ośrodku normalnie upakowanym, gdzie każda sfera (primordian) o średnicy σ posiada ośmiu sąsiadów heksagonalnie rozłożonych, przewodzenie sub-pędu odbywa się anizotropowo. Wszystkie inne upakowania dopuszczają istnienie pewnej drogi swobodnej λ , toteż obok przewodzenia występuje również unoszenie sub-pędu. Maxwellowskie prawo rozkładu prędkości nie może już tylko zależeć od rozkładu *vis viva*, lecz również od wielkości oporu jakie otoczenie stawia sferze, gdy ta chce zmienić swych sąsiadów. Gdy sfera jest mała w porównaniu z otoczeniem, to opór staje się pomijalnie mały. Nie jest tak jednakże w naszym przypadku, gdzie przewodzenie sub-pędu w wyniku kontaktu sfer jest istotne.

⁷⁸ibidem, rów. (122), (123), (124) lub (125), (126), (127)

⁷⁹ibidem, rozdz. VIII - XIII

⁸⁰Phil. Trans. A 186(1895), 123

Dlatego Maxwellowski wzór na długość drogi swobodnej λ będzie uzupełniony o człon zależny od σ

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\pi \sigma^2 N} - \frac{2}{3} \sigma f\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right) \right\}, \quad (14)$$

gdzie N jest liczbą ziaren w jednostce objętości, a $f(\sigma/\lambda)$ jest pewną nieznaną funkcją. Dalsza analiza zmierza do znalezienia wyrażeń na średnią prędkość przenoszenia masy, pędu i energii w funkcji gradientów takich zmiennych jak liczba ziaren N , droga swobodna λ , energia średnia ruchu względnego α^{281} . Jej rezultatem są równania konstytutywne dla średnich strumieni, np. $\tilde{p}'', \rho'' \{ \underline{u}' \otimes \underline{u}' \}''$ reprezentujących zarówno przewodzenie jak i unoszenie. Są to⁸²:

$$\rho'' J_{\rho} = \rho'' \underline{u}'' + \frac{2}{3} \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} (\alpha \operatorname{grad} \rho'' + \rho'' \operatorname{grad} \alpha), \quad (15)$$

$$\rho'' \{ \underline{u}' \otimes \underline{u}' \}'' + \tilde{p}'' = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\sigma}{\lambda} f\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right) \right) \cdot$$

$$\left\{ \rho'' \frac{\alpha^2}{2} \tilde{I} + \frac{3}{4} \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} [\alpha \operatorname{grad}_s (\rho'' J_{\rho} - \rho'' \underline{u}'') + \rho'' (J_{\rho} + \underline{u}'') \otimes_s \operatorname{grad} (\alpha^2)] \right\} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \{ (\rho'' \underline{u}' \otimes \underline{u}' + p) \underline{u}' \}'' &= 2 \left\{ 1 + \frac{\sqrt{2} \sigma^2}{15 \lambda} f\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right) \right\} \rho'' \lambda^2 (J_{\rho} - \underline{u}'') \\ &\quad - \frac{16}{15} \left\{ \lambda + \frac{\sigma^2}{3 \lambda} f\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right) \right\} (\alpha^3 \operatorname{grad} \rho'' + \rho'' \operatorname{grad} (\alpha^3)), \end{aligned} \quad (17)$$

w których przez grad_s i $\otimes_s$ oznaczono operację brania części symetrycznej, zaś idemfaktor Gibbsa oznaczono przez $\tilde{I}$. Powyższe równania są kulminacyjnym punktem długiej procedury rachunkowej, opartej o ułożoną kinetyczną teorię gazów gęstych. Oceniając je z punktu widzenia współczesnej teorii turbulencji, należy z żalem podkreślić, że są one prawie nieznanne. Dokładnie mówiąc, tylko człony podkreślone linią przerywaną zostały niezależnie odkryte dla teorii turbulencji. Cała reszta, tzn. rów. (15), (16), (17) są w teorii turbulencji wciąż nieużywane.

