

POLSKA AKADEMIA NAUK

INSTYTUT MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

**PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPŁYWOWYCH**

**TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY**

95



GDAŃSK 1993

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machines

RADA REDAKCYJNA – EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH * HENRYK JARZYNA * JERZY KRZYŻANOWSKI
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ * WŁODZIMIERZ J. PROSNAK
JÓZEF ŚMIGIELSKI * ZENON ZAKRZEWSKI

KOMITET REDAKCYJNY – EDITORIAL COMMITTEE

EUSTACHY S. BURKA (REDAKTOR NACZELNY – EDITOR-IN-CHIEF)
JAROSŁAW MIKIELEWICZ
EDWARD ŚLIWICKI (REDAKTOR – EXECUTIVE EDITOR) * ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA – EDITORIAL OFFICE

Wydawnictwo Instytutu Maszyn Przepływowych
Polskiej Akademii Nauk
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. poczt. 621,
tel. (0-58) 41-12-71 wew. 141, fax: (0-58) 41-61-44,
e-mail: tjan@imppan.imp.pg.gda.pl

ISBN 83-01-93121-1
ISSN 0079-3205

ZBIGNIEW BILICKI, DARIUSZ KARDAŚ¹

Rozwiązania numeryczne niestacjonarnych i nierównowagowych przepływów dwufazowych pary i wody

W pracy przedstawiono metodę numerycznego rozwiązania relaksacyjnego modelu niestacjonarnego przepływu dwufazowego. Zbadano prędkości rozchodzenia się zaburzeń oraz wpływ parametrów całkowanych. Porównano otrzymane wyniki z wynikami eksperymentów. Sprawdzono wpływ czasu relaksacji na interpretację sygnału.

Wykaz oznaczeń

- pole powierzchni przekroju poprzecznego przepływu,	t	- czas,
- objętość właściwa,	P	- ciśnienie,
- prędkość równowagowa zaburzeń,	w	- prędkość,
- prędkość zamrożona zaburzeń,	z	- współrzędna przestrzenna,
- współczynnik tarcia,	α	- stopień zapełnienia,
- wewnętrzna energia właściwa,	Γ_g	- strumień wymiany masy pomiędzy fazami,
- przyspieszenie ziemskie,	ρ	- gęstość,
- entalpia właściwa,	σ	- wektor stanu,
- strumień ciepła na jednostkę objętości	$\tilde{\tau}_w$	- strata ciśnienia na skutek tarcia, na jednostkę długości,
- dostarczony z zewnątrz,	x	- nierównowagowy stopień suchości,
- czas relaksacji,	$\bar{x}$	- równowagowy stopień suchości,
- temperatura,	ε	- błąd względny,
	c	- liczba Couranta.

Wskaźniki dotyczą

- pary,	0	- chwili początkowej,
- cieczy,	j	- przestrzennych węzłów siatki,
- stanu nasycenia,	n	- chwili czasowej,
- początku kanału,	i	- punktów eksperymentalnych.
- końca kanału,		

1. Wprowadzenie

Jednorodny (homogeniczny) równowagowy model przepływu dwufazowego opisuje procesy wymiany masy, pędu i energii zachodzące z nieskończenie dużą prędkością. Powoduje to, że ciecz i para wchodzące w skład mieszaniny znajdują się w stanie nasycenia, w równowadze termodynamicznej. Jak wykazały prace Bilickiego i innych [1] oraz Nakoryakova i innych [2] prędkości rozchodzenia się zaburzeń dla homogenicznego, równowagowego modelu przepływu dwufazowego różnią się zdecydowanie od wielkości pomierzonych eksperymentalnie. Doświadczalnie uzyskane prędkości rozchodzenia się fal zgęszczeniowych wynoszą kilkadziesiąt m/s, natomiast obliczone analitycznie dla tych samych warunków są rzędu 1 m/s. Dowiodło to, że falowy charakter przepływu dwufazowego nie jest dobrze opisany modelem z równowagą termodynamiczną. Konstatacja tego faktu skierowała uwagę na inne, bardziej rozwinięte modele.

Na przeciwnym, w stosunku do modelu jednorodnego i równowagowego, biegunie złożoności znajduje się model dwupłynowy nierównowagowy opisany równaniami bilansu masy, pędu i energii dla cieczy i pary. Taki właśnie model został zastosowany w programie obliczeń bezpieczeństwa reaktorów jądrowych [3], w którym niewiadomymi są gęstości ρ_g, ρ_l , stopień zapełnienia α_g , prędkości w_g, w_l , właściwe energie wewnętrzne u_g, u_l oraz ciśnienie P . Zamknięcie układu równań wymaga znajomości równań stanu $\rho_g = \rho_g(P, T_g)$, $\rho_l = \rho_l(P, T_l)$ oraz równań kalorycznych $u_g = u_g(P, T_g)$, $u_l = u_l(P, T_l)$. Równania te wprowadza się dlatego, żeby wyeliminować ρ_g, ρ_l, u_g, u_l przy pomocy składowych wektora stanu T_g, T_l, P . Ostatecznie model zawiera 6 niewiadomych $P, w_g, w_l, T_g, T_l, \alpha_g$, tworzących wektor stanu dla układu 6-ciu równań cząstkowych pierwszego rzędu.

Pomiędzy tymi dwoma skrajnymi znajdują się modele, w których zakłada się, że jedna z faz jest w stanie nasycenia. Modele te nazywa się modelami o częściowej nierównowadze. Takim przykładem jest model opisany 5-cioma równaniami zastosowany w znanym programie obliczeniowym RELAP[4]. Jeszcze prostszym, lecz nadal nierównowagowym, jest model relaksacyjny opisany 4-roma równaniami. Zakłada się w nim jednakową prędkość obu faz $w_l = w_g$ oraz to, że jedna z faz jest w stanie nasycenia. Z praktycznego punktu widzenia ustala się, że dla małej zawartości fazy parowej $x \leq 0.5$, fazą w stanie nasycenia jest faza parowa, dla $x \geq 0.5$ faza ciekła. Po tych dwóch dodatkowych założeniach model dwupłynowy można uprościć. Ta uproszczona wersja opisana jest układem 4-ch równań o następującej postaci:

1. równania bilansu masy dla cieczy

$$\frac{\partial(1 - \alpha)\rho_f}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial(A(1 - \alpha)\rho_f w)}{\partial z} = -\Gamma_g, \quad (1)$$

2. równania bilansu masy dla fazy gazowej

$$\frac{\partial\alpha\rho_g}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial(A\alpha\rho_g w)}{\partial z} = +\Gamma_g, \quad (2)$$

3. równania bilansu pędu dla mieszaniny

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\tilde{\tau}_w}{\rho} + g, \quad (3)$$

4. równania bilansu energii dla mieszaniny

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial(A\rho w u)}{\partial z} + \frac{P}{A} \frac{\partial(Aw)}{\partial z} = \tilde{\tau}_w w + Q, \quad (4)$$

gdzie Γ_g oznacza strumień masy pary tworzącej się w jednostce objętości. Powyższy układ równań można zapisać w postaci nieco zmienionej, w której zamiast równań bilansu masy poszczególnych faz występuje równanie bilasu masy mieszaniny cieczy i pary oraz równanie określające intensywność wymiany masy między fazami.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial(A\rho w)}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} + w \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\Gamma_g}{\rho}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\tilde{\tau}_w}{\rho} + g, \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial(A\rho w u)}{\partial z} + \frac{P}{A} \frac{\partial(Aw)}{\partial z} = \tilde{\tau}_w w + Q. \quad (8)$$

Równania (5) ÷ (8) opisują przepływ analizowanego modelu płynu. Powyższy układ równań ma charakter hiperboliczny i dyspersyjny. Ta ostatnia cecha polega na tym, że małe zaburzenia wprowadzone do ośrodka opisanego równaniami (5) ÷ (8) rozchodzą się z różnymi prędkościami zależnymi od ich częstości. Wyróżnia się przy tym dwie graniczne skończone prędkości – równowagową a_e odpowiadającą zaburzeniom o nieskończenie długich falach oraz zamrożoną a_f odpowiadającą nieskończenie dużym częstościom. Ta ostatnia jest największą z możliwych prędkości rozchodzenia się zaburzeń [5]. Równania (5) ÷ (8) wymagają sformułowania równań zamknięcia:

$$\tilde{\tau}_w = \frac{\lambda \rho w^2}{2D} = T w, \quad (9)$$

$$\Gamma_g = - \left(\frac{x - \bar{x}}{\theta} \right) \rho, \quad (10)$$

$$Q = f(z), \quad (11)$$

$$\rho = \rho(P, u, x). \quad (12)$$

Równania (5) ÷ (12) stanowią zamknięty opis ośrodka dwufazowego. W prezentowanych obliczeniach rozwiązywano zagadnienie na warunki początkowo-brzegowe, z warunkami początkowymi

$$P(0, z) = P_0, \quad w(0, z) = 0, \quad u\rho(0, z) = (u\rho)_0, \quad x(0, z) = x_0,$$

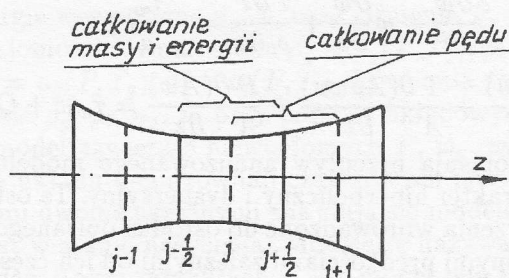
i z warunkami brzegowymi

$$P(t, z_a) = P_a, \quad u\rho(t, z_a) = (u\rho)_a, \quad x(t, z_a) = x_a, \quad P(t, z_b) = P_b,$$

W obliczeniach numerycznych przyjęto, że czas relaksacji jest stały oraz, $\lambda = 0.008$ oraz, że kanał o stałym przekroju jest zaizolowany stąd $Q = 0$.

