

POLSKA AKADEMIA NAUK

INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

**PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH**

**TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY**

95



GDAŃSK 1993

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machines

RADA REDAKCYJNA – EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH * HENRYK JARZYNA * JERZY KRZYŻANOWSKI
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ * WŁODZIMIERZ J. PROSNAK
JÓZEF ŚMIGIELSKI * ZENON ZAKRZEWSKI

KOMITET REDAKCYJNY – EDITORIAL COMMITTEE

EUSTACHY S. BURKA (REDAKTOR NACZELNY – EDITOR-IN-CHIEF)
JAROSŁAW MIKIELEWICZ
EDWARD ŚLIWICKI (REDAKTOR – EXECUTIVE EDITOR) * ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA – EDITORIAL OFFICE

Wydawnictwo Instytutu Maszyn Przepływowych
Polskiej Akademii Nauk
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. poczt. 621,
tel. (0-58) 41-12-71 wew. 141, fax: (0-58) 41-61-44,
e-mail: tjan@imppan.imp.pg.gda.pl

ISBN 83-01-93121-1
ISSN 0079-3205

Od Redakcji

Poczynając od daty ukazania się tego numeru *PRAC INSTYTUTU MASZYN PRZEPLYWOWYCH* zamierzamy preferować prace naukowe, przeznaczone do publikacji w naszym periodyku, napisane w języku angielskim.

Nasz periodyk będzie się ukazywać pod tym samym tytułem, z tym że nazwa angielska umieszczona będzie na pierwszym miejscu: *TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY — PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPLYWOWYCH*.

From the Editor

The Editor of the *PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPLYWOWYCH* would like to recommend English as a language of papers submitted for publication.

Our journal will be issued under the same title. However, from now on, the Polish title will be preceded by its English version *TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY*

BRUNON GROCHAL¹

O jednowymiarowym opisie przewodzenia ciepła w złożach. I. Nowy model i wywód zależności

Przedstawiono nową propozycję jednowymiarowego opisu przewodzenia ciepła w złożach nieprzezroczystych elementów. Nowy opis uwzględnia fizykę zjawisk w znacznie większym stopniu niż opisy dotychczas zaprezentowane w literaturze przedmiotu. Konfrontacja nowego modelu z eksperymentem zawarta jest w II części pracy.

Oznaczenia

D – średnica elementu złoża (kuli), $D = 2R$,	k_R – składowa radiacyjna efektywnego
ϵ – porowatość,	współczynnika przewodzenia ciepła,
f – pole czynnej powierzchni środkowego	k_S – współczynnik przewodzenia ciepła
przekroju elementu ($f(\pi/2) = F_S$);	materiału elementów złoża,
stosunek pól przekroju elementu	l – długość drogi przewodzenia ciepła
(kuli) i przynależnego elementu	(odcinka przewodzącego),
plaszczysty ($f = F_S/F_E$, (29)),	q – gęstość strumienia ciepła,
składowa przewodnościowa efektywnego	S – pole czynnej powierzchni zewnętrznej
współczynnika przewodzenia ciepła k_E ,	elementu półkuli ($S(\varphi) \leq 2\pi D^2$),
$k_C = k_C(k_F, k_S)$,	T – temperatura,
efektywny współczynnik przewodzenia	θ – spadek (różnica) temperatury,
ciepła, $k_E = k_E(k_C, k_R)$,	Λ – stosunek pola powierzchni kontaktu do
współczynnik przewodzenia ciepła płynu	pola powierzchni przekroju elementu,
wypełniającego złoża,	φ – kąt (współrzędna, patrz rys.3).

Wskaźniki dotyczą:

$\bar{}$ – wielkości średnie,	o – powierzchnia odpływu ciepła
$\bar{}_0$ – wielkości odniesione do pełnego pola	(powierzchnia o niższej temperaturze)
powierzchni przekroju elementu; płynu (gazu)	0 – wielkości związane z odcinkiem
wypełniającego przestrzenie między elementami,	przewodzenia $l_0 = D$ przechodzą-
wielkości na czynnej powierzchni przekroju f ,	cym przez środek elementu
szczeliny z kontaktami (między	(lokalne dla $\varphi = 0$),
jednoelementowymi warstwami),	S – wielkości na czynnej powierzchni S ;
powierzchnia dopływu ciepła (powierzchni	materiału elementów (solid),
o wyższej temperaturze),	V – luki między elementami w jedno-
wielkości związane z odcinkiem	elementowej warstwie (void).
przewodzenia $l(\varphi)$ (lokalne),	

¹Zakład Termodynamiki i Wymiany Ciepła, Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk

1. Wstęp

W literaturze przedmiotu wyróżnić można dwie grupy opisów wymiany ciepła w złożach. Kryterium podziału stanowi założenie, dotyczące rodzaju ośrodka za jaki uważane jest złożo.

W opisach należących do pierwszej grupy złożo jest traktowane jako ośrodek niejednorodny dwufazowy – mieszanina faz stałej i płynnej. Fazę stałą stanowią elementy (ziarna), fazę płynną stanowi – zwykle – gaz wypełniający przestrzenie między elementami. W złożach ewakuowanych, stosowanych jako izolacje kriogeniczne, [1], [2], [3], jako szczególny przypadek fazy płynnej występuje próżnia. W opisach należących do drugiej grupy złożo jest traktowane jako ośrodek ciągły jednorodny. W szczególności nie uwzględnia się – w jawny sposób – obecności granic międzyfazowych element-płyn, próbuje się jednak wiązać własności takiego zastępczego ośrodka jednorodnego z własnościami faz stałej i płynnej. Przeglądy i analizy porównawcze obydwu grup opisów znaleźć można na przykład w [4], [5], [6].

Niniejsza praca dotyczy opisów pierwszej grupy. Praktycznie we wszystkich propozycjach tych opisów wykorzystywana jest koncepcja efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła k_E . Współczynnik ten zwykle określany jest na podstawie analizy szeregowych i równoległych połączeń oporów cieplnych w powtarzalnym fragmencie złoża – komórce – zawierającym jeden element i przynależną objętość fazy płynnej (przestrzeni między elementami). Doskonały przegląd różnych modeli komórek, od najprostszych aż do bardzo skomplikowanych, zawarty jest w [5].

Przewidywania teoretyczne, wynikające z proponowanych modeli komórek oraz odpowiadających im opisów, nie zawsze dobrze zgadzają się z wynikami doświadczalnych badań wymiany ciepła w złożach. Nawet mocno skomplikowane modele komórek najwyraźniej nieprawidłowo ujmują zjawiska, składające się na wymianę ciepła w złożach. Dotyczy to zwłaszcza uwzględnienia radiacyjnej wymiany ciepła, przy czym rozbieżności między teorią i doświadczeniem rosną bardzo szybko ze wzrostem temperatury i nie dają się wyjaśnić racjonalnie w ramach proponowanych modeli, [4], [7], [8].

Chociaż kłopoty z poprawnym uwzględnieniem radiacyjnej wymiany ciepła są głównym mankamentem opisów pierwszej grupy, za jak najbardziej celowy wypada uznać krytyczny przegląd sposobów opisu przewodzenia ciepła. Wynika to z dwóch zasadniczych powodów. Po pierwsze, wyznaczany doświadczalnie udział radiacyjnego przenoszenia energii, w całości transportu energii w złożach jest z reguły określany jako *reszta po przewodzeniu*, bardzo istotne jest więc prawidłowe określenie rzeczywistego (a nie – postulowanego) udziału przewodzenia. Po drugie, cenną cechą wcześniejszych modeli komórek jest ich prostota – nie mają jej złożone modele późniejsze, powstałe w wyniku dążenia do uzyskania lepszej zgodności przewidywań z rzeczywistością kosztem skomplikowania modelu. Zasadne jest więc pytanie czy złożoność późniejszych modeli jest uzasadniona, jeśli i tak nie pozwala uzyskać zgodności przewidywań z praktyką. Innymi słowy –

czy możliwe jest uproszczenie opisu bez szkody dla jego jakości. W szczególności ważne jest więc zbadanie prawidłowości uproszczeń przyjmowanych w celu sformułowania jednowymiarowego – a więc najprostszego – opisu transportu ciepła w złożach na drodze przewodzenia, a także zbadanie granic możliwości utrzymania jednowymiarowości tego opisu.

2. Krytyczny przegląd modeli i opisów na tle danych doświadczalnych

Zasadniczym problemem, którego rozwiązanie jest warunkiem sformułowania prawidłowego opisu przenoszenia energii w złożach, jest takie dopasowanie modeli przewodzenia i radiacji, aby suma działania obydwu mechanizmów przenoszenia zapewniała transport całości przekazywanej energii.

Modele proponowane dotychczas o tyle nie rozwiązują tego problemu, że przewidywana według nich suma działania obydwu mechanizmów przenoszenia jest mniejsza niż obserwowana w doświadczeniach, a różnica między przewidywaniami i pomiarami rośnie z temperaturą.

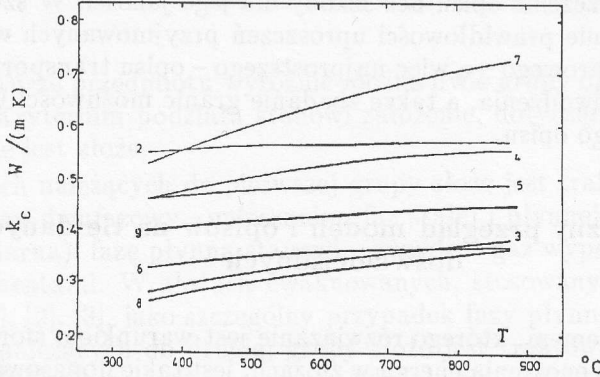
Wymienione mechanizmy przenoszenia są nierozdzielnie sprzężone ze sobą, choć ich znaczenie zmienia się silnie w zależności od parametrów (głównie temperatury), przy jakich zachodzi transport energii przez złożę.

W starszych pracach – z reguły dotyczących badań złóż przy niższych temperaturach – za całość transportu energii czyniono odpowiedzialnym mechanizm przewodzenia. Opracowane na podstawie badań doświadczalnych formuły nie zbyt dobrze jednak zgadzają się między sobą w przewidywaniu przewodnościowej składowej przenoszenia energii.

Dobłą ilustracją rozbieżności przewidywań składowej przewodnościowej (tj. k_C) współczynnika k_E według różnych proponowanych modeli – a każdy z nich jest potwierdzony wynikami badań doświadczalnych jego autorów – jest rys. 1, zaczerpnięty z [8]. Jak widać, przewidywane wartości k_C mogą różnić się nawet dwukrotnie. Godna podkreślenia jest – przewidywana zgodnie – stosunkowo słaba zależność współczynnika k_C od temperatury.