Podstawowe równania konstytutywne (15–17) nie wyczerpują listy wszystkich potrzebnych zależności, gdyż np. brak jest ukonstruowania takiej wielkości jak

$$\partial_{te'} [\rho'' (\underline{u}'^2)]'' = -\operatorname{div} \{ \rho'' (\underline{u}'^2)' \underline{u}' \}'' , \quad (18)$$

⁸¹ $3\alpha^2 = 2(\underline{u}' \cdot \underline{u}')''^2 = 2k^2$, gdzie k współcześnie używane używane oznaczenie na średnią energii ruchu względnego

⁸² ibidem, rów. (221), (222), (223)

oraz innych występujących w równaniu (13)⁸³.

Analiza zachowania się ujemnych nierówności tworzących pewną uporządkowaną siatkę wskazuje, jak dowodzi tego Reynolds w rozdz. XIII, że równania konstytutywne winny być rozbudowane o dodatkowe wkłady pochodzące od indukowanej sprężystości układu. Mają one, zdaniem Reynoldsa, mieć następującą postać⁸⁴:

- dla dewiatora strumienia unoszenia

$$\partial_t \left[\rho'' \{ \underline{u}' \otimes \underline{u}' \}'' - \frac{\alpha^2}{2} \underline{I} \right] = -2\rho'' \frac{\alpha^2}{2} \left[\underline{d} - \frac{1}{3} d \underline{I} \right], \quad (19)$$

- dla dewiatora strumienia przewodzenia

$$\partial_t \left[\underline{p}'' - \frac{1}{3} p'' \underline{I} \right] = -\frac{0.32}{\rho'' \frac{\alpha^2}{2}} p'^2 \left[\underline{d} - \frac{1}{3} d \underline{I} \right], \quad (20)$$

- dla śladu unoszenia α i przewodzenia p'' , odpowiednio

$$\begin{cases} \partial_t (\rho'' \frac{\alpha^2}{2}) &= -\frac{2}{3} \rho'' \frac{\alpha^2}{2} \operatorname{div} \underline{u}'', \\ \partial_t p'' &= -\frac{2}{3} \frac{p''^2}{\alpha^2} \operatorname{div} \underline{u}'', \end{cases} \quad (21)$$

gdzie: $\underline{d} \equiv \operatorname{grad}_s \underline{u}'', d \equiv \operatorname{div} \underline{u}'' = \operatorname{tr} \underline{d}$. Natomiast złożenie równań konstytutywnych (19-21) z równaniami (15-17) nie jest sprawą prostą. Powrócimy do tego zagadnienia w rozdz. 7, odnotujmy już teraz, że to równania (19-20) są dla Reynoldsa podstawą analizy propagacji fal.

Prezentowane tu równania szkicują główne elementy modelu Reynoldsa. Pominęto wiele ważnych, wcale nie drugorzędnych zagadnień, które mogą być ważne przy innym sposobie odczytania pracy Reynoldsa⁸⁵.

6. Kwantowa teoria eteru

Od czasu opublikowania *Sub-mechaniki wszechświata* ukazało się kilka opracowań na ten temat. Wydaje się jednak, że najbardziej był studiowany tekst wykładu (z licznymi ilustracjami) jaki Reynolds wygłosił najpierw w Królewskim Towarzystwie, a potem w Literacko-Przyrodniczym Towarzystwie w Manchesterze. G. H. Bryan⁸⁶, który prawdopodobnie był recenzentem dla Phil. Transactions,

⁸³ Analiza postępowania Reynoldsa wskazuje, że zmierza on, w pewnym sensie, do modelu turbulencji, w którym k opisane jest równaniem różniczkowym (12), natomiast algebraiczne wyrażenie na długość drogi mieszania $\lambda = l_m$ otrzymujemy z zależności statystycznych typu r. (14). Pomija się natomiast równanie (13) i szansę na opisanie ewolucji ϵ

⁸⁴ ibidem, r. (263), (255) i (264) odpowiednio

⁸⁵ model matematyczny wyrażony jest w ponad 400 wzorach, z których tylko 18 tutaj powtórzone

⁸⁶ Bryan: Nature, 68(1903)

ogranicza się do powtórzenia wstępnych informacji o modelu. Jego analiza modelu matematycznego ogranicza się do wyliczenia tytułów rozdziałów i wskazania szeregu błędów drukarskich. Jego zdaniem praca winna być poddana „ważnemu i krytycznemu przestudiowaniu” przez badaczy „fizyki matematycznej”. Jest natomiast niezrozumiałym zupełnie pominięcie pracy wśród uczonych zajmujących się turbulencją i kinetyczną teorią gazów.

