

POLSKA AKADEMIA NAUK

INSTYTUT MASZYN PRZEPEŁYWOWYCH

**PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPEŁYWOWYCH**

**TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY**

95



GDAŃSK 1993

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machines

RADA REDAKCYJNA – EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH * HENRYK JARZYNA * JERZY KRZYŻANOWSKI
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ * WŁODZIMIERZ J. PROSNAK
JÓZEF ŚMIGIELSKI * ZENON ZAKRZEWSKI

KOMITET REDAKCYJNY – EDITORIAL COMMITTEE

EUSTACHY S. BURKA (REDAKTOR NACZELNY – EDITOR-IN-CHIEF)
JAROSŁAW MIKIELEWICZ
EDWARD ŚLIWICKI (REDAKTOR – EXECUTIVE EDITOR) * ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA – EDITORIAL OFFICE

Wydawnictwo Instytutu Maszyn Przepływowych
Polskiej Akademii Nauk
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. poczt. 621,
tel. (0-58) 41-12-71 wew. 141, fax: (0-58) 41-61-44,
e-mail: tjan@imppan.imp.pg.gda.pl

ISBN 83-01-93121-1
ISSN 0079-3205

JAROSŁAW FRĄCZAK¹

Modelowanie niestacjonarnego opływu walca kołowego z uwzględnieniem warstwy przyściennej i śladu wirowego²

Przedstawiono fenomenologiczny model niestacjonarnego opływu walca, oraz jego realizację numeryczną. Model przepływu oparto na metodzie wirów dyskretnych i teorii warstwy przyściennej. Obliczono szereg wielkości m.in. współczynniki siły nośnej i oporu, natężenie splotu wirowości, liczbę Strouhala itd. Część rezultatów porównano z danymi eksperymentalnymi uzyskując dobrą zgodność.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

C_D	- współczynnik oporu,	U_e	- prędkość przepływu zewnętrznego na krawędzi warstwy przyściennej,
C_L	- współczynnik siły nośnej,	U_∞	- prędkość strumienia niezaburzonego
D	- opór na jednostkę długości cylindra,		strumienia jednorodnego,
d	- odległość generowanego wiru od powierzchni walca,	U_s	- prędkość przepływu zewnętrznego na powierzchni walca,
f	- częstotliwość splotu wirów z jednej strony walca,	U^*	- prędkość punktu oderwania,
f_s	- funkcja rozkładu wirowości,	u, v	- składowe wektora prędkości,
H	- funkcja skalująca,	$\mathbf{V}$	- wektor prędkości ($\mathbf{V} = (u, v)$),
J	- liczba węzłów siatki w kierunku normalnym do powierzchni,	x, y, X, Y	- współrzędne,
i, j, n	- indeksy,	α	- współczynnik odkształcenia siatki,
k	- indeks, numer kroku czasowego,	Δx	- odcinek o który przesuwane są dyskretnie wiry, w celu zaburzenia przepływu,
L	- siła nośna na jednostkę długości,	Γ	- intensywność wiru punktowego,
N	- liczba dyskretnych wirów,	Δ	- amplituda oscylacji,
$\mathbf{n}$	- wektor jednostkowy normalny do powierzchni walca,	δ	- grubość warstwy przyściennej,
R	- promień walca,	δ^*	- grubość przesunięcia,
Re	- liczba Reynoldsa,	η	- zmienna,
r	- promień wodzący,	θ	- kąt biegunowy,
r_{in}	- odległość pomiędzy dyskretnymi wirami o numerach i i n ,	θ_s	- współrzędna kątowa punktu oderwania,
r_{in}^*	- odległość pomiędzy dyskretnym wirami o numerze i i obrazem wiru o numerze n ,	θ_{sp}	- współrzędna kątowa punktu spiętrzenia,
S	- liczba Strouhala,	ν	- współczynnik lepkości kinematycznej cieczy,
		ρ	- gęstość cieczy,
		σ	- promień rdzenia wiru,
		ω	- wirowość,
		$\bar{()}$	- wartość średnia,

¹Zakład Dynamiki Cieczy, Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk

²Praca została wykonana w ramach działalności statutowej Instytutu Maszyn Przepływowych PAN w Gdańsku.

T – okres,
 t – czas,

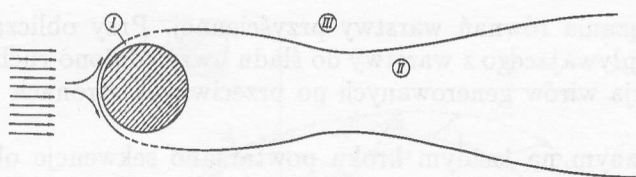
$()_{rms}$ – pierwiastek z wartości średniokwadratowej,
 Δt – przyrost (krok) czasu,

1. Wstęp

Niestacjonarny opływ walca kołowego, ze względu na towarzyszące mu złożone zjawiska przepływowe, jest od lat przedmiotem intensywnych badań zarówno z strony teoretycznej jak i doświadczalnej. W przepływie wokół walca wyróżnia się trzy podobszary (rys.1): dwa podobszary lepkie, tj. warstwa przyścienna i ślad wiru oraz nielepki podobszar zewnętrzny, który zwykle przyjmowany jest za bezwrotnicowy [1]. Dla dostatecznie dużych liczb Reynoldsa, $Re = 10^4 - 10^5$, dyfuzja wirów spowodowana lepkością jest mała w porównaniu z konwekcją wirowości i można przyjąć, że przepływ poza obszarem warstwy przyściennej jest zasadniczo nielepki, a rola lepkości cieczy przejawia się głównie w generacji wirowości i powstawaniu oderwania strumienia. Powszechnie znany jest fakt, że w rzeczywistym przepływie cieczy o dużej liczbie Reynoldsa występują obszary skoncentrowanej wirowości. W sytuacjach, w których zjawiska wirowe decydują o rozwoju przepływu, naturalnym sposobem modelowania jest metoda przybliżonej reprezentacji ciągłego rozkładu wirowości w ograniczonych obszarach za pomocą dyskretnych wirów. W relatywnie prostych dwuwymiarowych modelach opływu opartych na tej metodzie zakładane jest, że jedynym efektem wywołanym lepkością cieczy jest oderwanie przepływu od opływającego ciała, przy czym miejsca oderwania strug są stałe, a spływające warstwy wirowe przybliżane są wirami punktowymi (wiry liniowe) [3]. Modele te umożliwiają stosunkowo wierny opis pól przepływów z oderwaniem strumienia i powstawaniem śladu wirowego [4, 5, 6, 7]. Omówienie zagadnień dotyczących metod wirowych podano w artykułach przeglądowych [8, 9, 10, 11].

W pracy przedstawiono model niestacjonarnego, płaskiego opływu walca kołowego cieczą impulsowo wprowadzoną w ruch oraz jego realizację numeryczną. W modelu uwzględniono laminarną warstwę przyścienną, ruchome punkty oderwania strumienia, powstawanie i spływ struktur wirowych oraz formowanie śladu wirowego. Przepływ w bezpośrednim sąsiedztwie walca reprezentowany jest przez warstwę przyścienną, przepływ w śladzie przez konfigurację wirów dyskretnych. Przepływ poza tymi podobszarami opisywany jest przez potencjalny opływ walca. Proces czasowego rozwoju pola przepływu modelowany jest przez łączenie rozwiązań dla quasistacjonarnej warstwy przyściennej obliczanej metodą różnic skończonych z rozwiązaniem dla przepływu wirowego w śladzie obliczanym metodą wirów dyskretnych. Ciągła zmiana parametrów przepływu jest dyskretyzowana w czasie i przestrzeni, w ten sposób, że w kolejnych chwilach wyznaczane są parametry pola przepływu w wybranych punktach.

Opracowany model numeryczny umożliwia określanie pola przepływu w całym zakresie podkrytycznych liczb Reynoldsa ($Re = 10^4 - 10^5$), przy laminarnym oderwaniu warstwy przyściennej, gdy przejście do ruchu turbulentnego w warstwie przyściennej następuje prawie na powierzchni walca ($Re = 5 \cdot 10^4$ [12]), a dyfuzja



Rys. 1. Podział obszaru przepływu na podobszary: I – warstwa przyścienna, II – ślad, III – obszar przepływu zewnętrznego nielepkiego i bezwirowego

Wirowości jest mała. Podobne ujęcia polegające na łączeniu teorii warstwy przyściennej i metody wirów dyskretnych przedstawiono w pracach [13, 14, 15, 16, 17]. Wyniki teoretycznych i numerycznych badań zbieżności i dokładności metody wirów dyskretnych, zwanej często ogólnie metodą wirów, zawarte są m.in. w pracach [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24].

Dla oceny poprawności modelu otrzymane rezultaty obliczeń porównano z wynikami badań doświadczalnych. W niniejszej pracy przez modelowanie (symulację) przepływu rozumie się poszukiwanie – generację – przepływu o cechach narzuconych przez rzeczywisty przepływ cieczy, w przeciwieństwie do bezpośredniego rozwiązywania różniczkowych równań ruchu.

2. Sformułowanie zagadnienia

Rozpatrywany jest niestacjonarny, płaski opływ walca kołowego o promieniu R , jednorodnym strumieniem cieczy, która ze stanu spoczynku wprowadzona jest impulsowo w ruch, a następnie porusza się ze stałą predkością U_∞ . W czołowej części walca następuje rozwój warstwy przyściennej, która ulega oderwaniu. Wirowość generowana w warstwie unoszona jest wzdłuż ścianki, sływa do śladu w punktach oderwania przepływu po obu stronach walca w postaci warstwy wirowej, która zwiłając się tworzy bezpośrednio za walcem obszary o skoncentrowanej wirowości. W śladzie wirowość podlega procesowi konwekcji. Wirowość sływająca do śladu w kolejnych interwałach czasu skupiana jest w wirach dyskretnych typu Rankine'a [6] o promieniach rdzenia równych chwilowej grubości przesunięcia (grubość odpowiadająca stracie wydatku) w punkcie oderwania, które nie zmieniają swej intensywności w czasie. Innymi słowy wypływ wirowości modelowany jest przez generację wirów dyskretnych, a ich rozkłady w kolejnych chwilach modelują czasowy rozwój śladu. Przy impulsowo zapoczątkowanym przepływie, rozwijająca się warstwa przyścienna bardzo szybko osiąga stan quasistacjonarny, nawet jeżeli przepływ zewnętrzny zmienia się nieprzerwanie. Punkty oderwania warstwy, podczas tego okresu przejściowego, zmieniają położenia przesuwając się z punktu stagnacji w kierunku punktu spiętrzenia do swoich quasistacjonarnych położań. Przyjęto, że warstwa przyścienna reaguje bez opóźnień na zmiany zewnętrznego przepływu spowodowane rozwojem śladu. Generacja dyskretnych wirów następuje w punktach oderwania, których chwilowe położenia określane są

na podstawie rozwiązania równań warstwy przyściennej. Przy obliczaniu strumienia wirowości wypływającego z warstwy do śladu uwzględniono ruch punktów oderwania. Cyrkulacja wirów generowanych po przeciwnych stronach walca jest przeciwnego znaku.