Ważnych informacji dotyczących wpływu rodzaju płynu (gazu) wypełniającego złożę dostarczyły badania opisane w [11] i [12], przeprowadzone w zakresie niewysokich temperatur (zbliżonych do pokojowej). Z tej ostatniej pracy zaczerpnięto rys. 2, z którego wynika decydujący wpływ k_F na k_C – w zakresie temperatur objętym badaniami.

Nie sposób nie wspomnieć o wpływie przewodzenia przez kontakty między stykającymi się elementami na przewodzenie przez elementy. Rzecz w tym, że pewne modele transportu energii w złożach w ogóle pomijają obecność kontaktów – a więc i ich wspomniany wyżej wpływ. Zdaniem autora należy uznać przewagę tych modeli, które obecność kontaktów uwzględniają, mimo trudności z wyznaczeniem ich ilościowego wpływu na przewodzenie ciepła przez elementy (por. np. [5], [10], [13]).



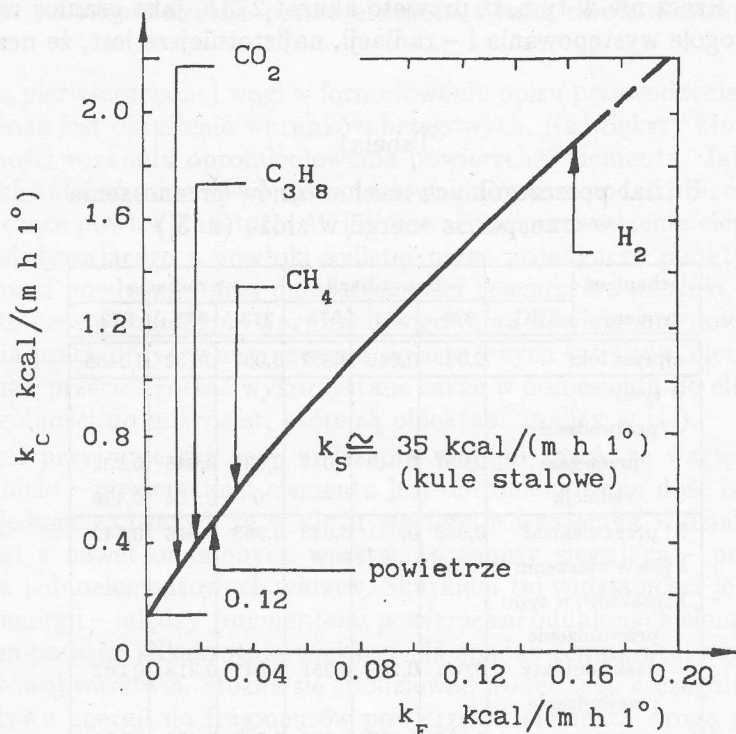
Rys. 1. Zależność współczynnika przewodzenia ciepła k_C złoża (piasku kwarcowego poddanego badaniom opisanym w [8], skąd zaczerpnięto ten rysunek) od temperatury, według formuł różnych autorów. (Uwaga: k_C to składowa przewodnościowa k_E , poza tym do k_E dochodzi składowa radiacyjna.)

W miarę wzrostu temperatury złóż w eksperymentach obserwowana gęstość strumienia przenoszanej energii okazała się jednak na tyle duża, że – w poszukiwaniu racjonalnego wyjaśnienia – wprowadzenie udziału radiacji stało się konieczne. Jak się jednak okazuje dalej (por. [5], [8]), żaden z proponowanych dotychczas modeli radiacyjnego transportu energii nie jest w stanie wyjaśnić obserwowanego – *zbyt dobrego* w odniesieniu do tych modeli – przenoszenia energii w złożach drogą radiacji.

Tytułem ilustracji powyższych uwag poniżej przytoczono formułę na k_E użytą w [5] do opisu wyników badań doświadczalnych.

$$\frac{k_E}{k_F} = \epsilon_{A1}(1 + H_R) + \frac{1}{\frac{(1-\alpha)k_F}{(1-\epsilon_{A1})k_S} + \frac{\alpha}{\epsilon_{A2}(1+H_R) + \epsilon_{A3}k_F/k_S}}.$$

W formule tej ϵ_{A1} , ϵ_{A2} i ϵ_{A3} to, odpowiednio, względne powierzchnie przekroju komórki (odniesione do całkowitego przekroju) dla przenoszenia energii – w kierunku prostopadłym do przekroju komórki – przez gaz, element + gaz oraz kontakt. Współczynnikiem $\alpha = \Phi/\beta$ ujmowany jest stosunek oporów cieplnych gazu (Φ) i materiału elementu (β) połączonych w szereg, natomiast radiacyjny transport jest ujęty współczynnikiem $H_R = k_R/k_F = \beta h_R D/k_F$, gdzie h_R jest wyznaczane z eksperymentu. Współczynnik H_R ma więc charakter eksperymentalnie wyznaczanej dla danego złoża poprawki, której wartość silnie zależy od temperatury, [5]. Współczynnik $\beta = l_A/D$, $\beta \leq 1$, określa zastępczą grubość l_A jednoelementowej warstwy złoża ze względu na przewodzenie przez materiał elementów (fazę stałą) i zależy, ogólnie, od kształtu elementów oraz struktury złoża (geometrii upakowania elementów). Według danych zawartych w [5], ze wzrostem temperatury lokalne wartości współczynnika H_R bardzo silnie rosną, jego wartość rzędu *kilkanaście* przy temperaturach około 900 K jest niczym innym jak miarą



Rys. 2. Zależność współczynnika przewodzenia ciepła k_C złoża stalowych kul od współczynnika przewodzenia ciepła k_F gazu wypełniającego przestrzeń między kulami, z [12] (kule stalowe, $k_S \approx 35 \text{ kcal}/\text{mhK}$ wg [12]).

rozbieżności przewidywań z rzeczywistością.

Należy z naciskiem podkreślić, że – analogicznie jak niemal we wszystkich pracach doświadczalnych – w [5] udział radiacji określono po uprzednim określeniu udziału przewodzenia, wyznaczonego według własnego modelu autorów [5] (nie przyjętego w [8] – a więc i na rys.1). Można więc mówić o *postulatywnym charakterze* tego typu *ogólnych* (tzn. ujmujących obydwa mechanizmy) modeli transportu energii w złożach w tym sensie, że wobec sprzężenia mechanizmów przenoszenia analiza udziału jednego z nich jest możliwa po uprzednim postulowaniu udziału drugiego mechanizmu.

Ilustracją postulatywnego charakteru proponowanego w [5] modelu jest wzięta z tej pracy Tabela 1 (poniżej), w której pokazano jak – w ramach przyjętego w [5] modelu komórki – zmieniają się udziały poszczególnych mechanizmów na różnych drogach przenoszenia energii w złożu, jeśli radiacyjna wymiana jest albo nie jest uwzględniana.

Jak wynika poza tym z przedstawionej tabeli, autorzy [5] przyjęli w szczególności, że przy temperaturze 273K (0°C) udział radiacyjnej wymiany w warstwie

wynosi zero. Rzecz nie w tym, iż przyjęto akurat $273K$ jako granicę wpływu – a właściwie w ogóle występowania! – radiacji, najistotniejsze jest, że uczyniono to arbitralnie.

Tabela1

Udział poszczególnych mechanizmów przenoszenia
w transporcie energii w złożu (z [5])

Mechanizm wymiany	– T[K]	bez radiacji			z radiacją		
		273	573	973	273	573	973
a)przez luki		0,037	0,049	0,067	0,037	0,182	0,0458
w tym:							
przewodzenie							
przez gaz		0,037	0,049	0,057	0,037	0,048	0,032
radiacja		–	–	–	0	0,134	0,426
b) przez elementy		0,963	0,951	0,943	0,963	0,818	0,542
i gaz w otoczeniu							
kontaktów, w tym:							
przewodzenie							
przez kontakty		0,041	0,268	0,251	0,441	0,218	0,062
przewodzenie							
przez gaz		0,522	0,683	0,692	0,522	0,435	0,171
radiacja		–	–	–	0	0,165	0,309
Suma [a)+b)]		1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Warto w tym miejscu zauważyć, że na konieczność uwzględniania radiacji nawet przy bardzo niskich temperaturach - co prawda w próżni - wskazują wyniki badań doświadczalnych transportu ciepła w złożu mikrosfer przedstawione w [3]. Istotny wpływ radiacji na przenoszenie energii ujawniono jednak w [10] - w pewnym zakresie parametrów cieplnych - także dla złóż z przestrzeniami między elementami wypełnionymi płynem (gazem), i to mimo niezwykle uproszczonego modelu radiacyjnego transportu energii.

Przedstawiona powyżej sytuacja odnośnie do stanu rozpoznania zjawisk składających się na transport energii w złożach nasuwa pytanie o prawidłowość opisu przewodzenia - zarówno przez płyn (gaz) wokół kontaktów między elementami sąsiadującymi bezpośrednio jak i przez luki w jednoelementowej warstwie między elementami widzącymi się przez luki, oraz przez same elementy.

W niniejszej pracy - w związku z tą sytuacją- zajęto się kolejno analizą przewodzenia ciepła przez elementy oraz przez szczeliny między jednoelementowymi warstwami, w celu wyznaczenia następnie współczynnika przewodzenia ciepła dla *pełnej jednoelementowej warstwy* (t.j. zawierającej elementy z lukami obok nich oraz szczelinę z kontaktami). Zwykle doświadczalnie wyznaczane są spadki temperatury właśnie dla takich pełnych jednoelementowych warstw złoża.

3. Przewodzenie przez element i lukę obok elementu

Sprawą pierwszorzędnej wagi w formułowaniu opisu przewodzenia ciepła przez element złoża jest określenie warunków brzegowych. Największy kłopot wynika z nieznajomości rozkładu opromieniowania powierzchni elementu. Jako przykłady krańcowych założeń odnośnie do promieniowania można podać prace [1] i [9], obydwie dotyczące powłok kulistych. W [1] rozważono przewodzenie ciepła dopływającego i odpływającego z powłoki kulistej przez pojedyncze punkty kontaktu z sąsiadującymi powłokami *przy adiabatyczności powierzchni powłoki*, natomiast w [9] przyjęto *czysto radiacyjne* warunki brzegowe na powierzchni powłoki kulistej. Ta ostatnia praca dotyczy nagrzewania się sztucznych satelitów Ziemi, jej wyniki mogą jednak przecież zostać wykorzystane także w odniesieniu do elementu złoża a w szczególności do mikrosfer, które są obiektem analizy w [1]).

