

P O L S K A A K A D E M I A N A U K

I N S T Y T U T M A S Z Y N P R Z E P Ł Y W O W Y C H

**TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF
FLUID-FLOW MACHINERY**

PRACE

I N S T Y T U T U M A S Z Y N P R Z E P Ł Y W O W Y C H

96



GDAŃSK 1993

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machines

RADA REDAKCYJNA – EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH * HENRYK JARZYNA * JERZY KRZYŻANOWSKI
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ * WŁODZIMIERZ J. PROSNAK
JÓZEF ŚMIGIELSKI * ZENON ZAKRZEWSKI

KOMITET REDAKCYJNY – EDITORIAL COMMITTEE

EUSTACHY S. BURKA (REDAKTOR NACZELNY – EDITOR-IN-CHIEF)
JAROSŁAW MIKIELEWICZ
EDWARD ŚLIWICKI (REDAKTOR – EXECUTIVE EDITOR) * ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA – EDITORIAL OFFICE

Wydawnictwo Instytutu Maszyn Przepływowych
Polskiej Akademii Nauk
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. poczt. 621,
tel. (0-58) 41-12-71 wew. 141, fax: (0-58) 41-61-44,
e-mail: tjan@imppan.imp.pg.gda.pl

ISBN 83-01-94610-1
ISSN 0079-3205

JERZY ŚWIRYDCZUK¹

Opis przepływu przez palisadę profilów umożliwiający analizę lokalnych zaburzeń wirowych

W pracy przedstawiona została metoda opisu przepływu potencjalnego płynu nielepkiego i nieściśliwego przez palisadę prostoliniową profilów, stwarzająca możliwość uwzględnienia lokalnych wirowych zaburzeń pola prędkości w badanym obszarze. Wpływ powyższych zaburzeń modelowany jest przy pomocy sekwencji struktur wirowych, generowanych w sposób zapewniający spełnienie zadanych warunków początkowych i brzegowych. Algorytm poszukiwania rozwiązania wykorzystuje technikę odwzorowań konforemnych. Jako przykład wykorzystania metody przedstawiono wyniki obliczeń przebiegu zmian sił i cyrkulacji wokół profilów palisady wywołanych przez swobodny wir potencjalny, przepływający przez jeden z jej kanałów.

1. Wstęp

Głównym celem obliczeń przepływów przez palisady profilowe jest zazwyczaj wyznaczenie geometrycznych i fizycznych warunków przepływu umożliwiających uzyskanie zadanych wartości parametrów technicznych np. sprężu, wydatku itp. Obliczenia takie są wystarczające dla przewidywania jakości pracy maszyny w warunkach stacjonarnych, zbliżonych do projektowych. Jednakże, szereg dokuczliwych efektów ubocznych, takich jak nadmierna hałaśliwość, wahania sprawności, mocy, czy też nawet awarie części przepływowych maszyn, zwróciły większą uwagę projektantów na efekty niestacjonarne, związane z lokalnymi, lub chwilowymi zaburzeniami w określonych rejonach obszaru przepływu. Takimi lokalnymi zaburzeniami przepływu mogą być np. sekwencje śladów spływowych typu ścieżki von Karmana za krawędziami spływowymi profilów, czy też, wykazujące znacznie mniejszą częstotliwość i regularność występowania, wiry tworzące się w trakcie odrywania się warstwy przyściennej od powierzchni profilu. Cechą charakterystyczną tych zaburzeń jest, iż mogą pojawiać się one nie we wszystkich kanałach jednocześnie, przyjmować różny przebieg w każdym z nich, a nawet przenosić się

¹Zakład Dynamiki Gazów Instytutu Maszyn Przepływowych PAN

z jednego kanału w drugi, jak to ma miejsce w przypadku wirującego oderwania. Powoduje to, iż w odróżnieniu od przypadku stacjonarnego, analiza zjawisk niestacjonarnych w przepływach palisadowych winna być prowadzona w obszarze obejmującym pewną grupę sąsiadujących ze sobą kanałów, których ilość zależna jest od zasięgu badanego zjawiska.

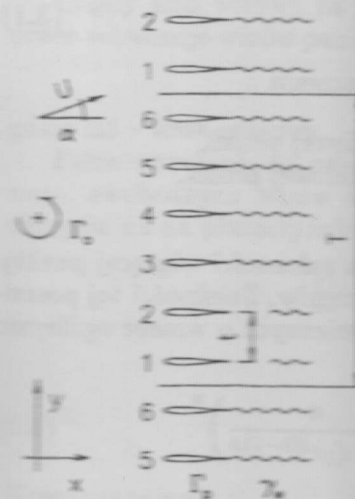
W spotykanych w literaturze publikacjach na temat przepływów przez palisady, zarówno stacjonarnych, jak i niestacjonarnych, przepływ analizowany bywa najczęściej przy użyciu metod należących do jednej z dwóch grup: grupy metod wykorzystujących generację siatek dla uzyskania rozwiązania oraz grupy metod osobliwości. Przykładami metod należących do pierwszej grupy mogą być metody różnic skończonych, czy objętości skończonych. Oceniane są one jako bardzo skuteczne w analizie przepływów stacjonarnych, oraz w tych przypadkach opływów niestacjonarnych, które prowadzą do powstawania w przepływie struktur wielkoskalowych. Cechą charakterystyczną tych metod jest konieczność wyznaczania rozwiązania we wszystkich węzłach siatki, na jaką dzielony jest analizowany obszar. W przypadku większych koncentracji wirowości w przepływie konieczność stosowania drobnej podziałki prowadzić może do dużych utrudnień natury czysto numerycznej (czas obliczeń, wymagana pojemność pamięci, stabilność numeryczna algorytmu). Niedostatków tego typu w zasadzie nie wykazują metody należące do drugiej grupy, w których przepływ jest modelowany przez odpowiedni rozkład osobliwości typu źródło, wir, dipol, realizowany najczęściej wzdłuż granic obszaru przepływu, tj. w niniejszym przypadku, wzdłuż konturów profili lub poza jego obszarem, np. wewnątrz profili. Ogranicza to w znacznym stopniu ilość punktów, w których konieczne jest wyznaczenie rozwiązania [1]. Pewnym niedostatkim tych metod jest, iż ze względu na punktową, z konieczności, reprezentację osobliwości opisujących przepływ w obliczeniach numerycznych, otrzymywane wyniki są mało dokładne w obszarach bliskich lokalizacji osobliwości (w niniejszym przypadku – w pobliżu konturów profili), a zwiększenie dokładności wymaga stosowania dodatkowych technik interpolacyjnych. Usterka ta może prowadzić do znacznego zniekształcenia wyników w przypadku zjawisk niestacjonarnych, których analiza prowadzona jest często na drodze wyznaczania ciągu chwilowych obrazów przepływu, z których każdy następny obraz wyznaczany jest na podstawie danych uzyskanych w kroku poprzednim.

W niniejszej pracy przedstawiono metodę opisu przepływu przez palisadę prostoliniową, przy użyciu odwzorowania konforemnego. Zarówno funkcja odwzorowująca, jak i wyrażenie opisujące pole prędkości w obszarze pomocniczym wyznaczane są w postaci szeregów potęgowych ułamków wymiernych. Ocenia się, iż powyższy opis umożliwia wyznaczenie pola prędkości z relatywnie dużą, w porównaniu ze wspomnianymi poprzednio metodami, dokładnością. Sposób zastosowania metody przedstawiono na przykładzie analizy przepływu wiru potencjalnego przez jeden z kanałów palisady. Przykład ten, aczkolwiek raczej nietypowy z punktu widzenia przepływów przez palisadę, został wybrany z powodu dużej ilości danych literaturowych dotyczących przypadku współdziałania wiru z pojedynczym profilem, co umożliwia analizę porównawczą uzyskanych wyników.

2. Niestacjonarny prze

Rozważany jest przepływ w obszarze pomocniczym. Strumień napływa na granicę odciętych kąt α – jak to przedstawiono na rysunku 1. Lokalne zaburzenie pola prędkości spowodowane jest pojawieniem się pojedynczego wiru o mocy Γ_0 . W tym celu, jak się to widzi na rysunku 1, palisady, jakie są indykowane przez ślady wirowe, o chwili pojawienia się wiru oraz zachodzącą jednoczesnie zmianę kierunku przepływu, określić charakter i oszacować jego wielkość oraz wynikające stąd fluktuacje prędkości.

Bezpośrednie rozwiązanie



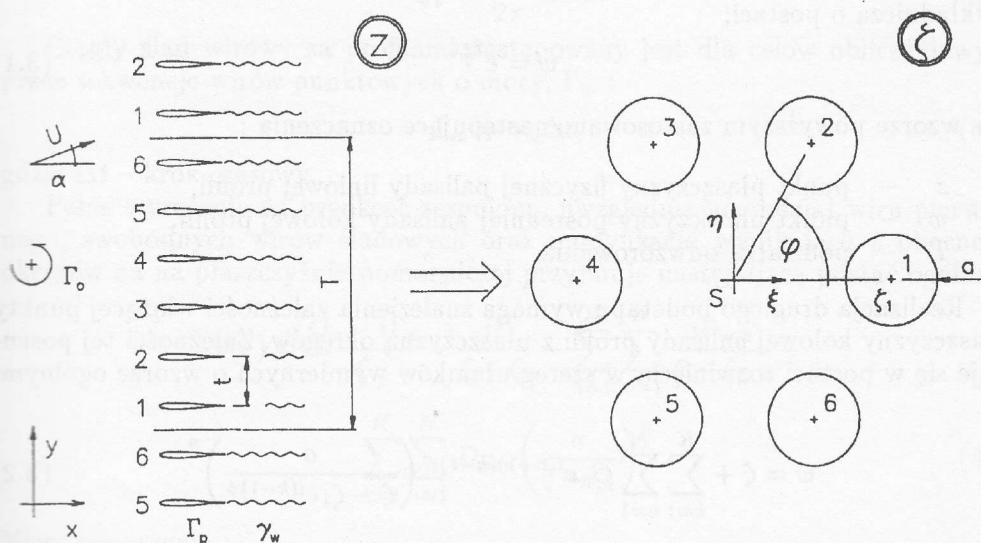
Rys. 1. Lokalnie zaburzony przepływ w obszarze pomocniczym: U , α – prędkość i kierunek przepływu; Γ_0 – moment wirowy; x , y – współrzędne w obszarze pomocniczym; 1 – ślad wiru; 2 – ślad wiru; 3 – ślad wiru; 4 – ślad wiru; 5 – ślad wiru; 6 – ślad wiru.

skończoną nie jest możliwe, szereg zależności opisujący przepływ przez palisady. Uzasadnionym jest przyjęcie, że przez wir zanika asymptotycznie, co pozwala przyjąć, że w obszarze przepływu wiru można uznać za pominięte oddziaływanie pomiędzy wirami. Oddziaływanie z jej skończonością (obejmuje 6 profili).

2. Niestacjonarny przepływ przez palisadę profili

Rozważany jest przepływ potencjalny przez nieskończoną liniową palisadę profili. Strumień napływa na palisadę z prędkością U , kierunek napływu tworzy z osią odciętych kąt α – jak to pokazano na rys. 1. Wraz z przepływem unoszone jest lokalne zaburzenie pola prędkości, które na rysunku reprezentowane jest przez pojedynczy wir o mocy Γ_0 . Zakłada się, iż wszelkie zmiany pola prędkości w rejonie palisady, jakie są indukowane przez przepływający wir, kompensowane są przez ślady wirowe, o chwilowej mocy γ_w , spływające z krawędzi spływowych profili oraz zachodzącą jednocześnie zmianę cyrkulacji wokół profili Γ_p . Należy określić charakter i oszacować zakres zmian pola prędkości w otoczeniu palisady, oraz wynikające stąd fluktuacje parametrów pracy poszczególnych jej profili.

Bezpośrednie rozwiązanie zagadnienia oddziaływania wiru z palisadą nie-



Rys. 1. Lokalnie zaburzony przepływ przez liniową palisadę profili oraz jego odwzorowanie na płaszczyznę pomocniczą: U, α – prędkość i kierunek napływu strumienia, $\Gamma_0, \gamma_w, \Gamma_p$ – cyrkulacje wiru pierwotnego, wirów śladowych oraz wokół profili, t – podziałka palisady, T – podziałka odwzorowania, a, ξ_1 – promień i środek okręgu nr 1

skończoną nie jest możliwe, gdyż wymagałoby ono wyznaczenia nieskończonego szeregu zależności opisujących oddziaływanie wiru z każdym, oddzielnie, profilem palisady. Uzasadnionym jest jednakże założenie, iż pole prędkości generowane przez wir zanika asymptotycznie i regularnie wraz ze wzrostem odległości od wiru, co pozwala przyjąć wstępnie ilość profili palisady, K , powyżej której wpływ wiru można uznać za pomijalnie mały. Postępując w ten sposób zastępujemy zagadnienie oddziaływania pojedynczego zaburzenia z nieskończoną palisadą przez oddziaływanie z jej skończonym fragmentem (na rys.1 fragment ten, o długości T , obejmuje 6 profili).

Rozwiązanie powyżej sformułowanego zadania może być podzielone na dwa etapy. W pierwszym etapie zostaje wyznaczona funkcja odwzorowująca obszar palisady na zadany obszar pomocniczy, natomiast w etapie drugim – funkcja opisująca pole prędkości w obszarze pomocniczym.