Ciekawe jest jednak, iż równoległe do pracy Reynoldsa ukazały się inne, nieraz podobne, modele. Przykładem jest tu praca J. Fräsera⁸⁷, który zakłada również, że materia jest „pęcherzem” w siatce gęsto upakowanych sztywnych sfer. W swojej pracy, będącej słownym omówieniem teorii atomu i związanych z nim zjawisk elektrycznych, Fraser rozszerza model eteru ziarnistego również dla opisu ciepła ukrytego, elektrycznego przewodnictwa metali i oporności elektrycznej, antycypując nawet możliwość nadprzewodnictwa⁸⁸.

Generalnie jednak, po śmierci Lorda Kelvina w 1907 roku, ilość badaczy teorii pola aktywnie zajmująca się problematyką eteru zaczęła gwałtownie maleć, mimo że eter stał przed koniecznością uwzględnienia zjawisk kwantowych⁸⁹. Okazało się również, że raz jeszcze modele eteru odegrały pierwszoplanową rolę, gdy po odkryciu dualnej falowo-korpuskularnej natury światła Prof. J. J. Thomson opracował model światła, który obok zwykłej fali poprzecznej, zawierał w sobie sporcjowany wkład energii zamknięty w pierścieniowej tubie Faraday’a, poruszającej się z prędkością światła.

Profesor Whittaker oraz inni zaangażowani w ten problem próbowali odbudować model eteru Maxwella tak aby był spójny z kwantową naturą światła. Pojawiło się wtedy szereg prac⁹⁰ wracających do pierwszych koncepcji Maxwella⁹¹ i późniejszych prób Heaviside’a usiłujących „usymetryzować” układ równań Maxwella. W tej debacie wziął nawet udział rosyjski znawca eteru Profesor Kasterin⁹², który zauważył, iż sporcjowany efekt tuby Faraday’a daje, obok hipotetycznego strumienia magnetycznego, również i nieciągłość w liniach pola magnetycznego.

Przez wiele dalszych lat E. T. Whittaker był niekwestionowanym autorytetem i znawcą w dziedzinie eteru, traktowanej jako część teorii pola. Po jego śmierci niezrozumiałą próbę przywrócenia eteru wszechmogącego podjął sam P. A. M. Dirac⁹³, wykazując przy tym brak podstawowej wiedzy w tej dyscyplinie. Podnoszone przez Diraca do rangi niemalże odkrycia pojęcie pseudo-pędu eteru zostało zdefiniowane już przez Maxwella za pomocą wektora potencjału. Niezrozumiała jest konieczność badania niezmienniczości eteru ze względu na transformacje Lorentza, gdyż historycznie rzecz biorąc, to wyłącznie dzięki eterowi Maxwella zostały wydedukowane. Eter Maxwella oprócz tej niezmienniczości, czego już nie za-

⁸⁷Fraser: PRS Edin., 25(1905)

⁸⁸ibidem, 710

⁸⁹E. Madelung: Z. Physik, 40(1926); Allen: PRS. Edin., 41(1920); Larmor: Proc. Nat. Acad. Sc., 4(1918)

⁹⁰Whittaker: Proc. R. S. Edin., 42(1921), 46(1926)

⁹¹Maxwell: Phil. Mag. 1861, 1862

⁹²Kasterin: Phil. Mag., 2(1926)

⁹³Dirac: Nature, 168(1952)

uważa Dirac, posiada dużo ważniejszą niezmienniczość względem lokalnej grupy $U(1)$. Prof. Infeld z Warszawy informuje⁹⁴ tych samych czytelników, że dzięki matematycznym przekształceniom i korekcie linii rozumowania Diraca, nie jest konieczny powrót do eteru wszechmogącego.

