

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

94

GDĄŃSK 1992

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machines

RADA REDAKCYJNA – EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
WŁODZIMIERZ PROSNAK · ROBERT SZEWAŁSKI (PRZEWODNICZĄCY – CHAIRMAN)
JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY – EXECUTIVE EDITORS

EDWARD ŚLIWICKI – P. O. REDAKTOR – EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA – EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN

ul. Gen. Józefa Fischera 14, 80-952 Gdańsk, skr. poczt. 621, tel. 41-12-71 wew. 141

ISSN 0079-3205

WYDAWCZA: Redakcja Wydawnictw Ciągłych IMP PAN

80-952-Gdańsk, skrytka poczt. 621, tel. 41-12-71

Skład komputerowy A. D. Kardaś

Drukarnia: Chromatografia w Rumii

ZBIGNIEW BILICKI, PIOTR DOWNAR-ZAPOLSKI

Gdańsk

Zjawiska falowe w dwupłynowych i jednorodnych modelach przepływu dwufazowego

Przedstawiono analizę właściwości falowych jednowymiarowych, ciągłych modeli przepływów dwufazowych. Zwrócono uwagę na źródła dyspersyjności modeli i na warunki zadławienia przepływu. Na podstawie przebadanych modeli zobrazowano wpływ poszczególnych założeń na prędkości rozchodzenia się zaburzeń o nieskończenie wielkich częstotliwościach.

Wykaz oznaczeń

A – pole powierzchni przekroju poprzecznego kanału,	<i>t</i> – czas,
a – prędkość fazowa,	<i>u</i> – poślizg,
a_c – prędkość równowagowa zaburzeń,	<i>w</i> – prędkość średnia,
a_f – prędkość zamrożona zaburzeń,	<i>z</i> – współrzędna przestrzenna,
C – współczynnik masy dołączonej,	α – stopień zapelnienia,
E – strumień wymiany energii pomiędzy fazami,	Γ – strumień wymiany masy pomiędzy fazami,
g – przyspieszenie ziemskie,	ρ – gęstość,
h – entalpia właściwa,	σ_i – składowe wektora stanu,
k – liczba falowa,	τ – strata ciśnienia na skutek tarcia na jednostkę długości przewodu,
p – ciśnienie,	czas charakterystyczny $\tau = 1/\omega$,
Q – strumień ciepła na jednostkę objętości dostarczony z zewnątrz,	ω – częstota zaburzeń.
T – wymiana pędu pomiędzy fazami, temperatura,	

Wskaźniki dolne dotyczą:

G – pary,
L – cieczy,

K – pary lub cieczy,
K_i – powierzchni rozdziału faz.

1. Wprowadzenie

Modelowanie przepływów dwufazowych pary i cieczy pod kątem uzyskania zgodności ze zjawiskami falowymi jest istotnym zagadnieniem poznawczym i aplikacyjnym. Najlepszym sprawdzeniem tej zgodności są pomiary eksperymentalne, prowadzące do wyznaczenia krytycznych, maksymalnych masowych strumieni przepływów w kanałach. Przepływ, w którym zostaną osiągnięte parametry krytyczne nazwano przepływem zadławionym. Zadławienie przepływu wiąże się ściśle z prędkością rozprzestrzeniania się zaburzeń. W przypadku gdy prędkość ta jest większa od prędkości przepływu, informacje o warunkach na wylocie z kanału mogą się przenosić w górę przepływu i strumień masy przepływającej w kanale może się zmienić na skutek zmian tych warunków. Ciągłe oddziaływanie warunków brzegowych na przepływ zostaje przerwane w chwili, gdy przepływ osiągnie w jakimkolwiek przekroju kanału prędkość równą prędkości rozprzestrzeniania się w nim zmian ciśnienia czy też innej wielkości fizycznej [1]. W gazodynamice – akustyce, gdzie układ równań bilansu masy, pędu i energii może być sprowadzony do jednego równania cząstkowego hiperbolicznego, tzw. równania falowego opisującego zmiany ciśnienia P [2,3], prędkość, przy której następuje zadławienie jest prędkością dźwięku i ma definicję termodynamiczną