W modelu numerycznym na każdym kroku powtarzano sekwencje obliczeń, w których wyznaczano m.in. położenie i prędkość punktów oderwania, położenie punktu spiętrzenia, intensywność, promień rdzenia, położenie i prędkość generowanych dyskretnych wirów, położenia i prędkości dyskretnych wirów w śladzie. Prezentowane rezultaty są wyrażone w postaci bezwymiarowej. Zmienne zależne i niezależne znormalizowano w następujący sposób: $x' = x/R$, $y' = y/R$, $\Gamma' = \Gamma/U_\infty R$, $u' = u/U_\infty$, $v' = v/U_\infty$, $t' = tU_\infty/R$, $\omega' = \omega R/U_\infty$, $\theta' = \theta$, $C_D = D/\rho R U_\infty^2$, $C_L = L/\rho R U_\infty^2$, $S = f(2R)/U_\infty$, $Re = (2R)U_\infty/\nu$. W dalszych oznaczeniach pominięto znak „prim” przy symbolach wielkości bezwymiarowych.

3. Reprezentacja pola przepływu

Powszechnie przyjmowane jest, że przy dużych liczbach Reynoldsa w odległościach znacznie większych od grubości warstwy przyściennej rzeczywisty przepływ cieczy może być w przybliżeniu opisywany za pomocą równań Eulera, a jedynie blisko opływanej powierzchni, gdzie lepkość w istotny sposób wpływa na ruch cieczy, konieczne jest rozpatrywanie równań Naviera i Stokesa lub równań warstwy przyściennej.

3.1. Ślad

Niestacjonarny płaski przepływ cieczy nielepkiej ($Re = \infty$) i nieściśliwej o stałej gęstości, wokół walca kołowego opisany jest równaniami Eulera i ciągłości z dołączonymi odpowiednimi warunkami brzegowymi i początkowymi. Możliwe jest alternatywne postawienie zagadnienia opływu w sformułowaniu dla prędkości i wirowości (u, v, ω) za pomocą równania ciągłości, równania definiującego wirowość, równania transportu wirowości Helmholtza [29] i dwu równań Poissona dla składowych prędkości u i v

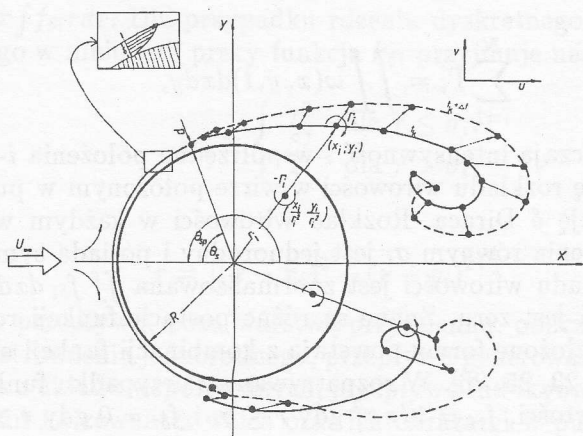
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial \omega}{\partial x}.$$



Rys. 2. Uproszczony model przepływu

Równania (4) otrzymywane są przez zróżniczkowanie równania (3) względem x i y oraz wykorzystanie równania ciągłości. W chwili początkowej ($t = 0$) prędkość i wirowość przepływu równe są zero. Warunki brzegowe ($t > 0$) wymagają spełnienia warunku nieprzenikalności powierzchni walca oraz zgodności z rozkładem prędkości w nieskończoności

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na powierzchni cylindra} \quad (5)$$

$$\mathbf{v} \rightarrow U_\infty = (1, 0) \quad \text{jeżeli } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Pole prędkości przepływu (indukowane przez rozkład wirowości) może być wyznaczone bezpośrednio z pola wirowości za pomocą całki Biota i Savarta [29], która stanowi rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia

$$u(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi} \iint \omega(X, Y, t) \frac{y - Y}{(x - X)^2 + (y - Y)^2} dX dY + U(x, y, t), \quad (7)$$

$$v(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \iint \omega(X, Y, t) \frac{x - X}{(x - X)^2 + (y - Y)^2} dX dY + V(x, y, t),$$

gdzie U, V są składowymi wektora prędkości przepływu zapewniającego spełnienie warunków brzegowych nałożonych na składową normalną wektora prędkości przepływu na powierzchni walca. Z kolei znajomość pola prędkości umożliwia określenie pola wirowości i *vice versa*.

Istota metody wirów dyskretnych polega na dyskretyzacji pola wirowości na N elementów wirowych – wirów dyskretnych – ω_i

$$\omega(x, y, t) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i f_{\delta i} [(x - x_i(t)), (y - y_i(t))] \quad (8)$$

takiej, że

$$\sum_{i=1}^N \Gamma_i = \iint \omega(x, y, t) dx dy,$$

gdzie Γ_i i x_i, y_i oznaczają intensywność i współrzędne położenia i -tego dyskretnego wiru, $f_{\delta i}$ funkcję rozkładu wirowości w wirze położonym w punkcie (x_i, y_i) aproksymującą funkcję δ Diraca. Rozkład wirowości w każdym wirze dyskretnym o promieniu rdzenia równym σ_i jest jednorodny i posiada symetrię promieniową. Funkcja rozkładu wirowości jest znormalizowana $\iint f_{\delta i} dx dy = 1$ i poza promieniem wiru równa jest zeru. Znane są różne postacie funkcji rozkładu wirowości, a niektóre jej złożone formy powstają z kombinacji funkcji elementarnych [9, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26]. W rozpatrywanym przypadku funkcja $f_{\delta i}$ przyjmuje następujące wartości, $f_{\delta i} = 1/\pi\sigma_i^2$ gdy $r \leq \sigma_i$ i $f_{\delta i} = 0$ gdy $r > \sigma_i$ [27], przy czym $r = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}$. Dla jednorodnego rozkładu wirowości cyrkulacja – intensywność każdego dyskretnego wiru o promieniu σ_i jest równa $\Gamma_i = \pi\sigma_i^2\omega_i$, pozostaje stała w czasie wzdłuż trajektorii jego ruchu ($d\omega/dt = 0$). Równanie (2) wskazuje, że wirowość ulega konwekcji z cieczą w związku z czym prędkość każdego dyskretnego wiru równa jest prędkości przepływu. Zastosowana dyskretyzacja redukuje równanie (2) do układu równań różniczkowych zwyczajnych opisujących ruch dyskretnych wirów

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= u(x_i, y_i, t), \\ \frac{dy_i}{dt} &= v(x_i, y_i, t), \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie (x_i, y_i) oznaczają współrzędne położenia i -tego dyskretnego wiru ($i = 1, \dots, N$) w chwili t , a (u, v) składowe wektora prędkości w punkcie położenia i -tego dyskretnego wiru. Trajektorię ruchu i -tego dyskretnego wiru można wyrazić wzorami

$$\begin{aligned} x_i(t + \Delta t) &= x_i(t) + \int u(x_i, y_i, t) dt, \\ y_i(t + \Delta t) &= y_i(t) + \int v(x_i, y_i, t) dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Podstawienie dyskretnego rozkładu wirowości, równanie (8) do równań (7) umożliwia obliczenie pola prędkości przepływu indukowanego przez dyskretne wiry w chwili t

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \frac{y - y_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} k_{\delta i}(x_i, y_i) + U(x, y), \\ v(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \frac{x - x_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} k_{\delta i}(x_i, y_i) + V(x, y), \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie $k_{\delta i} = 2\pi \int f_{\delta i} r dr$. Dla przypadku rdzenia dyskretnego wiru Rankine'a wykorzystywanego w niniejszej pracy funkcja $k_{\delta i}$ przyjmuje następujące wartości

$$k_{\delta i} = \begin{cases} \frac{r^2}{\sigma_i^2} & \text{dla } r \leq \sigma_i, \\ 1 & \text{dla } r > \sigma_i, \end{cases}$$

gdzie

$$r = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Parametry przepływu, poza warstwą przyścienną, obliczane są na podstawie superpozycji: strumienia jednorodnego, przepływu generowanego dipolem położonym w początku układu współrzędnych, przepływu indukowanego N dyskretnymi wirami leżącymi na zewnątrz walca oraz ich obrazami w punktach inwersyjnych [7]. Obrazy wirów zapewniają, spełnienie warunku nieprzenikalności powierzchni walca, oraz warunku wymagającego aby sumaryczna wirowość przepływu była stała i równa zero [5, 6] (twierdzenie Kelvina o niemożliwości powstawania cyrkulacji w strumieniu cieczy doskonałej [28]). Uproszczony schemat przepływu pokazany jest na rysunku 2. Prędkość konwekcji dyskretnych wirów równa jest lokalnej prędkości pola przepływu w miejscu ich aktualnego położenia. Składowe $(u_i(t_k), v_i(t_k))$ wektora prędkości konwekcji i -tego wiru ($i = 1, \dots, N$), leżącego w chwili $t_k = k\Delta t$, ($k = 1, 2, \dots$), w punkcie o współrzędnych $(x_i(t_k), y_i(t_k))$, będące sumą wektorów prędkości pochodzących od wszystkich przyczynków przepływu określają wyrażenia

$$\begin{aligned} u_i = & 1 - \frac{x_i^2 - y_i^2}{(r_i^2)^2} \\ & - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 1}}^{N'} \Gamma_n \frac{y_i - y_n}{r_{in}^2} - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 1}}^{N''} \Gamma_n \frac{y_i - y_n}{\sigma_n^2} \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N'} \Gamma_n \frac{y_i - y_n/r_n^2}{r_{in}^{*2}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N''} \Gamma_n \frac{y_i - y_n/r_n^2}{\sigma_n^2}, \\ v_i = & -\frac{2x_i y_i}{(r_i^2)^2} \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 1}}^{N'} \Gamma_n \frac{x_i - x_n}{r_{in}^2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 1}}^{N''} \Gamma_n \frac{x_i - x_n}{\sigma_n^2} \\ & - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N'} \Gamma_n \frac{x_i - x_n/r_n^2}{r_{in}^{*2}} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N''} \Gamma_n \frac{x_i - x_n/r_n^2}{\sigma_n^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 r_i^2 &= x_i^2 + y_i^2, \\
 r_n^2 &= x_n^2 + y_n^2, \\
 r_{in} &= [(x_i - x_n)^2 + (y_i - y_n)^2]^{\frac{1}{2}}, \\
 r_{in}^* &= \left[\left(x_i - \frac{x_n}{r_n^2} \right)^2 + \left(y_i - \frac{y_n}{r_n^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

gdzie Γ_i i x_i, y_i, σ_i oznaczają intensywność, współrzędne położenia i promień i -tego dyskretnego wiru Rankine'a. Suma Σ' obliczana jest w przypadku $r_{in} > \sigma_i, r_{in}^* > \sigma_i$, a suma Σ'' gdy $r_{in} \leq \sigma_i, r_{in}^* \leq \sigma_i$. Położenie i -tego dyskretnego ($i = 1, \dots, N$) w kolejnych chwilach $t_k = k\Delta t, (k = 1, 2, \dots)$ przyrostu czasu Δt określane jest na podstawie schematu Eulera [30]

$$\begin{aligned}
 x_i(t_{k+1}) &= x_i(t_k) + u_i(t_k)\Delta t, \\
 y_i(t_{k+1}) &= y_i(t_k) + v_i(t_k)\Delta t.
 \end{aligned}$$

W przepływie rzeczywistym wirowość, która dyfunduje w kierunku ścian, ulega dysypacji. Ponieważ w modelu ciecz jest nielepka i nie nałożono warunków braku poślizgu na brzegu walca, pojedyncze wiry mogą zbliżać się zarówno do siebie jak i do powierzchni walca na bardzo małe odległości. W celu eliminacji tych efektów wiry dyskretne, które przedostaną się do wnętrza walca lub zbliżą do jego powierzchni na małą odległość są usuwane z pola przepływu, natomiast wiry, które zbliżą się za bardzo do siebie są łączone w wir wypadkowy [14]. Intensywność i położenie wypadkowego wiru określają wzory [14]

$$\begin{aligned}
 \Gamma_w &= \sum_i \Gamma_i, \\
 x_w &= \frac{\sum_i |\Gamma_i| x_i}{\sum_i |\Gamma_i|}, \\
 y_w &= \frac{\sum_i |\Gamma_i| y_i}{\sum_i |\Gamma_i|}.
 \end{aligned}$$

Rezultatami zastosowania tych procedur jest m.in. ograniczenie liczby wirów dyskretnych, oraz zmniejszenie wirowości w obszarach, w których nastąpiło połączenie dyskretnych wirów przeciwnego znaku.