3. Funkcja odwzorowująca

W niniejszym zadaniu płaszczyznę pomocniczą stanowi obszar, na którym K profili palisady przekształconych zostaje na taką samą ilość okręgów, tworzących palisadę kołową (rys.1, płaszczyzna ζ). Odwzorowanie to realizowane może być w dwóch podetapach. W podetapie pierwszym wybrany fragment palisady odwzorowany zostaje na palisadę kołową profili. Wykorzystywana jest tu funkcja wykładnicza o postaci:

$$w = e^{\frac{2\pi z}{T}} \quad (3.1)$$

We wzorze powyższym zastosowano następujące oznaczenia :

- z – punkt płaszczyzny fizycznej palisady liniowej profili,
- w – punkt płaszczyzny pośredniej palisady kołowej profili,
- T – podziałka odwzorowania.

Realizacja drugiego podetapu wymaga znalezienia zależności wiążącej punkty płaszczyzny kołowej palisady profili z płaszczyzną okręgów. Zależności tej poszukuje się w postaci rozwinięcia w szereg ułamków wymiernych o wzorze ogólnym:

$$w = \zeta + \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N C_n e^{i(n+1)(k-1)\phi} \left(\frac{a}{\zeta - \zeta_1 e^{i(k-1)\phi}} \right)^n \quad (3.2)$$

Nowe oznaczenia we wzorze (3.2):

- ζ – punkt płaszczyzny palisady okręgów,
- n, N – indeks bieżący i końcowy rozwinięcia funkcji w szereg,
- C_n – współczynnik zespolony,
- ϕ – kąt pomiędzy środkami dwóch sąsiednich okręgów względem początku układu (patrz rys.1),
- ζ_1 – środek pierwszego okręgu,
- a – promień okręgu (jednakowy dla wszystkich okręgów).

W obu powyższych wzorach wielkościami nieznanymi są : ζ , a oraz C_n . Wielkości te mogą być wyznaczone numerycznie w oparciu o algorytm zamieszczony w pracy [3].

4. Potencjał przepływu

Można wykazać, iż odwrócone przekształcenie przekształca obszar generowany przez źródło w obszar (punkt S na rys. 1). Potencjał

Moc wiru (cyrkulacja d

natomiast moc źródła (wyd

Ciągły ślad wirowy za p
przez sekwencje wirów punk

gdzie Δt – krok czasowy.

Pełne wyrażenie na prędkość w punkcie okręgu będącego źródłem, swobodnych wirów sł
okręgów na na płaszczyźnie

$$\bar{v}(\zeta) = \frac{Q_s}{2\pi a}$$

Nowe oznaczenia :

- W – ilość wirów sł
- $\zeta_{w,k}$ – chwilowe położenie wiru
za k -tym krokiem
- $D_{k,n}$ – współczynnik
- ζ_k – środek k -tego okręgu
- a – promień okręgu

Wielkościami nieznanymi są one jako rozwiązanie układu równań zerowania się prędkości w punkcie okręgu będącego źródłem. Szczegóły dotyczące sposobu obliczeń w pracach [2], [3].

4. Potencjał przepływu na płaszczyźnie pomocniczej

Można wykazać, iż odwzorowanie palisady liniowej profili na palisadę kołową okręgów przekształca przepływ równoległy z płaszczyzny fizycznej na przepływ generowany przez źródło wirowe, usytuowane w początku układu współrzędnych (punkt S na rys. 1). Potencjał zespolony źródła przedstawia się następująco [3]:

$$W(\zeta) = (i\Gamma_s - Q_s) \ln \zeta. \quad (4.1)$$

Moc wiru (cyrkulacja dzielona przez współczynnik 2π) określona jest jako :

$$\Gamma_s = \frac{UT}{2\pi} \cos \alpha, \quad (4.2)$$

natomiast moc źródła (wydatek dzielony przez współczynnik 2π) wynosi :

$$Q_s = \frac{UT}{2\pi} \sin \alpha. \quad (4.3)$$

Ciągły ślad wirowy za profilami zastępowany jest dla celów obliczeniowych przez sekwencje wirów punktowych o mocy, Γ_w :

$$\Gamma_w = \gamma_w \Delta t, \quad (4.4)$$

gdzie Δt – krok czasowy.

Pełne wyrażenie na prędkość zespoloną, uwzględniające udział wiru pierwotnego, swobodnych wirów śladowych oraz modyfikację wynikającą z obecności okręgów na na płaszczyźnie pomocniczej przyjmuje następującą postać ogólną:

$$\begin{aligned} \bar{v}(\zeta) = & \frac{Q_s - i\Gamma_s}{\zeta} - \frac{i\Gamma}{\zeta - \zeta_0} - \sum_{k=1}^K \sum_{w=1}^W \frac{i\Gamma_{w,k}}{\zeta - \zeta_{w,k}} + \\ & \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N D_{k,n} \left(\frac{a}{\zeta - \zeta_k} \right)^n \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nowe oznaczenia :

- W – ilość wirów śladowych za jednym profilem,
- $\zeta_{w,k}$ – chwilowe położenie wiru wygenerowanego w w -tym kroku za k -tym profilem,
- $D_{k,n}$ – współczynnik rozwinięcia wyrażenia na prędkość,
- ζ_k – środek k – tego okręgu,
- a – promień okręgu.

Wielkościami nieznanymi we wzorze (4.5) są współczynniki $D_{k,n}$. Wyznaczane są one jako rozwiązanie układu równań stanowiącego zapis matematyczny warunku zerowania się prędkości normalnej na konturach okręgów i prędkości stycznej w punkcie okręgu będącym odwzorowaniem krawędzi spływu profilu. Bliższe szczegóły dotyczące sposobu wyznaczania tych współczynników znaleźć można np. w pracach [2], [3].

5. Algorytm obliczeń, generacja wirów śladowych

Obliczenia nieznanych współczynników funkcji odwzorowującej (3.2) wykonywane są tylko raz, w początkowej fazie obliczeń. Obliczenia drugiego etapu realizowane są cyklicznie, przez zadaną ilość kroków obliczeniowych. W każdym kroku obliczeniowym obliczane są wartości współczynników $D_{k,n}$ funkcji (4.5), oraz moce i położenia wirów śladowych wygenerowanych po jednym, za każdym profilem, w danym kroku. Następnie obliczane są chwilowe prędkości wirów i zostają one przesunięte do nowych położen zgodnie z zależnością:

$$z_{w,t+\Delta t} = z_{w,t} + v_{w,t} \cdot \Delta t, \quad (5.1)$$

po czym cykl obliczeń jest ponawiany.

Układ równań wykorzystywany do obliczeń współczynników $D_{k,n}$ oraz parametrów wirów śladowych nie jest zamknięty. W literaturze spotykane są różnorodne sposoby domknięcia układu, najczęściej poprzez postawienie dodatkowego warunku na moc, lub położenie nowego wiru śladowego [5]. W niniejszej pracy przyjęto, iż wir generowany jest każdorazowo w punkcie położonym w niewielkiej odległości za krawędzią spływową każdego z profili, w którym spełniona jest równość :

$$\Delta s_{gen} = 0.5 \cdot v_{gen} \cdot \Delta t \quad (5.2)$$

gdzie: Δs_{gen} – wektor położenia punktu generacji wiru względem krawędzi spływowej profilu,
 v_{gen} – chwilowa prędkość przepływu w punkcie generacji wiru.

Moc generowanych wirów, przy zadanym ich położeniu, wyznaczana jest z równań stanowiących warunek stałości cyrkulacji w obszarze przepływu obejmującym jeden profil:

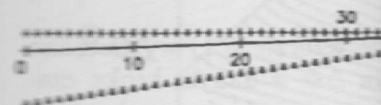
$$\Delta \Gamma_{p,k} + \Gamma_{w,k} = 0. \quad (5.3)$$

Równania te są dołączone do układu równań na współczynniki $D_{k,n}$ i rozwiązywane równocześnie.

6. Wyniki

Poniżej omówione zostały wyniki obliczeń numerycznych dla przypadku fragmentu palisady liczącego $K = 24$ profile o podziałce palisady $t = 0,75$. W obliczeniach przyjęto następujące dane początkowe:

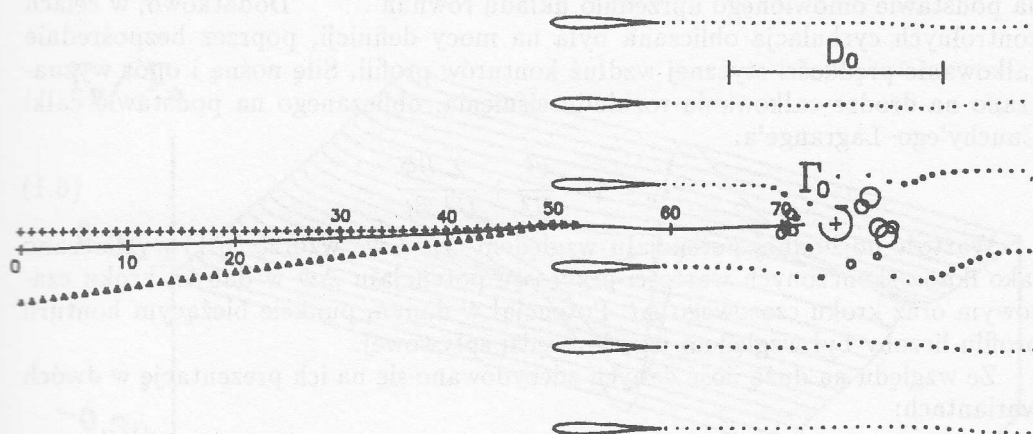
Kierunek napływu strumienia na palisadę α	=	0° ;
Względna moc wiru pierwotnego $\Gamma_o/U \cdot c$	=	$0,2$;
Położenie początkowe wiru: x_o/c	=	$-5,5$;
y_o/c	=	$0,31$.



Rys. 2. Trajektoria wiru pierwotnego (krok 75). Liczbami i odpowiadającymi im symbolami oznaczono położenie wiru w danym kroku. Średnica okręgów Γ_o reprezentuje promień samej skali odcinek D_o reprezentuje

Na rysunku 2 pokazano profile sąsiadujące z krawędzią spływową. Wymaga sposobu wyboru tego zależy czas trwania obliczeń. Kołowej okręgów jako płaszczyznę palisady ma charakter cykliczny, *de facto*, oddziaływanie nieskończonym szeregiem profili o Kirchhoffa-Routha, dla danej wartości wiru, wynikający z oddziaływania powoduje istnienie nieznanego kierunku prostopadłym do kierunku chylania się toru wiru od toru czoności. Na rys. 2 skalę tego zadania z torem otrzymanym również skończonego fragmentu [4]. W tym ostatnim przypadku okresowy charakter oddziaływania ten może więc służyć jako układowym zadaniu dokonano na efekt kompromisu pomiędzy

Rysunek 3 i następne przedstawia profile, moce wirów śladowych oraz siły nośnej i oporu poszczególnych wirów $\Gamma_{w,k}$ oraz cyrkulacje wokół po-



Rys. 2. Trajektoria wiru pierwotnego i aktualna konfiguracja wirów śladowych za profilami palisady (po kroku 75). Liczbami i odpowiadającymi im krzyżykami oznaczono chwilowe położenia wiru pierwotnego w danym kroku. Średnica okręgów reprezentujących wiry śladowe jest proporcjonalna do ich mocy. W tej samej skali odcinek D_0 reprezentuje moc wiru pierwotnego

Na rysunku 2 pokazano tor wiru pierwotnego i chwilowy obraz śladów za profilami sąsiadującymi z kanałem, przez który przepłynął wir. Pewnego omówienia wymaga sposób wyboru ilości K profili palisady, jako że od parametru tego zależy czas trwania obliczeń. Przyjęcie, w prezentowanej metodzie, palisady kołowej okręgów jako płaszczyzny pomocniczej powoduje, że oddziaływanie wiru z palisadą ma charakter cykliczny, powtarzający się co K profili. Jest to więc, *de facto*, oddziaływanie nieskończonego szeregu wirów o podziałce T z nieskończonym szeregiem profili o podziałce $t = T/K$. W oparciu o postać funkcji Kirchhoffa–Routha, dla danego przypadku, można wykazać, że składnik prędkości wiru, wynikający z oddziaływania palisady jest proporcjonalny do $\coth z$, co powoduje istnienie niezanikającej w nieskończoności składowej prędkości wiru w kierunku prostopadłym do osi palisady. Konsekwencją tego faktu jest stałe odchylenie się toru wiru od toru wyznaczonego przez kierunek prędkości w nieskończoności. Na rys. 2 skalę tego dryfu zilustrowano poprzez porównanie toru wiru z zadania z torem otrzymanym dla przypadku $K = 6$ profili (ciąg trójkątów), jak również skończonego fragmentu palisady, liczącego 10 profili (ciąg krzyżyków) [4]. W tym ostatnim przypadku omawiany dryf nie występuje ze względu na nieokresowy charakter oddziaływania wiru z pojedynczą sekcją profili, przypadek ten może więc służyć jako układ odniesienia. Wyboru ilości profili w prezentowanym zadaniu dokonano na podstawie pewnej liczby obliczeń wstępnych, jako efekt kompromisu pomiędzy czasem i dokładnością wyznaczenia trajektorii wiru.