$$a = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s^{1/2},$$

gdzie ρ oznacza gęstość, s entropię. Odpowiada ona rozchodzeniu się małych zaburzeń w ośrodku, w którym efekty wynikające z nieodwracalnych przemian są pomijalnie małe. Z fizycznego punktu widzenia, stan ośrodka zmienia się wówczas znacznie szybciej niż zjawiska w nim zachodzące. W konsekwencji stany termodynamiczne są niezależne od szybkości zachodzących procesów. Opisują je równania równowagowe, a prędkość rozprzestrzeniania się zaburzeń w ośrodku nie zależy od długości fal, jeśli tylko będą one większe od średniej drogi swobodnej molekul. Ten ostatni warunek jest konieczny dla uznania ciągłości przyjętego modelu ośrodka.

W odróżnieniu od ośrodków jednofazowych, mieszaniny dwufazowe charakteryzują się dyssypacją energii w zachodzących procesach oraz dyspersyjnością względem częstotliwości zaburzeń. Dyssypację rozumiemy tu jako występowanie w przepływie procesów nieodwracalnych, prowadzących do produkcji entropii i w konsekwencji do tłumienia rozchodzących się zaburzeń w przepływie. Dyspersyjność, która może być spowodowana, między innymi, nieliniowością i dyssypacją polega na tym, że prędkość zaburzeń jest funkcją ich częstotliwości. Wymienione wyżej własności mają związek z tym, że w przepływach dwufazowych pary i cieczy stosunkowo łatwo może być naruszony stan równowagi termodynamicznej [4]. Wewnętrzne procesy działające w kierunku przywrócenia tego stanu zwane relaksacją [4,5] trwają stosunkowo długo, tak że czas ich trwania — czas relaksacji,

