

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

**PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPŁYWOWYCH**

**TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY**

94

GDAŃSK 1992

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machines

RADA REDAKCYJNA – EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
WŁODZIMIERZ PROSNIAK · ROBERT SZEWAŁSKI (PRZEWODNICZĄCY – CHAIRMAN)
JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY – EXECUTIVE EDITORS

EDWARD ŚLIWICKI – P. O. REDAKTOR – EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA – EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN

ul. Gen. Józefa Fischera 14, 80-952 Gdańsk, skr. poczt. 621, tel. 41-12-71 wew. 141

ISSN 0079-3205

WYDAWCA: Redakcja Wydawnictw Ciągłych IMP PAN

80-952-Gdańsk, skrytka poczt. 621, tel. 41-12-71

Skład komputerowy A. D. Kardaś

Drukarnia: Chromatografia w Rumii

JERZY ŚWIRYDCZUK

Gdańsk

Opis oddziaływania pojedynczego swobodnego wiru ze skończoną palisadą profilową z wykorzystaniem techniki odwzorowania konforemnego

W pracy omówiono metodę opisu niestacjonarnego opływu skończonej palisady profilowej przy użyciu techniki odwzorowań konforemnych, na przykładzie oddziaływania palisady z przepływającym przez nią wirum potencjalnym. Przedstawiono metodę modyfikacji potencjału przepływu na płaszczyźnie pomocniczej. Zaproponowano sposoby skrócenia czasu obliczeń poprzez zmianę dystrybucji osobliwości opisujących przepływ. Analizę zilustrowano wynikami obliczeń dla palisady składającej się z czterech profili.

Wykaz oznaczeń

- | | |
|---|--|
| a – promień okręgu, wyraz postępu geometrycznego, | U – prędkość strumienia niezaburzonego, |
| C – środek kola, punkt serii inwersji centralnych, | u – prędkość lokalna, |
| M – moc dipola, | w – potencjał zespolony: $w = \Phi + i\Psi$, |
| n – ilość okręgów, ilość profili, | z – zmienna zespolona: $z = x + iy$, |
| P – położenie wiru swobodnego, punkt serii inwersji rozpoczętych od położenia wiru, | α – kierunek napływu strumienia z nieskończoności, |
| q – iloraz postępu geometrycznego, | γ – kierunek osi głównej dipola, |
| S – suma postępu geometrycznego, | Γ – moc wiru (odpowiadająca jej cyrkulacja wynosi $2\pi\Gamma$), |
| | Φ – potencjał rzeczywisty, |
| | Ψ – funkcja prądu. |

Indeksy:

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------------|
| c – przepływ cyrkulacyjny, okrąg, | u – przepływ stacjonarny, |
| d – dipol, | w – wir, |
| f – płaszczyzna przepływu, | O – wir pierwotny. |
| s – wir śladowy, | |

1. Wstęp

Zdecydowanie najczęściej stosowanym podejściem do opływu pojedynczego profilu przy zastosowaniu odwzorowania konforemnego jest przeniesienie problemu na tak wybraną płaszczyznę pomocniczą, aby kontur profilu odwzorowany był na niej na okrąg. Jedną z przyczyn atrakcyjności wyboru takiej płaszczyzny pomocniczej jest fakt, iż problematyka opływu okręgu została stosunkowo dobrze przeanalizowana i rozwiązanie zagadnienia na płaszczyźnie pomocniczej nie przedstawia żadnych trudności. Uzyskane na tej drodze rozwiązanie stacjonarnego opływu profilu stanowi przypadek klasyczny, prezentowany nieomal w każdym podręczniku mechaniki płynów. Również próby opisu zachowania się profilu w warunkach niestacjonarnych, których przykładem, wywołującym bodaj największe zainteresowania w ostatnich latach, jest ruch koherentnej struktury wirowej w pobliżu profilu, niejednokrotnie za swój punkt wyjściowy przyjmują opływ okręgu, modyfikowany zgodnie z założonymi warunkami fizycznymi. Zasadniczym celem wyżej wspomnianych prac jest oszacowanie zakresu przewidywanych zmian obciążeń dynamicznych profilu w warunkach eksploatacyjnych wywoływanych przez analizowany typ zaburzenia. Istotną zaletą metody wykorzystującej odwzorowania konforemne jest możliwość, poprzez odpowiedni dobór płaszczyzny pomocniczej, uzyskania rozwiązania dokładnego, ciągłego w całym obszarze przepływu, wadą natomiast, raptowny wzrost stopnia komplikacji zagadnienia w przypadku analizy opływu grupy profili.