Rysunek 3 i następne przedstawiają przebiegi zmian, kolejno, cyrkulacji wokół profili, mocy wirów śladowych generowanych w kolejnych krokach obliczeniowych, oraz siły nośnej i oporu poszczególnych profili palisady. Moce wirów śladowych $\Gamma_{w,k}$ oraz cyrkulacje wokół poszczególnych profili palisady $\Gamma_{p,k}$ wyznaczone były

na podstawie omówionego uprzednio układu równań. Dodatkowo, w celach kontrolnych cyrkulacja obliczana była na mocy definicji, poprzez bezpośrednie całkowanie prędkości stycznej wzdłuż konturów profili. Siłę nośną i opór wyznaczano na drodze całkowania rozkładu ciśnienia, obliczanego na podstawie całki Cauchy'ego-Lagrange'a:

$$c_p = 1 - \frac{v^2}{U^2} + \frac{2}{U^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (6.1)$$

Wartość pochodnej potencjału względem czasu we wzorze (6.1) wyznaczano jako iloraz skończonych wartości przyrostu potencjału $\Delta \Phi$ w danym kroku czasowym oraz kroku czasowego Δt . Potencjał w danym punkcie bieżącym konturu profilu liczony był względem jego krawędzi spływowej.

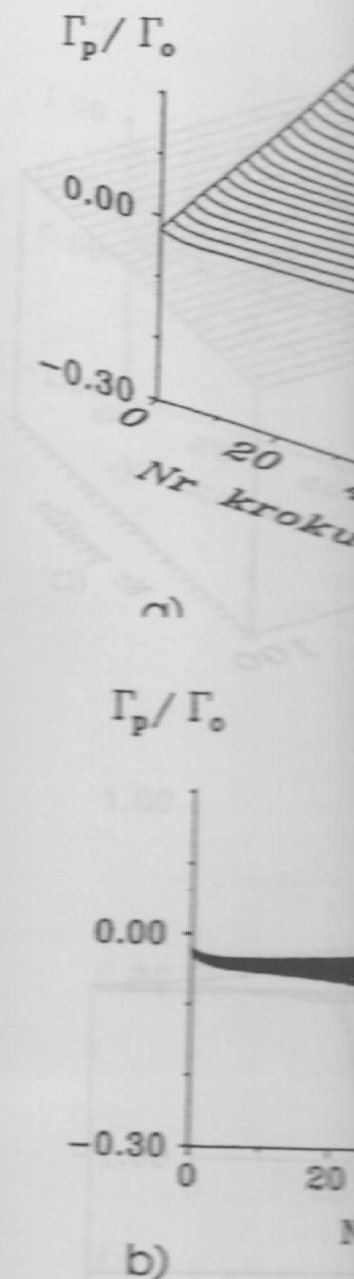
Ze względu na dużą ilość danych zdecydowano się na ich prezentację w dwóch wariantach:

- w postaci wykresu przestrzennego obrazującego w sposób ogólny zależność pomiędzy wartościami prezentowanej wielkości,
- w postaci standardowego wykresu zbiorczego, przedstawiającego wartości dokładne (przynależność poszczególnych krzywych do numerów profili można określić na podstawie wykresu a).

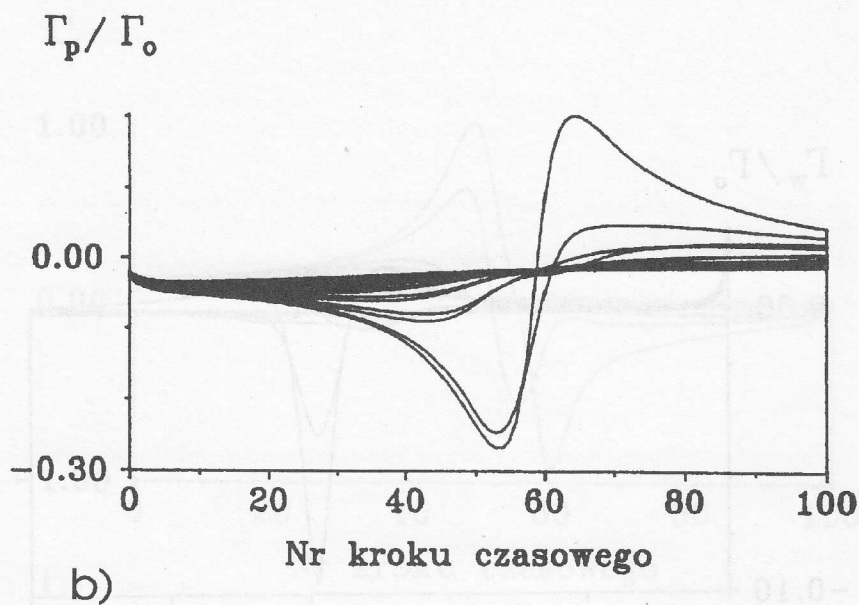
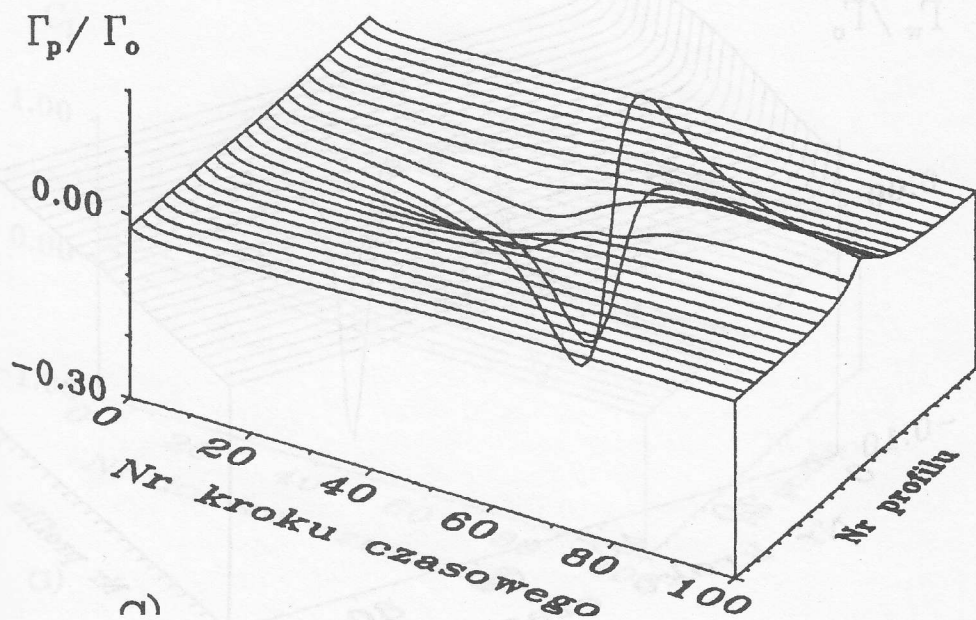
We wszystkich przypadkach na osi X odłożone zostały kolejne numery kroku czasowego, stanowiące substytut zmiennej czasu, na osi Y – numery kolejnych profili palisady, natomiast na osi Z wartości prezentowanej wielkości. Wyznaczony w trakcie obliczeń tor wiru przebiegał przez kanał pomiędzy profilami nr 13 i 14.

W oparciu o przedstawione wyniki można sformułować ocenę ogólną, iż wspólną ich cechą jest lokalny charakter fluktuacji wyznaczanych wielkości. Zarówno wartości cyrkulacji jak i sił wykazują silne fluktuacje jedynie w przypadku profili nr 13 i 14, ponadto – pewne zmiany można zaobserwować jeszcze w przebiegu krzywych nr 12 i 15, natomiast wszystkie pozostałe profile wykazują bardzo słabą reakcję na zaburzenia wywołane przez wir. Jest to szczególnie widoczne we fragmentach krzywych otrzymanych w okresie, gdy wir przepływa przez kanał palisady (krok 50 ÷ 60). Stanowi to istotny wniosek dotyczący obszaru, jaki należy brać pod uwagę przy analizowaniu lokalnych zaburzeń przepływu przez palisadę.

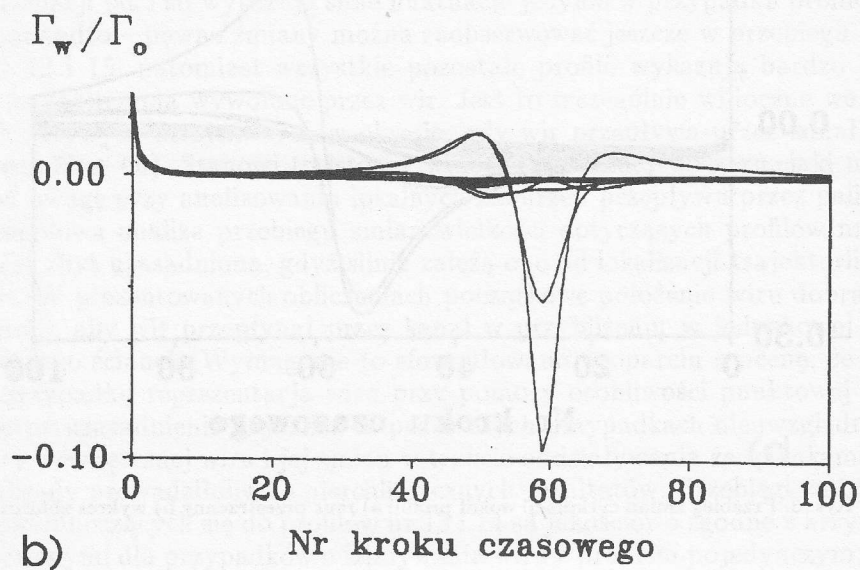
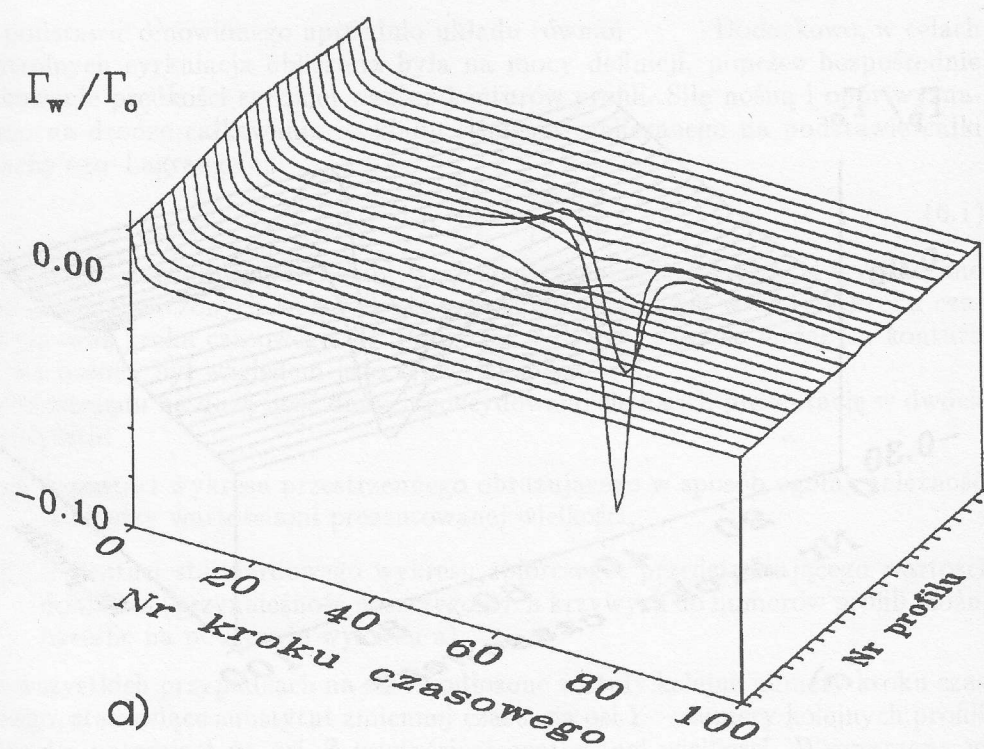
Szczegółowa analiza przebiegu zmian wielkości dotyczących profili nr 13 i 14 nie jest zbyt uzasadniona, gdyż silnie zależą one od lokalizacji trajektorii wiru w kanale. W prezentowanych obliczeniach początkowe położenie wiru dobrano w taki sposób, aby wir przepłynął przez kanał w przybliżeniu w jednakowej odległości od jego ścianek. Wymaganie to sformułowano w oparciu o ocenę, że tylko w tym przypadku reprezentacja wiru przy pomocy osobliwości punktowej może mieć pewne uzasadnienie fizyczne. W pozostałych przypadkach nieuwzględnienie struktury wewnętrznej wiru i jej zmian w trakcie oddziaływania ze ściankami profili palisady prowadziłoby do nierealistycznych rezultatów. Przebiegi zmian parametrów odnoszących się do profili nr 13 i 14 są jakościowo zgodne z krzywymi otrzymywanymi dla przypadków oddziaływania wiru z profilem pojedynczym, przy zbliżonej ich konfiguracji [np. 5].