staje się porównywalny z czasem zmian zachodzących w ośrodku podczas przepływu. Najczęściej relaksację aproksymuje się za Mandelsztamem i Leontowiczem [6] procesem inercyjnym o stałej czasowej Θ . Proces relaksacyjny prowadzi w konsekwencji do wspomnianej powyżej dyspersji ośrodka. W ośrodku dyspersyjnym za rozprzestrzenianie się zaburzeń odpowiada prędkość fazowa $a(\omega) = \omega/k(\omega)$, gdzie ω oznacza częstotliwość, k liczbę falową [4,7]. Ma ona interesującą interpretację przy granicznych częstościach zaburzeń ω . Dla powolnych zaburzeń wywołanych niskimi częstościami $\omega (\omega \rightarrow 0)$, czas zachodzących w przepływie zmian, mierzony odwrotnością częstości $\tau = 1/\omega$, jest dużo większy od czasu relaksacyjnego Θ . Spełnienie warunku $\tau \gg \Theta$ można uważać za podstawę uznania systemu dwufazowego w lokalnej równowadze termodynamicznej. Prędkość fazowa dla takiego przypadku jest prędkością rozchodzenia się zaburzeń w ośrodku równowagowym i stąd zwana jest prędkością równowagową $a_e = a(\omega \rightarrow 0)$. Z kolei zaburzenia o wysokich częstościach ($\omega \rightarrow \infty$) charakteryzuje krótki czas τ zdążający do zera. W przypadku, gdy jest on znacznie mniejszy od czasu relaksacji systemu Θ , $\tau \ll \Theta$, wówczas system dwufazowy nie jest w stanie nadążyć za wywołanymi zmianami. Parametry termodynamiczne charakteryzujące się relaksacją Θ_i (i odpowiada liczbie parametrów relaksujących się) są nieczułe na te szybkie zaburzenia, są jakby zamrożone. Prędkość rozchodzenia się zaburzeń z częstością $\omega \rightarrow \infty$ nazwano w literaturze prędkością zamrożoną $a_f = a(\omega \rightarrow \infty)$. Trzeba jednak zdawać sobie sprawę z tego, że pojęcie prędkości zamrożonej funkcjonuje raczej na gruncie matematycznym, ponieważ fizycznie nie można zrealizować nieskończenie dużych częstości. Poza tym, zwiększając częstość zaburzeń generujemy coraz krótsze fale. W tym aspekcie istnieje, podobnie jak dla ośrodka jednofazowego, granica stosowalności ciągłych modeli przepływu dwufazowego do analizy zjawisk falowych. Granica ta określona jest długością fal niosących zaburzenia w ośrodku dwufazowym. Fale powinny mieć długości znacznie większe od rozmiarów charakterystycznych przepływu dwufazowego, takich jak średnice pęcherzy, kropli i innych struktur. Praktycznie ma to związek z czasami relaksacyjnymi zjawisk zachodzących w przepływach pary i cieczy. Czasy te uzyskane na podstawie oszacowań teoretycznych [8] i badań eksperymentalnych [9] mieszczą się w granicach $1,0 \div 0,01$ s. Oznacza to, że praktycznie przy zaburzeniach o częstościach większych od $\omega_g = \frac{2\pi}{\Theta} \cong \frac{2\pi}{0,01} \frac{1}{s}$ system dwufazowy może być traktowany jako zamrożony, a nie dopiero przy $\omega \rightarrow \infty$ jak to formalnie postulowano wcześniej przy wprowadzeniu pojęcia prędkości zamrożonej a_f . Częstość graniczna ω_g odpowiada długości granicznej fali zaburzeń $\lambda_g = (1 \div 0,1$ m), gdy przyjmiemy do obliczeń prędkość fazową $a = 10$ m/s, co jest zgodne z wynikami eksperymentów [9]. Z powyższego wynika, że λ_g jest znacznie większe, np. od wymiarów pęcherzyków $d = 0(10^{-3}$ m). Zatem analiza zjawisk falowych w dyspersyjnym ośrodku dwufazowym daje, po pierwsze, fizyczne możliwości odwoływania się do prędkości zamrożonej ponieważ $\omega \ll \infty$, a po drugie, nie narusza założeń leżących u podstaw stosowania modeli ciągłych ponieważ $\lambda_g \gg d$. Skomplikowany charakter przepływu dwufazowego rozciąga się również na pojęcie prędkości dźwięku czy też równoważne prędkości krytycznej. W ogólnym przypadku, gdy system jest dyspersyjny,

pojęcie to jest rozumiane inaczej niż w przepływie jednofazowym równowagowym. Najczęściej bywa utożsamiane z prędkością zamrożoną a_f . Warto jednak zwrócić uwagę na fakt, że prędkość dźwięku w przepływach wielofazowych odnosi się do zaburzeń wywołanych kilkoma naraz wielkościami termodynamicznymi związanymi ze sobą kombinacją liniową [10], a nie jak w gazodynamice-akustyce tylko do jednej wielkości, np. ciśnienia. Powodem tego stanu rzeczy jest to, o czym wspomniano wcześniej, że modele przepływów dwufazowych w postaci układu równań bilansów, uwzględniające charakterystyczne cechy ośrodka, nie mogą być zredukowane do jednego równania falowego bez daleko idących uproszczeń.

Interesujące i często trudne do interpretacji własności ośrodka dwufazowego pochodzą od relaksacyjnych procesów wymiany masy, pędu i energii na granicach faz, pary i cieczy. Powinny się one ujawnić w modelach matematycznych. Celem pracy jest pokazanie źródeł dyspersyjności w dwupłynowych i homogenicznych modelach dwufazowych oraz ustalenie zakresu zmian prędkości krytycznej w zależności od przyjętego modelu, a tym samym od założonych mechanizmów oddziaływania międzyfazowego.

W badaniach zjawisk falowych ośrodków dwufazowych spotyka się dwa sposoby opisu. Jeden opiera się na analizie modeli uwzględniających struktury przepływu dwufazowego i znany jest w literaturze szczególnie w odniesieniu do mieszaniny pęcherzykowej [11,12,13,14]. Sposób ten wykorzystuje założenia o potencjalnym przepływie wokół pulsującego pęcherza. W drugim sposobie przyjmuje się za podstawę modele ciągłe, w których wszelkie niejednorodności są uśredniane [10,15 16]. Przedstawione modele mają tę przewagę nad poprzednimi, że mogą być z powodzeniem stosowane do przepływów, w których założenia o potencjalnym przepływie fazy ciągłej byłyby trudne do uzasadnienia. W prezentowanej pracy rozważania ograniczono do przepływów, które opisywane są modelami ciągłymi.