Na ogół przyjmuje się, że – zwłaszcza w głębi złoża, ze względu na wielokrotne odbicia – powierzchnia elementu jest opromieniowana dość równomiernie. Wypada jednak zauważyć, że w złożu występuje wzajemna widzialność między elementami z nawet oddalonych warstw, to znaczy sięgająca – poprzez luki – przez kilka jednoelementowych warstw. Skutkiem tej widzialności jest radiacyjna wymiana energii – między *fragmentami powierzchni* oddalonych elementów – przy różnicy temperatur kilkakrotnie większej niż spadek temperatury na jednej jednoelementowej warstwie. Można się spodziewać wobec tego szczególnie intensywnego dopływu energii do fragmentów powierzchni elementu drogą radiacji, analogicznie jak ma to miejsce w odniesieniu do przewodzenia w pobliżu punktów kontaktu. Fragmenty powierzchni elementów szczególnie intensywnie przyjmujące lub oddające energię – to jest strefy kontaktów i strefy *kontaktów radiacyjnych* (dalekozasięgowej widzialności) – są rozmieszczone na powierzchni elementu naprzemiennie. Należy sądzić, że dopływ i odpływ energii na drodze przewodzenia przez strefy kontaktów jest jednak intensywniejszy niż przez *strefy kontaktów radiacyjnych*, przynajmniej przy niezbyt dużych gradientach temperatury (małych gęstościach strumienia energii przenoszonej *netto*). Tym niemniej *kontakty radiacyjne* powodują zapewne – podobnie jak kontakty przewodnościowe – wzrost ilości ciepła przewodzonego przez element. Warto przy tym zauważyć, że wyrównanie rozkładu temperatury na powierzchni elementu jest tym lepsze, im większa jest liczba kontaktów – przewodnościowych czy radiacyjnych. Rola stref kontaktów radiacyjnych rośnie przy tym silnie ze wzrostem gradientu temperatury w złożu, chodzi bowiem o różnice czwartych potęg temperatury powierzchni *widzących się przez luki* – oddalonych, a więc znacznie różniących się temperaturą!

Można postawić pytanie, czy bardziej uzasadnione jest rozważanie przewodzenia ciepła przez element przy stałej gęstości strumienia energii na jego powierzchni zewnętrznej, czy też przy stałej temperaturze tej powierzchni – naturalnie temperaturze różnej dla powierzchni po stronie dopływu ciepła, T_i , i po stronie odpływu ciepła, T_0 , czyli przy stałej różnicy temperatur

$$\theta = (T_i - T_0). \quad (1)$$

Ze względu na wspomniane powyżej oddziaływanie stref kontaktów można uznać, że dla mniejszych gęstości strumienia ciepła warunki brzegowe przewodzenia lepiej będą przybliżone założeniem stałej gęstości strumienia energii na powierzchni elementu, natomiast założenie stałej różnicy temperatur powierzchni elementu (spadku temperatury na elemencie) będzie lepszym przybliżeniem rzeczywistych warunków transportu energii w złożu dla wyższych gęstości strumienia ciepła. Obydwa te założenia muszą więc zostać wzięte pod uwagę przy analizie przewodzenia przez element.

Analizę taką przedstawiono poniżej odrębnie dla każdego z dwóch wymienionych założeń odnośnie do warunków brzegowych, ograniczając się do jednowymiarowego przewodzenia po odcinkach $l(\varphi)$ linii przepływu ciepła przez element. Rozważono linie przepływu energii w postaci odcinków prostych zgodnych z kierunkiem *zewnętrznego* gradientu temperatury (to jest określonego kierunkiem przepływu energii *netto* przez złożę), rys.3A, oraz w postaci łuków okręgów prostopadłych do powierzchni zewnętrznych elementu, rys.3B, (por. [14]).

Przyjęte linie przewodzenia – proste i łuki okręgów – mogą być do pewnego stopnia traktowane jako przypadki graniczne w tym sensie, że odpowiadają przewodzeniu po najkrótszej i najdłuższej drodze. Jeśli uzyskane dla obydwu wybranych linii przewodzenia wyniki okażą się nieznacznie różne, to można przypuszczać, że będą one z dobrym przybliżeniem słuszne także dla innych kształtów (i długości !) linii przewodzenia, w tym – w szczególności – *rzeczywistych* linii przewodzenia.

Niezależnie od warunków brzegowych można dla wybranych wymienionych wyżej linii przewodzenia – prostych i łuków – podać pewne charakterystyki geometryczne. I tak można określić na przykład *średnią geometryczną* długość odcinka przewodzenia. Lokalna długość odcinka przewodzenia po prostej wynosi

$$l(\varphi) = 2R \cos \varphi, \quad (2)$$

a dla przewodzenia po łukach okręgów jest

$$l(\varphi) = 2R\varphi \operatorname{ctg} \varphi. \quad (3)$$

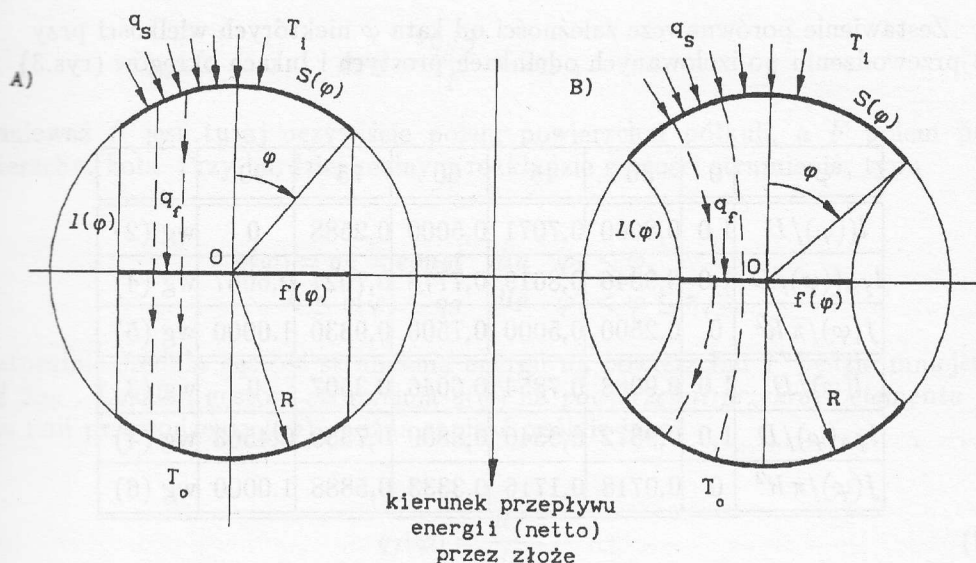
Definiując jako *średnią geometryczną* długość wielkość wyznaczaną z zależności,

$$l_{fA} = \frac{1}{f(\varphi)} \int_0^\varphi l(\varphi) df(\varphi), \quad (4)$$

przy

$$f(\varphi) = \pi R^2 \sin^2 \varphi, \quad (5)$$

dla przewodzenia po prostych, oraz



Rys. 3. Szkic do analizy przewodzenia przez element złoża (kulę): A) po odcinkach prostych, B) po łukach okręgów

$$f(\varphi) = \pi R^2 (1 - \cos \varphi)^2 / \sin^2 \varphi \quad (6)$$

dla przewodzenia po łukach, po wykonaniu całkowania według (4) otrzymuje się wyniki przedstawione w tabeli 2 poniżej. W szczególności z (4) otrzymuje się dla przewodzenia po prostych, dla $\varphi = \pi/2$,

$$\left(\frac{l_{FA}}{D} = \beta \right) = \frac{2(1 - \cos^3 \varphi)}{3 \sin^2 \varphi} = 0,6667,$$

i dla przewodzenia po łukach, także dla $\varphi = \pi/2$,

$$\frac{l_{FA}}{D} = 2 \frac{\sin^2 \varphi}{(1 - \cos \varphi)^2} \left[\frac{\varphi}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{4}{3} \ln \cos \frac{\varphi}{2} \right] = 0,4563,$$

które to wartości podane są także w tabeli 2.

Tabela 2

Zestawienie porównawcze zależności od kąta φ niektórych wielkości przy przewodzeniu po izolowanych odcinkach prostych i łukach okręgów (rys.3)

φ°	0	30	45	60	75	90	
$l((\varphi)/D$	1,0	0,8660	0,7071	0,5000	0,2588	0	wg (2)
$l_{fA}((\varphi)/D$	1,0	0,9346	0,8619	0,7778	0,7021	0,6667	wg (4)
$f(\varphi)/\pi R^2$	0	0,2500	0,5000	0,7500	0,9330	1.0000	wg (5)
$l(\varphi)/D$	1,0	0,9068	0,7854	0,6046	0,3507	0	wg (3)
$l_{fA}(\varphi)/D$	1,0	0,9872	0,9540	0,8800	0,7339	0,4563	wg (4)
$f(\varphi)/\pi R^2$	0	0,0718	0,1716	0,3333	0,5888	1.0000	wg (6)

Zauważmy, że rekomendowany w literaturze przedmiotu przedział wartości β , określającej zastępczą grubość jednoelementowej warstwy złoża ze względu na przewodzenie, wynosi $0.7 \leq (\beta = l_{fA}/D) \leq 1.0$ (np. [4]). Z porównania tych wartości z danymi zawartymi w tabeli 2 wynika, że odpowiadają one – w ramach modelu geometrycznego – wykorzystaniu dla przewodzenia niepełnego pola przekroju elementu, co wyraża się przyjęciem górnej granicy całkowania w (4) mniejszej od $\pi/2$. W niektórych pracach czynnym przekrojem elementu jest przekrój pełny, a w innych jego część $f < \pi R^2$, na przykład w [5] jest to $(f/\pi R^2) = 0,6924$.

Przewodzenie ciepła między powierzchniami zewnętrznymi półkul – górną i dolną na rys. 3 – bez wątplenia zachodzi przy wykorzystaniu całego przekroju kuli prostopadłego do kierunku przepływu energii, to jest przekroju o polu po powierzchni $F = \pi D^2/4$. Tę właśnie powierzchnię wybierzemy jako powierzchnię odniesienia w niniejszej pracy. W przekazywaniu ciepła uczestniczy cała powierzchnia zewnętrzna elementu. Za nierealny uznać należy przypadek izolacji części powierzchni zewnętrznej. Formułowanie warunków brzegowych dotyczących rozkładu na tej powierzchni gęstości strumienia ciepła czy temperatury musi ten fakt uwzględnić.