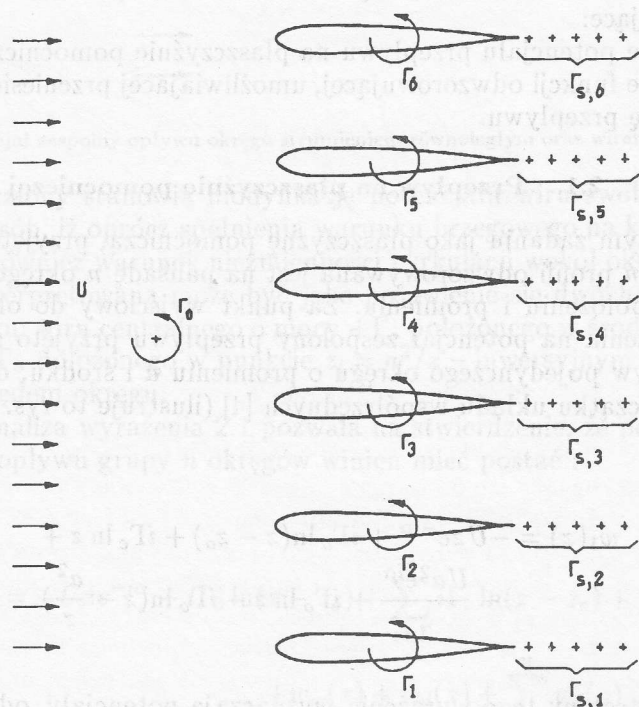
Powyższa niedogodność jest najprawdopodobniej zasadniczą przyczyną faktu, iż przytłaczająca większość analiz układów profili lotniczych, czy palisad profilowych realizowana jest w oparciu o inne metody. Przykładowymi pracami, ukazującymi w jaki sposób można ideę stosowaną do jednego profilu zaadaptować do grupy profili, są: praca Kawagutiego [1], analizująca zmiany rozkładu ciśnień na powierzchni dwóch okręgów poruszających się względem siebie oraz praca Halsey'a [2] nt. opływu grupy profili w warunkach stacjonarnych. W tej ostatniej pracy sformułowano pewne wskazówki dotyczące zarówno sposobu określenia funkcji, która odwzorowuje grupę profili na odpowiadającą im grupę okręgów, jak również metody modyfikacji potencjału opływu grupy okręgów. W ocenie Halsey'a algorytm, bazujący na odwzorowaniach konforemnych jest kilkakrotnie szybszy od algorytmu rozwiązującego analogiczne zagadnienia przy pomocy metody wykorzystującej rozkład osobliwości źródłowych (w oparciu o program opracowany przez J. L. Hessa). Powyższa ocena wydaje się stać w niejakiej sprzeczności z oczekiwaniem, jeżeli weźmie się pod uwagę fakt, iż wzrost ilości rozważanych profili powoduje potęgowy wzrost ilości osobliwości jakie muszą być użyte do opisu potencjału w płaszczyźnie pomocniczej. Oczekiwać jednak należy, iż wraz z upływem czasu i postępującym rozwojem komputeryzacji sam czynnik czasochłonności obliczeń będzie się stawał coraz mniej istotny, a znacznie większego znaczenia, jako miernika oceny metody będzie nabierać problem dokładności obliczeń i możliwości jej oszacowania.

W niniejszej pracy omówione zostaną praktyczne możliwości stosowania tech-

iki odwzorowania konforemnego do modelowania niestacjonarnego opływu skończonej palisady profilowej, w oparciu o wyniki obliczeń oddziaływania wybranej palisady z przepływającym przez nią wirum potencjalnym.

2. Opis teoretyczny

Rozważany jest potencjalny opływ skończonej palisady profilowej, składającej się z n jednakowych elementów, opływanej strumieniem płynu o prędkości U w nieskończoności i kierunku α napływu względem cięciw profili. Przykład takiej palisady dla $n = 6$ i $\alpha = 0$ przedstawiono na rys. 1. W stanie ustalonym każdemu profilowi przyporządkowana jest pewna wartość cyrkulacji, warunkująca położenie punktów splywu w ostrzach profili, co jest równoznaczne z niewystąpieniem punktów osobliwych w polu prędkości. Zmienne w czasie zaburzenie pola prędkości generowane jest przez wir potencjalny, który przepływa wraz ze strumieniem przez palisadę i wywołuje reakcję profili w postaci śladu wirowego, spływającego z ich krawędzi. Jednocześnie, cyrkulacja wokół profili ulega zmianie tak, aby w każdej chwili spełnione były dwa warunki: warunek splywu w ostrzu i warunek stałości cyrkulacji w przepływie.



Rys. 1. Model opływu skończonej palisady profili.

W interpretacji numerycznej ciągle ślady wirowe, spływające z krawędzi profili zastępowane są poprzez rosnące szeregi wirów punktowych, generowanych krok po kroku w określonym miejscu, w pobliżu punktów spływu. Wybór punktu generacji wirów śladowych za profilem stanowi niewralgiczny punkt omawianego modelu, jako że nie jest możliwe jednoznaczne jego wyznaczenie bez przyjęcia dodatkowych założeń fizycznych. Zarówno postać tych założeń, jak i droga argumentacji ich wyboru różnią się dość znacznie w publikowanych wersjach użytkowych omawianego modelu. Stosowane bywają m.in. stałe lokalizacje punktów generacji, bądź określane na podstawie lokalnej prędkości przepływu lub hipotetycznej prędkości wiru w miejscu generacji. Ponadto, stosowane bywa niekiedy podejście odmienne, polegające na określeniu w pierwszej kolejności intensywności wiru śladowego, na podstawie wyznaczonej w poprzednim kroku różnicy prędkości po obu stronach krawędzi spływowej. Położenie wiru, wyznaczane jest jako położenie zapewniające spełnienie uprzednio wymienionych warunków dotyczących punktu spływu i cyrkulacji.

Rozwiązanie przedstawionego powyżej zadania sprowadza się do wyznaczenia potencjału, zmiennego w czasie, opisującego analizowany przepływ. W dalszej kolejności potencjał ten stanowi podstawę dla określenia pól prędkości i ciśnień, jak też oszacowania fluktuacji obciążeń profili tworzących palisadę. Zastosowanie metody odwzorowań konforemnych pozwala zadanie to podzielić na dwa oddzielne etapy, obejmujące:

- wyznaczenie potencjału przepływu na płaszczyźnie pomocniczej,
- wyznaczenie funkcji odwzorowującej, umożliwiającej przeniesienie rozwiązania na płaszczyznę przepływu.

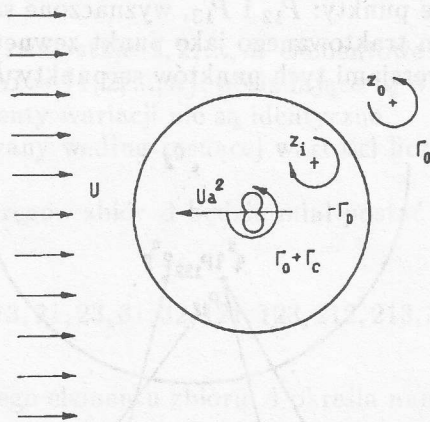
2.1. Przepływ na płaszczyźnie pomocniczej