2. Reakcja modelu na zaburzenia falowe

Zdecydowaną większość istniejących jednowymiarowych modeli przepływu ośrodka dwufazowego można ująć w postaci układu quasi-liniowych cząstkowych równań różniczkowych. Stosując umowę sumacyjną Einsteina zapisujemy je w postaci:

$$A_{ij}(\sigma_l) \frac{\partial \sigma_j}{\partial t} + B_{ij}(\sigma_l) \frac{\partial \sigma_j}{\partial z} + C_i(\sigma_l, z) = 0, \quad (1)$$

gdzie σ_j są składowymi wektora stanu, tj. zbioru parametrów zależnych od czasu i współrzędnej przestrzennej z . Ilość składowych zależy od przyjętego modelu. A_{ij} oraz B_{ij} są macierzami, a C_i wektorem wymuszeń zewnętrznych.

Wygodnym i często spotykanym narzędziem do badania własności falowych modeli jest analiza małych zaburzeń [17,18]. Daje ona odpowiedź na pytania czy model jest dyspersyjny, jakie są prędkości rozprzestrzeniania się małych zaburzeń

i czy model jest stabilny, tzn. czy tłumi zaburzenia. Wnioski, które wynikają z analizy małych zaburzeń są na tyle ważne, że istotną rzeczą jest prześledzenie wyprowadzenia ogólnego równania dyspersyjnego, a tym samym poznanie przyjętych założeń i uproszczeń. Wyprowadzenie równania dyspersyjnego zgodnie z metodą zaproponowaną przez Ramshaw i Trappa [18] zamieszczono w Załączniku do prezentowanej pracy. Wynikiem analizy małych zaburzeń jest zależność dyspersyjna (Z-9) w postaci równości wyznacznika

$$\det[A_{ij}(\sigma_l^o) - \frac{k}{\omega} B_{ij}(\sigma_l^o) + \frac{i}{\omega} D_{ij}(\sigma_l^o)] = 0, \quad (2a)$$

$$D_{ij} = \frac{\partial A_{im}}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \sigma_m^o}{\partial t} + \frac{\partial B_{im}}{\partial \sigma_j} \frac{\partial \sigma_m^o}{\partial z} + \frac{\partial c_i}{\partial \sigma_j}, \quad (2b)$$

gdzie i jest jednością urojoną, $i^2 = -1$.

Określa ona prędkość fazową $\omega/k = a$, czyli prędkość rozprzestrzeniania się małych zaburzeń $\delta\sigma_l = \delta_l(k) \exp[i(kz - \omega t)]$ w ośrodku dwufazowym opisanym modelem (1). Zależność dyspersyjna (2) pokazuje, że prędkość fazowa a zmienia się z częstością ω jeżeli tylko $D_{ij} \neq 0$. W przypadku gdy macierz D_{ij} jest nieograniczona, związek dyspersyjny (2) $\omega/k = a(\omega)$ staje się niemonotoniczny i może wykazywać własności rezonansowe. Zdarza to się wówczas, gdy na przykład wprowadza się do modelu drgający ruch pęcherzyka gazowego. Analizę tych przypadków pominięto. Interesujący, z punktu widzenia własności falowych modelu (1), jest przypadek ograniczonej macierzy D_{ij} oraz zaburzeń o nieskończenie dużych częstościach $\omega \rightarrow \infty$. Wtedy $\omega/k = a_f$, natomiast wyrażenie $\frac{i}{\omega} D_{ij}$ zanika. Równanie (2a) przechodzi w równanie charakterystyczne [7,10,18]