2. Zasady budowania schematu numerycznego

Do rozwiązania niestacjonarnych przepływów dwufazowych stosuje się zasadniczo schematy różnicowe. W trakcie wielu poszukiwań, w których udział miał Porshing 1971, Holt i Rasmussen 1972, Wulff 1975, 1981, [6], ustalili się właściwy dla przepływów dwufazowych sposób dyskretyzacji pochodnych przestrzennych. Sposób ten polega na budowie stałej siatki różnicowej o przesuniętych węzłach. Równania bilansowe masy i energii mają węzły w tym samym miejscu, a równania bilansowe pędu mają węzły przesunięte w stosunku do równań bilansu masy i energii. Taką siatkę wykorzystywano w niniejszej pracy a przedstawia ją rys. 1.



Rys. 1. Budowa siatki przestrzennej i granice całkowania równań bilansowych

Do wielkości skalarnych takich jak: ciśnienie P , gęstość ρ , energia wewnętrzna u stopień suchości x odnosi się całkowity indeks j . Wektor prędkości w oblicza się na brzegach komórki i odpowiada mu indeks będący nieparzystą wielokrotnością $\frac{1}{2}$ np $j - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, \dots$. Metoda objętości kontrolnych może być uważana za metodę bilansów masy, pędu i energii, których dokonuje się w granicach komórki. W budowie schematu kierowano się zasadą, aby otrzymane schematy różnicowe były liniowe względem zmiennych w kroku czasowym $n + 1$. Wymagało to indywidualnego traktowania poszczególnych członów równań.

W celu zachowania jednokrokowej względem czasu metody różnicowej stosowano rozwinięcie funkcji gęstości w szereg Taylora z pominięciem wyrazów wyższych rzędów.

Dla uzyskania stabilności schematu numerycznego wprowadzono tzw. donory. Poza tym wybrano wektor stanu $\sigma = \sigma(P, w, \rho u, x)$, aby zapewnić zachowawczą postać większości równań bilansów masy, pędu i energii. Zastosowany w niniejszej

pracy schemat numeryczny po raz pierwszy zaostał użyty w programie obliczeniowym RELAP5[4]. Schemat ten jest częściowo jawny i dlatego nie wymaga prowadzenia obliczeń iteracyjnych.

3. Nierównowaga termodynamiczna. Własności termodynamiczne wody i pary w obszarach metastabilnych

W modelu równowagowym gęstość określa się w funkcji dwóch parametrów, w przypadku nierównowagowym jest ona uzależniona od trzech parametrów np. $\rho = \rho(P, \rho u, x)$. Aby zamknąć układ 4-ech równań z 5-cioma niewiadomymi P, w, ρ, u, x skorzystano z rozwinięcia ρ w szereg Taylora w otoczeniu n . Pomijając pochodne wyższych rzędów otrzymano

$$\rho^{n+1} = \rho^n + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{\rho u, x} (P^{n+1} - P^n) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho u} \right)_{P, x} ((\rho u)^{n+1} - (\rho u)^n) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{P, \rho u} (x^{n+1} - x^n). \quad (13)$$

Pochodne występujące w powyższym wzorze przedstawiono w innej postaci, redukując zależności od iloczynu ρu

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{\rho u, x} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{u, x} \left[\frac{\rho}{\rho + u \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} \right)_{P, x}} \right], \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho u} \right)_{P, x} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} \right)_{P, x} \left[\frac{1}{\rho + u \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} \right)_{P, x}} \right], \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{P, \rho u} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{P, u} \left[\frac{\rho}{\rho + u \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} \right)_{P, x}} \right]. \quad (16)$$

Równanie stanu, które w nierównowadze termodynamicznej przyjmuje postać

$$v = x v_g(P, u_g) + (1 - x) v_l(P, u_l), \quad (17)$$

przy założeniu, że jedna z faz, np. para, znajduje się w równowadze termodynamicznej, redukuje się do

$$v = x v_g^s(P) + (1 - x) v_l(P, u_l). \quad (18)$$

Założenie o częściowej nierównowadze termodynamicznej daje możliwość zapisania energii wewnętrznej w postaci

$$u = xu_g^s(P) + (1-x)u_l. \quad (19)$$

Stąd zaś

$$u_l(P, u, x) = \frac{u - xu_g^s(P)}{1-x}. \quad (20)$$

Do obliczeń przepływów niestacjonarnych potrzebne są funkcje gęstości i jej pochodnych. Gęstość, w przypadku modelu relaksacyjnego, zależy od ciśnienia, energii wewnętrznej mieszaniny i stopnia suchości

$$\rho = \frac{1}{xv_g^s(P) + (1-x)v_l(P, u_l(P, u, x))}. \quad (21)$$

Pierwsza z pochodnych gęstości $\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_{u,x}$ występująca w równaniu (14) przyjmuje formę

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_{u,x} = -\rho^2 \left[x \frac{dv_g^s(P)}{dP} + (1-x) \left(\left(\frac{\partial v_l}{\partial P}\right)_{u_l} + \left(\frac{\partial v_l}{\partial u_l}\right)_P \left(\frac{\partial u_l}{\partial P}\right)_{u,x} \right) \right], \quad (22)$$

gdzie

$$\left(\frac{\partial u_l}{\partial P}\right)_{u,x} = -\frac{x}{1-x} \frac{du_g^s(P)}{dP}.$$

Pochodna $\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)_{P,x}$ jest zaś równa

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)_{P,x} = -\rho^2 \left(\frac{\partial v_l}{\partial u_l}\right)_P. \quad (23)$$

Natomiast $\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_{P,u}$ wynosi

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_{P,u} = -\rho^2 \left(v_g^s(P) - v_l(P, u_l) + \left(\frac{\partial v_l}{\partial u_l}\right)_P (u_l - u_g^s) \right). \quad (24)$$

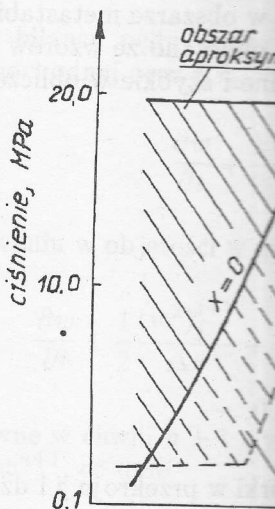
Rozwiązanie zagadnienia opisanego układem równań (5)÷(8) wymaga obliczenia wymienionych wyżej funkcji termodynamicznych $\rho(P, u, x)$, $\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_{u,x}$, $\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)_{P,x}$, $\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_{P,u}$. Te funkcje z kolei zawierają $v_l(P, u_l)$, $\left(\frac{\partial v_l}{\partial u_l}\right)_P(P, u_l)$, $\left(\frac{\partial v_l}{\partial P}\right)_{u_l}(P, u_l)$, które są własnościami wody w obszarze stabilnej równowagi jak też w obszarze metastabilnym. W dostępnych tablicach termodynamicznych Rivkina[7] znajdują

się jedynie niektóre pochodne
 obszaru stabilnej równowagi t
 nienie $\left(\frac{\partial v_l}{\partial u_l}\right)_P(P, u_l)$, $\left(\frac{\partial v_l}{\partial P}\right)_{u_l}$

$$\left(\frac{\partial v_l}{\partial P}\right)_{u_l}(P, u_l) = -$$

$$\left(\frac{\partial v_l}{\partial u_l}\right)_P(P,$$

Jak już wspomniano, do oblicz
 ści przegrzanej wody, która ni
 ile określenie funkcji termodyn
 kłopotów, ponieważ istnieje wie
 określenie własności wody w o
 obszar wyjątkowo nietrwały i tr
 wody w tym obszarze nie uleg
 którym funkcje termodynamicz
 stawia to rys.2.



Rys. 2. Obszar aproksymacji

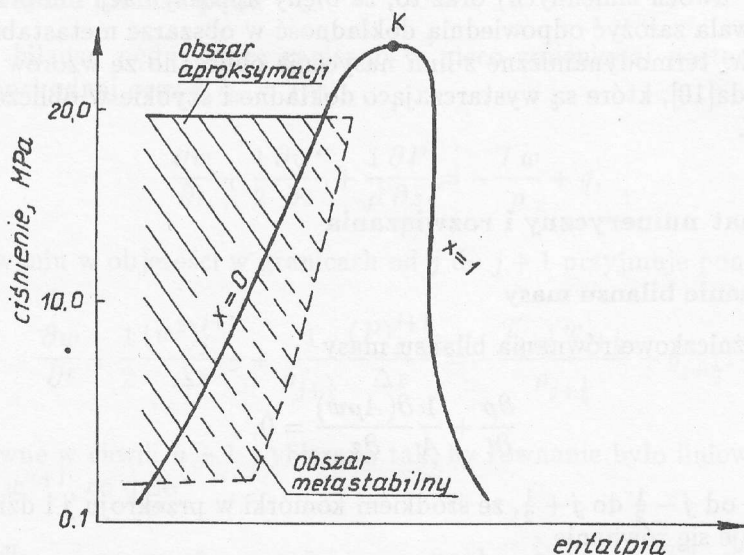
W celu obliczenia własności
 onno aproksymację średniokwa

się jedynie niektóre pochodne własności fizycznych $\left(\frac{\partial v_l}{\partial h_l}\right)_P$, $\left(\frac{\partial v_l}{\partial P}\right)_{h_l}$, ale tylko dla obszaru stabilnej równowagi termodynamicznej. Konieczne stało się więc uzależnienie $\left(\frac{\partial v_l}{\partial u_l}\right)_P(P, u_l)$, $\left(\frac{\partial v_l}{\partial P}\right)_{u_l}(P, u_l)$ od $\left(\frac{\partial v_l}{\partial h_l}\right)_P$, $\left(\frac{\partial v_l}{\partial P}\right)_{h_l}$. Pochodne te wynoszą

$$\left(\frac{\partial v_l}{\partial P}\right)_{u_l}(P, u_l) = \frac{v_l(P, u_l) \left(\frac{\partial v_l}{\partial h_l}\right)_P(P, u_l) + \left(\frac{\partial v_l}{\partial P}\right)_{h_l}(P, u_l)}{1 - P \left(\frac{\partial v_l}{\partial h_l}\right)_P(P, u_l)}, \quad (25)$$

$$\left(\frac{\partial v_l}{\partial u_l}\right)_P(P, u_l) = \frac{\left(\frac{\partial v_l}{\partial h_l}\right)_P(P, u_l)}{1 - P \left(\frac{\partial v_l}{\partial h_l}\right)_P(P, u_l)}. \quad (26)$$