W niniejszym zadaniu jako płaszczyznę pomocniczą, przyjęto obszar, w którym palisada n profili odwzorowywana jest na palisadę n okręgów o nieznanym, początkowo, położeniu i promieniu. Za punkt wyjściowy do określenia ogólnej postaci wyrażenia na potencjał zespolony przepływu przyjęto znane wyrażenie opisujące opływ pojedynczego okręgu o promieniu a i środku, dla uproszczenia, leżącym w początku układu współrzędnych [4] (ilustruje to rys. 2) :

$$w_1(z) = -Uze^{-i\alpha} + i\Gamma_o \ln(z - z_o) + i\Gamma_c \ln z + \\ - \frac{Ua^2e^{i\alpha}}{z} + i\Gamma_o \ln z - i\Gamma_o \ln(z - \frac{a^2}{z}). \quad (2.1)$$

Pierwsze trzy człony tego wyrażenia wyznaczają potencjały, odpowiednio, przepływu równoległego o prędkości U i kierunku napływu α , wiru swobodnego o mocy Γ_o znajdującego się w punkcie z_o obszaru przepływu, oraz opływu cyrkulacyjnego okręgu o cyrkulacji $2\pi\Gamma_c$ (ten ostatni człon jest równoważny wirowi o

mocy Γ_c umieszczonemu w środku okręgu). Człon czwarty stanowi modyfikację potencjału przepływu równoległego dokonaną w celu spełnienia warunku brzegowego zerowania się prędkości normalnej na konturze okręgu. Wiadomym jest, iż modyfikację tę można interpretować jako umieszczenie w środku okręgu dipola o mocy $M = Ua^2$ i osi głównej równoległej do kierunku napływu strumienia. Wynik ten można zinterpretować jako rezultat inwersji dokonanej na dipolu generującym przepływ równoległy, położonym w nieskończoności.



Rys. 2. Potencjał zespolony opływu okręgu strumieniem równoległym oraz wiru swobodnym

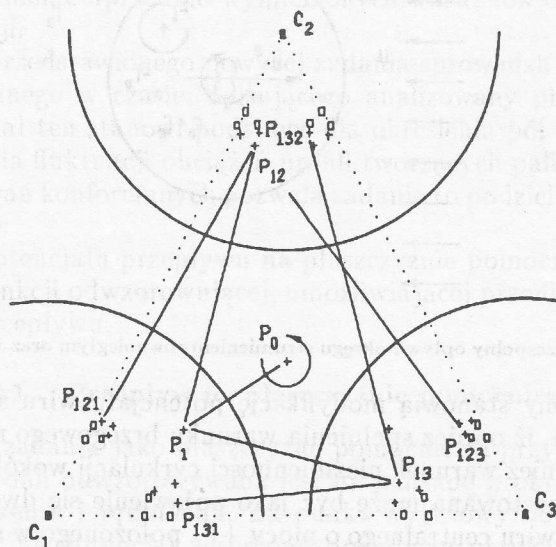
Dwa ostatnie człony stanowią modyfikację potencjału wiru swobodnego, dokonaną w ten sposób, iż oprócz spełnienia warunku brzegowego na konturze okręgu spełniony jest również warunek niezmienności cyrkulacji wokół okręgu. Z kolei ta modyfikacja interpretowana może być jako pojawienie się dwóch nowych wirów wewnątrz okręgu: wiru centralnego o mocy $+\Gamma_0$ położonego w środku okręgu oraz wiru o mocy $-\Gamma_0$ położonego w punkcie $z_i = a^2/z$ – inwersyjnym w stosunku do punktu z_0 względem okręgu.

Powyższa analiza wyrażenia 2.1 pozwala na stwierdzenie, że potencjał zespolony badanego opływu grupy n okręgów winien mieć postać :

$$w(z) = -Uze^{-i\alpha} + i\Gamma_0 \ln(z - z_0) + \sum_{c=1}^n i\Gamma_c \ln(z - z_c) + w_w(z) + w_d(z) + \sum_{c=1}^n w_c(z), \quad (2.2)$$

gdzie trzy ostatnie człony reprezentują modyfikację potencjału wiru swobodnego

w_w , potencjału przepływu równoległego w_d oraz potencjałów opływów cyrkulacyjnych w_c poszczególnych okręgów. Przykłady literaturowe ([1], [2], [3] i in.) wskazują, iż dokładną postać poszczególnych potencjałów modyfikacyjnych można wyznaczyć poprzez wielokrotne stosowanie odwzorowania inwersyjnego w stosunku do wszystkich osobliwości występujących w wyrażeniu 2.1 względem wszystkich okręgów. Ogólną ideę powyższej metody modyfikacji potencjału w zastosowaniu do potencjału wiru znajdującego się w pobliżu trzech okręgów przedstawiono na rys. 3. Na rysunku tym wir znajduje się w przepływie w chwilowym położeniu P_0 . Linia ciągła łączy ten punkt z punktem P_1 , będącym inwersją punktu P_0 względem okręgu 1. Kolejne punkty: P_{12} i P_{13} , wyznaczone są jako punkty inwersyjne punktu P_1 , tym razem traktowanego jako punkt zewnętrzny, względem okręgów 2 i 3. Następnymi inwersjami tych punktów są punkty P_{121} , P_{123} , P_{131} , i P_{132} .



Rys. 3. Schemat procesu wyznaczania punktów inwersyjnych wewnątrz okręgów.

Na rys. 3 przedstawiono, dla uproszczenia, tylko jeden ciąg punktów inwersyjnych punktu P_0 , zaczynający się od okręgu 1. Pełne wyrażenie na potencjał zespolony w obecności trzech okręgów wymaga dołączenia również ciągów odwzorowań inwersyjnych zaczynających się od okręgów 2 i 3. Ponadto, jak już stwierdzono uprzednio, obecność okręgu modyfikuje (przy założeniu niezmienności cykulacji wokół okręgu) potencjał wiru w ten sposób, iż wewnątrz okręgu umieszczony jest nie jeden, a dwa wiry – wir inwersyjny, którego odpowiednikiem w naszym przypadku jest szereg przedstawiony na rys. 2 oraz wir centralny, położony w środku okręgu. Dlatego też w celu zachowania stałości cykulacji wokół rozważanych okręgów należy do wyrażenia na potencjał w_w dołączyć trzy kolejne szeregi inwersyjne, rozpoczynające się od środków poszczególnych okręgów. W celu zachowania czytelności prezentowanej metody, na rys. 3 nie oznaczono tych punktów.

zaznaczając je jedynie w postaci małych kwadratów. Ogólną postać potencjału w_w dla przypadku n okręgów można wyrazić jako :

$$w_w(z) = i\Gamma_o \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^m \ln \frac{z - P_k}{z - C_k}, \quad (2.3)$$

gdzie indeks k jest numerem elementu zbioru A określonego w sposób następujący:

a) elementami zbioru są wszystkie $1, 2, \dots, m$ elementowe wariacje z powtórzeniami zbioru liczbowego $B = \{1, 2, \dots, n\}$, posiadające tę własność, że żadne dwa sąsiadujące ze sobą elementy wariacji nie są identyczne,

b) zbiór jest uporządkowany według rosnącej wartości liczb utworzonych w wyniku powyższej wariacji.