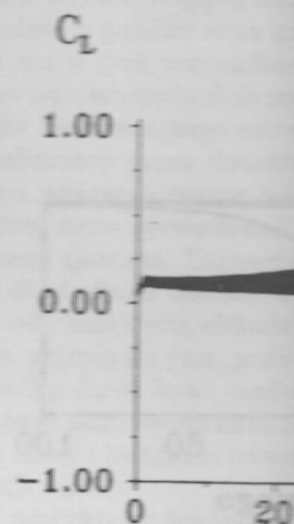
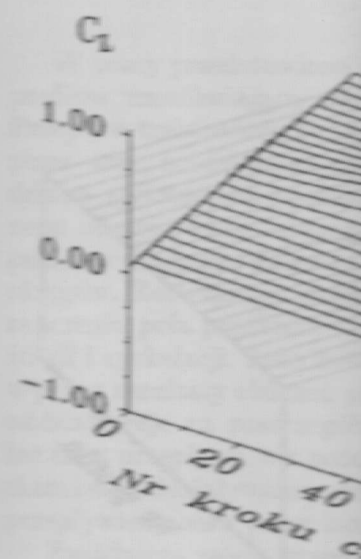
Rys. 3. Przebieg zmian cyrkulacji



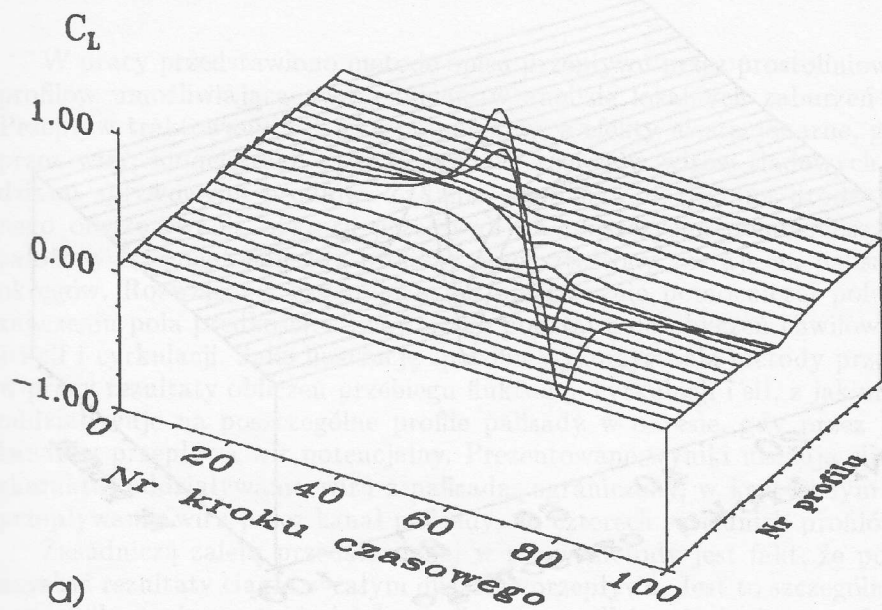
Rys. 3. Przebieg zmian cyrkulacji wokół profili: a) rzut przestrzenny b) wykres zbiorczy



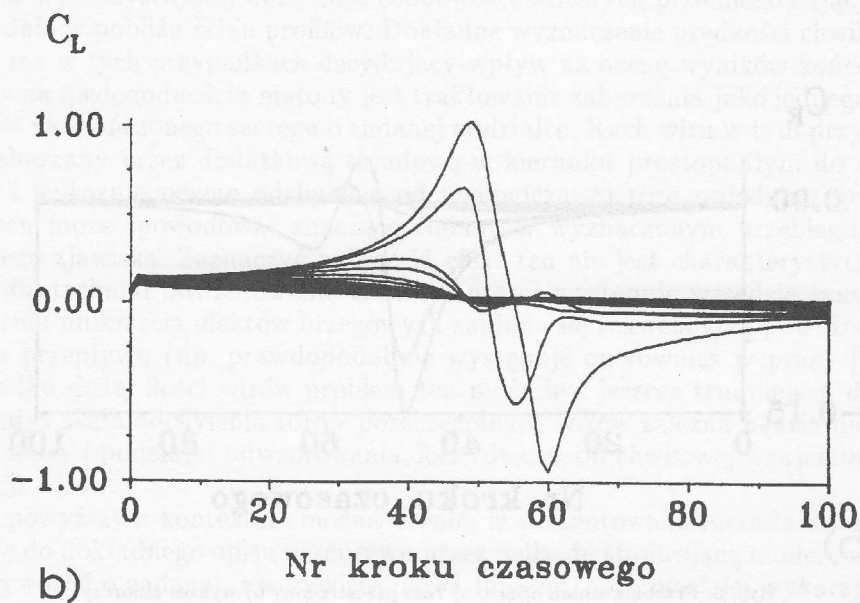
Rys. 4. Rozkład mocy wirów śladowych: a) rzut przestrzenny b) wykres zbiorczy



Rys. 5. Przebieg zmian

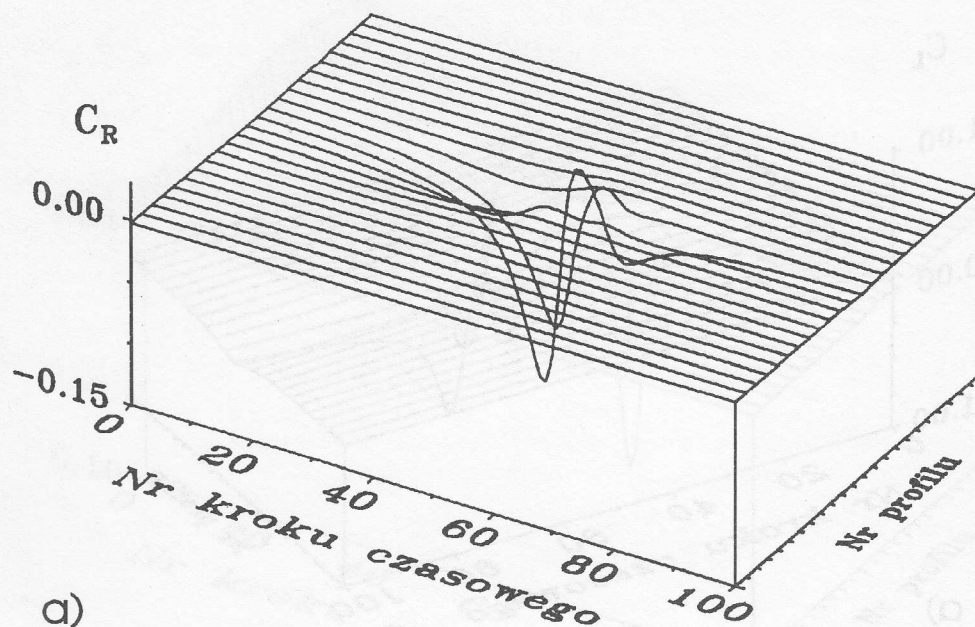


d)

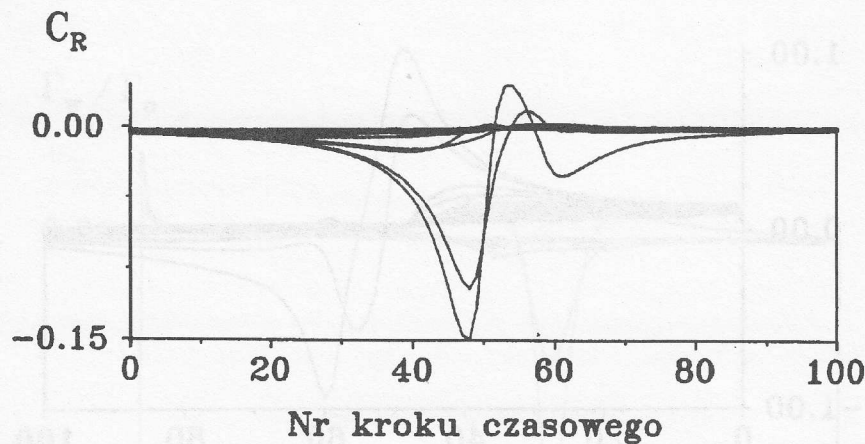


b)

Rys. 5. Przebieg zmian siły nośnej: a) rzut przestrzenny b) wykres zbiorczy



a)



b)

Rys. 6. Przebieg zmian oporu: a) rzut przestrzenny b) wykres zbiorczy

7. Zakończenie

W pracy przedstawiono profilów umożliwiającą uwzględnienie przepływu traktowanego jest jako przez wiry, modelowane są dziami sphywowymi profilów nego odwzorowania obszaru założony fragment palisady okręgów. Rozwiązanie zagadnienia znaczeniu pola prędkości, stałości sił i cyrkulacji. Jako ilustracja w pracy rezultaty obliczeń przedstawia oddziaływanie na poszczególne kanały przepływa wiru potężnego charakter oddziaływania wiru przepływanego wiru przez kanał.

Zasadniczą zaletą przedstawionego sposobu uzyskania wyników jest możliwość uzyskania wyników ciągłych w czasie. W przypadku wykorzystania tej metody rozwój warstwy przysięsiennej, techniki wykorzystującej duże swobodnie w pobliżu ścian przepływu wirów ma w tych przypadkach.

Pewną niedogodnością metody jest nieskończoność szeregu elementów nieskończonego szeregu jest zaburzany przez dodatkowe palisady i wykazuje pewne oddziaływanie. Fakt ten może spowodować zjawiska. Zaznaczyć należy, że dla techniki odwzorowania np. w celu uniknięcia efektów obrazu przepływu (np. prawego przypadku dużej ilości wirów) kontroli, gdyż skala odchylenia to od ich mocy i podziałki odwzorowania figuracji wirów.

W powyższym kontekście daje się do dokładnego opisu przepływu o zadanej, rzecz do opisu zjawisk lokalnych, mości nieskończonej mości do małej podziałki odwzorowania otrzymanych przy użyciu in-

7. Zakończenie

W pracy przedstawiono metodę opisu przepływu przez prostoliniową palisadę profilów umożliwiającą uwzględnienie w analizie lokalnych zaburzeń wirowych. Przepływ traktowany jest jako potencjalny, a efekty niestacjonarne, generowane przez wiry, modelowane są przy pomocy szeregów wirów śladowych za krawędziami spływowymi profilów. Zadanie rozwiązywane jest na drodze konforemnego odwzorowania obszaru przepływu na płaszczyznę pomocniczą, na której założony fragment palisady profilów przekształcony zostaje na palisadę kołową okręgów. Rozwiązanie zagadnienia na płaszczyźnie pomocniczej polega na wyznaczeniu pola prędkości, stanowiącego podstawę do obliczeń chwilowych wartości sił i cyrkulacji. Jako ilustrację sposobu wykorzystania metody przedstawiono w pracy rezultaty obliczeń przebiegu fluktuacji cyrkulacji i sił, z jakimi przepływ oddziałuje na poszczególne profile palisady w okresie, gdy przez jeden z jej kanałów przepływa wir potencjalny. Prezentowane wyniki ukazują silnie lokalny charakter oddziaływania wiru z palisadą, ograniczony, w krytycznym momencie przepływania wiru przez kanał palisady, do czterech sąsiednich profilów.

Zasadniczą zaletą przedstawionej w pracy metody jest fakt, że pozwala ona uzyskać rezultaty ciągłe w całym obszarze przepływu. Jest to szczególnie cenne w przypadku wykorzystania jej do analizy przypadków niestacjonarnych takich jak rozwój warstwy przyściennej, czy procesy oderwania, modelowane przy pomocy techniki wykorzystującej dużą ilość osobliwości wirowych przemieszczających się swobodnie w pobliżu ścian profilów. Dokładne wyznaczenie prędkości chwilowych wirów ma w tych przypadkach decydujący wpływ na ocenę wyników końcowych.

Pewną niedogodnością metody jest traktowanie zaburzenia jako jednego z elementów nieskończonego szeregu o zadanej podziałce. Ruch wiru w tym przypadku jest zaburzany przez dodatkową składową w kierunku prostopadłym do osi palisady i wykazuje pewne odchylenie od analogicznego toru pojedynczego wiru. Fakt ten może spowodować znaczące zmiany w wyznaczonym przebiegu analizowanego zjawiska. Zaznaczyć należy, iż efekt ten nie jest charakterystyczny jedynie dla techniki odwzorowania konforemnego i występuje wszędzie tam, gdzie np. w celu uniknięcia efektów brzegowych zakłada się sekwencyjną powtarzalność obrazu przepływu (np. prawdopodobnie występuje on również w pracy [1]). W przypadku dużej ilości wirów problem ten może być jeszcze trudniejszy do kontroli, gdyż skala odchylenia torów poszczególnych wirów zależna będzie nie tylko od ich mocy i podziałki odwzorowania, lecz również od chwilowej wzajemnej konfiguracji wirów.

W powyższym kontekście można ocenić, iż prezentowana metoda dobrze nadaje się do dokładnego opisu przepływu przez palisadę stanowiącą model maszyny przepływowej o zadanej, rzeczywistej ilości łopatek, natomiast jej wykorzystanie do opisu zjawisk lokalnych, modelowanych z wykorzystaniem pojęcia liniowej palisady nieskończonej może doprowadzić, zwłaszcza w przypadku zastosowania zbyt małej podziałki odwzorowania, do rezultatów odbiegających od analogicznych, otrzymanych przy użyciu innych metod, nie wykazujących cech powtarzalności.

Niezależnie od powyższego faktu, prezentowane rezultaty wykazują, iż lokalne zaburzenia wirowe, unoszone przez przepływ, wywołują bardzo ograniczone obszarowo efekty i wystarczające jest ograniczenie się do około $5 \div 10$ kanałów sąsiadujących z kanałem, w którym przepływ jest analizowany. Łączna ocena obu powyższych wyników prowadzi do wniosku, że wygodnym modelem służącym do analizy lokalnie niestacjonarnych przepływów przez palisady nieskończone byłyby model palisady stanowiący połączenie jednej – a nie cyklicznej – krótkiej, kilkuelementowej "aktywnej" sekcji, oraz części "biernej" reprezentującej wpływ pozostałego nieskończonego fragmentu palisady.