Jak już wspomniano, do obliczeń przepływu dwufazowego potrzebne są własności przegrzanej wody, która nie jest w stanie równowagi termodynamicznej. O ile określenie funkcji termodynamicznych wody w stanie równowagi nie sprawia kłopotów, ponieważ istnieje wiele bardzo dobrych tablic np. NBS/NRC[8], o tyle określenie własności wody w obszarze metastabilnym jest dość trudne. Jest to obszar wyjątkowo nietrwały i trudno mierzalny. Założono, że charakter własności wody w tym obszarze nie ulega zmianie w stosunku do obszaru równowagi, w którym funkcje termodynamiczne aproksymowano wielomianami, tak jak przedstawia to rys.2.



Rys. 2. Obszar aproksymacji własności fizycznych wody w stanie metastabilnym

W celu obliczenia własności wody w obszarze metastabilnym [9] przeprowadzono aproksymację średniokwadratową funkcji dwóch zmiennych dla następu-

jących wyrażen: $v_l(P, u_l)$, $\left(\frac{\partial v_l}{\partial u_l}\right)_P(P, u_l)$, $\left(\frac{\partial v_l}{\partial P}\right)_{u_l}(P, u_l)$, $T_l(P, u_l)$. Błędy aproksymacji w obszarze równowagi termodynamicznej nie przekraczały 2%. W celu sprawdzenia poprawności aproksymowanych funkcji w obszarze metastabilnym określenia ich błędów, podjęto próbę porównania otrzymanych wyników z danymi eksperymentalnymi. Do tego celu wykorzystano dane zamieszczone w pracy [11]. Znajdują się w niej, pomierzone eksperymentalnie, własności wody z obszaru równowagowego i nierównowagowego. Porównano temperatury, dla których określono błąd względny ekstrapolacji ε

$$\varepsilon = \frac{T_i - T_l(P_i, v_{l_i})}{T_i} 100\%, \quad (27)$$

gdzie indeks i oznacza pomierzone wielkości tablicowe. Tablice porównania temperatury pomierzonej T_i z temperaturą obliczoną analitycznie $T_l(P_i, v_i)$, zamieszczone w załączniku, pokazują, że maksymalny błąd ekstrapolacji dla temperatury poniżej 300°C wynosił 9%, a maksymalny błąd przy stopniu przegrzania $\leq 10^\circ\text{C}$ wynosił 3%. Należy dodać, że dla niskich ciśnień błędy były jeszcze mniejsze. W przepływach dwufazowych, których dotyczy ta praca, przegrzanie wody nie przekracza 10°C . Można więc powiedzieć, że błąd funkcji aproksymującej nie przekracza 3% w zakresie interesujących nas przepływów. Ze względu na brak danych eksperymentalnych dla innych funkcji termodynamicznych, nie można określić ich błędów, można natomiast wnioskować o ich dokładności na podstawie funkcji $T_l(P, u_l)$. Fakt, że charakter funkcji aproksymujących jest taki sam (wielomiany dwóch zmiennych) oraz to, że błędy aproksymacji nie przekraczają 2% [9], pozwala założyć odpowiednią dokładność w obszarze metastabilnym.

Własności termodynamiczne z linii nasycenia obliczano ze wzorów podanych przez Garlada [10], które są wystarczająco dokładne i szybkie w obliczeniach numerycznych.

4. Schemat numeryczny i rozwiązania

4.1. Równanie bilansu masy

Całkując różniczkowe równania bilansu masy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial (A \rho w)}{\partial z} = 0, \quad (28)$$

w granicach od $j - \frac{1}{2}$ do $j + \frac{1}{2}$, ze środkiem komórki w przekroju j i dzieląc przez Δz otrzymuje się równanie

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{A_j} \frac{(A \rho w)_{j+\frac{1}{2}} - (A \rho w)_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta z} = 0. \quad (29)$$

Zastępując pochodną $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ilorazem różnicowym oraz dobierając człony w wyrażeniu $(A\rho w)_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}$, zgodnie z zasadami opisanymi wcześniej, uzyskuje się równanie różnicowe

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + \frac{1}{A_j} \frac{(A_{j+\frac{1}{2}} \dot{\rho}_{j+\frac{1}{2}} w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - A_{j-\frac{1}{2}} \dot{\rho}_{j-\frac{1}{2}} w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1})}{\Delta z} = 0. \quad (30)$$

Występujące w (30) wyrażenie $\dot{\rho}$ jest donorem gęstości dla $t = t_n$ zdefiniowanym w następujący sposób

$$\dot{\rho}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\rho_j + \rho_{j+1} + \frac{|w_{j+\frac{1}{2}}|}{w_{j+\frac{1}{2}}} (\rho_j - \rho_{j+1}) \right). \quad (31)$$

Podobnie określone są donory właściwej energii wewnętrznej $\dot{u}$ i stopnia suchości $\dot{z}$. Mnożąc równanie bilansu masy przez Δt otrzymuje się w nim m.in. liczbę Couranta $c = \frac{\Delta z}{\Delta t}$,

$$\rho_j^{n+1} - \rho_j^n + \frac{1}{A_j} \frac{(A_{j+\frac{1}{2}} \dot{\rho}_{j+\frac{1}{2}} w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - A_{j-\frac{1}{2}} \dot{\rho}_{j-\frac{1}{2}} w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1})}{c} = 0. \quad (32)$$

4.2. Równanie bilansu pędu

Równanie bilansu pędu, które zapisano w nieco zmienionej postaci z w^2 pod znakiem pochodnej oraz z $\tilde{\tau}_w = \mathcal{T}w$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial w^2}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\mathcal{T}w}{\rho} + g, \quad (33)$$

po scałkowaniu w objętości w granicach od j do $j+1$ przyjmuje poniższą postać

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{(w^2)_j^{j+1}}{\Delta z} + \frac{1}{\rho_{j+\frac{1}{2}}} \frac{(P)_j^{j+1}}{\Delta z} = -\frac{\mathcal{T}_{j+\frac{1}{2}} w_{j+\frac{1}{2}}}{\rho_{j+\frac{1}{2}}} + g_{j+\frac{1}{2}}. \quad (34)$$

Człony jawne w chwili $n+1$ wybierano tak, by równanie było liniowe względem prędkości w^{n+1} , co dało

$$\frac{w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{(w_{j+1}^n)^2 - (w_j^n)^2}{\Delta z} + \frac{1}{\rho_{j+\frac{1}{2}}^n} \frac{P_{j+1}^{n+1} - P_j^{n+1}}{\Delta z} = -\frac{\mathcal{T}_{j+\frac{1}{2}}^n w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}}{\rho_{j+\frac{1}{2}}^n} + g_{j+\frac{1}{2}}. \quad (35)$$

Po przemnożeniu przez Δt równanie przekształca się w

$$w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{j+\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2} \frac{(w_{j+1}^n)^2 - (w_j^n)^2}{c} + \frac{1}{\rho_{j+\frac{1}{2}}^n} \frac{P_{j+1}^{n+1} - P_j^{n+1}}{c} = - \frac{T_{j+\frac{1}{2}}^n w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}}{\rho_{j+\frac{1}{2}}^n} \Delta t + g_{j+\frac{1}{2}} \Delta t. \quad (3)$$

W wyniku kolejnych przekształceń otrzymuje się

$$w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{P_j^{n+1} - P_{j+1}^{n+1}}{(\rho_{j+\frac{1}{2}}^n + T_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta t)c} + \left(w_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{1}{2} \frac{(w_{j+1}^n)^2 - (w_j^n)^2}{c} + g_{j+\frac{1}{2}} \Delta t \right) \frac{\rho_{j+\frac{1}{2}}^n}{\rho_{j+\frac{1}{2}}^n + T_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta t}, \quad (3')$$

a wprowadzając zmienną k

$$k_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{(\rho_{j+\frac{1}{2}}^n + T_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta t)c} \quad (3'')$$

i zmienną l

$$l_{j+\frac{1}{2}} = \left(w_{j+\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2} \frac{(w_{j+1}^n)^2 - (w_j^n)^2}{c} + g_{j+\frac{1}{2}} \Delta t \right) \frac{\rho_{j+\frac{1}{2}}^n}{\rho_{j+\frac{1}{2}}^n + T_{j+\frac{1}{2}}^n \Delta t}, \quad (3''')$$

otrzymuje się prędkość w zależną od ciśnienia P w chwili czasowej $n+1$

$$w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = k_{j+\frac{1}{2}} (P_j^{n+1} - P_{j+1}^{n+1}) + l_{j+\frac{1}{2}} \quad (4)$$

oraz

$$w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = k_{j-\frac{1}{2}} (P_{j-1}^{n+1} - P_j^{n+1}) + l_{j-\frac{1}{2}}. \quad (4')$$