Praktycznie biorąc to Whittaker zamyka ten okres rozwoju 19- i 20-wiecznej klasycznej teorii pola, w którym starano się zrozumieć i wyseparować mechaniczny aspekt każdego zjawiska. Było i jest to wciąż możliwe, ponieważ prawa zachowania pędu i energii są związane z niezmienniczością względem globalnych grup symetrii naszej areny (czasu i przestrzeni), na której zjawiska są obserwowane. Mechanicyzm, tak jak go oryginalnie rozumiał Kelvin, nie jest paradygmatem badawczym, który można odrzucić bez żadnej szkody – jest raczej permanentnym aspektem każdego zjawiska fizycznego. I chyba to właśnie mechanicyzm różnych modeli eteru okazał się być najbardziej odpychający dla fizyków, którzy odłożyli jego liczne i oryginalne koncepcje do lamusa, kontynuując jedynie koncepcję unifikacji wszystkich sił przyrody. Patrząc jednak z historycznej perspektywy na liczne modele jednolitej teorii pola, wypełniające dziś po brzegi specjalistyczne żurnale, to jest ciekawym jak ocenia te wysiłki fizycy za sto lat. Czy modele te nie będą odpychały czytelnika nadmiernym „geometryzmem”? Czy idea unifikacji całej materii i fizycznej czasoprzestrzeni nie zostanie porzucona?

7. Implikacje modelu Reynoldsa

Przechodzimy teraz do rozpatrzenia implikacji modelu Reynoldsa dla teorii grawitacji, turbulencji i kinetycznej teorii gazów.

Swój model grawitacji ogranicza Reynolds (par. 218) do zbudowania i fizycznego uzasadnienia potencjału grawitacyjnego V . Następnym krokiem w kierunku pełniejszego modelu grawitacji jest praca Nördstroma⁹⁵, w której autor proponował, dla równania konstytutywnego grawitacji $T_{\nu\mu} = \chi R_{\nu\mu}$, $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, użycie V w postaci

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu V. \quad (22)$$

To podejście, w teorii eteru, jest znane jako poszukiwanie funkcji naprężeń dla strumienia energii - pędu $T_{\mu\nu}$ zaś V nosi tu nazwę funkcji Airy'ego. Lepszym rozwiązaniem w (22) byłyby funkcje naprężeń Maxwella lub Morrery. Pełnym rozwiązaniem, również znanym w teorii eteru są funkcje naprężeń Arzhanikha⁹⁶, które prowadzą w konsekwencji do liniowej teorii grawitacji. Koncepcja mówiąca o tym, że krzywizna eteru może być spowodowana obecnością dyslokacji i defektów w eterze powróciła na łono teorii grawitacji w pracach Hehla⁹⁷ i Hehla & Krönera⁹⁸. Znany jest również przypadek odwrotny, kiedy to pojęcie krzywizny

⁹⁴Infeld: Nature, 169(1952)

⁹⁵Nördstrom: Phys. Zeit, 13(1912)

⁹⁶Arzhanikh: Dok. AN SSSR, 83(1952)

⁹⁷Hehl: Fund. Phys., 15(1985)

⁹⁸Hehl: Kröner, Z. für Phys., 187(1965)

i skrócenia przeszło z teorii grawitacji do teorii defektów w materii krystalicznej. Mamy tu na myśli prace Bilby'ego⁹⁹ i współpracowników, które zaszczyliły nurt geometryzacji również i w teorii ośrodków ciągłych.