Pracę zgłoszono 1992. 11. 16

Literatura

- [1] Sisto F., Wenquan Wu, Thangam S., Jonnavithula S., *Computational Aerodynamics of Oscilating Cascades with the Evolution of Stall*. AIAA J., nr 4 (1989), str. 462-471.
- [2] Pronobis - Prońska A.M., *Plaski przepływ cieczy przez wirnik promieniowy*. Zesz. Nauk. IMP PAN nr 294/1251/89.
- [3] Prosnak W.J., *Teoria układu profilów lotniczych*. Ossolineum, Wrocław 1981.
- [4] Świryczuk J., *Unsteady Flow Effects Generated by a Vortex Structure Moving Through a Cascade Passage*. Proc. 2 ISAIF, Prague, July 12-15, 1993.
- [5] Świryczuk J., *Badanie zachowania się warstwy wirowej, generowanej za profilem przez przepływającą pojedynczą strukturę wirową*. Praca doktorska IMP PAN, Gdańsk, 1986.

A model of the flow through a profile cascade allowing the analysis of local vortex disturbances

Summary

In the paper, a model of the potential flow of an inviscid and incompressible fluid through a linear cascade of profiles is presented. Using this model it is possible to analyse the influence of local vortex disturbances in the examined area onto selected flow parameters. This influence is modelled with the aid of sequences of point vortices, generated so as to satisfy the given boundary and initial conditions. An algorithm based on the model uses the conformal mapping technique. As an example, fluctuations of loading and circulation of selected profiles due to a single vortex crossing a cascade passage are evaluated and discussed.

Eksperymentalna współcz

Przedstawiono metodę wyznaczania współczynnika oporu dla ciała stałego na podstawie pomiaru temperatury w punkcie, w którym strumień cieczy przepływa przez ciało. Wzrost temperatury jest związany z oporem cieczy o ciało. Wzrost temperatury jest związany z oporem cieczy o ciało. Wzrost temperatury jest związany z oporem cieczy o ciało.

- α – współcz. wyrównywania temp.
- A, B – współcz. wielomianu aproksymacji
- c – zmierzony przebieg temperatury
- E – ciepło właściwe,
- E – odległość punktu pomiaru temperatury od powierzchni ciała lub grubość warstwy cieczy
- m – kalorymetrycznego,
- M – stopień wielomianu,
- M – liczba punktów pomiaru temperatury w analizowanym przedziale czasu
- q – gęstość strumienia ciepła,
- q_s – gęstość strum. ciepła na pow.
- q_E – gęstość strum. ciepła przepływającego do podłoża czujnika,

1. Wstęp

Do pomiaru zmiennych w czasie stosuje się często mierniki, które różni się głównie rozpowszechnione w badaniach

¹Instytut Aparatury Przemysłowej

JAN TALER, WIESŁAW ZIMA¹

Eksperymentalne wyznaczanie gęstości strumieni i współczynników wnikańia ciepła

Przedstawiono metodę wyznaczania temperatury powierzchni oraz gęstości strumienia ciepła na powierzchni ciała stałego na podstawie pomiaru temperatury w jego wnętrzu. Metoda, stanowiąca uogólnienie teorii mierników gęstości strumienia ciepła typu *ciało półnieskończone*, jest również odpowiednia do identyfikacji warunków brzegowych w elementach urządzeń energetycznych pracujących pod wysokim ciśnieniem, gdy czujnik temperatury nie może być usytuowany na wewnętrznej powierzchni tych elementów. Przeanalizowano również wpływ stopnia wielomianu aproksymującego zmierzony przebieg temperatury na wyznaczane pole temperatury oraz współczynnik wnikańia ciepła.

Wykaz oznaczeń

a	- współcz. wyrównywania temperatury,	m^2/s ,	S	- współcz. skalowania czasu,	$ms/s, min/s$,
A_i, B_i	- współcz. wielomianu aproksym. zmierzony przebieg temperatury,		t	- czas,	s ,
c	- ciepło właściwe,	J/kgK ,	t_s	- czas przeskalowany,	ms, min ,
E	- odległość punktu pomiaru temper. od powierzchni ciała lub grubość czujnika kalorymetrycznego,	m ,	T	- temperatura,	$^{\circ}C$,
m	- stopień wielomianu,		T_0	- temperatura początkowa,	$^{\circ}C$,
M	- liczba punktów pomiaru temperatury w analizowanym przedziale czasu,		T_{∞}	- temperatura otoczenia,	$^{\circ}C$,
η	- gęstość strumienia ciepła,	W/m^2 ,	x	- odległość od powierzchni,	m ,
η_s	- gęstość strum. ciepła na pow. ciała,	W/m^2 ,	y	- temperatura zmierzona w punkcie $x = E$,	$^{\circ}C$,
η_E	- gęstość strum. ciepła przepływającego do podłoża czujnika,	W/m^2 ,	α	- współcz. wnikańia ciepła,	W/m^2K ,
			ε	- błąd przypadkowy,	$^{\circ}C$,
			λ	- współcz. przewod. ciepła,	W/mK ,
			ρ	- gęstość,	kg/m^3 ,
			τ	- przedział czasu,	s .

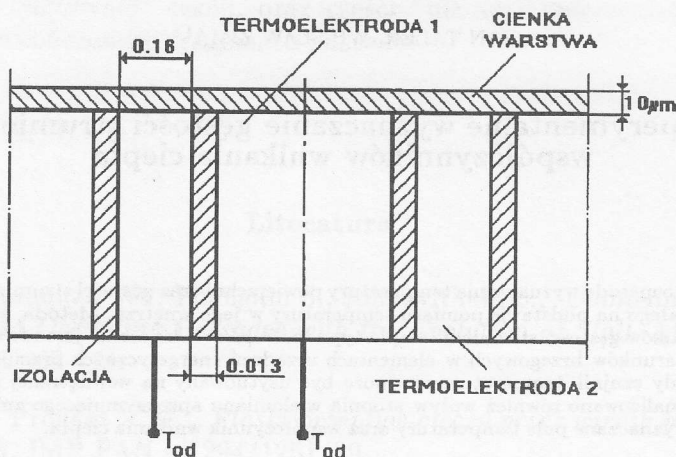
1. Wstęp

Do pomiaru zmiennych w czasie gęstości strumieni i współczynników wnikańia ciepła stosuje się często mierniki typu *ciało półnieskończone*. Są one szczególnie rozpowszechnione w badaniach wymiany ciepła na powierzchni łopatek

¹Instytut Aparatury Przemysłowej i Energetyki Politechniki Krakowskiej

turbin [1-5], rur zanurzonych w złożu fluidalnym [6-8] oraz powierzchniach tłoków i cylindrów w silnikach spalinowych [9-13]. Na podstawie pomiaru temperatury powierzchni ciała półnieskończonego, za pomocą termoelementów cienko-warstwowych (rys. 1) lub tzw. termopar erodujących (rys. 2) [14], wyznaczana jest gęstość strumienia, a następnie współczynnik wnikania ciepła. Zasada działania tych termoelementów jest taka sama, jak w przypadku termoelementów konwencjonalnych.

ub niklu,

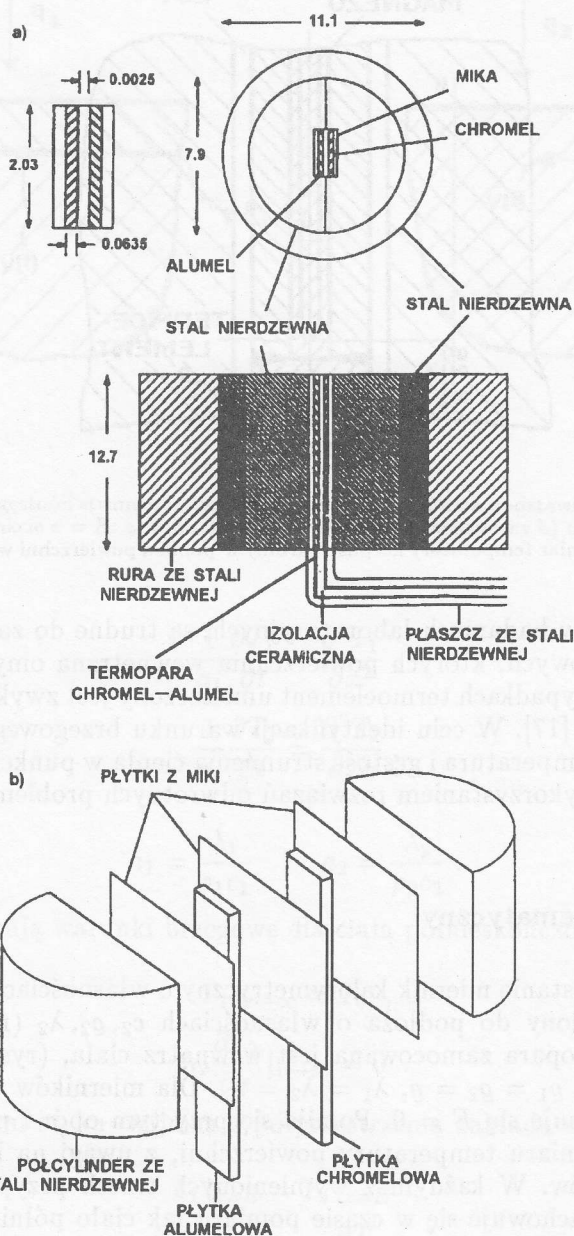


Rys. 1. Schemat termoelementu współśrodkowego

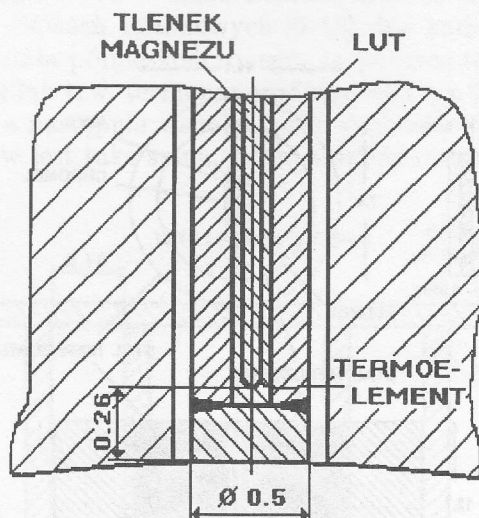
łączącej obydwie termoelektrody nie powoduje zmiany siły termoelektrycznej. Pozwala to natomiast dokładnie zmierzyć temperaturę powierzchni ciała stałego. Konstrukcja termoelementu przedstawionego na rys. 1 nie jest jednak, w odróżnieniu od rozwiązania przedstawionego na rys. 2, odporna na erozyjne działanie otaczającego środowiska lub zużycie w wyniku tarcia. Dzięki małej odległości termoelektrod w rozwiązaniu konstrukcyjnym termoelementu firmy *Nanmac*, równej $25 \mu m$, znajdują się one w ciągłym kontakcie mimo ścierania powierzchni. Opilki powstające przy ścieraniu lub szlifowaniu powierzchni zapewniają ciągły kontakt termoelektrod na powierzchni, której temperatura jest mierzona. W celu zmniejszenia zniekształceń pola temperatury wokół punktu pomiarowego położonego na powierzchni (rys. 1 i 2) jak i wewnątrz ciała (rys. 3), własności termofizyczne termoelementu i jego obudowy powinny być zbliżone do własności ciała. Zakładając, że temperatura powierzchni $y(t)$ znana jest w dyskretnych punktach czasowych $t_1, t_2, \dots, t_{M+1}$ gęstość strumienia ciepła na powierzchni ciała może być obliczona ze wzoru [15,16]:

$$q_E(t_M) = 2\sqrt{\frac{c_2 \rho_2 \lambda_2}{\Pi}} \sum_{j=1}^M \frac{y_j - y_{j-1}}{\sqrt{t_M - t_j} + \sqrt{t_M - t_{j-1}}} \quad (1)$$

Do wyznaczania $q_E(t)$ stosuje się również bardzo często rezystancyjno- pojemnościowe elektryczne układy analogowe [1-8]. Opisane powyżej techniki pomiarowe,



Rys. 2. Schemat tzw. termoelementu erodującego firmy Nanmac

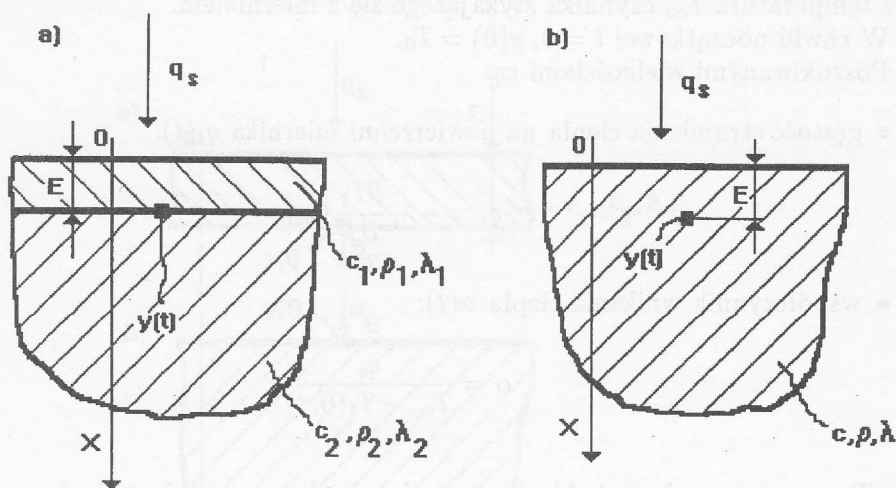


Rys. 3. Pomiar temperatury korpusu turbiny w pobliżu powierzchni wewnętrznej

wykorzystywane w badaniach laboratoryjnych, są trudne do zastosowania w elementach ciśnieniowych, których powierzchnia wewnętrzna omywana jest gorącą wodą. W tych przypadkach termoelement umieszczony jest zwykle pod powierzchnią ciała (rys. 3) [17]. W celu identyfikacji warunku brzegowego na powierzchni półprzestrzeni, temperatura i gęstość strumienia ciepła w punkcie pomiaru są ekstrapolowane, z wykorzystaniem rozwiązań odwrotnych problemów przewodzenia ciepła.