$$\det[A_{ij}(\sigma_l^o) - \frac{1}{a_f} B_{ij}(\sigma_l^o)] = 0. \quad (3)$$

Z równania (3) widać natychmiast, że charakterystykami modelu (1) są prędkości zamrożone a_f . Okazuje się, jak pokazano w [10], że w ogólnym przypadku prędkości charakterystyk nie można przypisać poszczególnym składowym wektora stanu σ_l a jedynie różnym kombinacjom liniowym tych składowych. Prędkości zamrożone a_f , jako największe, są odpowiedzialne za określenie warunków zadławienia przepływu. Warunki te powstają wówczas, gdy najmniejsza z prędkości zamrożonych osiągnie wartość równą zero. Wtedy wszystkie wygenerowane informacje rozchodzą się tylko w jednym kierunku, a mianowicie w dół przepływu. Zmiany parametrów na wyjściu z kanału nie wywołują reakcji na wejściu.

Dla modeli falowych opisanych układem równań hiperbolicznych, prędkości charakterystyk są skończonymi liczbami rzeczywistymi. Układy paraboliczne pozwalają na przemieszczanie się zaburzeń z nieskończenie wielką prędkością. Dla

układów eliptycznych charakterystyki są zespolone. W tym przypadku to, co się dzieje w danej chwili, zależy od tego, co się będzie działo. Zagadnienia na warunki początkowe opisane układem równań eliptycznych są źle sformułowane (ang. ill posed), [17,18].

Wracając do analizy małych zaburzeń zajmiemy się zagadnieniem stabilności modelu (1). O stabilności modelu, czyli jego zdolności tłumienia zaburzeń $\delta\sigma_l$ po czasie t zdążającym do nieskończoności, decydują zespolone pierwiastki $\omega(k)$ (przy czym k jest rzeczywiste), które pochodzą z rozwiązania zależności dyspersyjnej (2a). Warunek stabilności modelu jest spełniony wtedy, gdy urojona część $\omega(k)$ jest nie większa od zera, $Im(\omega) \leq 0$. W szczególności gdy $Im(\omega) = 0$ układ posiada neutralną stabilność, tzn. że zaburzenia rozchodzą się bez tłumienia i bez wzmocnienia.

Zależność (2) rzuca pewne światło na zagadnienie dyspersyjności modeli. Widzimy, że dla badanej klasy modeli (1) występują dwa źródła dyspersyjności. Jedno źródło tkwi w nieliniowości równań, gdyż $A_{ij} = A_{ij}(\sigma_l)$ i $B_{ij} = B_{ij}(\sigma_l)$. Drugie pochodzi stąd, że wektor zewnętrznych wymuszeń C_i jest funkcją wektora stanu. Ten fakt może prowadzić do powstania procesów ewolucyjnych o inercyjnym charakterze zmian składowych wektora stanu σ_l . Przykładem tego typu źródła może być równanie

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = -\frac{\sigma_i - \sigma_i^0}{\Theta}, \quad (4)$$

które często występuje w modelach przepływów nierównowagowych [8]. Przy tej okazji należy zwrócić uwagę na fakt, że współczynniki A_{ij} i B_{ij} po rozwinięciu w szereg Fouriera, tracą swoją nieliniowość. Dlatego analizując nieliniowy model przepływu możemy mówić o dyspersyjności, która pojęciowo jest związana wyłącznie z równaniami liniowymi. Jak wynika z szacowania rzędów wielkości [15], wpływ nieliniowości na prędkość rozchodzenia się zaburzeń staje się istotny dopiero wówczas, gdy zmiana prędkości przepływu niezaburzonego na odcinku równym długości fali jest tego samego rzędu co prędkość dźwięku. Dlatego w większości przypadków dyspersyjny wpływ nieliniowości można pominąć. Wobec tego decydującą rolę odgrywają procesy inercyjne, których zadziałanie wymaga skończonego czasu. Jak widać z równań (2) nie mają one wpływu na prędkość zaburzeń o nieskończenie wielkich częstotliwościach, gdzie czas działania zmierza do zera. Wyraźnie jednak wpływają na propagację fal o skończonych częstotliwościach stając się tym samym źródłem dyspersyjności. Istnieje przypuszczenie, że procesy inercyjne działają zawsze w kierunku obniżenia prędkości propagacji zaburzeń. Stąd spotykane zależności dyspersyjne otrzymane za pomocą metody małych zaburzeń są zawsze monotonicznie rosnące wraz z częstotliwością tak jak to pokazano na rysunku 1. Przedstawione powyżej ogólne wnioski wynikające z analizy małych zaburzeń nałożonych na pewną klasę modeli zostaną zilustrowane szczegółowymi przykładami.