3.1. Przewodzenie przez element przy stałej gęstości strumienia ciepła $q_S = \text{const}$ na zewnętrznej powierzchni elementu

Średnią na powierzchni $f(\varphi)$ gęstość strumienia ciepła q , wobec $q_S = \text{const}$, zapiszemy jako

$$q_{fA} = \frac{q_S}{f(\varphi)} \int_0^\varphi dS(\varphi) \quad (7)$$

Dla $\varphi = \pi/2$ jest z (7), niezależnie od kształtu linii przewodzenia ciepła,

$$q_{FA} = \frac{q_S S}{F} = 2q_S, \quad (8)$$

ponieważ S jest tutaj oczywiście polem powierzchni półkuli, a F polem powierzchni koła. Przy bardziej realnym rozkładzie gęstości strumienia, typu

$$\begin{aligned} q(\varphi) &= q_S = \text{const} \quad \text{dla} \quad \varphi_1 \leq \varphi, \\ 0 \leq q(\varphi) &\leq q_S \quad \text{dla} \quad \varphi_1 < \varphi \leq \pi/2, \end{aligned}$$

naturalnie średnia gęstość strumienia energii na powierzchni F będzie mniejsza od $2q_S$. Lokalną gęstość strumienia $q(\varphi)$ na powierzchni przekroju elementu f , dla linii przewodzenia $l(\varphi)$, można zapisać ogólnie jako

$$q_f(\varphi) = \frac{d\dot{Q}}{df}. \quad (9)$$

Przy $q_S = \text{const}$ na powierzchni zewnętrznej elementu $S(\varphi)$,

$$S(\varphi) = 2\pi R^2(1 - \cos \varphi), \quad (10)$$

wobec

$$d\dot{Q} = q_S dS, \quad (11)$$

na powierzchni przekroju f jest

$$q_f(\varphi) = \frac{q_S dS}{dF} = \frac{q_S (dS/d\varphi)}{(df/d\varphi)}. \quad (12)$$

A) Przewodzenie po izolowanych od siebie odcinkach prostych

Z (12) – wobec (5) – jest

$$q_f(\varphi) = q_S / \cos \varphi. \quad (13)$$

Lokalny spadek temperatury $\theta_f(\varphi)$, na odcinku prostej $l(\varphi)$ według (2), przy stałym współczynniku przewodzenia ciepła k wynosi

$$\theta_f(\varphi) = \frac{q_S}{k_S} \frac{l(\varphi)}{\cos \varphi} = \frac{q_S D}{k_S} = \theta_0 = \text{const}. \quad (14)$$

Jest więc także

$$\theta_{fA}(\varphi) = \frac{q_S D}{k_S} = \theta_0 = \text{const} , \quad (15)$$

oraz

$$\theta_{FA}(\pi/2) = \theta_0 . \quad (16)$$

Ostatni wynik jest w oczywisty sposób niezgodny z fizyką zjawisk w tym sensie, że przy przewodzeniu ciepła z całą pewnością na powierzchni elementu nie występują skoki temperatury – to znaczy powinno być $\theta_{FA}(\pi/2) = 0$.

Jak widać, przypadek $q_S = \text{const}$ jest równoważny stałości spadku temperatury na elemencie *na przekroju f* według (14). Średni *na przekroju f* spadek temperatury na elemencie jest więc w rozważanym przypadku niezależny od kąta φ , a więc od wielkości czynnego przekroju $f(\varphi)$. Zauważmy, że lokalną gęstość strumienia energii na f można wyrazić w postaci

$$q_f(\varphi) = k_S \theta_f(\varphi) / l(\varphi)$$

Przyjmując stałość k_S otrzymuje się stąd dla $\theta_F(\varphi) = \theta_0 = \text{const}$ na *powierzchni przekroju elementu f*, wobec (2),

$$q_f(\varphi) = (k_S \theta_0 / D) / \cos \varphi = q_0 / \cos \varphi . \quad (17)$$

Porównanie (13) i (17) prowadzi natychmiast do wniosku, że dla rozważanego jednowymiarowego przewodzenia przez kulę przypadki

$$q_S = \text{const}_1, \quad \theta_f = \text{const}_2$$

są identyczne, jeśli tylko zachodzi związek

$$(\theta_f = \theta_0) = q_S D / k_S . \quad (18)$$

Ostatni związek zawiera odpowiedź na nasuwające się pytanie, jak powinna się zmieniać temperatura – a właściwie różnica temperatur – na powierzchni S , aby efekt tego rozkładu był równoważny warunkowi $q = \text{const}$. Wiążąc z powierzchnią S różnicę temperatur θ , mamy dla odcinka $l(\varphi)$, wobec (2),

$$q_S = k_S \theta_S / D \cos \varphi . \quad (19)$$

Porównanie (18) i (19), przy uwzględnieniu naturalnie warunku $q_S = \text{const}$, prowadzi natychmiast do związku

$$\theta_S = \theta_0 \cos \varphi . \quad (20)$$

B) Przewodzenie po izolowanych od siebie łukach okręgów

Dla tego kształtu linii przewodzenia naturalnie także obowiązuje (7A), inne zależności przytoczone powyżej dla odcinka prostej ulegają w tym przypadku modyfikacjom wynikającym z konieczności zastąpienia (2) przez (3). W szczególności, jako odpowiednik (20), występuje zależność,

$$\theta_S = \theta_0 \varphi \operatorname{ctg} \varphi. \quad (21)$$

Podsumowując analizę przypadku przewodzenia przy warunku $q_S = \text{const}$ można zauważyć od razu, że jest to przypadek mniej efektywnego transportu energii niż przypadek $\theta_S = \text{const}$, rozważony poniżej. Wynika to z faktu, że dla $\varphi > 0$ z (20) i (21) jest zawsze $\theta_S(\varphi) < \theta_0$. Przypadek $q_S = \text{const}$ może być traktowany, jak to pokazano powyżej, jako szczególny rozkład różnic temperatur na powierzchni S , określony zależnością (20) dla przewodzenia po prostych oraz zależnością (21) dla przewodzenia po łukach okręgów. Ten szczególny rozkład spełnia przy tym warunek fizycznej poprawności $\theta_S(\pi/2) = 0$.

3.2. Przewodzenie przez element przy stałej różnicy temperatury zewnętrznych powierzchni elementu (stałym spadku temperatury na elemencie)
 $\theta_S = \text{const}$

Wypada na wstępie zauważyć, że w celu zapewnienia fizycznej poprawności wspomnianej powyżej trzeba ograniczyć stałość θ do części powierzchni S , na przykład ograniczonej kątem $\varphi = \varphi_1$, oraz przyjąć taki rozkład θ na pozostałej części powierzchni S , aby było $\theta(\pi/2) = 0$. W związku z tym do dalszych rozważań założono możliwie najprostszy rozkład $\theta(\varphi)$, naszkicowany na rys.4.

$$\theta_S = \theta_{S0} \quad \text{dla} \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_1,$$

$$\theta_S = \theta_{S0}(\pi/2 - \varphi)/(\pi/2 - \varphi_1) \quad \text{dla} \quad \varphi_1 < \varphi \leq \pi/2. \quad (22)$$

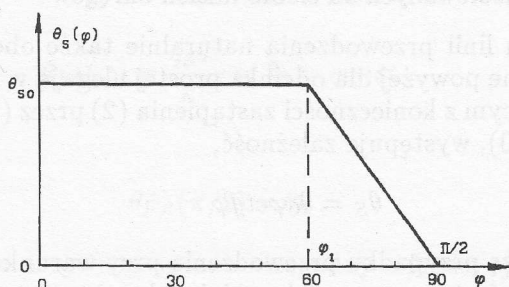
Analogicznie do (7) mamy (teraz jednak $q_S = k_S \theta(\varphi)/l(\varphi) \neq \text{const}$)

$$q_{fA} = \frac{1}{f(\varphi)} \int_0^\varphi k_S \theta_S dS(\varphi)/l(\varphi). \quad (23)$$

Przy $\theta_S = \theta_{S0}$ dla $\varphi \rightarrow \pi/2$ całka w (23) dąży do nieskończoności zarówno dla $l(\varphi)$ według (2) jak i według (3), jest natomiast ograniczona jeśli w (23) wykorzystany zostanie rozkład θ_S określony wyrażeniami (22), rys.4.

A) Przewodzenie po izolowanych od siebie odcinkach prostych

Podstawiając (2) i (22) w (23) mamy, dla $\varphi = \pi/2$ jako górnej granicy całkowania



Rys. 4. Szkic rozkładu różnicy temperatury $\theta_S(\varphi)$ na zewnętrznej powierzchni S elementu do analizy przewodzenia ciepła przez element.

$$\frac{q_{FA}}{q_0} = 2 \left[\int_0^{\varphi_1} tg\varphi d\varphi + \frac{1}{\pi - 2\varphi_1} \int_{\varphi_1}^{\pi} (\pi - 2\varphi) tg\varphi d\varphi \right], \quad (24)$$

gdzie

$$q_0 = k_S \theta_{S0} / D. \quad (25)$$

B) Przewodzenie po izolowanych od siebie łukach okręgów

Podstawiając (3) i (22) w (23) mamy, dla $\varphi = \pi/2$ jako górnej granicy całkowania

$$\frac{q_{FA}}{q_0} = 2 \left[\int_0^{\varphi_1} \frac{(1 - \cos \varphi) d\varphi}{\varphi \cos \varphi (1 + \cos \varphi)} + \frac{1}{\pi - 2\varphi_1} \int_{\varphi_1}^{\pi} \frac{(\pi - 2\varphi)(1 - \cos \varphi) d\varphi}{\varphi \cos \varphi (1 + \cos \varphi)} \right], \quad (26)$$

gdzie q_0 jest również określone wyrażeniem (25).

Zależność wartości stosunku q_{FA}/q_0 od kąta φ według (24) i (26) przedstawiono na rys. 5 poniżej. Zauważmy, że stosunek ten jest odwrotnością współczynnika β , określającego grubość zastępczej płyty ze względu na przewodzenie przez element, to znaczy jest

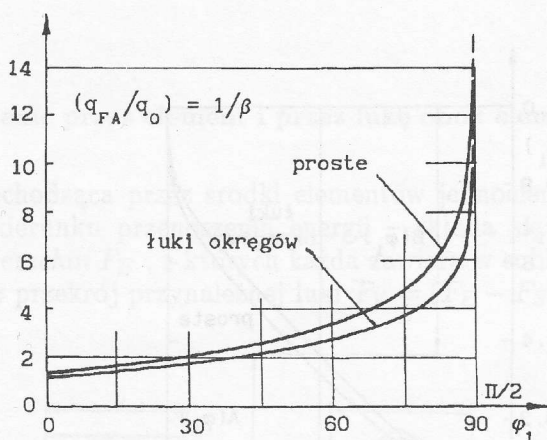
$$\frac{l_A}{D} = \beta = \frac{q_0}{q_{FA}}. \quad (27)$$

Dla lepszej interpretacji pokazanych na rys. 5 wyników przypomnieć trzeba zależność (10) - por. rys. 3 - liczbowo zilustrowaną tabelą 3 poniżej.

Tabela 3

Stosunek części pola powierzchni kuli zamykającej
wycinek kuli o kącie środkowym 2φ do pola powierzchni półkuli

φ_1°	30	45	60	75	90	
$S(\varphi_1)/S(\pi/2)$	0,1340	0,2929	0,5000	0,7412	1,0000	wg (10)



rys. 5. Zależność wartości stosunku $q_{FA}/q_0 = 1/\beta$, dla odcinków prostych (według (24)) i dla łuków okręgów (według (26)), od rozkładu różnicy temperatury $\theta_S(\varphi)$ określonego kątem φ_1 według rys.4.

Wynika z rys.5 i tabeli 3, jeśli na tylko nieco ponad 13 % powierzchni zewnętrznej elementu przy przewodzeniu po prostych, albo na nieco poniżej 30 % tej powierzchni przy przewodzeniu po łukach okręgów, zachodzi ono przy stałej różnicy temperatur, to już grubość zastępczej płyty ze względu na przewodzenie przez element l_A jest równa co najwyżej połowie średnicy kuli D . Innymi słowy, zachodzą relacje .