2. Model matematyczny

Rozważony zostanie miernik kalorymetryczny o własnościach termofizycznych c_1, ρ_1, λ_1 przyklejony do podłoża o własnościach c_2, ρ_2, λ_2 (rys. 4a). W przypadku, gdy termopara zamocowana jest wewnątrz ciała, (rys. 4b), przyjmuje się: $c_1 = c_2 = c$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Dla mierników typu *ciało półnieskończone* przyjmuje się $E = 0$. Pomija się przy tym opór i pojemność cieplną czujników do pomiaru temperatury powierzchni, z uwagi na ich grubość rzędu kilku mikrometrów. W każdym z wymienionych trzech przypadków przyjmuje się, że podłoże zachowuje się w czasie pomiaru jak ciało półnieskończone. Założenie to jest w pełni uzasadnione, gdyż przy krótkotrwałych pomiarach nawet stosunkowo cienkie podłoże o grubości rzędu kilku milimetrów zachowuje się jak ciało półnieskończone, gdyż głębokość penetracji ciepła jest mniejsza od grubości podłoża. Pole temperatury w mierniku i podłożu opisane jest odpowiednio równaniami przewodzenia ciepła:



Rys. 4. Wyznaczanie gęstości strumienia ciepła na powierzchni ciała na podstawie pomiaru temperatury w jego wnętrzu w punkcie $x = E$: a) grubościenny miernik kalorymetryczny b) ciało jednorodne

$$\frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{a_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \quad (3)$$

gdzie:

$$a_1 = \frac{\lambda_1}{\rho_1 c_1} \quad \text{ i } \quad a_2 = \frac{\lambda_2}{\rho_2 c_2}.$$

Ponadto obowiązują warunki brzegowe dla ciała półnieskończonego:

$$T_2|_{x \rightarrow \infty} = T_0, \quad (4)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (5)$$

Na powierzchni styku czujnika z półprzestrzenią zakłada się idealny kontakt termiczny:

$$T_1|_{x=E} = T_2|_{x=E}, \quad (6)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=E} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=E}. \quad (7)$$

Oprócz tych równań znany jest z pomiaru przebieg czasowy temperatury w punkcie $x = E$:

$$T_1|_{x=E} = y(t) \quad (8)$$

oraz temperatura T_∞ czynnika stykającego się z miernikiem.

W chwili początkowej $t = 0$, $y(0) = T_0$.

Poszukiwanymi wielkościami są:

- gęstość strumienia ciepła na powierzchni miernika $q_s(t)$:

$$q_s = -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (9)$$

- współczynnik wnikania ciepła $\alpha(t)$:

$$\alpha = \frac{q_s}{T_\infty - T_1(0, t)}. \quad (10)$$

3. Temperatura i gęstość strumienia ciepła na powierzchni czujnika

Problem wyznaczania temperatury powierzchni czołowej czujnika i gęstości strumienia ciepła na tej powierzchni podzielony zostanie na dwa zagadnienia:

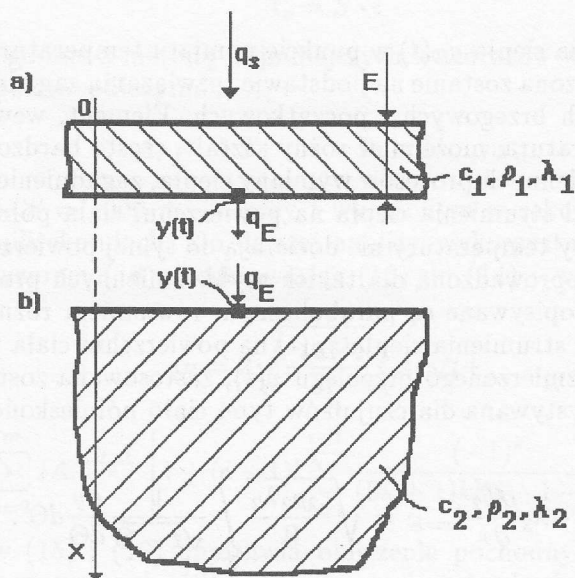
- zagadnienie odwrotne (rys. 5a),
- zagadnienie proste (bezpośrednie) (rys. 5b).

Zagadnienie odwrotne zdefiniowane jest równaniem różniczkowym przewodzenia ciepła (2) i warunkiem (8). Ponadto przyjmuje się, że z rozwiązania zagadnienia prostego dla ciała półnieskończonego znana jest również gęstość strumienia ciepła na tylnej powierzchni czujnika:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=E} = q_E \quad (11)$$

W odróżnieniu od zagadnienia prostego, w którym zadane są warunki na dwóch różnych brzegach, w analizowanym zagadnieniu odwrotnym temperatura $y(t)$ oraz strumień $q_E(t)$ zadane są na tym samym brzegu $x = E$. Z uwagi na fakt, że jest to zagadnienie źle postawione (zagadnienie Cauchy'ego), jego rozwiązanie jest bardzo czułe na błędy pomiaru temperatury $y(t)$. Tak więc w praktycznych zastosowaniach należy położyć duży nacisk na wyeliminowanie tych błędów za pomocą odpowiedniej procedury wygładzającej. Tak postawione zagadnienie odwrotne rozwiązane zostało przez Burggrafa [18] oraz Cirelmana [19,20]. W dalszej części pracy wykorzystane zostanie rozwiązanie Burggrafa, z uwagi na jego większą ogólność. Ma ono postać:

$$T_1(x, t) = y(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{(E-x)^{2n}}{a_1^n} \frac{d^n y}{dt^n} +$$



Rys. 5. Podział problemu wyznaczania gęstości strumienia ciepła na powierzchni ciała na dwa zagadnienia: a) zagadnienie odwrotne b) zagadnienie proste (bezpośrednie)

$$\frac{E-x}{\lambda_1} \left[q_E(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{(E-x)^{2n}}{a_1^n} \frac{d^n q_E}{dt^n} \right], \quad (12)$$

$$q_s(t) = -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = q_E + \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{1}{a_1^n} \frac{d^n y}{dt^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{a_1^n} \frac{d^n q_E}{dt^n}. \quad (13)$$

Rozwiązania (12) i (13) są szybkozbieżne. W szeregach wystarczy tylko uwzględnić dwa lub trzy wyrazy aby osiągnąć bardzo dobrą dokładność rozwiązania, nawet przy szybkich zmianach temperatury powierzchni czołowej miernika. Pewną niedogodnością rozwiązania jest to, że zarówno zmierzona temperatura $y(t)$ oraz obliczona gęstość strumienia ciepła $q_E(t)$ powinny być tak aproksymowane, aby obliczyć z dużą dokładnością pochodne wyższych rzędów. Z własnych doświadczeń wynika, że przy przebiegach $y(t)$, zawsze obarczonych przypadkowymi błędami pomiaru, do obliczania pochodnych nie nadają się ilorazy różnicowe, wykorzystywane np. w pracy [21], z uwagi na ich małą dokładność. Dlatego też do aproksymacji przebiegu zmierzonej temperatury $y(t)$ zostanie w niniejszej pracy zastosowany wielomian m -tego stopnia względem czasu.

4. Gęstość strumienia ciepła w punkcie pomiaru temperatury

Gęstość strumienia ciepła $q_E(t)$ w punkcie pomiaru temperatury, leżącym wewnątrz ciała, wyznaczona zostanie na podstawie rozwiązania zagadnienia prostego o znanych warunkach brzegowych i początkowych. Element, wewnątrz którego mierzona jest temperatura, może mieć różny kształt, często bardzo złożony. Przy pomiarach szybkozmiennych procesów wymiany ciepła, zagadnienie sprowadza się do obliczenia gęstości strumienia ciepła na powierzchni ciała półnieskończonego (rys. 5b), gdyż zmiany temperatury nie docierają do tylnej powierzchni elementu. Analiza zostanie przeprowadzona dla takich szybkozmiennych procesów przewodzenia ciepła, które opisywane są parabolicznym równaniem różniczkowym. Do wyznaczenia gęstości strumienia ciepła $q_E(t)$ na powierzchni ciała półnieskończonego, na podstawie zmierzonego przebiegu $y(t)$, zastosowana zostanie zależność powszechnie wykorzystywana dla czujników typu ciało półnieskończone [15,21]:

$$q_E = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=E} = \sqrt{\frac{c_2 \rho_2 \lambda_2}{\Pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\Theta}} \frac{dy}{d\Theta} d\Theta. \quad (14)$$

Funkcja określająca zmiany gęstości strumienia ciepła $q_E(t)$ powinna być różniczkowalna w sposób ciągły z uwagi na występowanie pochodnych $d^n q_E / dt^n$ we wzorach (12) i (13). Z tego też względu przebieg temperatury $y(t)$ przybliżony zostanie wielomianem m -tego stopnia:

$$y(t) = \sum_{i=0}^m A_i t^i = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_m t^m, \quad (15)$$

gdzie czas t określony jest w sekundach.

Z uwagi na krótki czas trwania analizowanych zjawisk nieustalonych, rzędu kilkunastu milisekund, zachodzi konieczność skalowania czasu w celu prawidłowego wyznaczenia współczynników A_i wielomianu, z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów. Wynika to z faktu, że dla bardzo krótkich lub bardzo długich przedziałów czasu, w których zachodzi analizowane zjawisko, zagadnienie wyznaczania współczynników wielomianu za pomocą metody najmniejszych kwadratów staje się źle uwarunkowane. W przypadku złego uwarunkowania układu równań normalnych, z których wyznaczane są współczynniki wielomianu w metodzie najmniejszych kwadratów, dokładność ich wyznaczania jest niedostateczna. Skalowanie czasu sprawia, że zagadnienie aproksymacji wielomianami staje się dobrze uwarunkowane. Przyjmując, że t_s oznacza przeskalowany czas, np. w milisekundach, aproksymacja $y(t_s)$ ma postać:

$$y(t_s) = \sum_{i=0}^m B_i t_s^i = B_0 + B_1 t_s + B_2 t_s^2 + \dots + B_m t_s^m, \quad (16)$$

gdzie:

$$t_s = S \cdot t \quad (17)$$

Wyznaczając zgodnie z metodą najmniejszych kwadratów współczynniki B_i , oblicza się następnie współczynniki A_i :

$$A_i = B_i S^i; \quad i = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (18)$$

Przyjmując np. $S = 1000 \text{ ms/s}$, przy t wyrażonym w sekundach, czas t_s podawany jest w milisekundach. Do dalszej analizy wykorzystuje się współczynniki A_i określone wzorem (18). Podstawiając (15) do (14) i wykonując całkowanie otrzymuje się:

$$q_E = 2\sqrt{\frac{c_2 \rho_2 \lambda_2}{\Pi}} \left\{ A_1 \sqrt{t} + \sum_{i=2}^m i A_i t^{\frac{2i-1}{2}} \left[1 + (i-1)! \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!(i-1-k)!} \right] \right\} \quad (19)$$

Postać wzorów (15) i (19) umożliwia obliczenie pochodnych wyższych rzędów występujących we wzorach (12) i (13). Z uwagi na trudności dokładnego wyznaczenia współczynników wielomianu A_i przy $m > 5$, wzór (19) zapisany zostanie ostatecznie dla $m = 5$:

$$q_E = \sqrt{\frac{c \rho \lambda}{\Pi}} \left(2A_1 \sqrt{t} + \frac{8}{3} A_2 t^{\frac{3}{2}} + \frac{16}{5} A_3 t^{\frac{5}{2}} + \frac{128}{35} A_4 t^{\frac{7}{2}} + \frac{256}{63} A_5 t^{\frac{9}{2}} \right) \quad (20)$$

Zależność (20) może być również stosowana w przypadku wielomianu (15) o niższym stopniu; np. dla $m = 3$ należy przyjąć $A_4 = A_5 = 0$.