Przy dużych liczbach Reynoldsa bezpośrednio po impulsowym rozpoczęciu ruchu rozwój przepływu jest symetryczny, jednak dla dłuższych czasów przepływu staje się niestabilny. Stosunkowo szybko, symetryczny obraz przepływu zostaje zaburzony, następnie ulegają oddzieleniu pierwsze struktury wirowe [31, 32] – struktury naprzemian z obu stron walca następuje quasiregularne oddzielanie – struktury wirowych. Jednak przeciwnie do wyników obserwacji, ze względu na symetrię geometrii przepływu oraz warunków początkowych i brzegowych rozwiązanie Eulera prowadzi do rozwiązania symetrycznego. W związku z czym równanie

w numerycznej symulacji impulsowo rozpoczęty przepływ rozwija się symetrycznie. Zapoczątkowanie oddzielania struktur wirowych wymaga wprowadzenia do przepływu zaburzenia o ograniczonej intensywności i czasie trwania. Należy zaznaczyć, że rozwiązania równań Naviera i Stokesa przy dużych liczbach Reynoldsa ($Re \geq 10^3$) również dają symetryczne obrazy przepływu i dopiero wprowadzenie zaburzenia powoduje oddzielanie wirów i umożliwia osiągnięcie przez przepływ stanu właściwego dla przepływów rzeczywistych [33, 34, 35]. W obliczeniach numerycznych czynnikami zaburzającymi, których efektem może być zapoczątkowanie spływu struktur wirowych i rozwój przepływu periodycznego, mogą być błędy zaokrągleń i obcięć oraz błędy spowodowane numeryczną aproksymacją schematów obliczeniowych [36, 37]. Jednak do modelu fizycznego powinno być wprowadzane zaburzenie o charakterze zaburzeń fizycznych, które pojawiają w przepływie rzeczywistym. Ponieważ zjawisko nie jest jeszcze dostatecznie rozpoznane dlatego też, powszechnie wykorzystywane są różne sposoby zaburzania przepływu. W modelach opartych na metodzie dyskretnych wirów najczęściej wykorzystywane sposoby zaburzania polegają na małych zmianach położenia i/lub intensywności dyskretnych wirów po jednej stronie śladu w krótkim okresie czasu [14, 15, 38] lub na narzucaniu początkowego rozkładu dyskretnych wirów w celu uzyskania początkowej asymetrii przepływu lub symulacji śladu [5, 6, 39, 40, 41]. W modelach, w których jest wykorzystywana metoda przemieszczania losowego (random walk) [25], nieznaczące losowe zmiany położenia dyskretnych wirów dokonywane są w każdym obliczeniowym kroku czasowym i stanowią istotę samej metody, której celem jest modelowanie zjawiska dyfuzji wirowości.

W niniejszej pracy w celu zaburzania symetrycznie rozwijającego się pola przepływu oraz wymuszenia zejścia pierwszej struktury wirowej i formowania asymetrycznego, periodycznego śladu, w początkowej fazie rozwoju przepływu ($5 < t < 9$) w kolejnych krokach czasowych dyskretnie wiry tego samego znaku przesuwano o krótki odcinek Δx , którego długość wyznaczano ze wzoru przedstawionego w pracy [15]

$$\Delta x = 0,04 \left[1 - \cos \frac{\pi(t_k - 5)}{4} \right] \quad \text{dla } 5 \leq t_k \leq 9. \quad (17)$$

2.2. Laminarna warstwa przyścienna

Dla obliczenia laminarnego, lepkiego, nieściśliwego przepływu przy powierzchni walca, wykorzystano układ równań różniczkowych dwuwymiarowej laminarnej stacjonarnej warstwy przyściennej, które w formie bezwymiarowej mają postać [17, 29]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (18)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (19)$$

$$u(x, y) = 0, \quad v(x, y) = 0, \quad \text{dla } y = 0, \quad (20)$$

$$u(x, y) \rightarrow U_e(x), \quad \text{jeżeli } y \rightarrow \infty, \quad (21)$$

gdzie x, y – współrzędne lokalnego układu w warstwie przyściennej zorientowane w kierunku przepływu i w kierunku normalnym do opływającego konturu. Warstwa przyścienna obliczana jest od punktu spiętrzenia. Nałożone warunki brzegowe zakładają brak poślizgu cieczy na opływającej powierzchni i prędkość wzdłużną na granicy warstwy przyściennej równą prędkości wyznaczonej z analizy przepływu cieczy nielepkiej, w danym obliczeniowym momencie czasu. Na podstawie rozwiązania układu równań warstwy przyściennej określone są punkty oderwania strug θ_s oraz grubości przesunięcia (grubości odpowiadające stracie wydatku) $\delta^* = \int_0^\delta (1 - u/U_e) dy$. Za punkt oderwania warstwy przyściennej przyjęto punkt, w którym współczynnik tarcia powierzchniowego równy jest zeru ($\partial u / \partial y = 0$). Zmienną y przeskalowano za pomocą funkcji $H(x)$ proporcjonalnej do grubości przesunięcia wprowadzając nową zmienną $\eta = y/H$, w związku z czym równania warstwy przyściennej (18) i (19) przybrały formę

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{1}{H} \frac{\partial (Hu)}{\partial x}, \quad (22)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial \eta} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{1}{H} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad (23)$$

gdzie

$$w = \frac{1}{H} \left(v - \frac{\partial H}{\partial x} \eta u \right). \quad (24)$$

Równania rozwiązywano metodą różnic skończonych wykorzystując algorytm przedstawiony w pracy [42], w którym zastosowano nieregularną siatkę w kierunku normalnym do powierzchni walca

$$\eta_j = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{j-1}{J-1} + 0,4 \right) \left[\exp \left(\frac{j-1}{J-1} \ln \frac{\alpha+1,4}{1,4} \right) - 1 \right], \quad (25)$$

gdzie α oznacza parametr określający odchylenia siatki od rozkładu regularnego, J – ilość wierszy siatki, j – numer wiersza. W chwili impulsowego rozpoczęcia ruchu przyjęto, że rozkład prędkości na powierzchni walca opisany jest przez pole potencjalne. Natomiast rozwiązania w późniejszych chwilach uwzględniają modyfikację rozkładu prędkości związaną z rozwojem śladu. Wpływ warstwy przyściennej na przepływ poza warstwą może być wyrażony przez zastąpienie jej warstwą wirową umieszczoną w środku wirowości warstwy przyściennej [43, 44].

4. Generacja dyskretnych wirów

Jeżeli przepływ zewnętrzny jest bezwirowy natomiast ślad jest wirowy ale nielepki (rys.1) to na mocy twierdzenia Helmholtza można przypuszczać, że wirowość zawarta w śladzie musi powstawać w warstwie przyściennej. Jeżeli przyjąć

że w warstwie przyściennej przybliżony związek pomiędzy wirowością i prędkością wyraża relacja [43]

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (26)$$

to strumień wirowości wypływający z warstwy przyściennej w punkcie jej oderwania przy uwzględnieniu ruchu punktu oderwania określa wyrażenie [45, 46]

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_0^\delta (u - U^*) \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0,5 U_s^2 - U^* U_s, \quad (27)$$

gdzie U^* oznacza prędkość punktu oderwania, u składową prędkości w kierunku stycznym do ścianki, $u - U^*$ składową prędkości odmierzaną względem poruszającego się punktu oderwania. Wpływ wirowości modelowany jest przez generację dwóch dyskretnych wirów o przeciwnej cyrkulacji w każdym kroku czasowym, w punktach oderwania warstwy przyściennej $\theta = \theta_s$, po przeciwnych stronach walca. Intensywność n -tego generowanego dyskretnego wiru równa jest strumieniowi wirowości wypływającemu z warstwy przyściennej w punkcie oderwania podczas obliczeniowego interwału czasu Δt [45, 47]

$$\Gamma_n = \frac{d\Gamma}{dt} \Delta t = (0,5 U_s^2 - U^* U_s) \Delta t, \quad (28)$$

gdzie U_s oznacza prędkość przelotu na powierzchni walca w punkcie oderwania warstwy przyściennej $\theta = \theta_s$. Dla spełnienia warunku zerowania składowej normalnej prędkości na powierzchni walca jednocześnie z generacją dyskretnego wiru powstaje jego obraz inwersyjny. Wiry generowane są w punktach, o współrzędnych

$$\begin{aligned} x &= (1 + d) \cos(\pi - \theta_s), \\ y &= (1 + d) \sin(\pi - \theta_s), \end{aligned} \quad (29)$$

w odległości

$$d = \frac{2 |\Gamma_n|}{2\pi |U_s| - |\Gamma_n|} \quad (30)$$

od powierzchni walca. Taki sposób postępowania zapewnia spełnienie warunku zerowania składowej stycznej prędkości na powierzchni walca, w chwili generacji dyskretnego wiru [14, 15]. Początkowa prędkość generowanych wirów zgodna jest z lokalną prędkością przepływu w punkcie ich generacji. Ponieważ środek wirowości warstwy przyściennej położony jest w odległości równej grubości przesunięcia [44, 48], dlatego też w modelu przyjęto, że promienie generowanych dyskretnych wirów równe są chwilowej grubości przesunięcia w punkcie oderwania.