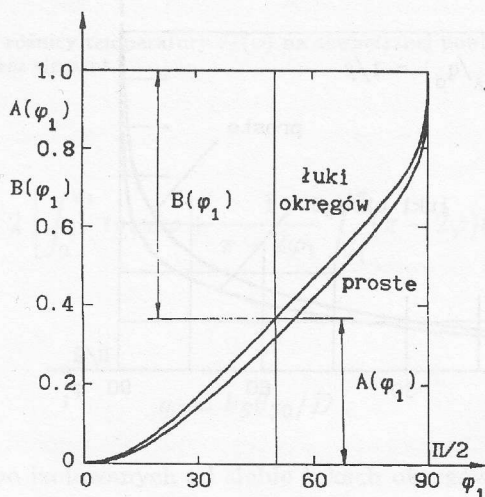
- dla przewodzenia po prostych

$$\left(\frac{l_A}{D} = \beta\right) \leq 0.5 \quad \text{dla} \quad \varphi_1 \geq \pi/6, \quad (28)$$

- dla przewodzenia po łukach okręgów

$$\left(\frac{l_A}{D} = \beta\right) \leq 0.5 \quad \text{dla} \quad \varphi_1 \geq \pi/4. \quad (29)$$

Pierwsze składniki prawych stron (24) i (26) odpowiadają udziałowi w przewodzeniu tych części powierzchni, na których występuje stała różnica temperatury wynosząca θ_{S0} , to jest na $S(\varphi_1)$, drugie składniki określają udział w przewodzeniu pozostałej powierzchni, to jest $(2\pi D^2 - S(\varphi_1))$, na której jest $\theta_S < \theta_{S0}$. Udziały te pokazano na rys. 6. Wynika z niego, że nawet dla dużych wartości kąta φ_1 , np. $\varphi_1 > 60^\circ$, udział powierzchni o malejącej różnicy temperatury w przewodzeniu (to jest $B(\varphi_1)$) jest tak duży, iż nie może zostać zaniedbany dla obydwu rozważanych kształtów linii przewodzenia.



Rys. 6. Udziały części powierzchni elementu w przewodzeniu ciepła przez element : $A(\varphi_1)$ – udział powierzchni $S(\varphi)$, na której jest θ_{S0} (według (22)), $B(\varphi_1)$ – udział powierzchni $[S(\pi/2) - S(\varphi_1)]$, na której jest θ_S (według (22)).

3.3. Wnioski z analizy przewodzenia przez element

Wyniki przeprowadzonej w tym rozdziale analizy przewodzenia przez elementy, chociaż silnie uproszczonej, pozwalają wyciągnąć dwa bardzo istotne wnioski.

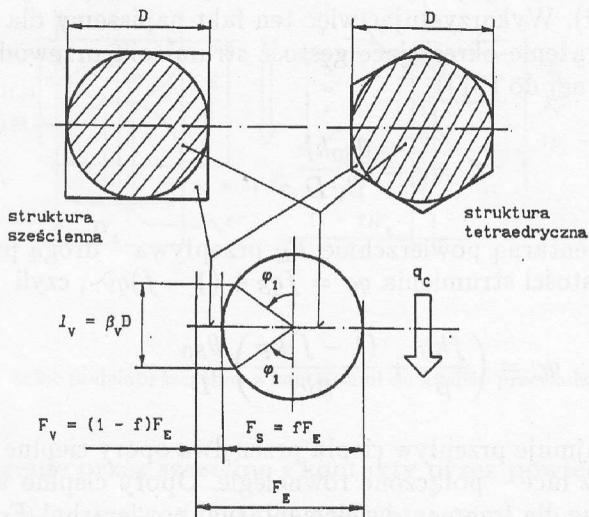
Po pierwsze, wobec bardzo nieznaczącej różnicy między wynikami analizy dla dwóch mocno różniących się kształtów linii przewodzenia – które można uznać za kształty graniczne w tym sensie, że są to najdłuższa i najkrótsza z dróg przewodzenia w elemencie – można przyjąć, że wyniki te zapewne niewiele zmieniłyby się dla bardziej skomplikowanych modeli przewodzenia przez element (kulę). Wobec tego odzwierciedlają one prawdopodobnie dość dobrze rzeczywistość w tym sensie, że wyniki dla rzeczywistych linii przewodzenia znalazłyby się najprawdopodobniej między wynikami uzyskanymi dla linii prostych i dla łuków okręgów,

zryli wewnątrz wąskiego przedziału. Można więc przyjąć prostszy z dwóch rozważanych modeli przewodzenia – i tak będzie on dość bliski prawdy.

Po drugie, w świetle uzyskanych rezultatów należy uznać zalecane w literaturze wartości współczynnika β , to jest z przedziału $0.7 \leq \beta \leq 1$, za zdecydowanie zbyt duże i nieprawidłowo uzasadnione teoretycznie, to jest w sposób nadmiernie uproszczony. W konsekwencji wypada podać w wątpliwość poprawność wielu modeli transportu energii w złożach, skonstruowanych przy użyciu koncepcji zastępczej płyty o grubości $l_A = \beta D$. Odnosi się to zwłaszcza do tych modeli, w których przyjmuje się – w sztuczny sposób – przewodzenie przez niepełny przekrój elementu.

3.4. Przewodzenie przez element i przez lukę obok elementu

Płaszczyzna przechodząca przez środki elementów jednoelementowej warstwy – prostopadła do kierunku przenoszenia energii – składa się z jednakowych elementarnych powierzchni F_E , z których każda zawiera w sobie przekrój elementu $F_S = \pi D^2/4$ oraz przekrój przynależnej luki $F_V = (F_E - F_S)$, rys.7.



Rys. 7. Szkic do analizy przewodzenia przez element i lukę.

Oznaczmy udziały przekrojów w elementarnej powierzchni jako

$$f = \frac{F_S}{F_E}, \quad (1 - f) = \frac{F_V}{F_E}. \quad (30)$$

Na części f elementarnej powierzchni F_E następuje – prostopadle do tej powierzchni – przewodzenie przez element opisane zależnością

$$q_S \left(= q_{FA} = \frac{q_0}{\beta} \right) = \frac{\theta_{S0} k_S}{\beta D} . \quad (31)$$

Występujący w tej zależności *thermo-geometryczny* współczynnik β , wyznaczony powyżej (rys.5) w zależności od wartości kąta φ_1 jako parametru charakteryzującego rozkład temperatury (rys.4) na powierzchni elementu złoża (ziarna), określa zastępczą grubość płyty l_A (por. (27)) ze względu na przewodzenie przez element.

W luce obok elementu, to jest na części $(1 - f)$ elementarnej powierzchni F_E zachodzi przewodzenie ciepła przez "pręt gazowy" o przekroju $(1 - f)F_E$.

Na odcinku tego pręta, o długości

$$l_V = \beta_V D , \quad (32)$$

gdzie (rys.7)

$$\beta_V = \cos \varphi_1 , \quad (33)$$

zgodnie z przyjętym (według rys.4) rozkładem temperatury panuje stały gradient temperatury (θ_{S0}/D) . Wykorzystując więc ten fakt napiszemy dla części $(1 - f)$ powierzchni F_E wyrażenie określające gęstość strumienia przewodzonego ciepła w postaci (analogicznej do (31))

$$q_V = \frac{\theta_{S0} k_F}{\beta_V D} . \quad (34)$$

W sumie przez elementarną powierzchnię F_E przepływa – drogą przewodzenia – energia cieplna o gęstości strumienia $q_C = f q_S + (1 - f) q_V$, czyli

$$q_C = \left(\frac{f k_S}{\beta} + \frac{(1 - f) k_F}{\beta_V} \right) \frac{\theta_{S0}}{D} . \quad (35)$$

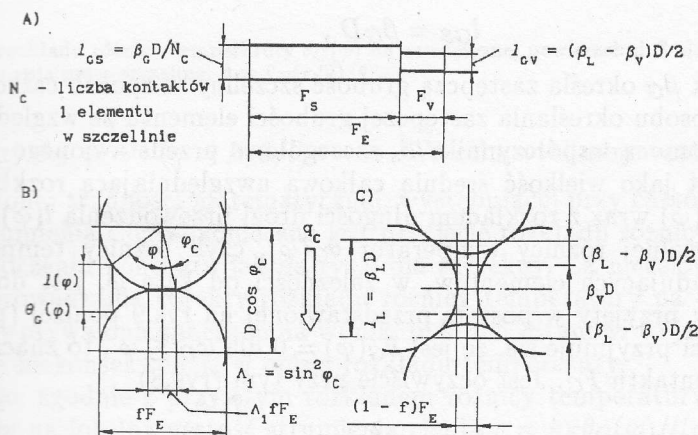
Ostatnia zależność ujmuje przepływ ciepła przez dwa opory cieplne – odpowiadające elementowi oraz luce – połączone równolegle. Opory cieplne występujące w (35) zostały określone dla fragmentów elementarnej powierzchni F_E (płaszczyzny przechodzącej przez środki elementów ziaren) złoża.

Jest oczywiste, że wartość q_C musi być identyczna dla elementarnej powierzchni F_E na dowolnie wybranej innej płaszczyźnie prostopadłej do kierunku przewodzenia. Szczególnie interesująca dla naszych rozważań jest płaszczyzna przechodząca przez kontakty między elementami, to jest rozdzielająca dwie jednoelementowe warstwy, przewodzenie między którymi – przez tę płaszczyznę – jest rozważone w następnym rozdziale.

4. Przewodzenie przez szczelinę z kontaktami między jednoelementowymi warstwami

Wykorzystamy wprowadzony wyżej podział elementarnej powierzchni F_E na części według (30). Zachodzi jednak teraz potrzeba dalszego podziału części fF_E , mianowicie ta część powierzchni zawiera powierzchnię kontaktu, która zostanie wyodrębniona, oraz pozostałą część (wokół kontaktu), na której następuje przewodzenie przez gaz (płyn) wypełniający przestrzeń między elementami złoża. Szkic szczeliny pokazujący wprowadzony podział przedstawia rys.8.

W podrozdziale 4.1 poniżej rozważono więc przewodzenie przez szczelinę wypełnioną gazem i zawierającą kontakty między elementami (ziarnami), zachodzące na łącznej powierzchni wynoszącej fF_E . Przewodzenie przez szczelinę na pozostałej powierzchni, $(1 - f)F_E$, przeanalizowano w podrozdziale 4.2.



Rys. 8. Szkic podziału szczeliny z kontaktami do analizy przewodzenia ciepła.