Okazuje się również, że współczesna statystyczna teoria turbulencji, której zarodki znajdujemy w pracy Taylora¹⁰⁰, ma wiele z modelu Reynoldsa. Jego równanie na ewolucję średniej energii ruchu względnego (12), po podstawieniu równań konstytutywnych na nieznane strumienie

$$\begin{cases} 0.5\partial_{t\epsilon'}(\rho''\underline{u}'^2)'' &= -\text{div}(\rho''k\underline{u}'), \\ 0.5\partial_{t\epsilon'}(\rho\underline{u}'^2)'' &= -\text{div}(p'\underline{u}'), \end{cases} \quad (23)$$

gdzie $k = \sqrt{3/2}\alpha$, $p' = \text{tr } \underline{p}'$ oraz po podstawieniu $\text{tr}(\underline{p}' \text{grad } \underline{u}')'' \equiv \mu_t\{(\text{grad } \underline{u}')^2\}''$, prowadzi do

$$\begin{aligned} \rho''\partial_t k &= -\text{div}(\rho''k\underline{u}' + p'\underline{u}')'' - \\ &\quad \rho''\{\underline{u}' \otimes \underline{u}'\}'' \cdot \text{grad } \underline{u}'' + \mu_t(\text{grad } \underline{u}')^2''. \end{aligned} \quad (24)$$

Korzystając dalej z równań konstytutywnych typu (16) możemy poszczególne człony (24) zapisać jako

$$\begin{cases} -\rho''\{k\underline{u}'\}'' + \{p'\underline{u}'\}'' &= a_1\rho''k^{1/2}\lambda \text{grad } k, \\ -\rho''\{\underline{u}' \otimes \underline{u}'\}'' &= k\lambda\rho''\text{grad}_s \underline{u}'', \\ -\mu_t(\text{grad } \underline{u}')^2'' &= a_2\frac{\rho''}{\lambda}k^{3/2}. \end{cases} \quad (25)$$

Tak więc ostateczne równanie bilansu energii średniej ruchu względnego (12) przyjmuje klasyczną nieliniową postać znaną z teorii $k - \epsilon$

$$\rho''\partial_t k = \text{div}\left(\frac{\mu_t}{a_1}\text{grad } k\right) + \mu_t \text{grad}_s \underline{u}'' \cdot \text{grad}_s \underline{u}'' + a_2\frac{\rho''}{\lambda}k^{3/2}, \quad (26)$$

gdzie lepkość turbulentna $\mu_t = k\lambda\rho''$ jest również funkcją k .

O wiele bardziej skomplikowanie przedstawia się zagadnienie wykazania podobieństwa między równaniem ewolucji energii względnej ruchu względnego (13), a fenomenologicznym równaniem ewolucji dla parametru Stokesa ϵ . Ponieważ sens fizyczny obu tych równań jest podobny, to można przypuszczać, że taki związek istnieje. Tym samym, matematyczny model Reynoldsa oceniany z punktu widzenia teorii turbulencji, może być określony jako model z jednym różniczkowym równaniem ewolucyjnym (na k lub α) oraz statystycznie określoną drogę mieszania $\lambda \equiv l_m$.

Przejdźmy na koniec, do zagadnienia złożenia równań konstytutywnych (15-17) i (19-21) w jeden model. Z kinetycznej teorii gazów wiadomo, że można to wykonać na dwa różne sposoby. Pierwszy, to takie zsumowanie, kiedy pochodna

⁹⁹Bilby i in.: PRS, London, A231(1955)

¹⁰⁰Taylor: PRS, London, A151(1955)

czasowa pozostaje po lewej stronie równań. Otrzymujemy wtedy Maxwellowski model z relaksacją, który we współczesnej „uzupełnionej” wersji jest podstawą tzw. rozszerzonej termodynamiki. Sposób drugi, zastosowany przez Reynoldsa w pracy, prowadzi do wystąpienia pochodnej czasowej po prawej stronie równań konstytutywnych (modele z retardacją). Współcześnie, po wielu uzupełnieniach, ten model równań konstytutywnych nazywa się drugim przybliżeniem Burnetta. Jego prawdziwe źródła sięgają jednak poza pracę z 1903 roku i występują już w Reynoldsowskim modelu opisującym zjawisko „thermal transpiration” w 1879 r. We współczesnej kinetycznej teorii gazów oba te kierunki modelowania (z relaksacją i retardacją) są słabo rozróżniane, gdyż zeszyły się w jeden kierunek zwany teorią równań konstytutywnych ośrodków słabo-nielokalnych w czasie.