4.3. Równanie bilansu energii

Podobnie jak równanie bilansu masy, równanie bilansu energii całkowane jest w objętości, w granicach od $j - \frac{1}{2}$ do $j + \frac{1}{2}$. Równanie różniczkowe

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial(A \rho w u)}{\partial z} + \frac{P}{A} \frac{\partial(A w)}{\partial z} = \tau w^2 + Q, \quad (4'')$$

po scałkowaniu wygląda następująco

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{1}{A_j} \frac{(A \rho w u)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (A \rho w u)_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta z} + \frac{P_j}{A_j} \frac{(A w)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (A w)_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta z} = \tau_j w_j^2 + Q_j. \quad (4''')$$

Zastępując pochodną $\frac{\partial \rho u}{\partial t}$ ilorazem różnicowym oraz dobierając prędkość w w czasie $n + 1$, a pozostałe zmienne w czasie n , otrzymuje się

$$\frac{(\rho u)_j^{n+1} - (\rho u)_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{A_j} \frac{A_{j+\frac{1}{2}} \dot{\rho}_{j+\frac{1}{2}}^n \dot{u}_{j+\frac{1}{2}}^n w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - A_{j-\frac{1}{2}} \dot{\rho}_{j-\frac{1}{2}}^n \dot{u}_{j-\frac{1}{2}}^n w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta z} + \frac{P_j^{n+1}}{A_j} \frac{A_{j+\frac{1}{2}} w_{j+\frac{1}{2}}^n - A_{j-\frac{1}{2}} w_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z} = T_j^n w_j^{n2} + Q_j^n. \quad (44)$$

Mnożąc równanie (44) przez Δt otrzymuje się równanie z liczbą Couranta

$$(\rho u)_j^{n+1} - (\rho u)_j^n + \frac{1}{A_j} \frac{A_{j+\frac{1}{2}} \dot{\rho}_{j+\frac{1}{2}}^n \dot{u}_{j+\frac{1}{2}}^n w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - A_{j-\frac{1}{2}} \dot{\rho}_{j-\frac{1}{2}}^n \dot{u}_{j-\frac{1}{2}}^n w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{c} + \frac{P_j^{n+1}}{A_j} \frac{A_{j+\frac{1}{2}} w_{j+\frac{1}{2}}^n - A_{j-\frac{1}{2}} w_{j-\frac{1}{2}}^n}{c} = T_j^n w_j^{n2} \Delta t + Q_j^n \Delta t. \quad (45)$$

4.4. Równanie relaksacyjne

Równanie relaksacyjne, w którym człon wymiany masy $\frac{\Gamma_g}{\rho}$ zastąpiono wyrażeniem $-\frac{x-\bar{x}}{\theta}$

$$\frac{\partial x}{\partial t} + w \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{x - \bar{x}}{\theta}, \quad (46)$$

zostało przekształcone do postaci

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial wx}{\partial z} - x \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{x - \bar{x}}{\theta}, \quad (47)$$

a następnie scałkowane w granicach od $j - \frac{1}{2}$ do $j + \frac{1}{2}$, co dało,

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{(wx)_{j+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - (wx)_{j-\frac{1}{2}}^{j-\frac{1}{2}}}{\Delta z} - x \frac{(w)_{j+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - (w)_{j-\frac{1}{2}}^{j-\frac{1}{2}}}{\Delta z} = -\frac{x_j - \bar{x}_j}{\theta}. \quad (48)$$

Zastępując pochodną po czasie ilorazem różnicowym i mnożąc równanie przez Δt otrzymano

$$x_j^{n+1} - x_j^n + \frac{(w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \dot{x}_{j+\frac{1}{2}} - w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \dot{x}_{j-\frac{1}{2}})}{c} - x_j^n \frac{w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{c} = -\frac{x_j^n - \bar{x}_j}{\theta} \Delta t. \quad (49)$$

W celu uzyskania rozwiązania, do równań bilansu masy, energii oraz równania relaksacyjnego podstawia się wzory na prędkość $w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ i $w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}$ wyznaczone z równania pędu. Następnie tak przekształcone równania wprowadza się do równania stanu rozwiniętego w szereg Taylora

$$\rho_j^n - \rho_j^{n+1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{\rho u} (P_j^{n+1} - P_j^n) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho u} \right)_P ((\rho u)_j^{n+1} - (\rho u)_j^n) = 0. \quad (50)$$

Po uporządkowaniu (50) w wyniku kolejnych przekształceń uzyskuje się równania algebraiczne liniowe względem P^{n+1}

$$\begin{aligned}
 & \left(m_{j-\frac{1}{2}} n_{j-\frac{1}{2}} + o_{j-\frac{1}{2}} \right) P_{j-1}^{n+1} + \\
 & \left(-m_{j-\frac{1}{2}} n_{j-\frac{1}{2}} - m_{j+\frac{1}{2}} n_{j+\frac{1}{2}} - o_{j-\frac{1}{2}} - o_{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{\rho u, x_j} \left(\frac{\partial \rho u}{\partial \rho} \right)_{P, x_j} \right) P_j^{n+1} \\
 & + \left(m_{j+\frac{1}{2}} n_{j+\frac{1}{2}} + o_{j+\frac{1}{2}} \right) P_{j+1}^{n+1} \\
 & = -s_{j-\frac{1}{2}} n_{j-\frac{1}{2}} + s_{j+\frac{1}{2}} n_{j+\frac{1}{2}} + \left(r_{j-\frac{1}{2}} - r_{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{\rho u, x_j} \left(\frac{\partial \rho u}{\partial \rho} \right)_{P, x_j} \right) P_j^n \\
 & + (y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}) + T_j^n w_j^{n,2} \Delta t + Q_j^n \Delta t \\
 & - \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{P, \rho u, j} \left(\frac{\partial \rho u}{\partial \rho} \right)_{P, x_j} \frac{(x_j^n - \bar{x}_j^n)}{\theta} \Delta t \quad (51)
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 m_{j-\frac{1}{2}} &= \frac{A_{j-\frac{1}{2}} \dot{\rho}_{j-\frac{1}{2}} k_{j-\frac{1}{2}}}{A_{jc}}, \\
 n_{j-\frac{1}{2}} &= \left(\frac{\partial \rho u}{\partial \rho} \right)_{P, x_j} - \dot{u}_{j-\frac{1}{2}}, \\
 o_{j-\frac{1}{2}} &= \frac{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{P, \rho u, j} (x_j^n - \dot{x}_j) k_{j-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\partial \rho u}{\partial \rho} \right)_{P, x_j} c}, \\
 s_{j-\frac{1}{2}} &= \frac{A_{j-\frac{1}{2}} \dot{\rho}_{j-\frac{1}{2}} l_{j-\frac{1}{2}}}{A_{jc}}, \\
 r_{j-\frac{1}{2}} &= \frac{A_{j-\frac{1}{2}} w_{j-\frac{1}{2}}}{A_{jc}}, \\
 y_{j-\frac{1}{2}} &= \frac{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{P, \rho u, j} (x_j^n - \dot{x}_j) l_{j-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\partial \rho u}{\partial \rho} \right)_{P, x_j} c},
 \end{aligned}$$

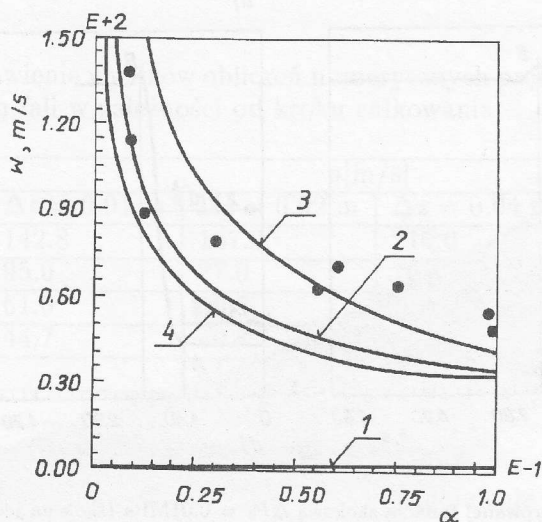
$$\begin{aligned}
 m_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{A_{j+\frac{1}{2}} \dot{\rho}_{j+\frac{1}{2}} k_{j+\frac{1}{2}}}{A_{jc}}, \\
 n_{j+\frac{1}{2}} &= \left(\frac{\partial \rho u}{\partial \rho} \right)_{P, x_j} - \dot{u}_{j+\frac{1}{2}}, \\
 o_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{P, \rho u, j} (x_j^n - \dot{x}_j) k_{j+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\partial \rho u}{\partial \rho} \right)_{P, x_j} c}, \\
 s_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{A_{j+\frac{1}{2}} \dot{\rho}_{j+\frac{1}{2}} l_{j+\frac{1}{2}}}{A_{jc}}, \\
 r_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{A_{j+\frac{1}{2}} w_{j+\frac{1}{2}}}{A_{jc}}, \\
 y_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{P, \rho u, j} (x_j^n - \dot{x}_j) l_{j+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\partial \rho u}{\partial \rho} \right)_{P, x_j} c}.
 \end{aligned}$$