5. Współczynniki siły nośnej i oporu

Siły działające na ciało sztywne w przepływie nieściśliwym można określić na podstawie pola wirowości [49]. W rozpatrywanym zakresie liczb Reynoldsa opór tarcia powierzchniowego jest znacznie mniejszy od oporu ciśnieniowego i wnoszący znikomy wkład do oporu całkowitego ($C_{Df} = 0,01$, $Re = 10^5$ [50]), dlatego też w modelu wyznaczany jest opór wywołany jedynie siłami ciśnieniowymi. Współczynniki oporu i siły nośnej wyznaczono ze wzorów [5, 51]

$$C_D = - \sum_{i=1}^N \Gamma_i \left[v_i \left(1 - \frac{x_i^2 - y_i^2}{r_i^4} \right) + 2u_i \frac{x_i y_i}{r_i^4} \right], \quad (31)$$

$$C_L = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \left[u_i \left(1 + \frac{x_i^2 - y_i^2}{r_i^4} \right) + 2v_i \frac{x_i y_i}{r_i^4} \right], \quad (32)$$

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2},$$

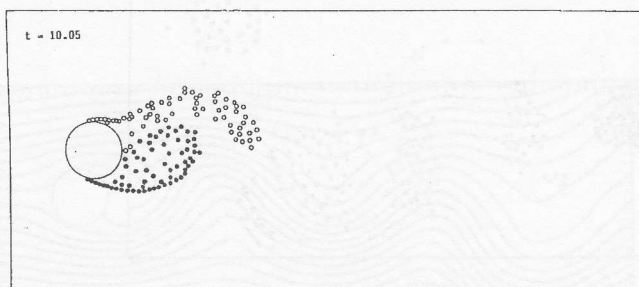
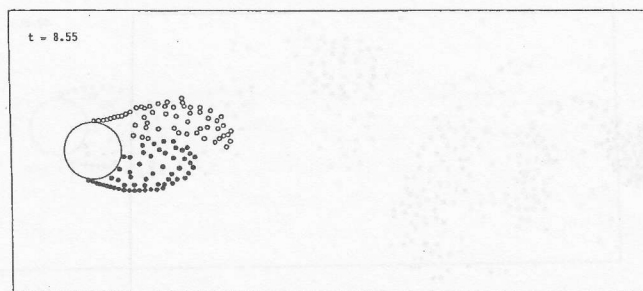
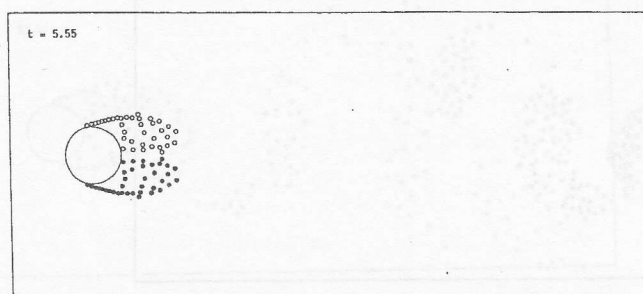
gdzie Γ_i i x_i, y_i oznaczają intensywność i współrzędne położenia i -tego dyskretnego wiru, a u_i, v_i składowe wektora jego prędkości.

6. Rezultaty obliczeń numerycznych

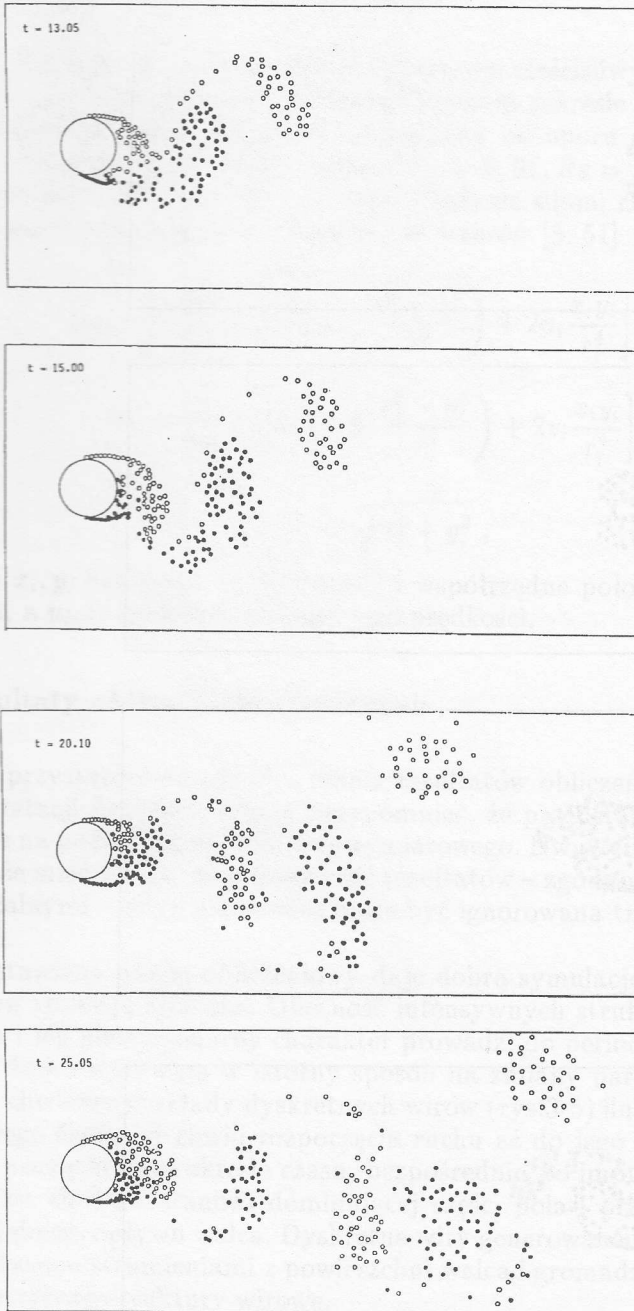
Przed przystąpieniem do omawiania rezultatów obliczeń numerycznych oraz ich interpretacji fizycznej, należy przypomnieć, że przedstawiane wyniki zostały otrzymane na podstawie modelu dwuwymiarowego. Dwuwymiarowe ujęcie zagadnienia może mieć wpływ na poprawność rezultatów – zgodność wyników z danymi doświadczalnymi – gdyż nie zawsze może być ignorowana trójwymiarowa natura przepływu.

Przedstawiany model obliczeniowy daje dobrą symulację przepływu dla długich czasów rozwoju zjawiska. Obecność intensywnych struktur wirowych w śladzie walca i ich niestacjonarny charakter prowadzi do okresowych zmian pola przepływu, które wpływają w istotny sposób na zmiany parametrów przepływu. Obliczone chwilowe rozkłady dyskretnych wirów (rys.3-5) ilustrują ewolucję dwuwymiarowego śladu od chwili rozpoczęcia ruchu aż do jego całkowitego uformowania. W początkowym okresie czasu, bezpośrednio po impulsowym rozpoczęciu ruchu cieczy, ślad nie stanowi dominującej części pola i przepływ podobny jest do potencjalnego opływu walca. Dyskretne wiry generowane w kolejnych chwilach spływają dwoma strumieniami z powierzchni walca i gromadzą się za nim tworząc dwie symetryczne struktury wirowe.

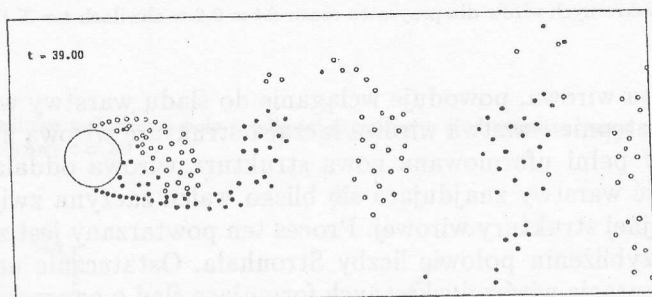
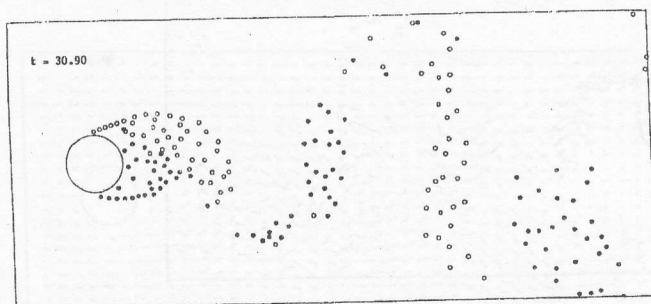
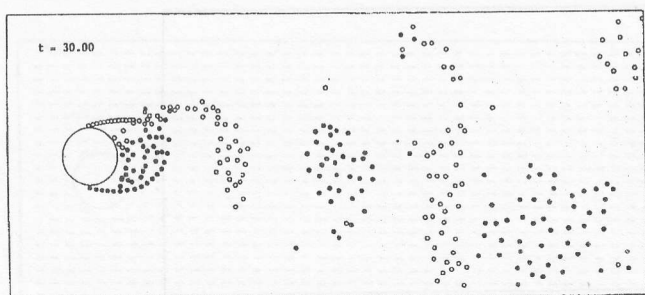
Początkowe rozkłady dyskretnych wirów modelują spływające warstwy wirowe o charakterystycznej spiralnej formie. Z upływem czasu symetryczny obraz przepływu zostaje zaburzony, po czym struktury wirowe przeciwnych znaków za-wirowania zaczynają regularnie spływać naprzemian z obu stron walca. Każda



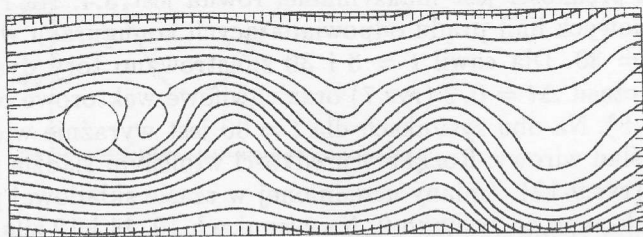
Rys. 3. Rozkłady wirów dyskretnych w kolejnych fazach rozwoju śladu; o i • oznaczają wiry dyskretnie o kierunku rotacji odpowiednio zgodnym i przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara



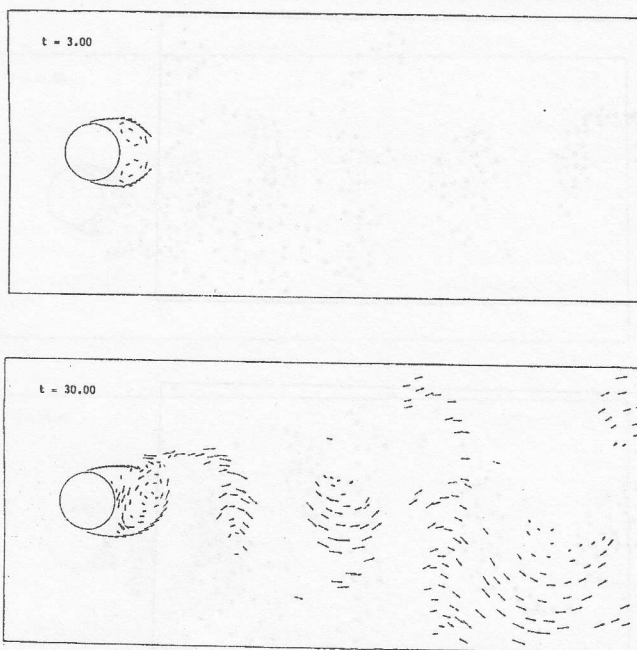
Rys. 4. Rozkłady wirów dyskretnych w kolejnych fazach rozwoju śladu; $\circ$ i $\bullet$ oznaczają wiry dyskretnego kierunku rotacji odpowiednio zgodnym i przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara



Rys. 5. Rozkłady wirów dyskretnych w kolejnych fazach rozwoju śladu; o i • oznaczają wiry dyskretnie o kierunku rotacji odpowiednio zgodnym i przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara

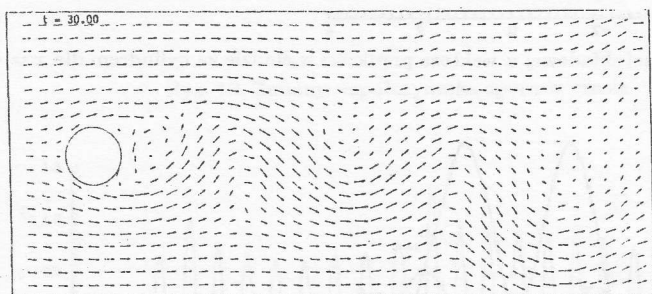
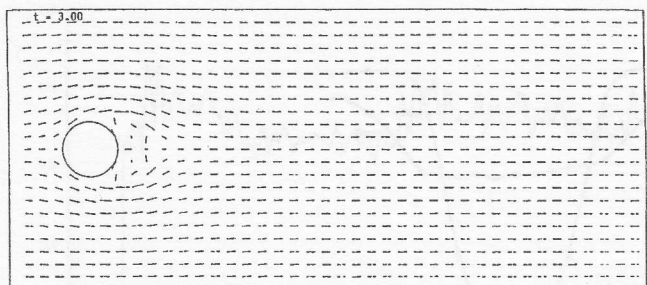


Rys. 6. Obraz chwilowych linii prądu dla $t = 30$

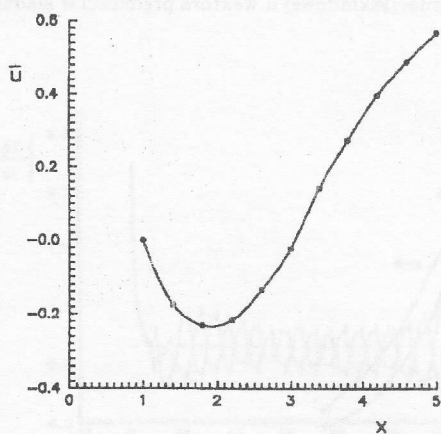


Rys. 7. Trajektorie dyskretnych wirów dla przyrostu czasu $\Delta t = 0,2$ w chwilach $t = 3$ i $t = 30$

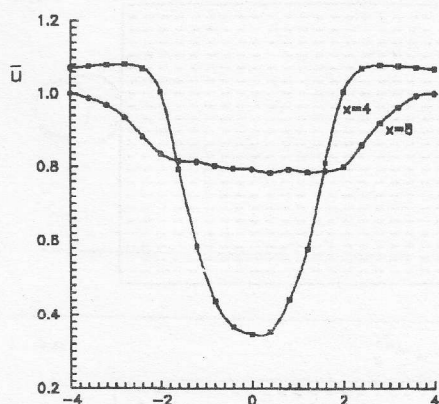
formująca się struktura wirowa, powoduje wciąganie do śladu warstwy wirowej przeciwnej strony. Następnie warstwa wirowa łącząca strukturę wirową z walcem zostaje rozerwana. W pełni uformowana nowa struktura wirowa oddala się od walca, natomiast część warstwy znajdująca się blisko walca zaczyna zwiijać się i następuje rozwój kolejnej struktury wirowej. Proces ten powtarzany jest z częstotliwością równą w przybliżeniu połowie liczby Strouhala. Ostatecznie ustala się niesymetryczna konfiguracja wirów dyskretnych formująca ślad o naprzemiennym rozkładzie wirowości. Średnia bezwymiarowa odległość pomiędzy strukturami wirowymi tego samego znaku w obszarze w pełni rozwiniętego śladu wynosi 8,7. Bezwymiarowa długość obszaru formowania struktur wirowych, określona jako współrzędna punktu na osi śladu, w którym odchylenie standardowe fluktuacji składowej u wektora prędkości jest maksymalne, równa jest 3,4. Na rysunku 8 pokazano obraz chwilowych linii prądu odpowiadających konfiguracji wirów dyskretnych w chwili $t = 30$. Dla chwil $t = 3$ i 30 zilustrowano tor dyskretnych wirów dla przyrostu czasu $\Delta t = 0,2$ (rys.7) oraz chwilowe wektorowe pole prędkości przepływu (rys.8). Na obu rysunkach dla $t = 30$ jest wyraźnie widoczny w pełni ukształtowany ślad wirowy. Rozkłady prędkości w bliskim śladzie przedstawiono na wykresach (rys.9-12). Zmiany uśrednionej w czasie składowej prędkości u wzdłuż osi śladu pokazano na rysunku 9. Na rysunkach 10, 11 i 12 zilustrowano rozkłady uśrednionej w czasie składowej prędkości u oraz odchylenia standardowe fluktuacji składowych prędkości $\sqrt{(u - \bar{u})^2}$, $\sqrt{(v - \bar{v})^2}$ wzdłuż linii prostej



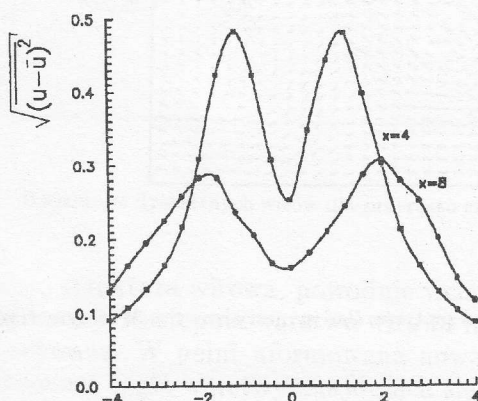
Rys. 8. Chwilowe wektorowe pole prędkości przepływu: ślad symetryczny $t = 3$; niesymetryczny rozwinięty ślad wirowy $t = 30$



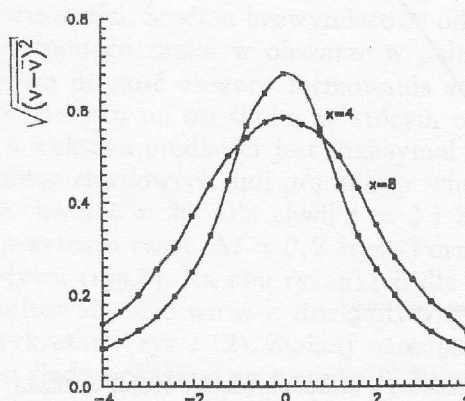
Rys. 9. Rozkład uśrednionej składowej u wektora prędkości wzdłuż osi śladu



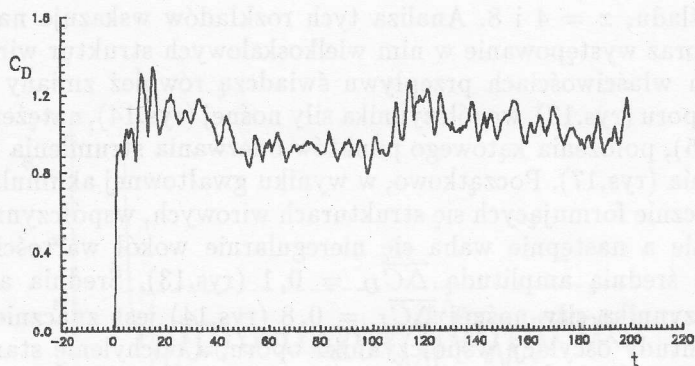
Rys. 10. Profil uśrednionej składowej u wektora prędkości w śladzie za cylindrem dla $x = 4$ i $x = 8$



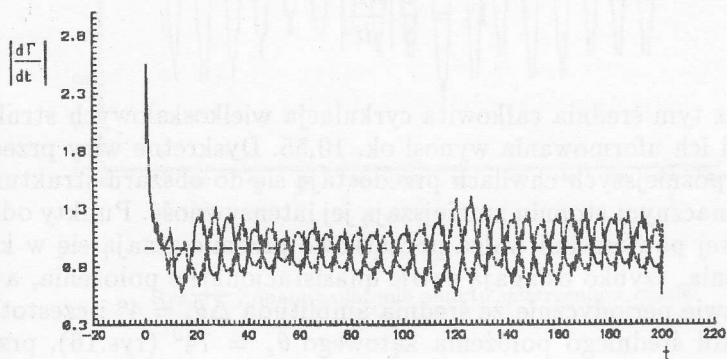
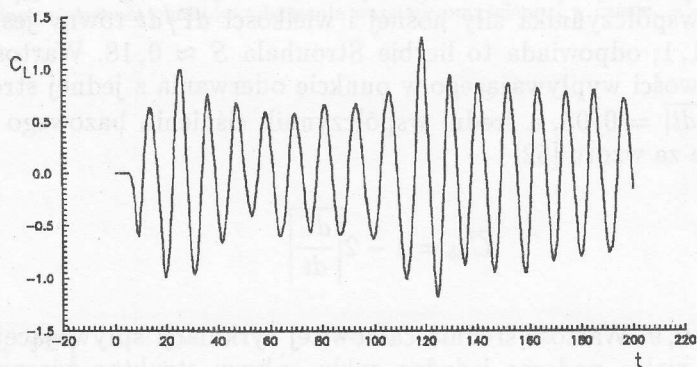
Rys. 11. Rozkład odchylenia standardowego fluktuacji składowej u wektora prędkości w śladzie dla $x = 4$ i $x = 8$



Rys. 12. Rozkład odchylenia standardowego fluktuacji składowej v wektora prędkości w śladzie dla $x = 4$ i $x = 8$



Rys. 13. Zmiany współczynnika oporu w czasie



Rys. 15. Natężenie wypływu wirowości z warstwy przysięennej w punktach oderwania na górnej — i dolnej powierzchni walca, — — — — dane doświadczalne dla $Re = 3 \cdot 10^4$