8. Podsumowanie

- a. Model jednolitej teorii pola Reynoldsa jest obmyślony i wykonany w zgodzie z mechanicyzmem XIX-wiecznym, tj. podstawowym kanonem badawczym jaki był ważny 100 lat temu. Tak jak XX-wieczni fizycy pozostają w nurcie geometrycznym, tak i Reynolds był w nurcie badawczym właściwym jego epoce. Jego model ma dla nas dwie ważne cechy. Pierwsza zakłada dyskretną, „kwantową” naturę eteru, którego najmniejsze ziarno – primordian ma wymiar mniejszy o 10^5 razy od wymiaru elektronu. Poziom fenomenologiczny, takiego dyskretnego eteru, jest możliwy do osiągnięcia po zastosowaniu jakiś technik wysumowywania. Reynolds zastosował nowoczesną i trudną, jak na jego czasy, technikę pochodzącą z udoskonalonej kinetycznej teorii gazów.

Druga cecha modelu, niezwykle szczęśliwa dla wyjaśnienia mechanizmu grawitacji¹⁰¹, to to, że efekty grawitacyjne wynikają ze zmian struktury eteru wywołanych obecnością materii (defektów). Krzywizna eteru ma więc podobny charakter do krzywizny kryształów, wywołanej gęstym rozkładem jego liniowych defektów – dyslokacji. Ważne jest tu to, że efekty grawitacyjne propagują się tak jak i inne, z prędkością światła.

- b. Oryginalny pomysł na otrzymanie równań ośrodka dwufazowego, zastosowany przez Reynoldsa, nie jest prostym powieleniem Maxwellowskich równań transportu, co więcej, jest nawet, z uwagi na brak całki zderzeń, w opozycji do nich. Ośrodek gęsto upakowanych sfer, posiada swoją ukrytą anizotropię, wymaga innego zdefiniowania i obliczania drogi swobodnej. Przewodzenie, pomijalne dla gazów, staje się, dla przypadku medium Reynoldsa, tak samo ważne jak unoszenie i dlatego oba te mechanizmy wymagają konstytutywnego modelowania.
- c. Kielki prawie wszystkich współczesnych koncepcji teorii turbulencji są do odśzukania w pracy Reynoldsa. Koncepcje fenomenologiczne teorii $k - \epsilon$

¹⁰¹ Whittaker: Endeavour, 3(1944)

jak i teorii statystycznej są do odtworzenia z modelu Reynoldsa, ale po przywróceniu $tr(p \text{ grad } u) \neq 0$.

Dorobek Reynoldsa był dotychczas pomijany przy omawianiu historii XIX-wiecznej klasycznej teorii pola. Wydaje się jednak, sądząc po przedstawionych i przedyskutowanych tu argumentach, że jego praca winna znaleźć się w gronie wybitnych dzieł XIX-wiecznej teorii pola, na równi, nawet, z pracami Kelvina, MacCullagha, Cauchy'ego i Boussinesqa.

Gdańsk, sierpień 1995

Janusz Badur (IMP PAN w Gdańsku)
J. Derek Jackson (University of Manchester)

Literatura

- [1] Aitchison I. J.: *Nothing's plenty, the vacuum in modern quantum field theory*, Contemp. Phys., 26(1985), 333-64
- [2] Allen J.: *The life and work of Osborne Reynolds*, Opening lecture of the 1968 Osborne Reynolds Centenary Symposium, University of Manchester, 1-82
- [3] Allen H. S.: *Ether and the Quantum Theory*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 41(1929-1921), 34-43
- [4] Aržhanikh I. S.: *Tensor stress function of hydrodynamics*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 83(1952), 195-198
- [5] Axon H. J., Matheson J. A. L.: *Dislocation models in 1902 ?*, Nature, 178(1956), 222-224
- [6] Bilby B. A., Bullough R., Smith E.: *Continuous distribution of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry (część IV wraz z Markiem Żórawskim)*, Proc. Roy. Soc. London, A231(1955), 263-273
- [7] Buijs-Ballot C. H. D.: *Über die Art von Bewegung, welche wir Wärme und Electricität nennen*, Ann. Physik, 103(1858), 240-250
- [8] Bryan G.: *A new mechanical theory of aether, (a review of Reynolds theory)*, Nature, 68(1903), 600-602.
- [9] Cauchy A. L.: *Memoire sur les vibrations d'un double systeme de molecules et de l'ether contenu dans un corpes oristallise*, Euvres, 2(1849), 338-350