Aby obliczyć pozostałe niewiadome należy najpierw podstawić ciśnienie P^{n+1} do równań (40) i (41). Następnie tak obliczoną prędkość w^{n+1} i ciśnienie P^{n+1} trzeba użyć w równaniach bilansu masy i energii oraz w równaniu relaksacyjnym

5. Wyniki obliczeń

Najlepszym, zdaniem autorów, sprawdzeniem przedstawionego modelu i zastosowanej metody numerycznej jest porównanie uzyskanych rozwiązań z badaniami eksperymentalnymi zjawisk rozprzestrzeniania się fal. W literaturze poświęconej zjawiskom falowym w przepływach mieszaniny pary i cieczy można spotkać

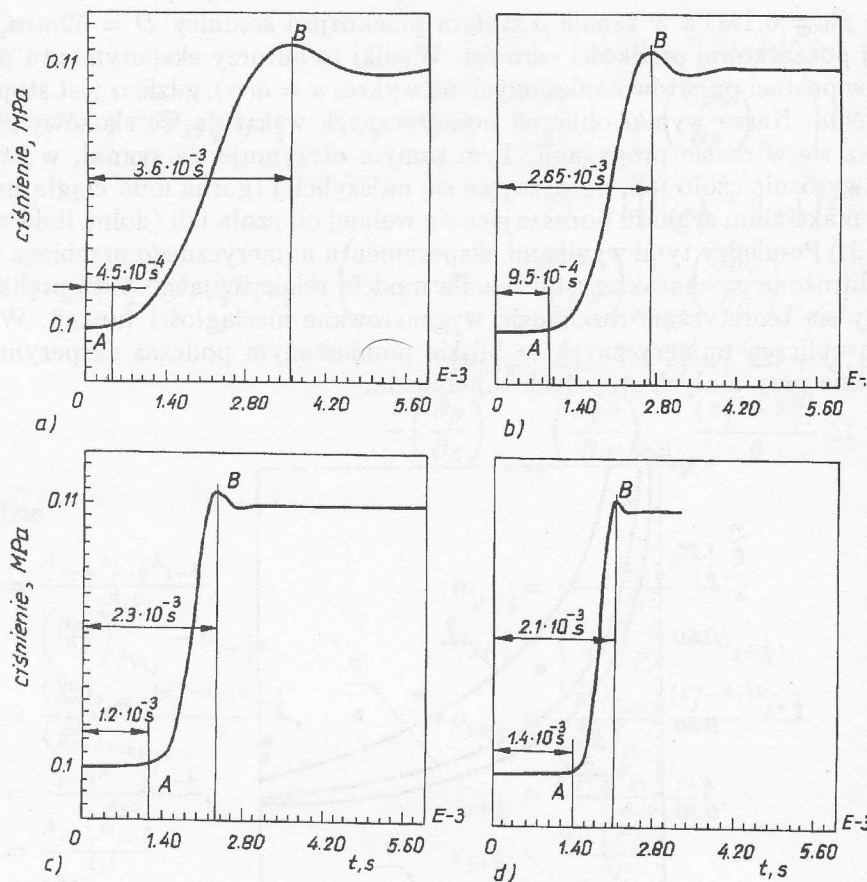
wiele badań eksperymentalnych. Wśród dostępnych eksperymentów, wyniki publikowane przez Nakoryakova i innych [2] uznano za najlepiej nadające się do weryfikacji prezentowanego modelu. W eksperymencie tym mierzono prędkości, rozchodzenia się skoku ciśnienia o sile $\frac{\Delta P_0}{P_0} \approx 0.1 \div 0.2$, przy ciśnieniu początkowym $P_0 = 0.1 \text{ MPa}$ w kanale o stałym przekroju i średnicy $D = 52 \text{ mm}$, przy zerowej początkowej prędkości ośrodka. Wyniki te autorzy eksperymentu przedstawili w postaci punktów naniesionych na wykres $a = a(\alpha)$, gdzie α jest stopniem wypełnienia. Nasze wyniki obliczeń numerycznych wskazują, że skokowy sygnał rozmywa się w czasie propagacji. Tym samym otrzymuje się sygnał, w którym można wyróżnić czoło fali, poruszające się najszybciej (górna linia ciągła na rys. 3.) oraz maksimum sygnału poruszające się wolniej od czoła fali (dolna linia ciągła na rys. 3.) Pomiedzy tymi wynikami eksperymentu numerycznego przebiega prędkość zamrożona a_f charakterystyczna dla modelu relaksacyjnego. Z tą prędkością powinny się teoretycznie rozchodzić wygenerowane nieciągłości funkcji. Wyniki naszych obliczeń numerycznych są bliskie pomierzonym podczas eksperymentu, szczególnie przy małych stopniach wypełnienia.



rys. 3. Prędkości rozchodzenia się zaburzeń pomierzone w eksperymencie i obliczone w funkcji stopnia wypełnienia 1. prędkość równowagowa a_e , 2. prędkość zamrożona a_f , 3. prędkość czoła fali, 4. prędkość maksimum fali, • eksperyment Nakoryakova i innych [2]. Obliczenia wykonano przy kroku całkowania $\Delta z = 0.02 \text{ m}$

Przykładowy wynik naszych obliczeń numerycznych, wykonanych dla tych samych warunków generowania fali zgęszczeniowej jak w eksperymencie Nakoryakova i innych, przedstawiono na rys. 4.

Przedstawia on rozwój zaburzenia ciśnienia obserwowany w odległości 0.2 m od miejsca wygenerowania zaburzenia skokowego. Jak widać z rysunku, model ośrodka dwupłynowego charakteryzuje się tym, że wprowadzone zaburzenie skokowe ulegają silnej deformacji. Wyraźnie można wyodrębnić początek łagodnego



Rys. 4. Przebieg fali wygenerowanej funkcją skokową $\Delta P_0 = 0.01 \text{ MPa}$ (skok na jednym oczku siatki), w odległości 0.2 m od miejsca generowania impulsu, przy $\alpha = 0.01$, dla różnych kroków całkowania, a) $\Delta z = 0.1 \text{ m}$, b) $\Delta z = 0.04 \text{ m}$, c) $\Delta z = 0.02 \text{ m}$, d) $\Delta z = 0.01 \text{ m}$.

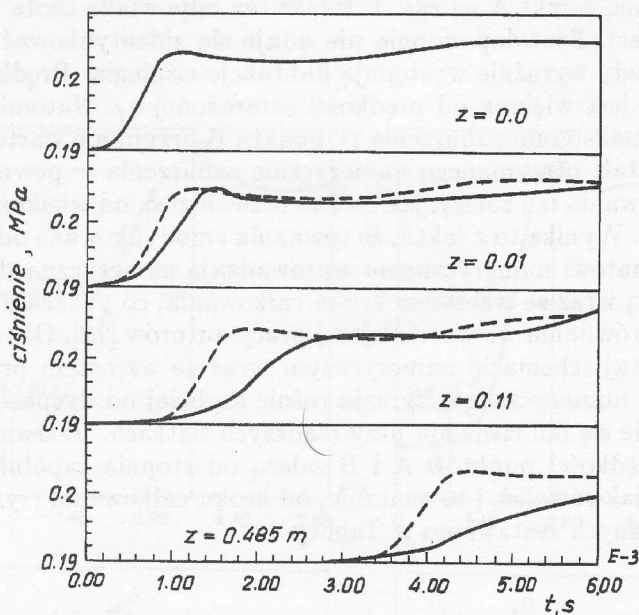
narastania ciśnienia, punkt A na rys. 4. Punkt ten odpowiada czołu rozchodzącej się fali (forerunner). Prawdopodobnie nie udaje się zidentyfikować go w czasie eksperymentu, kiedy wyraźnie występują fluktuacje ciśnienia. Prędkość poruszania się punktu A jest większa od prędkości zamrożonej a_f . Natomiast prędkość rozchodzenia się maksimum zaburzenia tj. punktu B przyjmuje wartości wyraźnie niższe od a_f . Kształt otrzymanego numerycznie zaburzenia w pewnej odległości od miejsca generowania fali zależy, jak można przewidzieć, od wielkości przyjętego kroku całkowania. Wynika to z faktu, że równania zmodyfikowane odpowiadające przyjętemu schematowi numerycznemu wprowadzają numeryczną dyfuzję i dyspersję, które rosną wraz ze wzrostem kroku całkowania, co pokazano na przykładzie modelowego równania we wcześniejszej pracy autorów [12]. Okazało się, że w zastosowanym tutaj schemacie numerycznym wraz ze wzrostem przestrzennego kroku całkowania numerycznego, dyfuzja rośnie szybciej od dyspersji, co zwykle powoduje rozmycie się fali ciśnienia przy rzadszych siatkach. Reasumując, można powiedzieć, że prędkości punktów A i B zależą od stopnia zapełnienia mieszaniny dwufazowej jak również, i to znacznie, od kroku całkowania (rys. 4). Wyniki obliczeń numerycznych zestawiono w Tablicy 1.