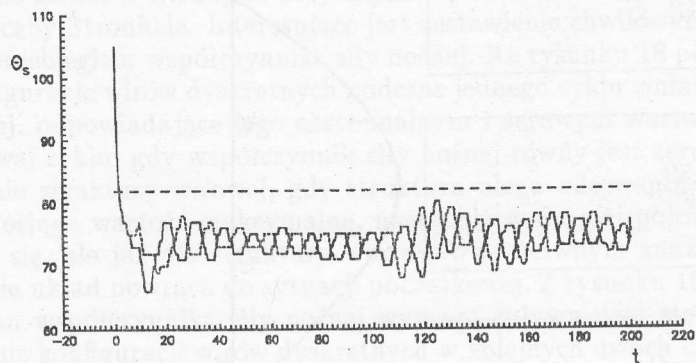
padłych do osi śladu, $x = 4$ i 8 . Analiza tych rozkładów wskazuje na znaczną szerokość śladu oraz występowanie w nim wielkoskalowych struktur wirowych. O periodycznych właściwościach przepływu świadczą również zmiany w czasie współczynnika oporu (rys.13), współczynnika siły nośnej (rys.14), natężenia splotu wirowości (rys.15), położenia kąowego punktów oderwania strumienia (rys.16) punktu spiętrzenia (rys.17). Początkowo, w wyniku gwałtownej akumulacji wirowości w symetrycznie formujących się strukturach wirowych, współczynnik oporu gwałtownie rośnie a następnie waha się nieregularnie wokół wartości średniej $\overline{C_D} = 1,04$, ze średnią amplitudą $\overline{\Delta C_D} = 0,1$ (rys.13). Średnia amplituda oscylacji współczynnika siły nośnej $\overline{\Delta C_L} = 0,8$ (rys.14) jest znacznie większa od średniej amplitudy oscylacji współczynnika oporu, a odchylenie standardowe tych oscylacji wynosi $(\overline{C_L^2})^{\frac{1}{2}} = 0,57$. Wartość średnia współczynnika siły nośnej równa jest zeru. Oscylacje $|\overline{d\Gamma/dt}|$ i $C_L(t)$ dla $t > 5$ wykazują zbliżoną częstotliwość. Na wykresach (rys.14 i 15) widać, że przebieg $|\overline{d\Gamma/dt}|$ dla górnej powierzchni walca jest w przybliżeniu zgodny w fazie z przebiegiem $C_L(t)$. Średni okres oscylacji współczynnika siły nośnej i wielkości $d\Gamma/dt$ równy jest w przybliżeniu $T \approx 11,1$, odpowiada to liczbie Strouhala $S \approx 0,18$. Wartość średnia strumienia wirowości wypływającego w punkcie oderwania z jednej strony walca równa jest $|\overline{d\Gamma/dt}| = 0,95$, a średni współczynnik ciśnienia bazowego obliczony na jej podstawie ze wzoru [52]

$$\overline{C_{pb}} = 1 - 2 \left| \overline{\frac{d\Gamma}{dt}} \right| \quad (33)$$

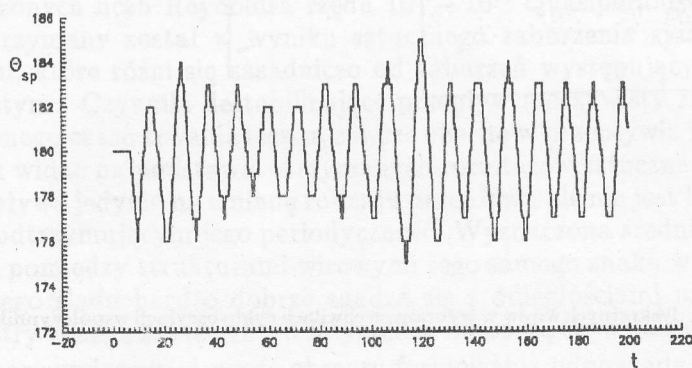
wynosi $\overline{C_{pb}} = -0,9$. Wartość średnia całkowitej cyrkulacji spływającej do śladu z jednej strony walca podczas jednego cyklu spływu struktur wirowych (dwie struktury wirowe) o okresie $T = 11,1$, może być wyznaczona na podstawie wzoru

$$\Gamma_c = \frac{2}{S} \left| \overline{\frac{d\Gamma}{dt}} \right| \quad (34)$$

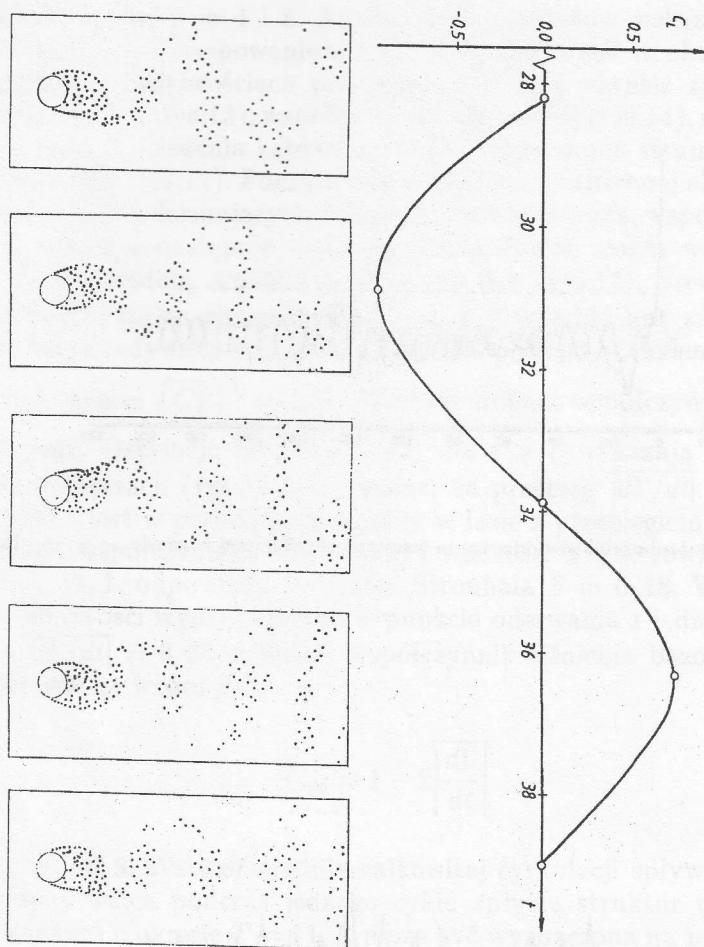
W związku z tym średnia całkowita cyrkulacja wielkoskalowych struktur wirowych w chwili ich uformowania wynosi ok. 10,55. Dyskretne wiry przeciwnego znaku, które w późniejszych chwilach przedostają się do obszaru struktury wirowej tylko w nieznacznym stopniu zmniejszają jej intensywność. Punkty oderwania na górnej i dolnej powierzchni walca początkowo przemieszczają się w kierunku punktu spiętrzenia, szybko osiągają swoje quasistacjonarne położenia, a następnie oscylują prawie periodycznie ze średnią amplitudą $\Delta\theta_s = 4^\circ$ i częstotliwością $f = 0,105$ wokół średniego położenia kąowego $\theta_s = 74^\circ$ (rys.16), przy czym faza ich oscylacji jest przeciwna. Punkt spiętrzenia oscyluje ze średnią amplitudą $\Delta\theta_{sp} = 4^\circ$ wokół średniego położenia $\theta_{sp} = 180^\circ$ (rys.17). Po zakończeniu początkowego stanu przejściowego, podczas którego następuje rozwój strefy oderwania



Rys. 16. Zmiany położenia punktów oderwania warstwy przyściennej w czasie, - - - dane doświadczalne



Rys. 17. Zmiany położenia punktu spiętrzenia w czasie

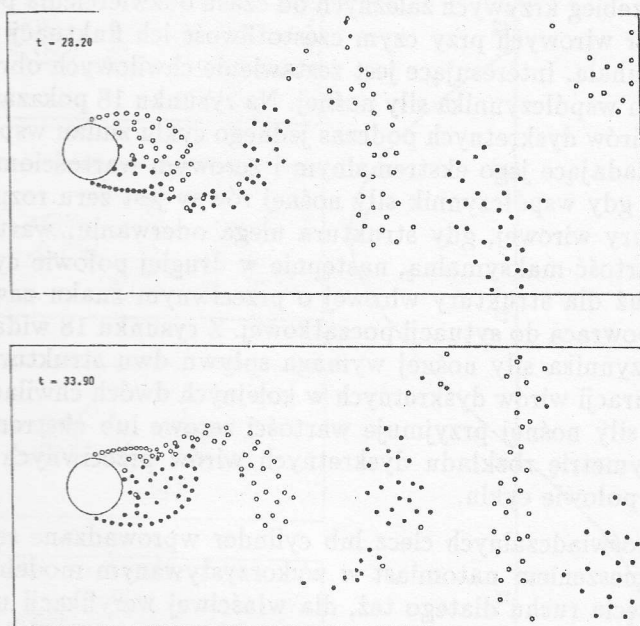


Rys. 18. Konfiguracje dyskretnych wirów w wybranych chwilach cyklu oscylacji współczynnika siły nośnej

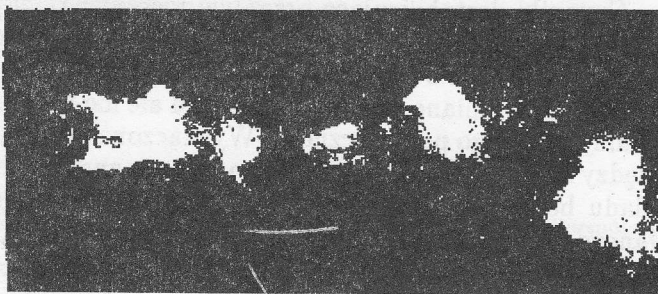
i tworzenie śladu wirowego ($t > 5$), kiedy ślad wirowy osiągnął już quasistacjonarny charakter, przebieg krzywych zależnych od czasu odzwierciedla periodyczne formowanie struktur wirowych przy czym częstotliwość ich fluktuacji bliska jest połowie liczby Strouhala. Interesujące jest zestawienie chwilowych obrazów przepływu z przebiegiem współczynnika siły nośnej. Na rysunku 18 pokazane są chwilowe konfiguracje wirów dyskretnych podczas jednego cyklu zmian współczynnika siły nośnej, odpowiadające jego ekstremalnemu i zerowemu wartościom. W chwili początkowej cyklu, gdy współczynnik siły nośnej równy jest zeru rozpoczyna się formowanie struktury wirowej, gdy struktura ulega oderwaniu, wartość współczynnika osiąga wartość maksymalną, następnie w drugiej połowie cyklu proces powtarza się, ale już dla struktury wirowej o przeciwnym znaku zawirowania i ostatecznie układ powraca do sytuacji początkowej. Z rysunku 18 widać, że jeden cykl zmian współczynnika siły nośnej wymaga splotu dwu struktur wirowych. Zestawienie konfiguracji wirów dyskretnych w kolejnych dwóch chwilach (rys.19), gdy współczynnik siły nośnej przyjmuje wartości zerowe lub ekstremalne, uwiadamia znaczną symetrię rozkładu dyskretnych wirów przeciwnych znaków w pierwszej i drugiej połowie cyklu.

W badaniach doświadczalnych ciecz lub cylinder wprowadzane są w ruch ze skończonym przyspieszeniem natomiast w wykorzystywanym modelu następuje impulsowe rozpoczęcie ruchu dlatego też, dla właściwej weryfikacji modelu, porównywania wyników obliczeń z rezultatami doświadczeń należy dokonywać dla dłuższych okresów czasu gdy przepływ staje się quasiperiodyczny. Pomimo tego, że w rozpatrywanym modelu ciecz poza warstwą przyścienną jest nielepka to obliczone rozkłady wirów dyskretnych dla $Re = \infty$ dają obrazy przepływu podobne do wizualizowanych pól przepływu wokół walca (rys.20) [53], dla dużych, ale skończonych liczb Reynoldsa rzędu $10^4 - 10^5$. Quasiperiodyczny obraz przepływu otrzymany został w wyniku sztucznego zaburzenia symetrycznego pola przepływu, które różni się zasadniczo od zaburzeń występujących w przepływie rzeczywistym. Czynniki destabilizujące przepływ rzeczywisty zapewne nie mają ograniczonego czasu trwania lecz są zawsze obecne w przepływie i pojawiają się losowo. Jak widać na podstawie otrzymanych rezultatów sztuczne zaburzanie przepływu wpływa jedynie na zmianę rodzaju przepływu ale nie jest koniecznym czynnikiem podtrzymującym jego periodyczność. Wyznaczona średnia bezwymiarowa odległość pomiędzy strukturami wirowymi tego samego znaku w obszarze w pełni rozwiniętego śladu bardzo dobrze zgadza się z odległościami mierzonymi, które dla rozpatrywanego zakresu liczb Reynoldsa mieszczą się w zakresie $8,2 \div 9,0$ [54]. Średnia bezwymiarowa długość obszaru formowania odpowiada wynikom pomiarów w zakresie liczb Reynoldsa od $7 \cdot 10^3$ do $2 \cdot 10^4$, które wahają się pomiędzy $2,6 \div 4,4$ [12, 56]. Również rozwój i oddzielanie się wielkoskalowych struktur wirowych oraz towarzyszące temu procesowi jakościowe zmiany współczynnika siły nośnej dobrze zgadzają się z obserwacjami przepływu rzeczywistego [55].