Dla przypadku trzech okręgów zbiór A będzie miał postać :

$$A = \{1, 2, 3, 12, 13, 21, 23, 31, 32, 121, 123, 212, 213, 312, 313, \dots\},$$

przy czym ilość cyfr danego elementu zbioru A określa numer m kolejnego cyklu inwersyjnego (pojęcie to zostanie rozszerzone w następnym rozdziale), natomiast kolejne cyfry tego elementu określają numery okręgu, względem którego dokonywane są inwersje prowadzące do otrzymania punktu oznaczonego tym indeksem.

Modyfikacja potencjałów w_c opływu cyrkulacyjnego okręgu odbywa się identycznie, jak w przypadku wiru swobodnego, z tą jedynie różnicą, iż punktem początkowym cyklu inwersji jest środek okręgu C ($c = 1, 2, \dots, n$), a nie punkt P_o . W związku z powyższym, ogólne wyrażenie na potencjał w_c jest nieomal identyczne, jak wzór 2.3:

$$w_c(z) = i\Gamma_c \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \ln \frac{z - P_k}{z - C_k}, \quad (2.4)$$

a pewnej modyfikacji ulega jedynie zbiór indeksów k , który składa się jedynie z wariacji $2, 3, \dots, m$ elementowych i np. dla w_1 w przypadku trzech okręgów zbiór ten ma postać :

$$C = \{12, 13, 21, 23, 31, 32, 121, 123, 212, 213, 312, 313, \dots\}.$$

Wzór na potencjał modyfikacyjny przepływu równoległego w_d ma postać :

$$w_d(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k e^{-i\gamma}}{z - C_k}. \quad (2.5)$$

We wzorze tym dipole inwersyjne są położone w punktach C_k identycznych, jak we wzorze 2.3. Istotną różnicę, w porównaniu ze sposobem modyfikacji potencjału osobliwości wirowych, stanowi fakt konieczności zmiany zarówno mocy M_k , jak i kierunku osi głównej dipola γ [4]. Sposób modyfikacji mocy kolejnych dipoli inwersyjnych obrazują poniższe wzory :

$$\begin{aligned} M_k &= U a_c^2, & \text{gd}y \ k \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ M_k &= \frac{M_{k1} a_c^2}{|C_c - C_{k1}|^2}, & \text{gd}y \ k \in A \setminus \{1, 2, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

w których a_c i C_c oznaczają, kolejno, promień i środek okręgu c , względem którego dokonywana jest inwersja, natomiast M_{k1} oraz C_{k1} oznaczają moc i położenie dipola będącego obiektem przekształcenia inwersyjnego.

W przekształceniu inwersyjnym kierunek osi głównej dipola γ zmieniany jest w sposób następujący :

$$\gamma_k = \gamma_{k1} \pm \delta, \quad (2.7)$$

gdzie δ jest kątem pomiędzy kierunkiem γ_{k1} osi dipola odwzorowywanego a prostą prostopadłą do prostej l łączącej punkt P_{k1} ze środkiem okręgu, względem którego inwersja jest dokonywana. Znak we wzorze 2.5 dobierany jest w ten sposób, aby otrzymać kierunek γ_k symetryczny do γ_{k1} , względem prostej l .

2.2. Funkcja odwzorowująca

W odróżnieniu od zagadnienia wyznaczenia potencjału przepływu na płaszczyźnie pomocniczej, które jest słabo zależne od kształtu i konfiguracji profili na płaszczyźnie fizycznej (zmianie mogą ulegać jedynie położenia i promienie okręgów, natomiast sama procedura wyznaczania potencjału jest w każdym przypadku jednakowa), postać funkcji odwzorowującej silnie zależy od warunków geometrycznych na płaszczyźnie fizycznej. Dlatego też, kierując się przesłanką uniwersalności prezentowanej metody zdecydowano się na poszukiwanie funkcji odwzorowującej, jako szeregu potęgowego ułamków wymiernych o postaci ogólnej:

$$z_p = z + A_o + \sum_{c=1}^n \sum_{p=1}^{\infty} A_{c,p} \left[\frac{a_c}{z - C_c} \right]^p, \quad (2.8)$$

gdzie: p – wykładnik potęgowy, z – współrzędna płaszczyzny pomocniczej, z_p – współrzędna płaszczyzny fizycznej, a_c – promień c -tego okręgu, $c \in \{1, 2, \dots, n\}$, C_c – środek c -tego okręgu, $A_o, A_{c,p}$ – współczynniki zespolone.

Przy tak założonej ogólnej postaci funkcji, problem wyznaczenia funkcji odwzorowującej dla konkretnych warunków zadania, określonych przez ilość, kształt i konfigurację profili, sprowadza się do wyznaczenia wartości współczynników a, A oraz C . Ponadto, możliwe jest wyznaczenie, w sposób jawny, pochodnych funkcji (2.8), dowolnie wysokiego rzędu.

Powyższa metoda wyznaczania funkcji odwzorowującej została szczegółowo omówiona przez Prosnaka, w pracy [5]. Korzystając z zawartych w niej wskazówek, jak również załączonych algorytmów i procedur, opracowano program do obliczeń wartości liczbowych współczynników występujących we wzorze 2.8.