4.1. Przewodzenie przez szczelinę i kontakty przez powierzchnię fF_E

W normalnych warunkach powierzchnia kontaktów elementów jest na tyle mała [5], [10], że choć wprowadza się do formuł opisujących przewodzenie efekt ich obecności, to jednak nie uwzględnia się zmniejszenia powierzchni przewodzenia przez płyn (gaz) w otoczeniu kontaktów. Postąpimy tutaj odmiennie, zapisując wszystkie udziały poszczególnych powierzchni i dopiero w końcowej formule na współczynnik przewodzenia ciepła dokonując pewnych uproszczeń.

Dla pojedynczego kontaktu o powierzchni F_C zapisanej w postaci

$$F_C = \Lambda_1 F_S = \Lambda_1 f F_E, \quad (36)$$

gęstość strumienia ciepła wyrażona zostanie, jak to się zwykle czyni w literaturze, za pomocą współczynnika przewodzenia ciepła k_S materiału elementów, efektywnej grubości szczeliny między kolejnymi jednoelementowymi warstwami *ze względu na przewodzenie przez płyn (gaz) w otoczeniu kontaktu* l_G oraz różnicy temperatur między izotermicznymi częściami powierzchni stykających się półkul $\theta_{G0} = (T_{o,j-1} - T_{i,j})$,

$$\left(\frac{\dot{Q}_C}{F_C} = q_{CC} \right) = \frac{k_S \theta_{G0}}{l_{GS}}. \quad (37)$$

Efektywną grubość szczeliny l_{GS} , czyli zastępcza grubość warstwy gazu ze względu na przewodzenie określimy wprowadzając *thermo-geometryczny* współczynnik β_G , ujmujący wpływy kształtu szczeliny oraz rozkładu temperatur na jej powierzchniach. Zapiszemy więc wówczas

$$l_{GS} = \beta_G D, \quad (38)$$

a współczynnik β_G określa zastępczą grubość szczeliny w sposób całkowicie analogiczny do sposobu określania zastępczej grubości elementu ze względu na przewodzenie za pomocą współczynnika β , szczegółowo przedstawionego powyżej w rozdz.3, to jest jako wielkość średnią całkową uwzględniającą rozkład różnicy temperatur $\theta(\varphi)$ wraz z rozkładem długości drogi przewodzenia $l(\varphi)$.

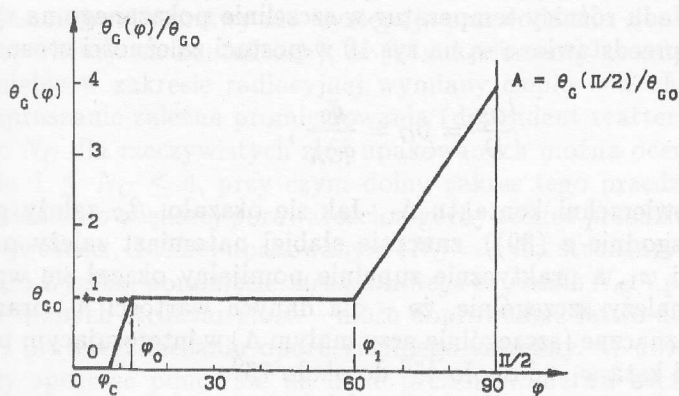
Rozkład lokalnej różnicy temperatur $\theta_G(\varphi)$, czyli różnicy temperatur powierzchni sąsiadujących elementów, w zależności od kąta φ , jest do celów niniejszej analizy przyjęty w postaci przedstawionej na rys.9 poniżej (por. rys.4). W szczególności przyjmuje się, że jest $\theta_G(\varphi) = 0$ dla $\varphi_C \leq \varphi$, to znaczy na całej powierzchni kontaktu F_C . Jest oczywiście przy tym (rys.8)

$$\Lambda_1 = \sin^2 \varphi_C, \quad (39)$$

co wynika wprost z geometrii. Przyjmuje się dalej, że na części powierzchni sąsiadujących elementów – w zakresie $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ – różnica temperatur $\theta_G = \theta_{G0}$ jest stała (tzn. powierzchnie są izotermiczne) i że wzrasta następnie ze wzrostem kąta φ w przedziale $\varphi_1 \leq \varphi \leq \pi/2$, jak to pokazano szkicowo na rys.9.

Wypada w tym miejscu wskazać, że występuje pewna niezgodność rozkładów różnic temperatury dla elementu (rys.4) i dla szczeliny między warstwami (rys. 9). Na rys. 4 powinna bowiem występować – w zakresie kąta $\varphi \leq \varphi_0$ – wartość różnicy temperatury większa od θ_{S0} tak, aby po dodaniu obydwu różnic z rys.4 i z rys.9 otrzymać stałą wartość spadku temperatury na jednoelementowej warstwie, równą $(\theta_{S0} + \theta_{G0}) = \text{const.}$ na całej powierzchni elementarnej F_E .

Uwzględnienie wzrostu spadku temperatury na elemencie, spowodowanego od działaniem kontaktu, nie prowadzi do istotnych zmian wartości współczynnika β , ma natomiast zasadnicze znaczenie dla określenia wartości współczynnika β_G . Wynika to stąd, że dla $\varphi = \varphi_C$ jest $l(\varphi_C) = 0$, co prowadzi do nieskończonej wartości lokalnej gęstości strumienia ciepła przy skończonej różnicy



Rys. 9. Szkic rozkładu różnicy temperatury $\theta_G(\varphi)$ na zewnętrznej powierzchni S elementu do analizy przewodzenia ciepła przez szczelinę, $A = \theta_G(\pi/2)/\theta_{G0}$.

temperatury $\theta_G(\varphi_C) : (q = k_S \theta / l) \rightarrow \infty$. W celu wyeliminowania tej fizycznie niezasadnionej trudności matematycznej, występującej przy całkowaniu lokalnej gęstości strumienia ciepła, konieczne jest przyjęcie rozkładu różnicy temperatury $\theta_G(\varphi)$ w otoczeniu kontaktu jak na rys.9 dla szczeliny. Za niecelowe uznano natomiast wprowadzanie korekty rozkładu różnicy temperatury na elemencie, ponieważ nie wpływa ona znacząco na wyniki obliczeń. Stanowi to jedynie pewną – świadomą – niekonsekwencję w opisie rozkładu temperatury.

Tak więc, zgodnie z przyjętym rozkładem różnicy temperatury według rys.9 wyrażeniu na lokalną gęstość strumienia ciepła $q = k_F \theta_G(\varphi) / l(\varphi)$ w szczelinie jest:

$$\begin{aligned} \varphi \leq \varphi_C \quad \theta_G(\varphi) &= 0 \\ \varphi_C \leq \varphi \leq \varphi_0 \quad \theta_G(\varphi) &= \theta_{G0}[(\varphi - \varphi_C)/(\varphi_0 - \varphi_C)] \\ \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \quad \theta_G(\varphi) &= \theta_{G0} \\ \varphi_1 \leq \varphi \leq \pi/2 \quad \theta_G(\varphi) &= \theta_{G0}[1 + (A - 1)(\varphi - \varphi_1)/(\pi/2 - \varphi_1)] \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \varphi \leq \varphi_C \quad l(\varphi) &= 0, \\ \varphi_C \leq \varphi \leq \pi/2 \quad l(\varphi) &= D(\cos \varphi_C - \cos \varphi). \end{aligned} \quad (41)$$

Wiązki te określają naturalnie wielkości występujące na części $f F_E$ elementarnej powierzchni F_E . Jak z nich wynika, wartość współczynnika β_G zależy w prezentowanym ujęciu od parametrów rozkładu φ_C (czyli Λ_1 – wobec (39)), φ_0 , φ_1 oraz $A = \theta_G(\pi/2)/\theta_{G0}$.

Celem zbadania wpływu tych parametrów na β_G wykonano odpowiednie obliczenia dla rozkładu różnicy temperatur w szczelinie pokazanego na rys.9. Przykładowe wyniki przedstawione są na rys.10 w postaci zależności stosunku

$$\frac{l_{GS}}{D} = \beta_G = \frac{\bar{q}_0}{q_{GA}}, \quad (42)$$

od względnej powierzchni kontaktu Λ_1 . Jak się okazało, β_G zależy głównie od Λ_1 (czyli φ_C , zgodnie z (39)), znacznie słabiej natomiast zależy od wartości parametrów φ_0 i φ_1 , a praktycznie zupełnie pomijalny okazał się wpływ A na β_G . Podkreślić należy szczególnie, że – dla danych wartości Λ_1 oraz φ_0/φ_C – zmiany β_G są nieznaczne (szczególnie przy małym Λ) w interesującym praktycznie zakresie wartości kąta φ_1 od około 45° do około 75° .

W (42), l_{GS} jest średnią długością odcinka ze względu na przewodzenie w szczelinie, a więc przez płyn o współczynniku przewodzenia k_F , wobec tego w (42) jest (por. (25)).

$$\bar{q}_0 = k_F \theta_{G0} / D. \quad (43)$$

Prezentowane wyniki dotyczą sytuacji modelowej i odnoszą się ściśle tylko do struktury sześciennego złoza, to znaczy odpowiadają występowaniu *jednego kontaktu* między elementami sąsiadujących jednoelementowych warstw. Dla innych struktur złoza – modelowych czy przypadkowych – trzeba uwzględnić fakt obecności w szczelinie pewnej liczby kontaktów, którą oznaczymy jako N_C , niekoniecznie równej jedności (por. np. [17]). Liczba kontaktów w szczelinie, N_C , będzie całkowita dla struktur modelowych (na przykład $N_C = 3$ dla struktury tetraedrycznej) i na ogół niecałkowita dla struktur rzeczywistych, przypadkowych. Dla tych ostatnich podawane są w literaturze (np. [15], [16]) formuły określające ogólną liczbę kontaktów N elementu złoza z otaczającymi elementami w zależności od porowatości złoza e_V . Jest oczywiste, że od tej liczby kontaktów N trzeba odjąć liczbę kontaktów neutralnych N_0 , to znaczy liczbę kontaktów z elementami należącymi do tej samej jednoelementowej warstwy, ponieważ między tymi elementami – o tej samej temperaturze – nie następuje przewodzenie ciepła. Liczbę kontaktów aktywnych przypadających na jedną stronę jednoelementowej warstwy można zatem zapisać jako

$$N_C = (N - N_0) / 2. \quad (44)$$

Powyższe uwagi uwzględnimy przy określeniu zastępczej grubości szczeliny przyjmując, że jest ona – w pierwszym przybliżeniu – odwrotnie proporcjonalna do liczby aktywnych kontaktów na stronę jednoelementowej warstwy, i wobec tego – zamiast (38) – musi być wprowadzona ogólniejsza formuła (rys.8A)

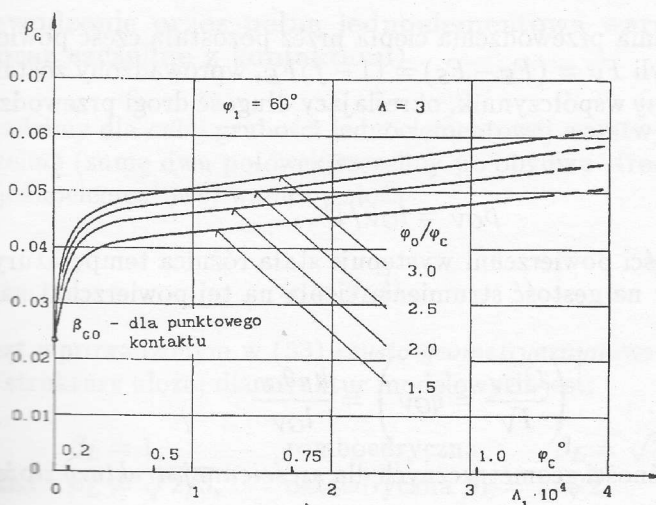
$$l_{GS} = \beta_G D / N_C. \quad (45)$$

Warto być może zauważyć, że choć między sąsiadującymi elementami z tej samej jednoelementowej warstwy nie występuje przewodzenie ciepła (wobec braku spadku temperatury na kontaktach), to jednak elementy te oddziałują wzajemnie na siebie w zakresie radiacyjnej wymiany ciepła – w złożach występuje bowiem rozpraszanie zależne promieniowania (dependent scattering), [6].