Tablica 1. Zestawienie wyników obliczeń numerycznych prędkości propagacji czoła fali i maksimum fali w zależności od kroku całkowania

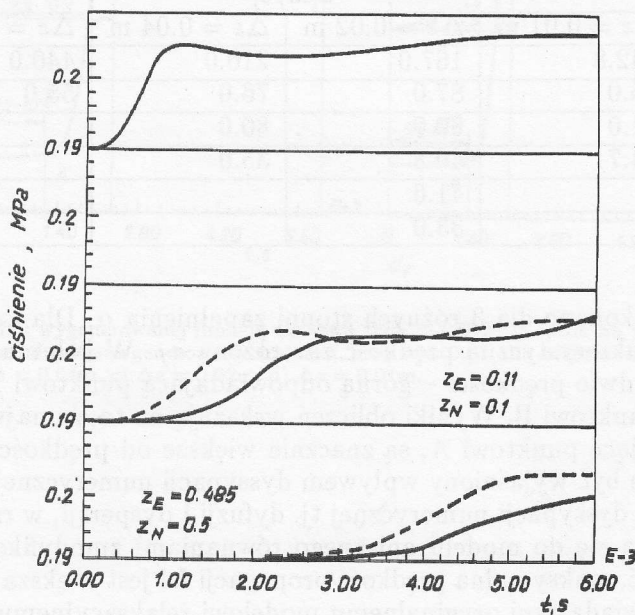
α	a_f [m/s]	a [m/s]			
		$\Delta z = 0.01$ m	$\Delta z = 0.02$ m	$\Delta z = 0.04$ m	$\Delta z = 0.1$ m
0.01	106.3	142.8	167.0	210.0	440.0
		95.0	87.0	76.0	55.0
0.05	48.6	61.0	69.0	80.0	
		44.7	40.8	35.0	
0.1	35.0		41.6		
			33.0		

Obliczenia wykonano dla 3 różnych stopni zapełnienia α . Dla każdego z nich wyznaczono charakterystyczną prędkość zamrożoną a_f . W kolumnach oznaczonych Δz podano dwie prędkości – górną odpowiadającą punktowi A oraz dolną odpowiadającą punktowi B. Wyniki obliczeń wskazują na to, że największe prędkości, odpowiadające punktowi A, są znacznie większe od prędkości zamrożonej a_f . Fakt ten może być wyjaśniony wpływem dyssypacji numerycznej. W związku z pojawieniem się dyssypacji numerycznej tj. dyfuzji i dyspersji, w rzeczywistości obliczenia odnoszą się do modelu opisanego równaniami zmodyfikowanymi, dla którego, jak widać, maksymalna prędkość propagacji fal jest większa od prędkości zamrożonej odpowiadającej oryginalnemu modelowi relaksacyjnemu (5) ÷ (12).

Wpływy omówionej powyżej dyssypacji numerycznej jeszcze lepiej uwidaczniają się na rys. 5 i 6, na których przedstawiono wyniki eksperymentu Nakoryakova i innych [2] oraz własnych obliczeń numerycznych.



Rys. 5. Zmiany ciśnienia w wybranych punktach kanału, przy $\Delta z = 0.02\text{m}$. Linia ciągła odpowiada eksperymentowi, linia przerywana obliczeniom numerycznym.



Rys. 6. Zmiany ciśnienia w wybranych punktach kanału, przy $\Delta z = 0.1\text{m}$. Linia ciągła odpowiada eksperymentowi, linia przerywana obliczeniom numerycznym. z_E oznacza odległość mierzoną w eksperymencie, z_N w obliczeniach numerycznych.

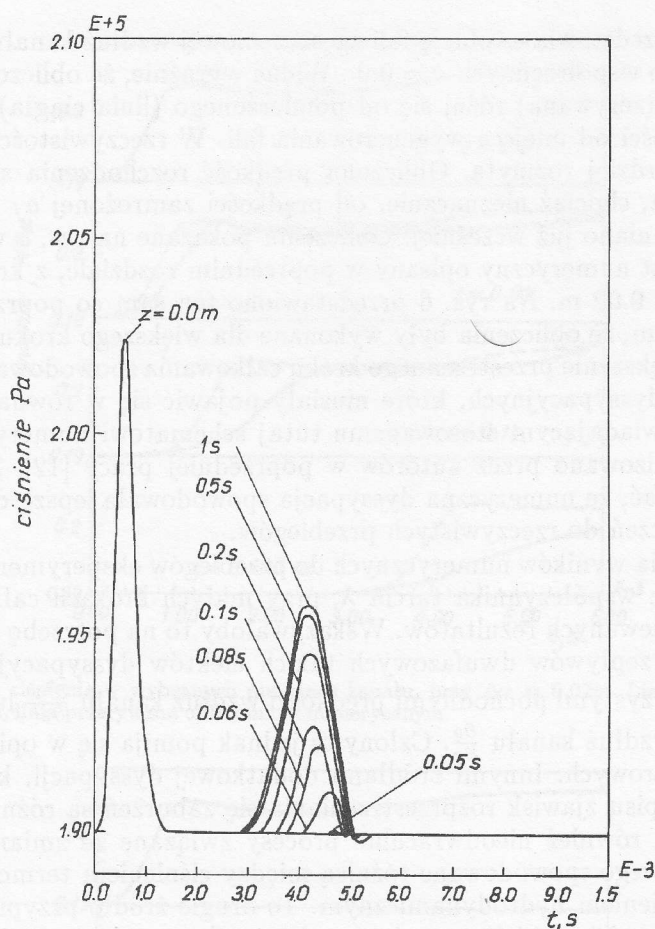
Rysunek 5 przedstawia ewolucję fali zgęszczeniowej wzdłuż kanału wytworzonej w przekroju o współrzędnych $z = 0.0$. Widać wyraźnie, że obliczony przebieg ciśnienia (linia przerywana) różni się od pomierzonego (linia ciągła) szczególnie w dalszej odległości od miejsca wygenerowania fali. W rzeczywistości fala zgęszczeniowa jest bardziej rozmyta. Obliczona prędkość rozchodzenia się czoła fali jest nieco wyższa, chociaż nieznacznie, od prędkości zamrożonej a_f z powodów, o których wspomniano już wcześniej. Obliczenia pokazane na rys. 5 wykonano w oparciu o schemat numeryczny opisany w poprzednim rozdziale, z krokiem przestrzennym $\Delta z = 0.02$ m. Na rys. 6 przedstawiono ten sam co poprzednio przebieg sygnału z tym, że obliczenia były wykonane dla większego kroku całkowania $\Delta z = 0.1$ m. Zwiększenie przestrzennego kroku całkowania spowodowało silniejszy wpływ członów dyssypacyjnych, które musiały pojawić się w równaniu zmodyfikowanym odpowiadającym stosowanemu tutaj schematowi numerycznemu, co szczegółowo analizowano przez autorów w poprzedniej pracy [12]. Z przebiegu fali na rys. 6 widać, że numeryczna dyssypacja spowodowała lepsze dopasowanie się wyników obliczeń do rzeczywistych przebiegów.

Próby zbliżenia wyników numerycznych do przebiegów eksperymentalnych poprzez zwiększenie współczynnika tarcia λ , przy małych krokach całkowania nie przyniosły spodziewanych rezultatów. Wskazywałoby to na potrzebę uwzględnienia w modelu przepływów dwufazowych takich efektów dyssypacyjnych, które związane są z parzystymi pochodnymi prędkości wzdłuż kanału $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ lub przewodnictwem ciepła wzdłuż kanału $\frac{\partial q}{\partial z}$. Człony te jednak pomija się w opisie przepływów jednowymiarowych. Innymi źródłami dodatkowej dyssypacji, które można wprowadzić do opisu zjawisk rozprzestrzeniania się zaburzeń są różnice średnich prędkości faz jak również nieodwracalne procesy związane ze zmianą objętości ośrodka dwufazowego spowodowane różnicą między ciśnieniem termostatycznym i chwilowym ciśnieniem hydrodynamicznym. To drugie źródło przypisywane jest tzw. lepkości objętościowej i jest porównywalne co do wartości z lepkością molekularną lub nawet turbulentną [13].

Wpływ czasu relaksacji na rozmycie sygnału pokazano na rys. 7. Przedstawiono na nim zmiany ciśnienia w punkcie $z=0.5$ m w zależności od różnych czasów relaksacji, po wygenerowaniu sygnału wejściowego opisanego pierwszą krzywą ($z=0.0$ m). Obliczenia wykonano dla jednakowych kroków całkowania $\Delta z = \text{const}$, $\Delta t = \text{const}$, przy ustalonym stopniu przegrzania 1°C . Przy coraz mniejszych czasach relaksacji widoczne jest postępujące rozmycie sygnału, co dla $\theta = 0.05$ s prowadzi praktycznie do wytłumienia maksimum fali. Małe czasy relaksacji powodują szybką wymianę masy między fazami i dużą dyssypację, czego efektem jest rozmycie sygnału ciśnienia.

Wpływ czasu relaksacji na procesy wymiany masy ilustruje rys. 8, na którym wyraźnie widoczne są różnice zmiany stopnia suchości wzdłuż kanału, po czasie $t = 1.5$ s. Dla przykładu podano przebieg x rzeczywistego i $\bar{x}$ równowagowego przy dwóch różnych θ , $\theta_1 = 1.0$ s i $\theta_2 = 0.2$ s. Dla przypadku mniejszych czasów relaksacyjnych różnice $\bar{x} - x$ znacznie maleją wzdłuż przepływu.