3. Obliczenia numeryczne

3.1. Ograniczenie ilości wyrazów szeregów nieskończonych

Omówiony powyżej proces modyfikacji potencjału zespolonego oraz wyznaczania funkcji odwzorowującej jest, teoretycznie, w obu przypadkach procesem nieskończonym. W konkretnej realizacji numerycznej, koniecznym jest jednak ograniczenie ilości wyrazów szeregów występujących we wzorach. Jak już wspomniano uprzednio, ilość osobliwości, zarówno typu wirowego jak i źródłowego, jaka pojawia się w wyniku kolejnych inwersji, rośnie w sposób gwałtowny ze wzrostem ilości cykli inwersyjnych. W związku z powyższym dla praktycznych obliczeń celowym jest dokonanie szacunkowych analiz ilości osobliwości, których wystąpienie jest spodziewane przy założeniu m cykli inwersyjnych. Ilości te tworzą postępy geometryczne, wyrażone dla ogólnego przypadku n okręgów w sposób następujący:

– potencjał w_d : $a_1 = n, \quad q = n - 1, \quad a_m = n \cdot (n - 1)^{m-1},$

$$S_m = n \cdot \frac{(n - 1)^m - 1}{n - 2}, \quad (3.1)$$

– potencjał w_c : $a_1 = 1, \quad q = n - 1, \quad a_m = (n - 1)^{m-1},$

$$S_m = \frac{(n - 1)^m - 1}{n - 2}, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
 - \text{potencjał } w_w: \quad a_1 &= 2 \cdot n, & q &= n - 1, & a_m &= 2 \cdot n \cdot (n - 1)^{m-1}, \\
 S_m &= 2 \cdot n \cdot \frac{(n - 1)^m - 1}{n - 2}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Oznaczenia występujące w powyższych wzorach: a_1 – ilość osobliwości uzyskiwanych po pierwszym cyklu inwersyjnym, q – ilość osobliwości generowanych w wyniku inwersji jednej osobliwości, a_m – ilość osobliwości generowanych w j -tym kroku obliczeniowym, $j = 2, 3, \dots, m$, S_m – sumaryczna ilość osobliwości uzyskiwana po j -tym kroku obliczeniowym.

Sumaryczna ilość wirów wchodzących w skład potencjału modyfikacyjnego w_c jest iloczynem $n \cdot S_m$, tj. iloczynem ilości okręgów i ilości wirów modyfikujących potencjał opływu cyrkulacyjnego wokół każdego okręgu.

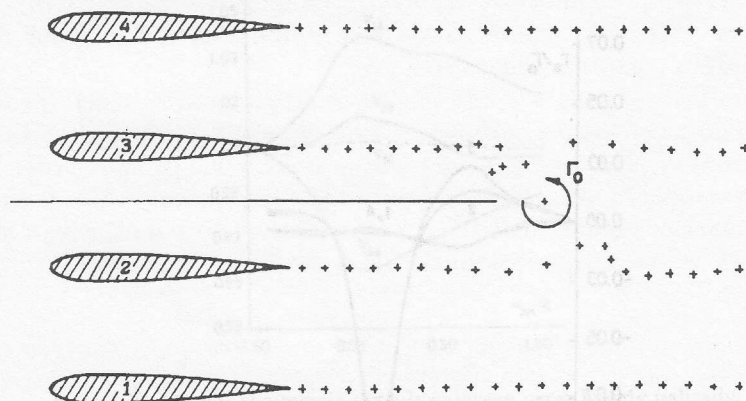
Z zestawienia powyższego wynika, iż ilość osobliwości otrzymanych w wyniku modyfikacji potencjałów w_d i w_c jest taka sama i jest wyrażona wzorem 3.1, natomiast ilość wirów wygenerowanych w wyniku modyfikacji potencjału w_w jest od nich dwukrotnie wyższa – co wyraża wzór 3.3. Wniosek powyższy jest istotny z punktu widzenia realizacji obliczeń numerycznych rozważanego modelu, w którym odpowiedź profili na niestacjonarne zaburzenie realizowana jest w postaci szeregów wirów punktowych, których potencjały muszą być poddawane opisanej uprzednio modyfikacji. I tak, dla $n = 4$ okręgów, oraz dla rekomendowanej w literaturze [1],[2], minimalnej, zapewniającej realistyczną dokładność, ilości cykli inwersyjnych $m = 5$ sumaryczne ilości dipoli i wirów inwersyjnych w potencjałach w_d i w_c wynoszą po 484, podczas gdy ilość wirów wchodzących w skład potencjału w_w wynosi 968. Istotnym przy tym jest fakt, iż w obliczeniach przepływu niestacjonarnego – modyfikacji dwóch pierwszych potencjałów dokonuje się raz dla określonej konfiguracji okręgów, natomiast w każdym kroku obliczeniowym konieczne jest ponawianie obliczeń modyfikujących potencjał w_w . Powyższa własność modelu stanowić może pewien problem, ograniczający możliwości bezpośredniego wykorzystania algorytmu w praktyce obliczeniowej.

Rekomendowane ograniczenie nieskończonego szeregu potęgowego we wzorze 2.6 wynosi $p_{max} \geq 10$, w zależności od zakresu zgodności kształtu analizowanego profilu z kształtem konwencjonalnego profilu lotniczego [5].

3.2. Przykład obliczeniowy

W oparciu o przedstawiony w pracy algorytm dokonano obliczeń przepływu przez palisadę składającą się z czterech jednakowych profili usytuowanych w sposób pokazany na rys. 4. Obliczenia funkcji odwzorowującej przeprowadzono dla ilości wyrazów $p = 10$ uzyskując dokładność odwzorowania (różnicę pomiędzy wartościami zadanymi i obliczonymi profili, odniesioną do długości cięciw profilu $c = 1$) rzędu 10^{-3} .