- [10] Craig T.: *Displacement depending on one, two, and three parameters in a space of four dimensions*, Amer. J. Math., 20(1898), 135-156
- [11] Dirac P. A. M.: *Is there an Aether ?*, Nature, 168(1951), 906-07, 169(1952), 702
- [12] Eckart C.: *Variational principles of hydrodynamics*, Phys. Fluids, 3(1960), 421-427
- [13] Enz C. P.: *Two-fluid hydromechanical description of ordered systems*, Rev. Mod. Phys. 46(1974), 705-753
- [14] Eshelby J. D.: *The elastic energy - momentum tensor* J. Elasticity, 5(1975), 231-235
- [15] FitzGerald G. F.: *On an electromagnetic interpretation of turbulent liquid motion*, Nature, 9 May, 1889; *The Scientific Writings of the late G. F. FitzGerald*, Dublin, Hodges, Figges & Co., (1902), 254-261
- [16] Fraser J.: *Suggestions towards a theory of electicity based on the bubble atom*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 25(1905), 680-716
- [17] Graetz L.: *Über eine mechanische Darstellung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen in ruhenden Körperen*, Ann d. Physik u. Chem., (3), 5(1901), 375-400
- [18] Green G.: *On the propagation of light in crystallized media*, Trans. Cambridge Phil. Soc., 7(1839), 121-140
- [19] Hehl F.: *On the kinematics of the torsion of space - time*, Fund. Phys., 15(1985), 451-471
- [20] Hehl F., Kröner E.: *Über den Spin in der allgemeinen Relativitätstheorie, Eine notwendige Erweiterung der Einsteinschen Feldgleichungen*, Zeitschrift für Physik, 187(1965), 478-489
- [21] Helmholtz H.: *Über die Tatsachen die der Geometrie zugrunde liegen*, Nachr. Ges. Wiss. Gött., 9(1868), 193-221
- [22] Infeld L.: *Is there an aether ?*, Nature, 169(1952), 702
- [23] Jackson J. D.: *Osborne Reynolds - Scientist, Engineer and Pioneer*, Opening lecture of 1994 Osborne Reynolds Centenary Symposium, UMIST, Manchester, (1994) artykuł przyjęty do druku [w] Phil. Trans. Roy. Soc., London 1995
- [24] Kasterin N. P.: *On Sir J.J. Thomson's model of a light - quantum*, Phil. Mag., 2(1926), 1208-1212

- [25] Kostro L.: *Alberta Einsteina koncepcja eteru relatywistycznego*, Uniwersytet Gdański, (1992), 1-193
- [26] Korn A.: *Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik*, Berlin 1898
- [27] Landau L.: *The theory of superfluidity of helium II*, J. Phys., USSR, 5(1941), 71-103
- [28] Larmor J.: *On the essence of physical relativity*, Proc. Nat. Acad. Sci., 4(1918), 334-337
- [29] Larmor J.: *A dynamical theory of the electric and luminiferous medium*, Phil. Trans. Roy. Soc., London, A185(1894), 719-822
- [30] Madelung E.: *Quantumtheorie in hydrodynamischer Form*, Zeit. Physik, 40(1926), 322-326
- [31] Maxwell J. C.: *Ether*, , hasło w: Encyklopedia Britannica, również [w] "The Scientific Papers of James Clark Maxwell, ed. W. D. Niven, Vol. 2, 763-774 (Cambridge Press, 1890), (nie jest znana data opublikowania tego artykułu, gdyż edytor usunął dane, prawdopodobnie 1875)
- [32] Maxwell J. C.: *On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 170(1879), 231-256
- [33] Maxwell J. C.: *On physical lines of force*, Phil. Mag., 21(1861), Part I, II, 22(1862), Part III, IV; "Papers", (1890), Vol. 1, 451-466, 467-488; 489-502, 503-513
- [34] Nördstrom G.: *Relativitätsprincip und Gravitation*, Physik Zeitschr., 13(1912), 1126-29
- [35] Pearson K.: *On the generalized equations of elasticity and their application to the wave theory of light*, Proc., London Math. Soc., 20(1889), 297-350
- [36] Rankine W. J. M.: *On the thermal energy of molecular vortices*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 6(1868-1869), 590-592
- [37] Rankine W. J. M.: *On the centrifugal theory of elasticity as applied to gasses and vapours*, Phil. Mag., 2(1851), 509-542
- [38] Reynolds O.: *Experiments showing dilatancy, a property of granular material, possibly connected with gravitation*, Proc. Royal Inst. Great Britain, Feb. 12, 11(1886), 354-363, Papers, (1901), Vol. II, 217-227
- [39] Reynolds O.: *On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. With experimental illustrations*, Phil. Mag. Dec. 1885, 20(1886-1887), 469-481