Innym, ciekawym efektem, który można zaobserwować na rys. 7, jest obni-



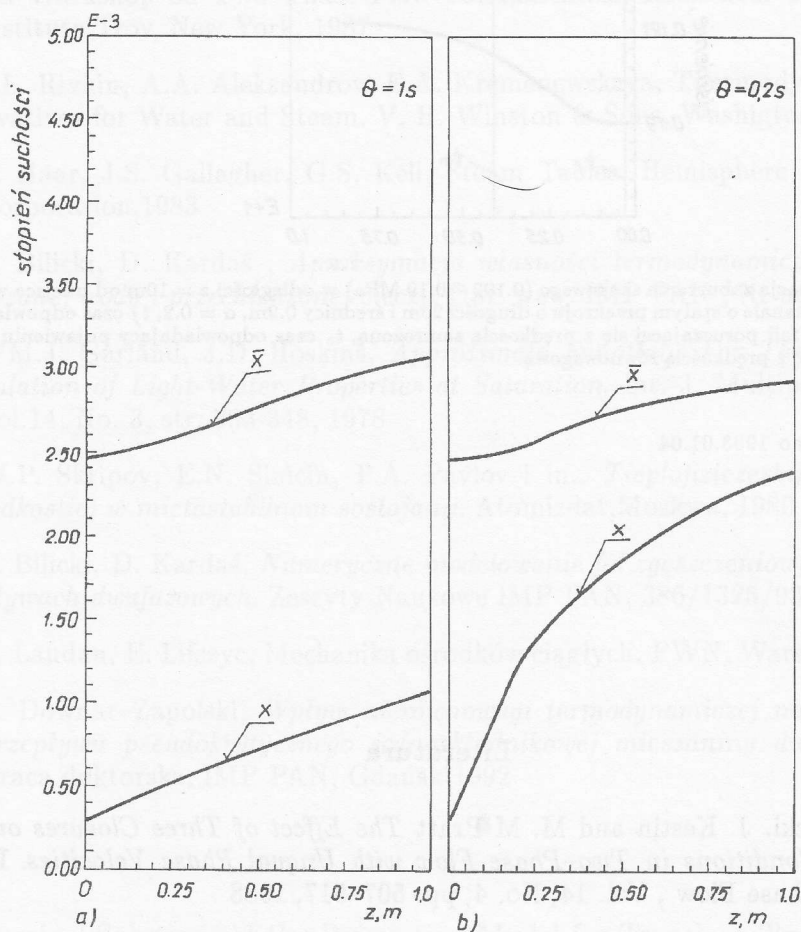
Rys. 7. Ciśnienie w punkcie $z = 0.5m$ dla różnych czasów relaksacji

żenie się prędkości propagacji fal silnie rozmytych. Sygnały silne rozchodzą się z większymi prędkościami, w stosunku do fal słabych. W celu potwierdzenia tego zjawiska przeprowadzono badanie zmian ciśnienia w dużej odległości od miejsca wygenerowania sygnału kanału $z=10m$.

Okazało się, że sygnały słabsze, inaczej niż silne fale, rozchodzą się z prędkościami niższymi od prędkości zamrożonej.

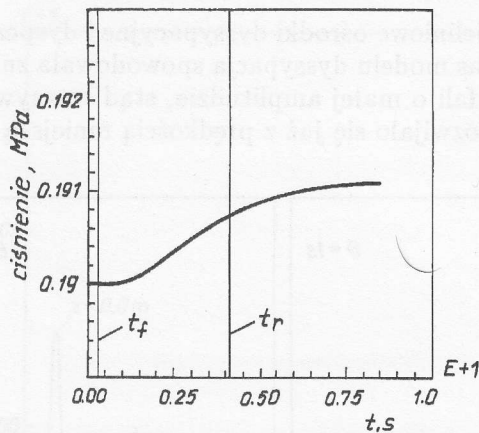
Rysunek 9 przedstawia ten eksperyment numeryczny. Na uwagę zasługuje fakt, że czoło fali porusza się z prędkością niższą od prędkości zamrożonej. W ośrodkach liniowych bez dyssypacji, z prędkością zamrożoną może rozchodzić się jedynie przednia część sygnału (forerunner). Charakteryzuje się ona bardzo małą amplitudą zaburzenia. Pokazał to i uzasadnił na podstawie liniowej analizy rozchodzenia się zaburzeń w ośrodkach dyspersyjnych Downar-Zapolski [14]. Przedstawione przez nas obliczenia numeryczne wskazują, że hipoteza Downara-Zapolskiego

może być rozszerzona na nieliniowe ośrodki dyssypacyjne i dyspersyjne. Uwzględniona w przyjętym przez nas modelu dyssypacja spowodowała zupełne wytłumienie frontu rozwijającej się fali o małej amplitudzie, stąd rzeczywiste czoło zaburzenia po pewnym czasie rozwijało się już z prędkością mniejszą od zamrożonej.



Rys. 8. Nierównowagowy stopień suchości x i równowagowy stopień suchości $\bar{x}$ w funkcji z dla dwóch różnych czasów relaksacji θ , a) $\theta_1 = 1.0s$, b) $\theta_1 = 0.2s$

Porównując wyniki obliczeń pokazanych na rys.4 i rys. 9 można odnieść wrażenie, że istnieje między nimi sprzeczność. Na rys.4 prędkości czoła fali są wyższe od prędkości zamrożonych. Spowodowane jest to tym, że po pierwsze skok ciśnienia wygenerowany w przypadku pokazanym na rys. 4 był dziesięciokrotnie większy. Po drugie rys.4 przedstawia deformacje skoku ciśnienia w odległości 0.2m od miejsca wygenerowania sygnału, a rys. 9 pokazuje falę w odległości 10m. Czoło fali pokazanej na rys.4, po odpowiednio długim czasie, również obniżyłoby swoją prędkość.



Rys. 9. Deformacja zaburzenia skokowego (0.192 – 0.19 MPa) w odległości $z = 10\text{m}$ od miejsca wygenerowania fali w kanale o stałym przekroju o długości 20m i średnicy 0.2m, $\alpha = 0.2$, t_f czas odpowiadający pojawieniu się fali poruszającej się z prędkością zamrożoną, t_e czas odpowiadający pojawieniu się fali poruszającej się z prędkością równowagową.

Pracę zgłoszono 1993.01.04

Literatura

- [1] Z. Bilicki, J. Kestin and M. M Pratt *The Effect of Three Closures on Critical Conditions in Two-Phase Flow with Unqual Phase Velocities*. Int. Multiphase Flow , Vol. 14, No. 4, pp. 507–517, 1988
- [2] V.E. Nakoryakov, G. B. Pokusaev, I.R. Shreiber, N. A. Pribaturin *The Wave Dynamics of Vapour-Liquid Medium*. Int. J. Multiphase Flow , Vol. 14, No. 6, pp. 655–677, 1988
- [3] J.W. Spore, W.L. Weaver i in. *TRAC-BD1 - Transient Reactor Analysis Code for Boiling Water System*. Transient Two-Phase Flow, Hemisphere Publishing Corporation, str. 533 - 550, 1983
- [4] V.H. Ransom, R.J. Wagner, and J.A. Trapp, *The RELAP5 Two-Phase Flow Model and Numerical Scheme for Economic LWR System Simulation*. Transient Two-Phase Flow, Hemisphere Publishing Corporation, 1983, str. 531.

- [5] Z. Bilicki & J. Kestin *Physical aspects of the relaxation model in two-phase flow*. Proceedings of Royal Society London A 428, pp. 379–397, 1990
- [6] W. Wulff, *Computational Methods for Multiphase Flow*. Second International Workshop on Two-Phase Flow Fundamentals, Rensselaer Polytechnic Institute Troy, New York, 1987
- [7] S.L. Rivkin, A.A. Aleksandrov, E.A. Kremenewskaya, *Thermodynamic Derivatives for Water and Steam*. V. H. Winston & Sons, Washington, 1978
- [8] L. Haar, J.S. Gallagher, G.S. Kell, *Steam Tables*. Hemisphere Publishing Corporation, 1983
- [9] Z. Bilicki, D. Kardaś, *Aproksymacja własności termodynamicznych przegrzanej wody i przechłodzonej cieczy*. Opr. wew. IMP PAN, Nr arch. 185/91
- [10] W.M.J. Garland, J.D. Hoskins, *Approximate Functions For The Fast Calculation of Light-Water Properties at Saturation*. Int. J. Multiphase Flow, Vol.14, No. 3, str. 333-348, 1978
- [11] W.P. Skripov, E.N. Sinicin, P.A. Pavlov i in., *Tieplofiziceskije swojstwa zidkostiej w mietastabilnom sostojanii*. Atomizdat, Moskwa, 1980
- [12] Z. Bilicki, D. Kardaś, *Numeryczne modelowanie fal zgęszczeniowych w przepływach dwufazowych*. Zeszyty Naukowe IMP PAN, 386/1326/93.
- [13] L. Landau, E. Lifszyc, *Mechanika ośrodków ciągłych*. PWN, Warszawa 1958,
- [14] P. Downar-Zapolski, *Wpływ nierównowagi termodynamiczej na powstanie przepływu pseudokrytycznego jednoskładnikowej mieszaniny dwufazowej*. Praca doktorska, IMP PAN, Gdańsk 1992

Numerical Solutions of the Relaxation Model for Transient Two-Phase Flow of Steam and Water

Summary

The paper presents the numerical procedure used for solutions of the relaxation model which describes transient two-phase flow. The evolution of the pressure pulse and influence of the parameters on it is studied. Numerical results are compared with experiments. The effect of relaxation time on dissipation processes is investigated.

Załącznik

Tablica Z1

Porównanie pomierzonej temperatury T_i , z obliczoną analitycznie temperaturą $T(P_i, v_i)$.