5. Przykład obliczeniowy

W celu oceny dokładności metody, jej odporności na przypadkowe zaburzenia zmierzonej temperatury, obliczona zostanie gęstość strumienia ciepła, temperatura oraz współczynnik wnikania ciepła na powierzchni półprzestrzeni, na podstawie pomiaru temperatury, w odległości $E = 0,01 \text{ m}$ od powierzchni półprzestrzeni. Podobnie jak w przypadku testowania odwrotnych metod przewodzenia ciepła [21], tak i tutaj, rozwiązane zostanie najpierw zagadnienie proste, przy założeniu, że warunek początkowy oraz warunki brzegowe są znane. Rozważony zostanie przypadek nagłego ochłodzenia półprzestrzeni o temperaturze początkowej T_0 czynnikiem o temperaturze T_∞ , przy założeniu, że współczynnik wnikania ciepła α od powierzchni półprzestrzeni do cieczy jest stały. Rozkład temperatury w półprzestrzeni określony jest wzorem [22]:

$$T_2(x, t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \left\{ \operatorname{erf} \xi + e^{(Bi+\eta)} [1 - \operatorname{erf} (\xi + \sqrt{\eta})] \right\}, \quad (21)$$

gdzie :

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}, \quad Bi = \frac{\alpha x}{\lambda_2}, \quad \eta = \frac{\alpha^2 t}{c_2 \rho_2 \lambda_2}.$$

Temperatura powierzchni półprzestrzeni $T_2(0, t)$ określona jest natomiast wzorem:

$$T_2(0, t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) e^\eta \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha \sqrt{a_2 t}}{\lambda_2} \right) \right]. \quad (22)$$

Gęstość strumienia ciepła na powierzchni półprzestrzeni obliczono ze wzoru:

$$q(0, t) = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \alpha [T_\infty - T_2(0, t)]. \quad (23)$$

Do obliczeń przyjęto następujące dane:

$$\begin{array}{ll} \lambda_2 &= 42 \text{ W/(mK)}; & a_2 &= 11,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}; \\ c_2 \rho_2 \lambda_2 &= 158629212 \text{ J}^2/(\text{m}^4 \text{K}^2 \text{s}); & \alpha &= 2000 \text{ W/(m}^2 \text{K)}; \\ T_0 &= 300 \text{ }^\circ\text{C}; & T_\infty &= 20 \text{ }^\circ\text{C} \\ E &= 0,01 \text{ m} \end{array}$$

Następnie obliczono temperaturę półprzestrzeni w punkcie $x = E = 0,01 \text{ m}$.

W celu zasymulowania danych pomiarowych do każdej temperatury dodano błąd przypadkowy z przedziału $[-2, 2]$. Do generowania błędów ε_j użyto generatora liczb losowych z przedziału $[0, 1]$ o rozkładzie równomiernym, otrzymując w ten sposób dane "pomiarowe" :

$$y_j = T_2(E, t_j) + \varepsilon_j; \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (24)$$

gdzie M oznacza ilość danych pomiarowych. Obliczone w ten sposób dane "pomiarowe" przy błędzie $\pm 2 \text{ K}$, przedstawiono na rys. 6 i 7. W celu oceny wpływu stopnia wielomianu aproksymującego zmierzony przebieg temperatury w punkcie $x = E$, przeprowadzono obliczenia przy $m = 3$ oraz $m = 5$. Przy aproksymacji danych pomiarowych $y_j; j = 1, 2, \dots, 21$ wielomianem 3-ciego stopnia ($m = 3$), otrzymano następujące współczynniki:

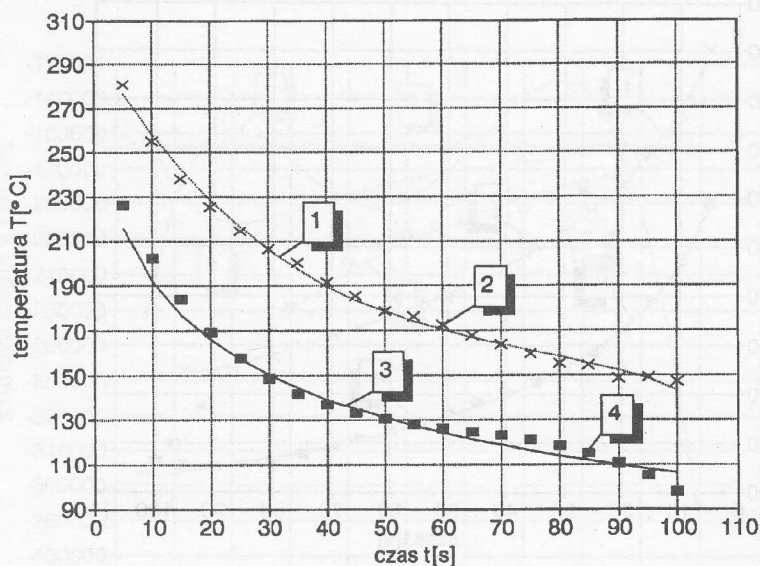
$$\begin{array}{ll} A_0 &= 297,5314 \text{ }^\circ\text{C}; & A_1 &= -4,3946 \text{ }^\circ\text{C/s}; \\ A_2 &= 5,1931 \cdot 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C/s}^2; & A_3 &= -2,3375 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C/s}^3. \end{array}$$

Aproksymując te same dane wielomianem 5-tego stopnia ($m = 5$), otrzymuje się:

$$\begin{array}{ll} A_0 &= 301,8744 \text{ }^\circ\text{C}; & A_1 &= -5,5697 \text{ }^\circ\text{C/s}; \\ A_2 &= 0,1121 \text{ }^\circ\text{C/s}^2; & A_3 &= -1,3142 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C/s}^3; \\ A_4 &= 7,3507 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C/s}^4; & A_5 &= -1,3913 \cdot 10^{-8} \text{ }^\circ\text{C/s}^5. \end{array}$$

Współczynniki te otrzymano bez skalowania czasu.

Porównanie wielomianów aproksymujących z danymi pomiarowymi dla $m = 3$



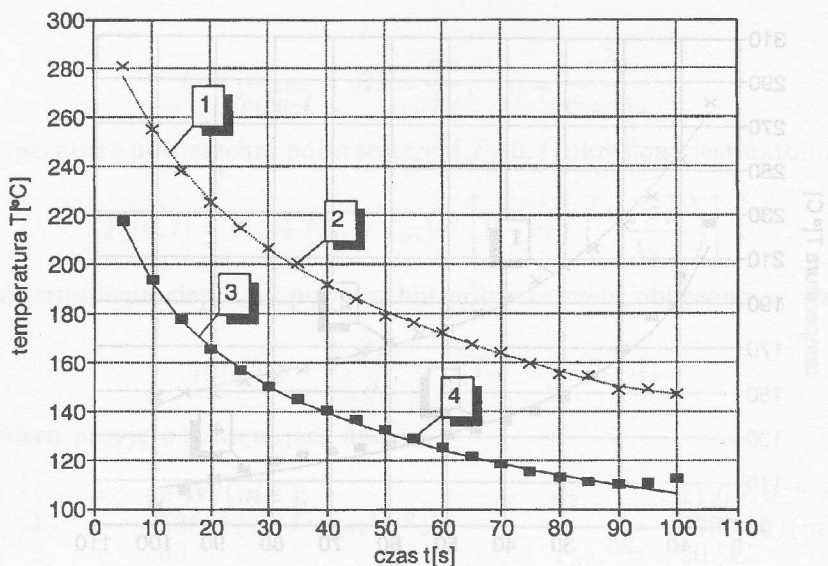
Rys. 6. Temperatura powierzchni półprzestrzeni (4) wyznaczona na podstawie danych "pomiarowych" w punkcie $x = E = 0,01 \text{ m}$ (2) aproksymowanych wielomianem 3-ciego stopnia (1); 3 - temperatura powierzchni półprzestrzeni wyznaczona z rozwiązania ścisłego

i $m = 5$ przedstawiono odpowiednio na rys. 6 i 7. Widać, że wielomian 5-tego stopnia znacznie lepiej przybliża zmierzony przebieg temperatury, eliminując jednocześnie przypadkowe błędy pomiaru. Porównanie obliczonej gęstości strumienia ciepła na powierzchni półprzestrzeni oraz współczynnika wnikanie ciepła z rozwiązaniem ścisłym przedstawiono na rys. 8 dla $m = 3$ oraz na rys. 9 dla $m = 5$. Błędy wyznaczania $q(t)$ oraz $\alpha(t)$ są znacznie większe (rys. 8 i 9), niż w przypadku obliczanej temperatury powierzchni (rys. 6 i 7). Zarówno dla $m = 3$ jak i dla $m = 5$ największe błędy występują na początku i końcu analizowanego przedziału czasu. Należy przy tym zauważyć, że w przypadku wielomianu 3-ciego stopnia błędy wyznaczania $q(t)$ i $\alpha(t)$ są większe w porównaniu z błędami otrzymanymi przy aproksymacji zmierzonego przebiegu temperatury $y(t)$ wielomianem 5-tego stopnia.

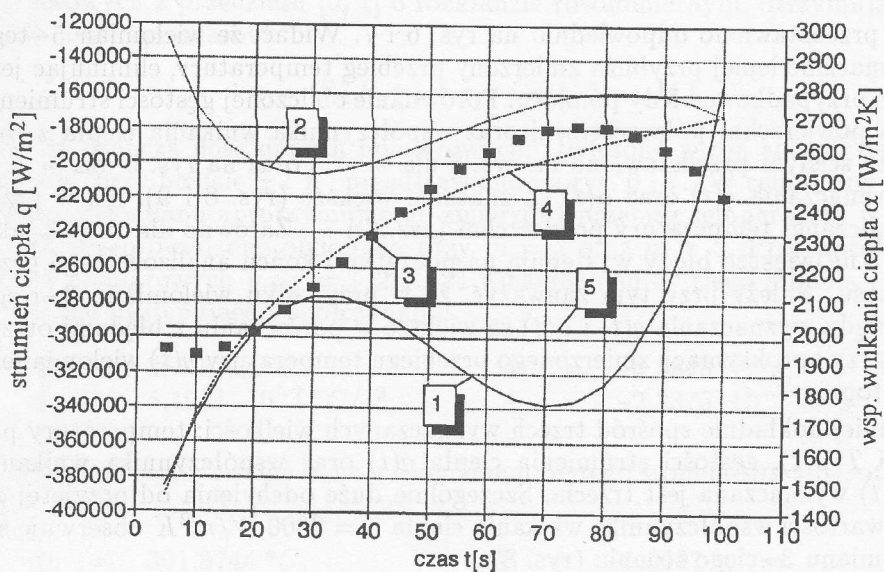
Najmniej dokładnie spośród trzech wyznaczanych wielkości: temperatury powierzchni $T(0, t)$, gęstości strumienia ciepła $q(t)$ oraz współczynnika wnikanie ciepła $\alpha(t)$ wyznaczana jest trzecia. Szczególnie duże odchylenia od przyjętej do obliczeń wartości współczynnika wnikanie ciepła $\alpha = 2000 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ obserwuje się dla wielomianu 3-ciego stopnia (rys. 8).

W celu dokładniejszego pokazania różnic w otrzymanych wynikach, przedstawiono porównanie temperatury powierzchni (rys. 10), gęstości strumienia ciepła (rys. 11) i współczynnika wnikanie ciepła (rys. 12) dla $m = 3$ oraz $m = 5$.

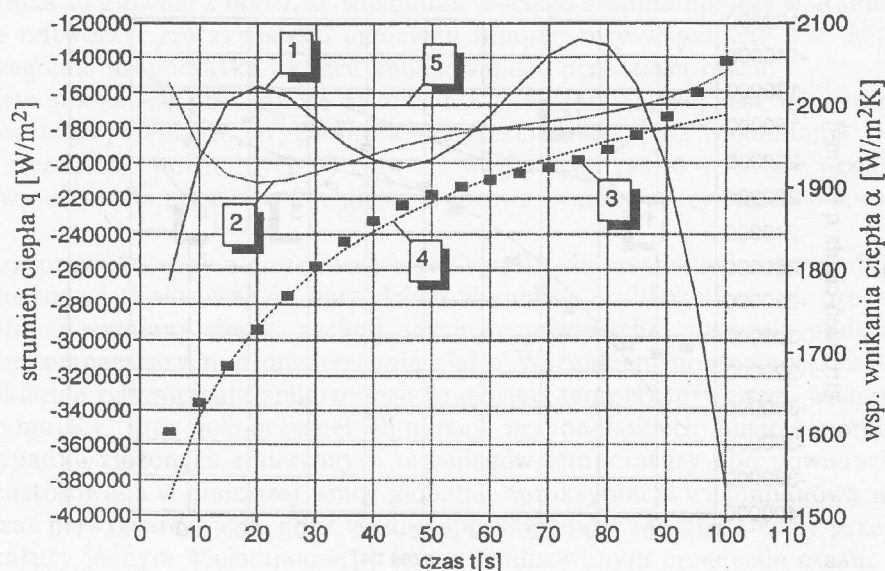
Z przedstawionych porównań widać, że wyniki uzyskane przy aproksymacji zmierzonego przebiegu temperatury wielomianem 3-ciego stopnia są znacznie



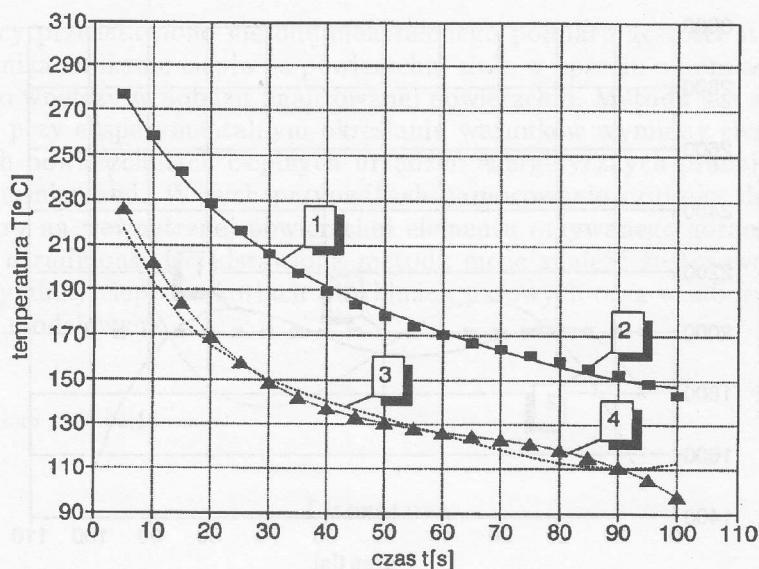
Rys. 7. Temperatura powierzchni półprzestrzeni (4) wyznaczona na podstawie danych "pomiarowych" w punkcie $x = E = 0,01 \text{ m}$ (2) aproksymowanych wielomianem 5-tego stopnia (1); 3 – temperatura powierzchni półprzestrzeni wyznaczona z rozwiązania ścisłego