Wartość N_C dla rzeczywistych złożów upakowanych można ocenić jako zawartą w przedziale $1 \leq N_C \leq 4$, przy czym dolny zakres tego przedziału odpowiada naturalnie złożom o większej porowatości, a górny zakres przedziału dotyczy złożów o małej porowatości, ciśnień upakowanym ($N_C = 4$ dla struktury oktaedrycznej).

Jak z tego wynika, pominięcie *strukturalnego czynnika* N_C – poprzez przyjęcie $N_C = 1$ dla różnych struktur złoża – może doprowadzić łatwo do bardzo dużych rozbieżności przy wyznaczaniu oporu cieplnego szczeliny. W świetle powyższych uwag należy spojrzeć ponownie na dane prezentowane na zaczerpniętym z [8] rys.1.

Liczbę aktywnych kontaktów N_C należy oczywiście mieć także na uwadze przy



rys. 10. Zależność wartości stosunku $(\bar{q}_0/q_{GA}) = \beta_G(\Lambda_1)$, dla przewodzenia po odcinkach prostych, od pola powierzchni pojedynczego kontaktu Λ_1 , według rys.9.

Wyznaczenie pola powierzchni pojedynczego kontaktu Λ_1 , to znaczy jest

$$\Lambda = N_C \Lambda_1, \quad (46)$$

gdzie Λ jest sumaryczną powierzchnią aktywnych kontaktów na stronę jednoelementowej warstwy.

W związku z tym wypada podkreślić z naciskiem jeszcze raz, że wyniki obliczeń prezentowane na rys.10 dotyczą przypadku *jednego* aktywnego kontaktu na stronę jednoelementowej warstwy. Rys.10 przedstawia zatem zależność $\beta_G = \beta_G(\Lambda_1)$ przy warunku $N_C = 1$, czyli $\beta_G = \beta_G(\Lambda)$.

Ostatecznie zapiszemy gęstość strumienia ciepła na powierzchni fF_E jako

$$q_{GS} = (N_C \Lambda_1 k_S + (1 - N_C \Lambda_1) k_F) \frac{N_C \theta_{G0}}{\beta_G D}, \quad (47)$$

albo w równoważnej formie (por. (46))

$$q_{GS} = (\Lambda k_S + (1 - \Lambda) k_F) \frac{N_C \theta_{G0}}{\beta_G D}, \quad (48)$$

maskującej jednak częściowo wpływ liczby aktywnych kontaktów na przewodzenie przez nie ciepła.

4.2. Przewodzenie przez szczelinę i kontakty przez powierzchnię $(1 - f)F_E$

W celu uwzględnienia przewodzenia ciepła przez pozostałą część powierzchni elementarnej F_E , czyli $F_V = (F_E - F_S) = (1 - f)F_E$, wprowadzony zostanie kolejny *termo-geometryczny* współczynnik, określający długość drogi przewodzenia na tej części powierzchni

$$\beta_{GV} = l_{GV} / D. \quad (49)$$

Na rozważanej części powierzchni występuje stała różnica temperatury θ_{G0} , wobec tego zależność na gęstość strumienia ciepła na tej powierzchni napiszemy w postaci

$$\left(\frac{\dot{Q}_{GV}}{F_V} = q_{GV} \right) = \frac{k_F \theta_{G0}}{l_{GV}}. \quad (50)$$

Na podstawie zależności geometrycznych dla *sześciennej struktury złoza* jest (rys.8B)

$$l_{GV} = (\cos \varphi_C - \cos \varphi_1) D, \quad (51)$$

czyli, wobec (32) oraz przy $\cos \varphi_C \approx 1$ (dla niewielkich wartości φ_C),

$$l_{GV} = (1 - \beta_V) D. \quad (52)$$

Dla rzeczywistych struktur złoza, przy wzajemnym usytuowaniu elementów warstw sąsiadujących nad lukami w warstwie sąsiedniej (rys.8C), zamiast (52) musimy posłużyć się raczej zależnością zmodyfikowaną do postaci

$$l_{GV} = (\beta_L - \beta_V) D / 2. \quad (53)$$

Można teraz zapisać (50) w końcowej formie,

$$q_{GV} = \frac{k_F \theta_{G0}}{(\beta_L - \beta_V) D / 2}. \quad (54)$$

4.3. Przewodzenie przez szczelinę i kontakty przez całą powierzchnię

Dla całości elementarnej powierzchni F_E w szczelinie między jednoelementowymi warstwami złoża możemy teraz napisać wyrażenie określające gęstość strumienia przewodzonego przez szczelinę ciepła, analogiczne do wyrażenia (35) obowiązującego dla elementu z luką. Jest teraz mianowicie, znowu wobec $q_C = q_{GS} + (1 - f)q_{GV}$, po wykorzystaniu (47) i (54),

$$q_C = \left[N_C \frac{f}{\beta_G} (k_F(1 - N_C \Lambda_1) + k_S N_C \Lambda_1) + 2 \frac{1 - f}{\beta_L - \beta_V} k_F \right] \frac{\theta_{G0}}{D}, \quad (55)$$

albo, wobec (46),

$$q_C = \left[N_C \frac{f}{\beta_G} (k_F(1 - \Lambda) + k_S \Lambda) + 2 \frac{1 - f}{\beta_L - \beta_V} k_F \right] \frac{\theta_{G0}}{D}.$$

5. Przewodzenie przez pełną jednoelementową warstwę (element z luką oraz szczelinę z kontaktami)

Wprowadzimy dla całej grubości jednoelementowej warstwy, obejmującej element i szczelinę (sumę dwu połówek szczeliny po obydwu stronach elementu) . grubość jednoelementowej warstwy złoża

$$l_L = \beta_L D, \quad (56)$$

gdzie β_L jest wprowadzonym w (53) czysto geometrycznym współczynnikiem zależnym od struktury złoża; dla struktur modelowych jest:

sześcienna	$\beta_L = 1,$	romboedryczna	$\beta_L = \sqrt{3}/2,$
tetraedryczna	$\beta_L = \sqrt{2}/3,$	oktaedryczna	$\beta_L = 1/\sqrt{2},$

— sumaryczną różnicę spadek) temperatury na jednoelementowej warstwie

$$\theta_T = \theta_{S0} + \theta_{G0}, \quad (57)$$

— efektywny współczynnik przewodzenia ciepła k_C , wynikający z zależności

$$q_C = k_C \theta_T / l_L, \quad (58)$$

gdzie θ_T jest określone formułą (57), a l_L formułą (56).

Po podstawieniu w (57) wyznaczonych z (33), (51) i (54) wielkości θ_{S0} , θ_{G0} i θ_T , odpowiednio, i po przekształceniach otrzymuje się,

$$k_C = \frac{\left(\frac{N_C \beta_L}{\beta_G}\right) f \left[N_C \Lambda_1 (k_S - k_F) + k_F \left(1 + \left(\frac{1-f}{f} \right) \left(\frac{\beta_G}{N_C \beta_L} \right) \left(\frac{\beta_L}{\beta_L - \beta_V} \right) \right) \right]}{1 + \left(\frac{N_C \beta_L}{\beta_G} \right) \left(\frac{\beta \beta_V}{\beta_L} \right) \frac{N_C \Lambda_1 k_S - k_F + k_F \left(1 + \left(\frac{1-f}{f} \right) \left(\frac{\beta_G}{N_C \beta_L} \right) \left(\frac{\beta_L}{\beta_L - \beta_V} \right) \right)}{\beta_V k_S + \left(\frac{1-f}{f} \right) \beta k_F}} \quad (59)$$

Zależności tej można nadać formy często spotykane w literaturze, zawierające po lewej stronie stosunek (k_C/k_F) albo (k_C/k_S), dzieląc obustronnie (59) przez k_F albo k_S , odpowiednio. Zauważmy, że ułamkowy składnik mianownika (59) określa ważną relację – stosunek spadku temperatury na elementach wraz z lukami do spadku temperatury na szczelinie z kontaktami,

$$\frac{\theta_{G0}}{\theta_{S0}} = \left(\frac{N_C \beta_L}{\beta_G} \right) \left(\frac{\beta \beta_V}{\beta_L} \right) \frac{N_C \Lambda_1 (k_S - k_F) + k_F \left(1 + \left(\frac{1-f}{f} \right) \left(\frac{\beta_G}{N_C \beta_L} \right) \left(\frac{\beta_L}{\beta_L - \beta_V} \right) \right)}{\beta_V k_S + \left(\frac{1-f}{f} \right) \beta k_F} \quad (60)$$

Dla złoża ewakuowanego – z próżnią między elementami – mamy z (59) i (60) odpowiednio

$$k_C = \frac{\left(\frac{N_C \beta_L}{\beta_G} \right) f N_C \Lambda_1}{1 + \left(\frac{N_C \beta_L}{\beta_G} \right) \frac{\beta}{\beta_L} N_C \Lambda_1} k_S, \quad (61)$$

lub

$$k_C = \frac{N_C \beta_L f \Lambda_1}{\frac{\beta_G}{N_C} + N_C \beta \Lambda_1} k_S,$$

oraz

$$\frac{\theta_{G0}}{\theta_{S0}} = \left(\frac{N_C^2 \beta \Lambda_1}{\beta_G} = \frac{\lambda \beta}{(\beta_G / N_C)} \right). \quad (62)$$

Jest oczywiste, że poprzez zależność k_F i k_S od temperatury także efektywny współczynnik przewodzenia ciepła k_C jest zależny od temperatury, i taka sama uwaga odnosi się do zależności k_F od ciśnienia gazu wypełniającego złożo, co dotyczy zwłaszcza przewodzenia ciepła w złożach częściowo lub całkowicie ewakuowanych (izolacje kriogeniczne).