P_i	v_i	$T(P_i, v_i)$	T_i	ε	przegrzanie
MPa	$\frac{m^3}{kg}$	$^{\circ}C$	$^{\circ}C$		$^{\circ}C$
4.000	0.0010772	139.9625	139.60	-0.25965	
0.361	0.0010795	139.7633	139.60	-0.11700	
0.262	0.0010796	139.7972	139.60	-0.14124	10.59777
0.163	0.0010796	139.7353	139.60	-0.09695	25.70410
P_i	v_i	$T(P_i, v_i)$	T_i	ε	przegrzanie
4.000	0.0010993	159.9150	159.70	-0.13463	
0.658	0.0011018	159.8411	159.70	-0.08833	
0.561	0.0011019	159.8782	159.70	-0.11156	3.46522
0.465	0.0011019	159.8341	159.70	-0.08397	10.56107
0.366	0.001102	159.8733	159.70	-0.10853	19.21713
0.267	0.0011021	159.9142	159.70	-0.13412	30.06915
0.168	0.0011021	159.8735	159.70	-0.10867	44.88006
P_i	v_i	$T(P_i, v_i)$	T_i	ε	przegrzanie
3.010	0.0011232	177.8737	178.10	0.12708	
1.060	0.0011248	177.9437	178.10	0.08775	
0.955	0.0011248	177.8955	178.10	0.11483	0.16907
0.856	0.0011249	177.9243	178.10	0.09865	4.83186
0.657	0.0011251	177.9843	178.10	0.06495	15.67318
0.463	0.0011252	177.9770	178.10	0.06905	29.12079
0.266	0.0011254	178.0450	178.10	0.03091	48.59410
P_i	v_i	$T(P_i, v_i)$	T_i	ε	przegrzanie
4.000	0.0011389	189.6377	190.00	0.19071	
1.440	0.0011414	189.8398	190.00	0.08432	
1.250	0.0011416	189.8736	190.00	0.06654	0.13538
0.854	0.001142	189.9262	190.00	0.03883	16.83036
0.655	0.0011422	189.9469	190.00	0.02795	27.69464
0.461	0.0011424	189.9657	190.00	0.01803	41.18105
0.264	0.0011426	189.9770	190.00	0.01212	60.74515

Tablica Z1 cd.

Porównanie pomierzonej temperatury T_i , z obliczoną analitycznie temperaturą $T(P_i, v_i)$.

P_i	v_i	$T(P_i, v_i)$	T_i	ε	przegrzanie
MPa	$\frac{m^3}{kg}$	$^{\circ}C$	$^{\circ}C$		$^{\circ}C$
2.500	0.0011559	199.9994	200.20	0.10020	
1.660	0.0011567	200.0226	200.20	0.08861	
1.540	0.0011568	200.0075	200.20	0.09615	0.61227
1.290	0.0011571	200.0226	200.20	0.08862	8.89453
0.858	0.0011576	199.9898	200.20	0.10498	26.83354
0.465	0.0011581	199.9193	200.20	0.14021	51.06107
0.268	0.0011583	199.8229	200.20	0.18835	70.44459
P_i	v_i	$T(P_i, v_i)$	T_i	ε	przegrzanie
4.000	0.0011693	209.1313	209.40	0.12834	
2.030	0.0011715	209.3955	209.40	0.00213	
1.840	0.0011717	209.3657	209.40	0.01638	1.15567
1.450	0.0011722	209.3009	209.40	0.04734	12.66234
1.060	0.0011727	209.1397	209.40	0.12431	26.92425
0.660	0.0011732	208.8397	209.40	0.26757	46.79154
0.466	0.0011734	208.6160	209.40	0.37439	60.18142
P_i	v_i	$T(P_i, v_i)$	T_i	ε	przegrzanie
4.010	0.001187	219.5138	219.50	-0.00631	
2.430	0.0011891	219.8037	219.50	-0.13835	
2.230	0.0011893	219.7213	219.50	-0.10083	1.51619
1.460	0.0011904	219.2519	219.50	0.11303	22.43887
0.964	0.001191	218.5218	219.50	0.44564	41.16444
0.665	0.0011914	217.9173	219.50	0.72104	56.59026
0.374	0.0011918	217.1766	219.50	1.05849	78.25302
P_i	v_i	$T(P_i, v_i)$	T_i	ε	przegrzanie
4.020	0.0012089	231.3576	231.00	-0.15481	
3.020	0.0012102	231.3180	231.00	-0.13766	
2.820	0.0012105	231.2368	231.00	-0.10249	0.51828
2.040	0.0012118	230.5012	231.00	0.21595	17.58203
1.460	0.0012127	229.2551	231.00	0.75539	33.93887
0.968	0.0012135	227.6071	231.00	1.46881	52.48556
0.670	0.0012141	226.3112	231.00	2.02980	67.79076
0.378	0.0012146	224.7309	231.00	2.71390	89.37581

Tablica Z1 cd.

Porównanie pomierzonej temperatury T_i , z obliczoną (analitycznie) temperaturą $T(P_i, v_i)$.

P_i	v_i	$T(P_i, v_i)$	T_i	ε	przegrzanie
MPa	$\frac{m^3}{kg}$	$^{\circ}C$	$^{\circ}C$		$^{\circ}C$
3.521	0.0012169	235.0243	234.62	-0.17234	
3.030	0.0012178	234.9232	234.62	-0.12923	0.17590
2.540	0.0012185	234.4420	234.62	0.07587	9.79026
2.050	0.0012192	233.5772	234.62	0.44445	20.95375
1.069	0.0012209	230.3152	234.62	1.83481	51.77152
0.775	0.0012213	228.7532	234.62	2.50057	65.49559
0.382	0.001222	226.2084	234.62	3.58518	92.62174
0.088	0.0012224	223.8691	234.62	4.58226	138.52798
P_i	v_i	$T(P_i, v_i)$	T_i	ε	przegrzanie
4.988	0.0012446	248.5180	248.13	-0.15636	
4.008	0.0012467	248.2858	248.13	-0.06279	
3.519	0.0012476	247.6133	248.13	0.20824	5.21682
3.027	0.0012485	246.4430	248.13	0.67987	13.74100
2.537	0.0012494	244.6482	248.13	1.40321	23.36336
2.048	0.0012504	242.0873	248.13	2.43529	34.51333
1.557	0.0012514	238.5349	248.13	3.86697	48.01879
1.066	0.0012523	233.8114	248.13	5.77059	65.40549
P_i	v_i	$T(P_i, v_i)$	T_i	ε	przegrzanie
5.972	0.0012785	262.3926	262.03	-0.13837	
4.992	0.0012807	261.1712	262.03	0.32776	
4.501	0.0012818	259.7941	262.03	0.85330	4.52812
4.011	0.001283	257.7221	262.03	1.64405	11.46390
3.521	0.0012841	254.7442	262.03	2.78052	19.08409
3.030	0.0012852	250.6819	262.03	4.33084	27.58590
2.539	0.0012864	245.3123	262.03	6.38008	37.22129
2.048	0.0012877	238.3660	262.03	9.03101	48.41333

Tablica Z1 cd.

Porównanie pomierzonej temperatury T_i , z obliczoną analitycznie temperaturą $T(P_i, v_i)$.

P_i	v_i	$T(P_i, v_i)$	T_i	ε	przegrzanie
MPa	$\frac{m^3}{kg}$	$^{\circ}C$	$^{\circ}C$		$^{\circ}C$
5.970	0.0012964	267.9962	268.34	0.12812	
5.480	0.0012976	266.8438	268.34	0.55758	
4.990	0.0012986	264.9675	268.34	1.25682	4.47240
4.499	0.0012999	262.2684	268.34	2.26264	10.86522
4.009	0.0013011	258.4957	268.34	3.66859	17.80351
3.519	0.0013023	253.4513	268.34	5.54844	25.42682
3.028	0.0013036	246.8654	268.34	8.00277	33.93263
P_i	v_i	$T(P_i, v_i)$	T_i	ε	przegrzanie
6.953	0.0013289	279.0542	279.45	0.14165	
6.463	0.0013303	277.4069	279.45	0.73113	
5.972	0.0013318	274.7297	279.45	1.68913	4.12358
5.482	0.0013331	270.7560	279.45	3.11110	9.64405
4.992	0.0013346	265.2284	279.45	5.08913	15.55737
4.501	0.0013361	257.8330	279.45	7.73556	21.94812
P_i	v_i	$T(P_i, v_i)$	T_i	ε	przegrzanie
7.934	0.0013448	285.4079	284.82	-0.20640	
6.953	0.001348	282.7920	284.82	0.71202	
6.463	0.0013497	279.7563	284.82	1.77785	4.30035
5.972	0.0013514	275.0934	284.82	3.41501	9.49358
5.482	0.0013532	268.4509	284.82	5.74719	15.01405
P_i	v_i	$T(P_i, v_i)$	T_i	ε	przegrzanie
7.932	0.0013588	288.7046	288.54	-0.05705	
7.441	0.0013604	287.2164	288.54	0.45874	
6.951	0.0013622	284.4608	288.54	1.41373	3.15083
6.460	0.0013639	279.9757	288.54	2.96814	8.05114
5.971	0.0013656	273.4020	288.54	5.24643	13.22448
P_i	v_i	$T(P_i, v_i)$	T_i	ε	przegrzanie
9.405	0.0013922	298.4039	298.16	-0.08180	
8.424	0.0013964	296.8326	298.16	0.44519	
7.930	0.0013985	294.3655	298.16	1.27262	3.74384
7.439	0.0014008	289.8189	298.16	2.79752	8.15709