- również w: O. Reynolds, Papers on Mechanical and Physical Subjects, (1901), Vol. II, 203-216, Cambridge University Press
- [40] Reynolds O.: *The Sub-Mechanics of the Universe*, Papers, (1903), Vol. III, 1-251
- [41] Reynolds O.: *On an inversion of ideals as to the structure of the universe, (The Rede Lecture, June 10, 1902)*, (1903), Cambridge University Press, 1-44
- [42] Reynolds O.: *On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of criterion*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A186(1895), 123-164
- [43] Reynolds O.: *On certain dimensional properties of matter in gaseous state; I. Experimental researches on thermal transpiration and impulsion including an experimental proof that gas is not a continuous plenum, II. On an extension of the dynamical theory of gas which includes the stresses, tangential and normal caused by a varying condition of gas and affords an explanation of the phenomena of transpiration and impulsion*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 170(1879), 727-845
- [44] Reynolds O.: *Memoir of James Prescott Joule*, Memoirs and Proc. of the Manchester Literary & Philosophical Society, 60(1892), 1-196
- [45] Reynolds O.: *An experimental investigation of circumstance which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 174(1883), 935-982
- [46] Reynolds O.: *Experiments showing dilatancy, a property of granular material, possibly connected with gravitation*, Proc. Royal Inst. Great Britain, Feb. 12, 11(1866), 354-363, Papers, Vol. II, 217-227
- [47] Rosenberg B. L.: *Amusement device employing dilatant suspension filler*, U. S. Patent 3, 601, 923, 31 Aug. 1971 (informacja prywatna)
- [48] Skiba E.: *Teoria matematyczna pochłaniania światła*, Pamiętnik Akademii Umiejętności, Kraków 1, (1874), 105-131
- [49] Schaffner K. F.: *Nineteenth-century aether theories*, Pergamon Press, 1972
- [50] Taylor G. I.: *Statistical theory of turbulence*, Proc. Roy. Soc. London, A151(1935), 421-478
- [51] Thomson W.: *On vortex motion*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 25(1867-1869), 217-269
- [52] Thomson W.: *On the ultramundane corpuscles of Le Sage*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 8(1871-1872), 577-589

- [53] Thomson W.: *On the propagation of laminar motion through a turbulently moving inviscid liquid*, Phil. Mag., 24(1887), 342-353
- [54] Thomson J. J.: *Treatise on the motion of vortex rings*, Macmillian & Co. London, (1883), 1-124
- [55] Whittaker E. T.: *On the quantum mechanism in the atom*, Proc. Roy. Soc., Edinburg, 42(1921-1922), 129-142
- [56] Whittaker E. T.: *On the adjustment of Sir J.J. Thomsons Theory of light to the classical electromagnetic theory*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 46(1925-1926), 116-125
- [57] Whittaker E. T.: *A history of the theories of aether and electricity*, (1910), Vol. 1, The Classical Theories, (1949), Vol. 2, The Modern Theories
- [58] Whittaker E. T.: *Old and new ideas of gravitation*, Endeavour, 3(1944), 39-42