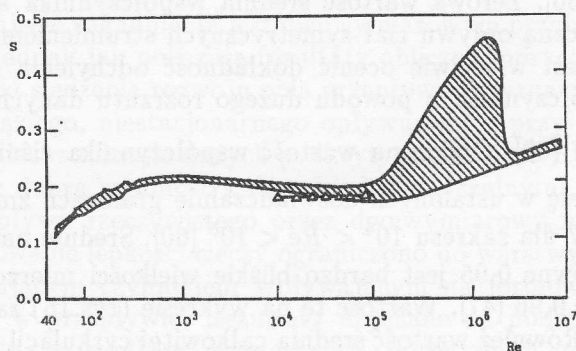
Rozkłady prędkości w śladzie walca pod względem jakościowym zgodne są z rozkładami mierzonymi [57, 58]. Obliczona liczba Strouhala dla splotu struktur wirowych równa jest wartości wyznaczonej doświadczalnie, która dla $Re =$



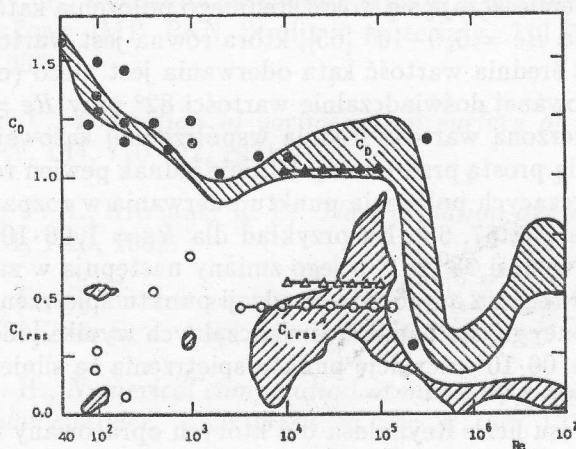
Rys. 19. Symetria konfiguracji dyskretnych wirów przeciwnych znaków cyrkulacji na początku pierwszej i drugiej połowy cyklu



Rys. 20. Obraz śladu w przepływie rzeczywistym



Rys. 21. Liczba Strouhala w zależności od liczby Reynoldsa. Obszary zakreskowane wartości pomierzone, $\triangle$ — wyniki własne



Rys. 22. Średnia wartość współczynnika oporu i pierwiastek z warstości średniokwadratowej fluktuacji współczynnika siły nośnej w zależności od liczby Reynoldsa. Obszary zakreskowane wartości pomierzone, symbole pojedyncze wartości obliczone: $\bullet$ — C_D , $\circ$ — C_{Lrms} ; wyniki własne $\triangle$ — C_D , $\triangle$ — C_{Lrms}

$10^4 \div 10^5$ wynosi 0,18 [57, 59]. Wartość średnia współczynnika oporu jest o 9% mniejsza od wartości doświadczalnej, która dla $Re = 10^5$ zawarta jest pomiędzy $1,1 \div 1,2$ [60]. Zerowa wartość średnia współczynnika siły nośnej jest cechą charakterystyczną opływu ciał symetrycznych strumieniem jednorodnym. Natomiast trudno jest właściwie ocenić dokładność odchylenia standardowego fluktuacji tego współczynnika z powodu dużego rozrzutu danych pomiarowych

$(\overline{C_L^2})^{\frac{1}{2}} = 0,3 \div 0,7$ [60]. Obliczona wartość współczynnika ciśnienia bazowego $\overline{C_{pb}} = -0,9$ mieści się w ustalonych doświadczalnie granicach zmian, które wynoszą od -1,2 do -0,7 dla zakresu $10^4 < Re < 10^5$ [60]. Średnie natężenie spływu wirowości $|\overline{d\Gamma/dt}|$ równe 0,95 jest bardzo bliskie wielkości mierzonej, która dla $Re = 3 \cdot 10^4$ wynosi 0,96 [47]. Wartość tę na wykresie (rys.15) zaznaczono linią prostą przerywaną. Również wartość średnia całkowitej cyrkulacji spływającej w śladu z jednej strony walca w ciągu jednego cyklu jest bliska wartości mierzonej $\Gamma_c = 11,72$ dla $Re = 1,4 \cdot 10^4$ [57]. Jednak średnia cyrkulacja wielkośladowych struktur wirowych w śladzie jest znacznie większa od mierzonych cyrkulacji wórków w rzeczywistych śladach za walcem, dla dużych liczb Reynoldsa [57, 56, 61]. Zastosowane procedury redukcji cyrkulacji dają tylko 13% zmniejszenie całkowitej wirowości w śladzie, które jest znacznie mniejsze od dyssypacji wirowości w przepływie rzeczywistym. Wyniki badań doświadczalnych świadczą o tym, że skoncentrowane struktury w śladzie zawierają nie więcej niż 50 – 66% spływającej wirowości [57, 62, 63, 64]. Dla dużych podkrytycznych liczb Reynoldsa punkty oderwania przemieszczają się wokół średniego położenia kąтового ze średnią amplitudą $\pm 4^\circ$ dla $Re = 6,9 \cdot 10^4$ [65], która równa jest wartości obliczonej w modelu. Natomiast średnia wartość kąta oderwania jest nieco (o 8°) mniejsza od zazwyczaj obserwowanej doświadczalnie wartości 82° przy $Re = 10^5$ [60]. Na wykresie (rys.16) zmierzoną wartość średnią współrzędną kątową punktu oderwania zaznaczono linią prostą przerywaną. Istnieje jednak pewien rozrzut danych doświadczalnych dotyczących położenia punktu oderwania w rozpatrywanym zakresie liczb Reynoldsa [66, 67, 68]. Na przykład dla $Re = 1,06 \cdot 10^5$ ustalono, że średni kąt oderwania wynosi $78^\circ \pm 1^\circ$ a jego zmiany następują w zakresie od 77° do 85° [66]. Obliczona średnia amplituda oscylacji punktu spiętrzenia jest bardzo bliska wartości mierzonej gdyż z badań doświadczalnych wynika [66], że przy liczbie Reynoldsa $Re = 1,06 \cdot 10^5$ oscylacje punktu spiętrzenia są silnie harmoniczne i następują w zakresie $\pm 3,7^\circ$.

W celu ilustracji zakresu liczb Reynoldsa dla których opracowany model opisuje przepływ rzeczywisty, obliczone średnie wartości liczby Strouhala i współczynnika oporu oraz pierwiastek z wartości średniokwadratowej współczynnika siły nośnej naniesiono na wykresy (rys.21 i 22), na których zebrano wartości tych współczynników zmierzone w minionych osiemdziesięciu latach [69, 70]. Dla porównania uzyskanych wyników z rezultatami prac obcych na wykresie (rys.22) zaznaczono również – zaczerpnięte z literatury – wartości współczynników oporu i siły nośnej wyznaczone różnymi metodami obliczeniowymi.

7. Podsumowanie

Przedstawione ujęcie zagadnienia jest dwuwymiarowym przybliżeniem przepływu rzeczywistego, jednak jak pokazują rezultaty obliczeń, opracowany model numeryczny umożliwia śledzenie rozwoju pola przepływu i wyznaczanie głównych charakterystyk płaskiego, niestacjonarnego opływu walca przy uwzględnieniu oderwania strumienia, w zakresie dużych podkrytycznych liczb Reynoldsa. Część wyników wykazuje dobrą zgodność z danymi doświadczalnymi. Relatywnie wierna symulacja przepływu rzeczywistego przez dwuwymiarowy model przepływu, w którym występowanie lepkości cieczy ograniczono do warstwy przyściennej wskazuje, że dominującym czynnikiem wpływającym na formowanie śladu jest wirowość zawarta w przepływie. Rezultaty uzyskane na podstawie opracowanego modelu są zgodne z wynikami prac obcych, dotyczących modelowania opływu walca metodą wirów dyskretnych.

Pracę zgłoszono 1993.03.15

Literatura

- [1] Prosnak W. J., *Równania mechaniki płynów i ich formy uproszczone*, Zeszyty Naukowe IMP PAN Studia i materiały, 111/1037/81, IMP PAN, Gdańsk, 1981.
- [2] Rosenhead L., *Formation of vortices from surface of discontinuity*, Proc. Roy. Soc. A, 134, 170-192, 1931.
- [3] Abernathy F. H., Kronauer R. E., *The Formation of vortex streets*, J. Fluid Mech. 13, 1, 1-20, 1962.
- [4] Bryson A. E., *Symmetric vortex separation on circular cylinders and cones*, Trans. ASME Ser.E, J. Appl. Mech., 26, 4, 643-648, 1959.
- [5] Gerrard J. H., *Numerical computation of magnitude and frequency of the lift on a circular cylinder*, Phil. Trans. R. Soc. A, 261, 137-162, 1967.
- [6] Chaplin J. R., *Computer model of vortex shedding from a cylinder*, J. Hyd. Div. ASCE, 99, HY 1, 155-165, 1973.
- [7] Frączak J., *Numeryczne modelowanie niestacjonarnego opływu walca metodą wirów dyskretnych*, IX Krajowa Konferencja Mechaniki Płynów, 85-92, Kraków, 1990.
- [8] Sarpkaya T., *Computational methods with vortices - The 1988 Freeman Scholar Lecture*, Trans. ASME, J. Fluids Eng. 111, 1, 5-52, 1989.