Uwagi końcowe

Przedstawiony model przewodzenia ciepła w złożu i wynikające z niego zależności zawierają dwa zasadnicze elementy nowości w stosunku do modeli dotychczasowych. Po pierwsze, zamiast współczynników geometrycznych, określających zastępczą grubość płyty na przewodzenie dla elementu (ziarna) złoża oraz warstwy gazu (w szczeliny między jednoelementowymi warstwami elementów) według formuł o postaci ogólnej

$$(l_A = \beta D) = \frac{1}{F(\varphi)} \int_0^\varphi l(\varphi) dF(\varphi), \quad (63)$$

wprowadzono współczynniki *thermo-geometryczne*, których wartości wyznaczone są z warunków równości gęstości strumieni ciepła, to jest z formuł o postaci ogólnej

$$\left(q_A = k \frac{\theta}{\beta D} \right) = \frac{1}{F(\varphi)} \int_0^\varphi \left(q = k \frac{\theta(\varphi)}{l(\varphi)} \right) dF(\varphi). \quad (64)$$

Jak łatwo zauważyć porównując dwie ostatnie zależności powyżej, odpowiednie współczynniki thermo-geometryczne uwzględniają także wpływ rozkładu różnicy temperatur na przewodzenie, podczas gdy współczynniki geometryczne, powszechnie stosowane, uwzględniają jedynie wpływ rozkładu długości drogi przewodzenia $l(\varphi)$ w opisie przewodzenia ciepła.

Za górną granicę całki w ostatniej zależności przyjmowano przy tym konsekwentnie $\varphi = \pi/2$, co nie we wszystkich modelach proponowanych w literaturze jest przestrzegane.

Po drugie, wprowadzono liczbę *kontaktów aktywnych* N_C przy jednoczesnym uwzględnieniu zarówno w opisie przewodzenia przez warstwę gazu w szczeliny między jednoelementowymi warstwami, jako (β_G/N_C) według (45) zamiast tylko β_G według (38), jak i w opisie przewodzenia przez kontakty, zgodnie z (46). Ponieważ w literaturze przedmiotu panuje w tym względzie niejaki pomieszenie pojęć, wypada omówić to tutaj nieco szerzej niż w rozdz.4.1.

Generalnie rzecz biorąc podejmowane są próby związania współczynników, występujących w opisach przewodzenia ciepła, ze stosunkowo łatwo mierzalnym parametrem strukturalnym jakim jest porowatość złoża e_V . Z drugiej strony, na podstawie obszernego materiału eksperymentalnego popartego rozważaniami teoretycznymi opracowano zależności określające sumaryczną liczbę kontaktów w pojedynczego elementu w złożu z elementami otaczającymi jako funkcję porowatości złoża e_V , to jest $N = N(e_V)$. I tak na przykład według [15] i [16]

$$N = 22.47 - 39.39e_V, \quad 0.259 \leq e_V \leq 0.5, \quad (65)$$

według [19] jest

$$N = 18.63 - 26.88e_V. \quad (66)$$

Mimo, że fakt występowania pewnej liczby kontaktów neutralnych, to jest między elementami sąsiednimi w jednoelementowej warstwie – izotermicznej ! nie budzi wątpliwości, to jednak właśnie pełna liczba kontaktów N – zamiast N – jest wykorzystywana w zależnościach opisujących przewodzenie ciepła oraz przy interpretacji wyników pomiarów doświadczalnych, [5], [17]. Jest to, zdaniem autora, błąd logiczny nie do zaakceptowania, pomijając już fakt otrzymywania różnych wartości N z różnych zależności (co ilustruje tabela 4 poniżej), prowadzący w oczywisty sposób do rozbieżności określanych na tej podstawie wartości współczynników przewodzenia ciepła.

Tabela 5

Porównanie średnich liczb kontaktów elementu w złożu N w zależności od porowatości e_V złoża według (65) i według (66)

e_V	0,300	0,400	0,500	0,600	
N	10,65	6,71	2,77	< 0	wg (65)
	10,57	7,88	5,19	2,50	wg (66)

Związek między porowatością złoża i liczbą aktywnych kontaktów N_C wynika z analizy regularnych struktur upakowanego złoża. Jak wiadomo, najluźniejsze upakowanie występuje w złożu o strukturze sześcienniej, dla której porowatość wynosi $e_V = 0.4764$. Między elementami sąsiadujących jednoelementowych warstw występuje wtedy jeden tylko kontakt, tzn. jest wówczas $N_C = 1$. Najciśniejszemu upakowaniu, o porowatości $e_V = 0.2595$, odpowiada liczba aktywnych kontaktów $N_C = 3$ przy strukturze tetraedrycznej oraz $N_C = 4$ przy strukturze oktaedrycznej. Wprowadzając liniową zależność $N_C(e_V)$ między podanymi wyżej granicznymi wartościami porowatości otrzymuje się odpowiednio związki .

– dla $N_{C,max} = 3$ (struktura tetraedryczna)

$$\begin{aligned} e_V < 0.2595 \quad N_C &= 3, \\ 0.2595 \leq e_V \leq 0.4764 \quad N_C &= 5.393 - 9.22e_V, \\ 0.4764 < e_V \quad N_C &= 0, (N_C < 1), \end{aligned} \quad (67)$$

– dla $N_{C,max} = 4$ (struktura oktaedryczna)

$$\begin{aligned} e_V < 0.2595 \quad N_C &= 4, \\ 0.2595 \leq e_V \leq 0.4764 \quad N_C &= 7.589 - 13.83e_V, \\ 0.4764 < e_V \quad N_C &= 0, (N_C < 1). \end{aligned} \quad (68)$$

zadaniem autora należy posługiwać się formułą (67), choć w pewnych sytuacjach, np. przy sztucznie wymuszonej strukturze oktaedrycznej, oczywiście musi być stosowana formuła (68). Ostateczny wybór formuły może zostać dokonany po ich weryfikacji drogą konfrontacji z danymi doświadczalnymi dotyczącymi przewodzenia ciepła.

Należy podkreślić, że wartości N_C określone w sposób przedstawiony powyżej mogą posłużyć także – jeśli nie przede wszystkim – do analizy wyników doświadczeń dotyczących przewodzenia ciepła w złożach ewakuowanych, w których zasadniczą rolę odgrywa (na ogół, jeśli pomijalna jest radiacja) właśnie przewodzenie przez kontakty. Można spodziewać się w związku z tym – dzięki wykorzystaniu nowego modelu i opisu – uzyskania bardziej precyzyjnych wniosków dotyczących powierzchni kontaktów między elementami.

Zależności wyprowadzone w tej pracy według nowego modelu, składające się na jednowymiarowy opis przewodzenia ciepła w złożu, należy oczywiście zweryfikować poprzez konfrontację z danymi eksperymentalnymi. Konfrontacja ta jest przedmiotem drugiej części niniejszej pracy.

Prace zgłoszono 1991.08.19

Literatura

- [1] Chan C. K., Tien C. L. *Conductance of packed spheres in vacuum*. ASME J. Heat Transfer **95**, 302, 1973.
- [2] Cunningham G. R., Tien C. L. *Heat transfer in microsphere cryogenic insulation*. Advances in cryogenic engineering, Vol. **18**, Plenum Press, New York 1973.
- [3] Wawryk R. *Transport ciepła w wybranych rodzajach izolacji mikrosferycznej w zakresie temperatur 80–300 K*. Praca doktorska, Instytut Niskich Temperatur i Badań Strukturalnych PAN we Wrocławiu, 1984.
- [4] Vortmeyer D. *Radiation in packed solids*. Sixth Int. Heat Transfer Conf., Vol. **6**, 525, 1978.
- [5] Beveridge G. S. G., Haughey D. P. *Axial heat transfer in packed beds. Stagnant beds between 20 and 750°C*. Int. J. Heat Mass Transfer **14**, 1093, 1971.
- [6] Tien C. L., Drolen B. L. *Thermal radiation in particulate media with dependent and independent scattering*. in: Annual review of numerical fluid mechanics and heat transfer, New York, Hemisphere Pub. Corp., Vol. **1**, 1987.
- [7] Botterill J. S. M., Salway A. G., Teoman Y. *The effective thermal conductivity of high temperature particulate beds – I. Experimental determination*. Int. J. Heat Mass Transfer **32**, 585, 1989.
- [8] Botterill J. S. M., Salway A. G., Teoman Y. *The effective thermal conductivity of high temperature particulate beds – II. Model predictions and the implication of the experimental values*. Int. J. Heat Mass Transfer **32**, 595, 1989.

- [9] Duffy D. *The temperature distribution within a sphere placed in a directed uniform heat flux and allowed to radiatively cool*. ASME J. Heat Transfer **107**, 28, 1985.
- [10] Wakao N., Kato K. *Effective thermal conductivity of packed beds*. J. Chem. Eng. Japan **2**, 24, 1969.
- [11] Bartens K. *Das Wärmeleitfähigkeit eines Gemisches von Metallkugeln*. Forschung auf dem Gebiete des Ing.- Wesens **7**, 174, 1936.
- [12] Kling G. *Das Wärmeleitvermögen eines Kugelhauferwerks in ruhendem Gas*. Forschung auf dem Gebiete des Ing.- Wesens **9**, 28, 1938.
- [13] Wakao N., Vortimeyer D. *Pressure dependency of effective thermal conductivity of packed beds*. Chem. Eng. Sci. **26**, 1753, 1971.
- [14] Zapałowicz Z. *Przybliżona metoda wyznaczania czasu odparowania kropli z powierzchni płaskiej*. Archiwum Termodynamiki **5**, 149 Nr 2, 1984.
- [15] Haughey D. P., Beveridge G. S. G. *Local voidage variation in a randomly packed bed of equal-sized spheres*. Chem. Eng. Sci. **21**, 905, 1966.
- [16] Haughey D. P., Beveridge G. S. G. *Structural properties of packed beds - a review*. Can. J. Chem. Eng. **47**, 130, 1969.
- [17] Masamune S., Smith J. M. *Thermal conductivity of beds of spherical particles*. I&EC Fundamentals **2**, 136, 1963.
- [18] Yagi S., Kunii D. *Studies on effective thermal conductivities in packed beds*. A.I.Ch.E Journal **3**, No.3, 373-381, 1957.
- [19] Kutateladze S. S. *Teploperedatca i gidrodinamičeskoe soprotivlenie*. Spravočnoe posobie, Energoatomizdat, Moskva, 1990.

On the One-Dimensional Description of Heat Conduction in Beds:

I. The New Model and the Derivation of the Formulae

Summary

The new one-dimensional description of heat conduction in the opaque beds has been presented. The new description is based on the thermo - geometrical - structural coefficients determining the equivalent plate thicknesses for conduction through the particles and through the gaps between the single - element layers, instead of the commonly used purely geometrical coefficients. Due to this, for example, the dependence of the bed conductivity on the structure and on the area of contacts between particles has been introduced easily. The successful comparison of the predictions according to the new model and the available experimental data has been presented in the second part of this work.