Przyjęto, iż przez środkowy kanał palisady, pomiędzy profilami 2 i 3, przepływa wir potencjalny (tor wiru, rozumiany jako krzywa łącząca położenia wiru w kolejnych krokach czasowych, zaznaczono na rysunku linią ciągłą), generując, za



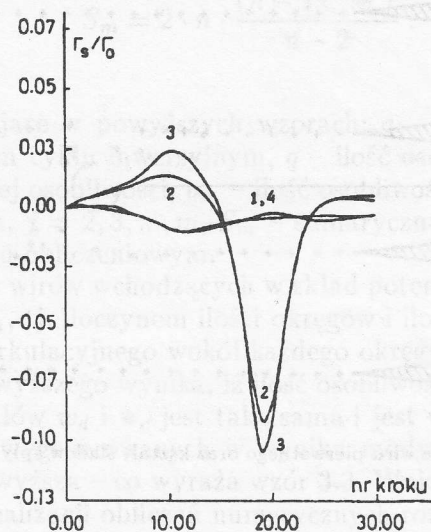
Rys. 4. Chwilowe położenie wiru pierwotnego oraz kształt śladów sypływowych za profilami.

każdym z profili szereg wirów śladowych. W rozważanej wersji modelu punkty generacji wirów za krawędziami sypływowymi profili wyznaczano na podstawie równości wektora położenia tego punktu względem krawędzi sypływowej profilu, oraz iloczynu wektora prędkości wiru w tym punkcie i polowy kroku czasowego. Położenie tych punktów było wyznaczane w każdym kroku na drodze iteracyjnej. Konfiguracja wirów przedstawiona na rys. 4 obrazuje deformację śladów zarejestrowaną po kroku 30.

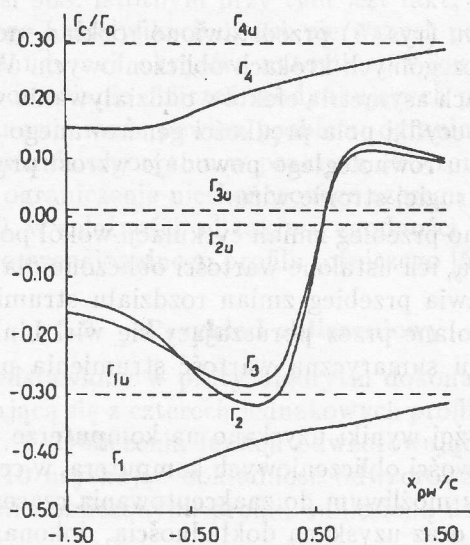
Na następnym rysunku (rys. 5) przedstawiono rozkład mocy wirów śladowych, generowanych w poszczególnych krokach obliczeniowych. Widoczna na tym oraz dwu kolejnych rysunkach asymetria efektów oddziaływania wiru z poszczególnymi profilami wynika ze specyfiki pola prędkości generowanego przez wir, które nałożone na pole przepływu równoległego powoduje wzrost prędkości po jednej oraz spadek prędkości po drugiej stronie wiru.

Na rys. 6 przedstawiono przebieg zmian cyrkulacji wokół poszczególnych profili, a także, linią przerywaną, ich ustalone wartości obliczone dla przepływu stacjonarnego. Rys. 7 przedstawia przebieg zmian rozdziału strumienia na poszczególne kanały palisady, wywołane przez poruszający się wir. Linią przerywaną zaznaczono na tym rysunku sumaryczną wartość strumienia przepływającego przez wszystkie trzy kanały.

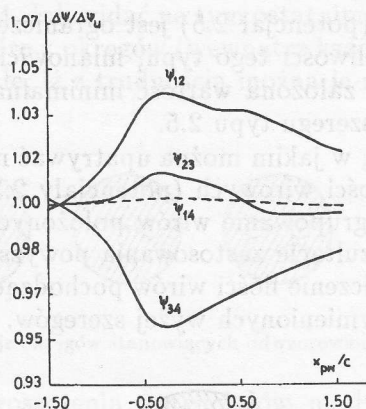
Zaprezentowane powyżej wyniki uzyskano na komputerze klasy IBM PC AT. Z uwagi na zakres możliwości obliczeniowych komputera, w celu uzyskania pewnego kompromisu pomiędzy możliwym do zaakceptowania czasem obliczeń, konieczną pojemnością pamięci, oraz uzyskaną dokładnością, dokonano redukcji ilości osobliwości branych pod uwagę we wzorach 2.3÷2.5. Za punkt wyjścia dla optymalizacji ilości wirów inwersyjnych przyjęto ilość cykli inwersyjnych $m = 5$, dla obliczeń potencjału modyfikacyjnego 2.4 oraz $m = 4$, dla obliczeń potencjału 2.3.



Rys. 5. Rozkład mocy wirów śladowych.



Rys. 6. Przebieg zmian cyrkulacji wokół profilu.



Rys. 7. Fluktuacje strumienia przepływającego przez kanały palisady.

Ponadto, do programu wprowadzono parametr d określający rozdzielczość położenia wirów, tj. minimalną odległość, poniżej której dwa wiry były zamieniane na jeden o sumarycznej mocy.

Odległość ta była zmienna dla każdego wiru i określana jako odwrotnie proporcjonalna do odległości d_o założonej wstępnie dla wiru pierwotnego. Wskutek zastosowania powyższej zasady redukcyjnej i przyjęcia wartości $d_o = 10^{-4}$ uzyskano ilość wirów $K_c = 90$ – dla każdego potencjału cyrkulacyjnego, $K_{vo} = 70$ – dla potencjału wiru pierwotnego, oraz $K_v = 10 \div 24$ – dla potencjałów wirów śladowych. Optymalizację potencjału modyfikacyjnego 2.5 przeprowadzono w oparciu o minimalną rozróżnialną wartość mocy dipola, którą przyjęto jako 10^{-4} , uzyskując $K = 320$ osobliwości. Jako wartość błędu obliczeń przyjęto wartość składowej normalnej prędkości w punkcie okręgu odpowiadającym krawędzi spływu, uzasadniając to faktem, iż dokładność wyznaczenia prędkości w tym punkcie rzutuje z kolei na dokładność obliczeń mocy wirów oraz cyrkulacji wokół profilu. W zaprezentowanym przypadku, uzyskiwany błąd wynosił $abs(v_n/U) \leq 10^{-3}$.