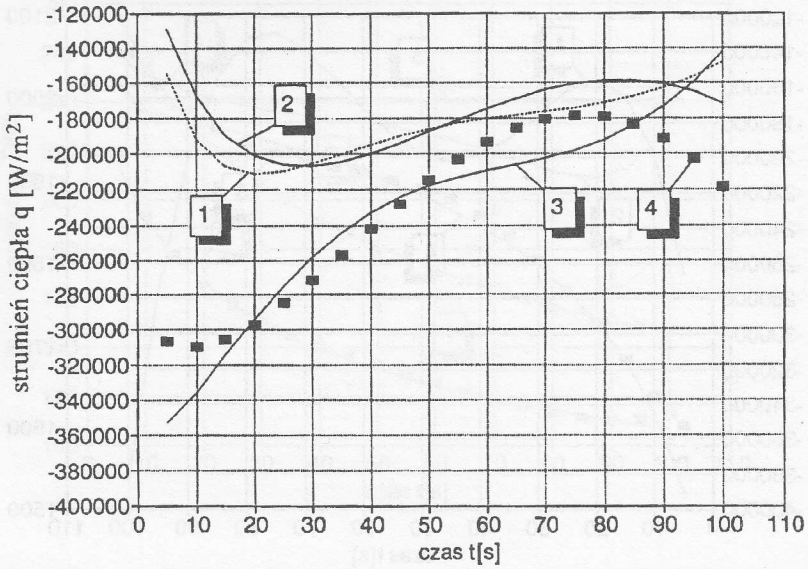
Rys. 8. Współczynnik wnikańia (1) i gęstość strumienia ciepła (3) na powierzchni półprzestrzeni wyznaczone na podstawie danych "pomiarowych" w punkcie $x = E = 0,01 \text{ m}$ przybliżonych wielomianem 3-ciego stopnia; 2 – gęstość strumienia ciepła w punkcie $x = E = 0,01 \text{ m}$ obliczona na podstawie "zmierzzonego" przebiegu temperatury; 4 – gęstość strumienia ciepła na powierzchni półprzestrzeni obliczona z rozwiązania ścisłego przy $\alpha = 2000 \text{ W/m}^2\text{K}$ (5)



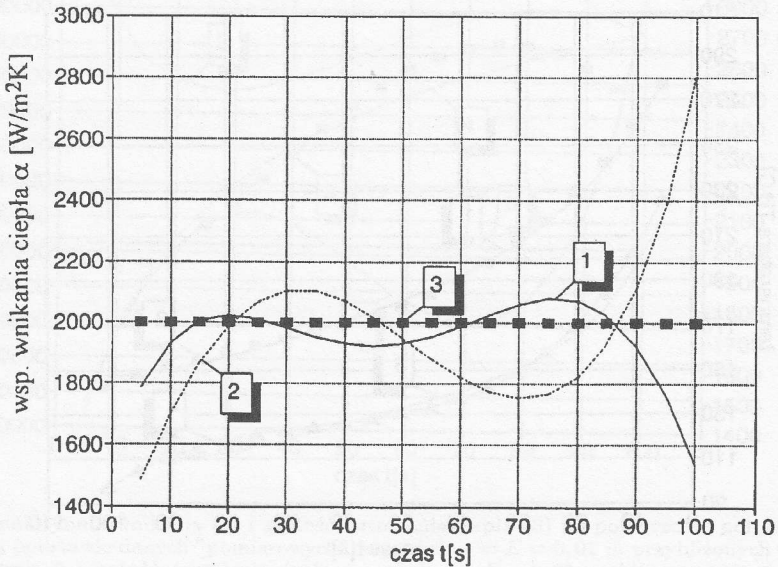
Rys. 9. Współczynnik wnikania (1) i gęstość strumienia ciepła (3) na powierzchni półprzestrzeni wyznaczone na podstawie danych "pomiarowych" w punkcie $x = E = 0,01 \text{ m}$ przybliżonych wielomianem 5-tego stopnia; 2 – gęstość strumienia ciepła w punkcie $x = E = 0,01 \text{ m}$ obliczona na podstawie "zmierzonych" przebiegu temperatury; 4 – gęstość strumienia ciepła na powierzchni półprzestrzeni obliczona z rozwiązania ścisłego przy $\alpha = 2000 \text{ W/m}^2\text{K}$ (5)



Rys. 10. Porównanie temperatury powierzchni półprzestrzeni wyznaczonej na podstawie "zmierzonych" przebiegu temperatury w punkcie $x = E = 0,01 \text{ m}$; 1, 2 – przebieg wielomianów aproksymujących "zmierzoną" temperaturę w punkcie $x = E$ odpowiednio 5-tego i 3-ciego stopnia; 3, 4 – obliczona temperatura powierzchni przy aproksymacji wielomianami odpowiednio 5-tego i 3-ciego stopnia



Rys. 11. Porównanie gęstości strumieni ciepła wyznaczonych na podstawie "zmierzonego" przebiegu temperatury w punkcie $x = E = 0,01 \text{ m}$; 1,2 – gęstości strumieni ciepła w punkcie $x = E$ wyznaczone na podstawie aproksymacji danych "pomiarowych" wielomianami odpowiednio 5-tego i 3-ciego stopnia, 3,4 – obliczona gęstość strumienia ciepła na powierzchni przy aproksymacji wielomianami odpowiednio 5-tego i 3-ciego stopnia



Rys. 12. Porównanie wyznaczonych współczynników wnikania ciepła na powierzchni półprzestrzeni przy aproksymacji danych "pomiarowych" wielomianami 5-tego (1) i 3-ciego (2) stopnia; dokładna wartość α wynosi $2000 \text{ W/m}^2\text{K}$ (3)

mniej dokładne.

Wynika to głównie z faktu, że wielomian 3-ciego stopnia nie jest w stanie dokładnie odtworzyć rzeczywistego przebiegu temperatury w punkcie $x = E$ (rys. 6), szczególnie na początku i końcu analizowanego przedziału czasu.

Warto dodać, że dokładność aproksymacji wielomianowej jest na brzegach analizowanego przedziału zwykle mała, niezależnie od stopnia wielomianu. Dotyczy to szczególnie pochodnych. Z tego też względu na rys. 6 ÷ 12 nie przedstawiono wyników dla czasu $t = 0$, chociaż wyprowadzone w pracy wzory pozwalają na to.

Z przeprowadzonych obliczeń testowych wynika, że przedstawiona w niniejszej pracy metoda jest skutecznym narzędziem w analizie szybkozmiennych procesów niustalonej wymiany ciepła, zachodzących na powierzchni ciała, na podstawie pomiaru temperatury pod powierzchnią ciała. Warunkiem poprawności metody jest dokładne odtworzenie zmierzonego przebiegu temperatury przez wielomian aproksymujący, przy jednoczesnej eliminacji przypadkowych błędów pomiaru. W przypadku złożonych zmierzonych przebiegów temperatury pod powierzchnią ciała, zastosowana w niniejszej pracy globalna aproksymacja wielomianowa może się okazać niewystarczająca, gdyż trudno aproksymować skomplikowany przebieg temperatury jednym wielomianem w całym analizowanym przedziale czasu.

W tych przypadkach należy stosować odcinkową (lokalną) aproksymację wielomianową, np. za pomocą sześciennych funkcji sklepanych.

6. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono metodę niustalonego pomiaru gęstości strumienia i współczynnika wnikania ciepła na powierzchni ciała w oparciu o pomiar temperatury w jego wnętrzu w pobliżu analizowanej powierzchni. Metoda jest szczególnie przydatna przy eksperymentalnym określaniu warunków wymiany ciepła na wewnętrznych powierzchniach cieplnych urządzeń energetycznych pracujących pod wysokimi ciśnieniami. W tych przypadkach zamocowanie czujnika do pomiaru temperatury na wewnętrznej powierzchni elementu omywanego gorącą parą lub wodą jest utrudnione. Przedstawiona metoda może znaleźć zastosowanie w badaniach wymiany ciepła w kotłach i turbinach parowych oraz w laboratoryjnych badaniach modelowych.

Pracę zgłoszono 1993.06.15

Literatura

- [1] M. G. Dunn, A. Hause, *Measurement of heat flux and pressure in a turbine stage*. Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Power, Vol. 104, January 1982, pp. 215-223.

- [2] H. Consigny, B. E. Richards, *Short duration measurements of heat-transfer rate to a gas turbine rotor blade* . Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Power, Vol. 104, July 1982, pp. 542-551.
- [3] D. M. Kercher, R. E. Sheer, Jr., R. M. C. So, *Short duration heat transfer studies at high free-stream temperatures* . Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Power, Vol. 105, January 1983, pp. 156-166.
- [4] J. H. Nicholson, A. E. Forest, M. L. G. Oldfield, D. L. Schultz, *Heat transfer optimized turbine rotor blades-an experimental study using transient techniques* . Transactions of the ASME, Journal of engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 106, January 1984, pp. 173-182.
- [5] J. E. Doorly, M. L. G. Oldfield, *The theory of advanced multi- layer thin film heat transfer gauges* . Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 30(6), 1987, pp. 1159-1168.
- [6] A. H. George, *A transducer for the measurement of instantaneous local heat flux to surfaces immersed in high-temperature fluidized beds* . Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 30(4), 1987, pp. 763-769.
- [7] A. H. George, J. L. Smalley, *An instrumented cylinder for the measurement of instantaneous local heat flux in high temperature fluidized beds* . Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 34(12), 1991, pp. 3025-3036.
- [8] A. H. George, *Instantaneous local heat transfer coefficients and related frequency spectra for a horizontal cylinder in a high temperature fluidized bed* . Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 36(2), 1993, pp. 337-345.
- [9] G. F. Hohenberg, *Advanced approaches for heat transfer calculations* . Paper No. 790825, Society of Automotive Engineers, 1980, pp. 2788-2806.
- [10] A. C. Alkidas, J. P. Myers, *Transient heat-flux measurements in the combustion chamber of a spark-ignition engine* . Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer, Vol. 104, February 1982, pp. 62-67.
- [11] D. N. Assanis, E. Badillo, *On heat transfer measurements in diesel engines using fast-response coaxial thermocouples* . Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 111, July 1989, pp. 458-465.
- [12] Y. Enomoto, S. Furuhamo, *A study of the local heat transfer coefficient on the combustion chamber walls of a four-stroke gasoline engine* . JSME International Journal, Vol. 32(1), 1989, pp. 107-114.
- [13] Y. Enomoto, T. Ohya, M. Ishii, K. Enomoto, N. Kitahara, *Study on analysis of instantaneous heat flux flowing into the combustion chamber wall of an internal combustion engine* . JSME International Journal, Vol. 35(4), 1992, pp. 608-615.

- [14] Katalog firmy Nanmac Corporation, Framingham Center, Massachusetts, U.S.A.
- [15] W. J. Cook, E. J. Felderman, *Reduction of data from thin-film heat transfer gages*. A concise numerical technique, Vol. 4(3), 1966, pp. 561-562.
- [16] W. J. Cook, *Determination of heat-transfer rates from transient surface temperature measurements*. AIAA Journal, Vol. 8(7), 1970, pp. 1366-1368.
- [17] G. E. Breitkopf, *Determination of heat transfer coefficients in steam turbines*. Wärme-und Stoffübertragung, Vol. 13(3), 1980, pp. 195-204.
- [18] O.R.Burggraf, *An exact solution of the inverse problem in heat conduction theory and applications*. Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer, Vol. 86C(3), 1964, 373-382.
- [19] Ch.M.Cirelman, *O korrektnosti analiticheskogo reshenija obratnoj zadaczi tepłoprowodnosti*. Inženerno Fizicheskij Žurnal, T.49(6), 1985, s.1015-1018.
- [20] Ju.Ju. Rykaczew, Ch.M.Cirelman, *Identifikacija granicznych usłowij na elementach protocznoj czasti turbiny GTD*. T.56(3), 1989, s.387-391.
- [21] J. V. Beck, B. Blackwell, Ch. R. St. Clair, *Inverse heat conduction*, Ill-posed problems, Wiley-Interscience, New York 1985.
- [22] M.Becker, *Heat transfer*, Plenum Press, New York, 1986.

Experimental Determination of the Heat Transfer Rates and Heat Transfer Coefficient

Summary

The paper describes a method for measuring of the heat transfer rates and heat transfer coefficient based on the monitoring of the interior body temperature near its surface and the temperature of the fluid. A polynomial of finite degree is used to approximate the measured interior temperature. A general-case and closed-form solution for the interface heat transfer rate is obtained. An example is presented to illustrate the accuracy of the developed method, especially the effect of the polynomial degree on the estimated heat transfer rate. The temperature response of semi-infinite solids, initially heated to a uniform temperature and suddenly exposed to convective environment is calculated. The surface temperature, heat flux and heat transfer coefficient are calculated from the measured temperature history at a distance of $E = 10 \text{ mm}$ beneath the active surface.