- [9] Leonard A., *Review - vortex methods for flow simulations*, J. Comput. Phys., 47, 3, 289-335, 1980.
- [10] Kudela H., *Metody dyskretnych wirów, Metody Analityczne i Numeryczne w Mechanice płynów - Szkoła Letnia Mechaniki Płynów - Wykłady*, 111-120, Mikołajki, 1983.
- [11] Styczek A., *The vortex blobs method of simulating the viscous liquid motion*, Arch. Bud. Masz., 34, 2, 225-242, 1987.
- [12] Bloor S., *The Transition to turbulence in the wake of a circular cylinder*, Fluid Mech., 19, Pt., 2, 290-304, 1964.
- [13] Yang H. T., Bar-Lev M., *Potential flow model for an impulsively started circular cylinder*, Trans. ASME Ser.E, J. Appl. Mech., 43, 2, 213-216, 1980.
- [14] Deffenbaugh F. D., Marshall F. J., *Time development of the flow about an impulsively started cylinder*, AIAA J., 14, 7, 908-913, 1976.
- [15] Sarpkaya T., Shoaff R. L., *Inviscid model of two-dimensional vortex shedding by a circular cylinder*, AIAA J., 17, 11, 1193-1200, 1979.
- [16] Belocerkovskij S. M., Kotovskij W. N., Ništ M. I., Fedorov R.M., *Matematičeskoe modelirovanie niestacionarnogo obtekanija krugovogo cilindra*, Mech. Židk. Gaza, 4, 138-147, 1983.
- [17] Belocerkovskij S. M., Kotovskij W. N., Ništ M. I., Fedorov R. M., *Matematičeskoe modelirovanie ploskoparallelnogo otryvnogo obtekanija tela*, Moskwa, 1988, 232.
- [18] Dushane T. E., *Convergence for a vortex method for solving Euler's equations*, Math. Comp., 27, 124, 719-728, 1973.
- [19] Hald O, Del Prete V. M., *Convergence of vortex methods for Euler's equations*, Math. Comp., 32, 143, 791-809, 1978.
- [20] Hald O, H., *Convergence of vortex methods for Euler's equations. II*, SIAM J. Numer. Anal., 16, 5, 726-755, 1979.
- [21] Beale J. T., Majda A., *Vortex methods. II: Higher order accuracy in two and three dimensions*, Math. Comp., 39, 159, 29-52, 1982.
- [22] Beale J. T., Majda A., *High order accurate vortex method with explicit convolution kernels*, J. Comput. Phys., 58, 2, 188-208, 1985.
- [23] Perlman M., *On the accuracy of vortex methods*, J. Comput. Phys., 58, 2, 200-223, 1985.

- [24] Greengard C., Thomann E., *Singular vortex systems and weak solutions of the Euler equations*, Phys. Fluids, 31, 10, 2810-2813, 1988.
- [25] Chorin A. J., *Numerical study of slightly viscous flow*, J. Fluid Mech., 57, 4, 785-796, 1973.
- [26] Kuwahara K., Takami H., *Numerical studies of two-dimensional vortex motion by a system of point vortices*, J. Phys. Soc. Japan, 34, 1, 247-253, 1973.
- [27] Martins L. F., Ghoniem A. F., *Vortex simulation of the intake flow in a planar piston-chamber device*, Int. J. Numer. Methods fluids, 12, 3, 237-260, 1991.
- [28] Kočín N. E., Kibel I. A., Roze N. B., *Teoretičeskaja gidromehanika*, T1, Gos. Izdat. Teh.-Teoret. Lit., Moskva, 1955.
- [29] Prosnak W. J., *Mechanika płynów*, T1, PWN, Warszawa, 1970.
- [30] Kuwahara K., Takami H., *Study of turbulent wake behind a bluff body by vortex method*, Proc. Int. Symp. on Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids, Kyoto, Japan, 5-10 September, 1983, red. Tatsumi T., Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1983.
- [31] Asher J. A., Dosanjh D. S., *An experimental investigation of the formation and flow characteristics of an impulsively generated vortex street*, Trans. ASME Ser.D, J. Basic Eng., 90, 4, 596-606, 1968.
- [32] Nagata H., Kahei Y., Tsunekawa M., *Unsteady flow past a circular cylinder started impulsively*, Bull. JSME, 18, 123, 992-1001, 1975.
- [33] Thoman D. C., Szewczyk A. A., *Time-dependent viscous flow over a circular cylinder*, Phys. Fluids, 12, 12, Supplement II, II76-II86, 1969.
- [34] Jordan S. K., Fromm J. E., *Oscillatory drag, lift, and torque on a circular cylinder in uniform flow*, Phys. Fluids, 15, 3, 371-376, 1972.
- [35] Alfonsi G., Giorgini A., *Nonlinear perturbation of vortex shedding from a circular cylinder*, J. Fluid Mech., 222, 267-291, 1991.
- [36] Kuwahara K., *Study of flow past a circular cylinder by an inviscid model*, J. Phys. Soc. Japan, 45, 1, 292-297, 1978.
- [37] Tabata M., Fujima S., *An upwind Finite Element Scheme for high Reynolds number flows*, Int. J. Numer. Methods fluids, 12, 4, 305-322, 1991.
- [38] Stansby P. K., *An inviscid model of vortex shedding from a circular cylinder in steady and oscillatory far flows*, Proc. Instn. Civ. Engrs., 63, 2, 865-880, 1977.

- [39] Laird A. D. K., *Eddy formation behind circular cylinders*, ASCE, J. Hydr. Div., 97, HY6, 763-775, 1971.
- [40] Iličev K. P., Postolovskij S. N., *Rasčet niestacionarnogo otryvnogo obtekanija tel ploskim potokom nievjazkoj židkosti*, Mech. Židk. Gaza, 2, 72-82, 1972.
- [41] Porthouse D. T. C., Lewis R. I., *Simulation of viscous diffusion for extension of the surface vorticity method to boundary layer and separated flows*, J. Mech. Engng. Sci., 23, 3, 157-167, 1981.
- [42] Tzankov I. T., Christov C. I., *Numerical investigation of the boundary layer flow around impulsively moved cylinder*, Doklady Bolgarskoj Akademii Nauk, 43, 2, 21-24, 1990.
- [43] Lighthill M. J., *Introduction. Boundary layer theory*, prac. zb. red. L. Rosenhead, Laminar boundary layers, Clarendon Press, Oxford, 1963.
- [44] Lighthill M. J., *On displacement thickness*, J. Fluid Mech., 4, 383-392, 1958.
- [45] Sears W. R., *Unsteady motion of airfoils with boundary-layer separation*, AIAA J., 14, 2, 216-220, 1976.
- [46] Postolovskij S. N., *K rasčotu vihrevogo obtekanija tel ploskim potokom idealnoj nesžimajemoj židkosti*, Trudy CKTI, Kompresornye i dutyvye mašiny, 102, 151-162, 1970.
- [47] Fage A., Johansen F. C., *The structure of the vortex sheet*, Phil. Mag., A, 7, 417-436, 1928.
- [48] Petrov A. C., *Rasčet otryvnogo obtekanija elliptičeskich cilindrov*, Trudy CAGI, 1930, 1978.
- [49] Quartapelle L., Neapolitano M., *Force and moment in incompressible flows*, AIAA J., 21, 6, 911-913, 1983.
- [50] Achenbach E., *Distribution of local pressure and skin friction around a circular cylinder in cross-flow up to $Re = 5 \cdot 10^6$* , J. Fluid Mech., 34, 4, 625-639, 1968.
- [51] Sarpkaya T., *Lift, drag, and added-mass coefficients for a circular cylinder immersed in a time-dependent flow*, Trans. ASME Ser. E, J. Appl. Mech., 30, 1, 13-15, 1963.
- [52] Clements R. R., Maull D. J., *The representation of sheets of vorticity by discrete vortices*, Prog. Aerospace Sci., 16, 2, 129-146, 1975.
- [53] Frączak J., *Kontynuacja badań zjawisk hydrodynamicznych przy opływie walca w różnych warunkach przepływu oraz porównanie wyników badań doświadczalnych z wynikami przewidywań teoretycznych*, Opr. wew. IMP PAN, nr arch. 315/90, Gdańsk, 1990.

- [54] Frimberger R., *Experimentelle Untersuchungen an Kármánschen Wirbelstrassen*, Z. Flugwiss., 5, 12, 355-359, 1957.
- [55] Drescher H., *Messung der auf querangestromte Zylinder ausgeübten zeitlich veränderten Drücke*, Z. Flugwiss., 4, 1/2, 17-21, 1956.
- [56] Bloor S. M., Gerrard J. H., *Measurements on turbulent vortices in a cylinder wake*, Proc. Roy. Soc., A, 294, 319-342, 1966.
- [57] Cantwell B., Coles D., *An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder*, J. Fluid Mech. 130, 321-374, 1983.
- [58] Kiya M., Matsumura M., *Turbulence structure in intermediate wake of a circular cylinder*, Bull. JSME, 28, 245, 2617-2624, 1985.
- [59] Popov S. G., *O zavisimosti meždu čislami Struhaja i Rejnol'dsa pri ploskom obtakanii krugovogo cilindra*, Izv. AN SSSR, Mech. Židk. Gaza, 2, 156-159, 1966.
- [60] Chen Y. N., *Fluctuating lift forces of the Karman vortex streets on single circular cylinders and in tube bundles, Part 1, The vortex street geometry of the single circular cylinder, Part 2, Lift forces of single cylinders*, . Trans. ASME Ser.B, J. Eng. Ind., 94, 2, 603-622, 1972.
- [61] Schmidt D. W., Tilmann P. M., *Über die Zirkulationsentwicklung in Nachläufen von Rundstben*, Acustica, 27, 1, 14-22, 1972.
- [62] Fage A., Johansen F. C., *On the flow of air behind an inclined plate of infinite span*, Proc. Roy. Soc., A, 116, 170-197, 1927.
- [63] Zdravkovich M. M., *Comment on the loss of vorticity in the near wake of bluff bodies*, Trans. ASME, J. Fluids Eng. 111, 1, 104-105, 1989.
- [64] Mair W. A., Mauli D. J., *Bluff bodies and vortex shedding — a raport on Euromech 17*, J. Fluid Mech., 45, 2, 209-224, 1971.
- [65] Toebs G. H., *The unsteady flow and wake near an oscillating cylinder*, Trans ASME Ser. D, J. Basic Eng., 91, 4, 493-502, 1969.
- [66] Dwyer H. A., McCroskey W. J., *Oscillating flow over a cylinder at large Reynolds number*, J. Fluid Mech., 61, 4, 753-767, 1973.
- [67] Higuchi H., Kim H. J., Farell C., *On flow separation and reattachment around a circular cylinder at critical Reynolds numbers*, J. Fluid Mech., 200, 149-171, 1989.

- [68] Telionis D. P., Gundappa M., Diller T. E., *On the organization of flow and heat transfer in the near wake of a circular cylinder in steady and pulsed flow*, Trans. ASME, J. Fluids Eng., 114, 1, 348-355.
- [69] Blevins R. D., *Flow-induced vibration*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1977.
- [70] McCroskey W. J., *Some current Research in unsteady fluid dynamics — The 1976 Freeman Scholar Lecture*, Trans. ASME, J. Fluids Eng., 99, 1, 8-31, 1977.

Modelling of nonstationary flow past a circular cylinder with boundary layer and wake formation taken into account

Summary

Phenomenological model of nonstationary, separated flow past a circular cylinder, based on the discrete vortex method in conjunction with boundary layer theory, and its numerical realisation is presented. The model includes quasistationary laminar boundary layer, movable separation points, creation and shedding of vortex structures and formation of vortex wake consisting of discrete vortices. The flow round the cylinder is impulsively started from the rest. Evolution of the flow is followed from the beginning of the motion, when two symmetric vortices are formed through the subsequent asymmetry until the state of alternate vortex shedding is attained. The discrete vortex distributions, vector velocity fields and instantaneous streamlines are shown. The variation of the lift and drag coefficients with time, oscillation of separation and stagnation points, rate of vorticity shedding, Strouhal number, profiles of mean and fluctuating velocities, etc. are calculated. Some calculated results are compared with the available experimental data showing fairly good coincidence.