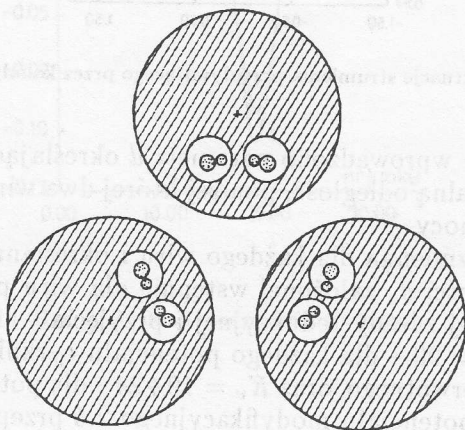
3.3. Potencjalne możliwości optymalizacji obliczeń

Ocenia się, iż z powodu gwałtownie narastającej, wraz ze wzrostem ilości profili, ilości osobliwości koniecznych do uwzględnienia we wzorach modyfikacyjnych potencjałów (wzory 2.3 ÷ 2.5), zasadność bezpośredniego zastosowania prezentowanej metody wyznaczania potencjału zespolonego może być ograniczona do małej ilości, np. dwóch lub trzech profili. W przypadku większej ich ilości, rola procedur opartych na powyższym algorytmie sprowadzać się będzie do zadań weryfikacyjnych i porównawczych, natomiast bezpośrednio zastosowanie znajdują algorytmy uproszczone. Potencjał zespolony wyrażony w postaci szeregu osobliwości inwersyjnych stwarza duże możliwości dla przekształceń upraszczających, przy zachowaniu żadanego poziomu wartości błędu.

Jednym z najprostszych i zarazem najskuteczniejszych sposobów optymaliza-

cji potencjału typu dipol (potencjał 2.5) jest ograniczenie wynikające z podstawowej cechy inwersji osobliwości tego typu, mianowicie zaniku mocy kolejnych dipoli. W tym przypadku założona wartość minimalna mocy winna skutecznie ograniczyć ilość wyrazów szeregu typu 2.5.

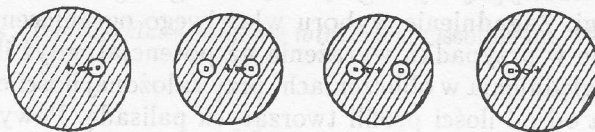
Pierwszym kierunkiem, w jakim można upatrywać możliwości uproszczeń postaci potencjałów osobliwości wirowych (potencjały 2.3 i 2.4), jest zastosowanie w zaprezentowanej pracy grupowanie wirów położonych w odległości mniejszej, niż zadana wartość. W rezultacie zastosowania powyższego uproszczenia, otrzymano m.in. znaczne ograniczenie ilości wirów pochodzących od wirów śladowych, a wchodzących w skład wymienionych wyżej szeregów.



Rys. 8. Inwersje trzech okręgów (widoczne 2 cykle inwersyjne).

Modyfikację powyższej metody stanowi propozycja zastąpienia wirów położonych wewnątrz okręgu o danym promieniu jednym wirum, położonym np. w środku koła ograniczonego tym okręgiem. Jeżeli proces inwersji zostanie odniesiony nie do poszczególnych punktów położenia osobliwości oddzielnie, a do całego obszaru koła, wewnątrz którego te osobliwości się znajdują, to można zauważyć, iż w każdej kolejnej inwersji obszar koła zewnętrznego, poddawanego inwersji, przekształca się na koło wewnętrzne – znacznie mniejsze, leżące wewnątrz koła, względem którego inwersja ta jest dokonywana. Punkty inwersyjne wszystkich osobliwości, które przed inwersją leżały w kole zewnętrznym, znajdują się po inwersji w kole wewnętrznym. Obszar koła wewnętrznego po kolejnej inwersji może być na tyle mały, iż uzasadnione byłoby zastąpienie wszystkich osobliwości leżących wewnątrz tego koła jednym wirum położonym w środku. Samą ideę przekształcania obszarów kół w procesie inwersji, mówiąc, iż każde koło ma w swoim wnętrzu obrazy inwersyjne $n-1$ pozostałych kół, pokazano na rys. 8, dla dwóch cykli inwersyjnych. Na rysunku następnym ukazano wzajemne relacje wymiarowe okręgów inwersyjnych dla konfiguracji okręgów podstawowych, otrzymanych z odwzorowa-

nia palisady profili z rys. 4. Jak widać na tym ostatnim rysunku, już po pierwszym cyklu inwersyjnym niektóre z okręgów (wewnątrz każdego z kół znajdują się trzy mniejsze koła) są tak małe, iż z trudnością można je rozpoznać.



Rys. 9. Inwersje okręgów stanowiących odwzorowanie profili z rys. 4.

Kolejną możliwością uproszczenia potencjałów modyfikacyjnych jest propozycja zastąpienia wirowości zawartej wewnątrz danego koła nie poprzez jeden wir umieszczony w punkcie centralnym koła lecz przez pewną ich ilość, rozmieszczoną w zadanej z góry ilości punktów leżących na konturze okręgu. W skrajnym przypadku wyboru okręgów podstawowych, jako bazy dla rozmieszczenia wirów, metoda ta byłaby, po przeniesieniu osobliwości na obszar fizyczny, tożsama z metodą opisu kształtu profilu przy pomocy rozkładu osobliwości wirowych. Niewykluczonym jest jednak, iż korzystnym mógłby się okazać wybór grupy okręgów innych niż podstawowe, np. którejś grupy pośredniej, powstałej po pierwszym, czy drugim cyklu inwersyjnym. Takie oddalenie punktów osobliwych od granic obszaru przepływu mogłoby korzystnie wpłynąć zarówno na sam czas obliczeń prędkości, ciśnienia itp. wzdłuż konturu profilu, jak na dokładność uzyskanych rezultatów.

Ostatnią, stosunkowo często cytowaną w literaturze [2],[5] metodą uproszczenia potencjału modyfikacyjnego jest możliwość przedstawienia potencjałów osobliwości znajdujących się wewnątrz poszczególnych kół podstawowych w postaci szeregu Laurenta, o środku pokrywającym się ze środkiem koła.

4. Podsumowanie

W pracy omówiono metodę opisu oddziaływania potencjalnego swobodnej osobliwości wirowej ze skończoną palisadą profilową, przy zastosowaniu odwzorowania konforemnego. Należy zaznaczyć, że sam wybór wiru potencjalnego, jako reprezentanta niestacjonarnego zaburzenia, nie ogranicza możliwości stosowania powyższej metody do innych typów przepływów przez palisadę, zarówno ustalonych, jak i niestabilnych. Analizowane zagadnienie przeniesiono na płaszczyznę pomocniczą, na której obszar przepływu ograniczony jest okręgami, o liczbie identycznej z liczbą profili analizowanej palisady. Na płaszczyźnie tej przepływ opisany został przy pomocy potencjału zespolonego, poddanego modyfikacji poprzez wielokrotne zastosowanie przekształcenia inwersyjnego, stanowiącego istotę teorematu koła. W wyniku powyższych działań, odniesionych do potencjałów przepływu równoległego, opływu cyrkulacyjnego okręgów oraz wiru, otrzymano ścisłą postać wyrażenia na potencjał zespolony przepływu, w którym poszczególne składniki mody-

fikacyjne mają postać szeregów nieskończonych. Funkcję odwzorowującą obszar pomocniczy na obszar przepływu przedstawiono w postaci rozwinięcia w szereg potęgowy ułamków wymiernych.

W praktycznej realizacji numerycznej zarówno postać potencjału zespolonego, jak funkcji odwzorowującej wymagała arbitralnego ograniczenia ilości wyrazów tworzących szeregi. Zagadnienie wyboru właściwego ograniczenia szeregów było szczególnie istotne w przypadku wyrażenia na potencjał, gdyż ilość wyrazów koniecznych do uwzględnienia w obliczeniach, przy założonej ilości cykli inwersji, jest potęgowo zależna od ilości profili tworzących palisadę. Powyższe doświadczenie pozwala na generalną ocenę, iż niezależnie od możliwości posiadanego sprzętu komputerowego, uzyskanie rozsądnego kompromisu pomiędzy czasem obliczeń a ich żadaną dokładnością, w przypadku zastosowania metody inwersji, jest najprawdopodobniej możliwe jedynie dla przypadków małej ilości (dwóch, trzech) profili. W tych też przypadkach, znajomość rozwiązania dokładnego, uzyskanego przy zastosowaniu powyższej metody, w powiązaniu z metodą kontroli bieżącej przemieszczania się wirów przy pomocy funkcji Kirchhoffa-Routha może stanowić źródło materiałów testowych dla zbliżonych typów przepływu lub metod obliczeniowych. W przypadku natomiast obliczeń opływu większej ilości profili metoda ta wymagałaby poszukiwania znacznych uproszczeń. W niniejszej pracy (rozdz. 3.3) przedstawiono kilka możliwych kierunków poszukiwań tych uproszczeń. Ocenia się, iż dokonanie wyboru jednego z nich może być uzależnione od rodzaju obliczeń przewidywanych do wykonania w ramach rozważanego modelu (np. w przypadku obliczeń całkowitych sił, lub momentów oddziaływania przepływu na profil dopuszczalne są innego rzędu uproszczenia, niż np. w przypadku wyznaczania rozkładu prędkości i ciśnień w pobliżu krawędzi spływowej). Niektóre z tych propozycji, np. rozmieszczenie osobliwości symbolizujących warstwę wirową wzdłuż konturów profili, czy przedstawienie potencjału prędkości w postaci szeregu Laurenta, sprowadzają się praktycznie do znanych, "konkurencyjnych" względem metody odwzorowań konforemnych, metod opisu potencjału przepływu. Niemniej jednak ocenia się, iż również w powyższych przypadkach prezentowana metoda, poza wymienionym już we wstępie walorem dokładności, może zaoferować pewne praktyczne możliwości uproszczeń i tym samym skrócenia czasu obliczeń. Dokładna analiza porównawcza czasów obliczeń przy użyciu poszczególnych metod, zarówno klasycznych, jak i będących ich mutacjami stanowiłaby cenną informację dla dalszych prac nad modelem opisu niestacjonarnego opływu palisady nieskończonej.

Praca wpłynęła do Redakcji w grudniu 1990.

Literatura

- [1] M. Kawaguti, *The Flow of a Perfect Fluid Around Two Moving Bodies*. J. Phys. Soc. Jap., vol. 14, nr 8 (1964), str 1409-1415.
- [2] N. D. Halsey, *Potential Flow Analysis of Multielement Airfoils Using Conformal*

Mapping. AIAA J., vol. 17, nr 12 (1979), str 1281-1288.

- [3] J. Świryczuk, *Zachowanie się pojedynczej osobliwości wirowej w pobliżu dwóch okręgów*. Zesz. Nauk. IMP PAN nr 310/1204/90.
- [4] L. M. Milne-Thomson, *Theoretical hydrodynamics*. London 1968.
- [5] W. J. Prosnak, *Teoria układu profilów lotniczych*. Ossolineum, Wrocław 1981.

Description of Interaction of a Single Free Vortex with a Finite Airfoil Cascade Using Conformal Mapping Method

Summary

A method of description of unsteady flow around an airfoil cascade has been discussed in this paper. The method is based on the conformal mapping. An example of interaction between finite cascade and passing it potential vortex has been given. A method of flow potential modification on an auxiliary plane has been presented. Run-time shortening procedures based on the variation of distribution of singularities describing the flow are introduced. The analysis has been exemplified by calculation results for the palisade consisting of four airfoils.

Описание воздействия одиночного свободного вихря с оконченной профильной решеткой при помощи конформных отображений

Резюме

В статье оговорен метод описи нестационарного обтекания оконченной профильной решетки при использовании метода конформных отображений, на примере воздействия решетки с протекающим через нее потенциальным вихрем. Представлено метод модификации потенциала течения на вспомогательной плоскости. Предложен также метод сокращения времени вычислений путем замены распределения досто- примечательностей описывающих течение. Анализ проиллюстрирован результатами вычи- слений для решетки состоящей из четырех профилей.