3. Analiza modelu dwupłynowego

Jednowymiarowe, ciągle modele przepływu dwufazowego tworzone są na bazie pełnego modelu dwupłynowego. Zakładając, że średnia w przekroju kanału wartość iloczynu wielkości zależnych jest równa iloczynowi wartości średnich i pomijając napięcie powierzchniowe oraz człony wyższego rzędu odpowiedzialne za przewodzenie ciepła wzdłuż przepływu, możemy zapisać [19] po trzy równania bilansu, kolejno masy, pędu i energii dla każdej z faz w postaci

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_k \rho_k w_k) - \Gamma_k = -\alpha_k \rho_k w_k \frac{\dot{A}}{A}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k w_k) + w_k \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_k \rho_k w_k) + \alpha_k \rho_k w_k \frac{\partial w_k}{\partial z} + \alpha_k \frac{\partial p}{\partial z} - MV_k = \\ = -\tau - \alpha_k \rho_k w_k^2 \frac{\dot{A}}{A} - \alpha_k \rho_k g \cos \phi, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\alpha_k \rho_k \left(h_k + \frac{w_k^2}{z} \right) \right] - \alpha_k \frac{\partial p}{\partial t} + w_k \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha_k \rho_k \left(h_k + \frac{w_k^2}{z} \right) \right] + \\ + \alpha_k \rho_k \left(h_k + \frac{w_k^2}{z} \right) \frac{\partial w_k}{\partial z} - MH_k = \\ = Q_k - \alpha_k \rho_k w_k g \cos \phi - \alpha_k \rho_k w_k \left(h_k + \frac{w_k^2}{z} \right) \frac{\dot{A}}{A}, \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie $\dot{A} = \frac{dA}{dz}$, Γ_k , MV_k , MH_k są członami odpowiedzialnymi odpowiednio za całkowitą wymianę masy, pędu i energii pomiędzy fazami. Powyższy model jest całkowicie symetryczny względem faz. Wstawiając w miejsce k (od tego rozdziału nie stosujemy umowy sumacyjnej) oznaczenie L lub G otrzymujemy bilanse odpowiednio dla cieczy lub gazu.

Calkowity przyrost pędu w fazie k spowodowany oddziaływaniem z drugą fazą MV_k wynika z przyrostu masy fazy k , jak i z bezpośredniej wymiany pędu, np. poprzez tarcie pomiędzy fazami.

Stąd możemy napisać

$$MV_k = T_k + \Gamma_k w_{ki}. \quad (8)$$

Analogicznie przebiega wymiana energii w fazie. Rośnie ona na skutek przyrostu masy fazy k , przyrostu jej pędu ($dE = wd\rho$) i bezpośredniej wymiany energii wewnętrznej

$$MH_k = \Gamma_k(h_{ki} + \frac{w_{ki}^2}{z}) + T_k w_{ki} + E_k. \quad (9)$$

Po uwzględnieniu zależności (8), (9) można wyodrębnić czyste bilanse pędu i energii wewnętrznej. Model przybiera wtedy postać

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_k \rho_k w_k) - \Gamma_k = -\alpha_k \rho_k w_k \frac{\dot{A}}{A}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k \rho_k \frac{\partial w_k}{\partial t} + \alpha_k \rho_k w_k \frac{\partial w_k}{\partial z} + \alpha_k \frac{\partial p}{\partial z} - T_k - \Gamma_k(w_{ki} - w_k) = \\ = -\tau_k - \alpha_k \rho_k g \cos \phi, \end{aligned} \quad (11)$$

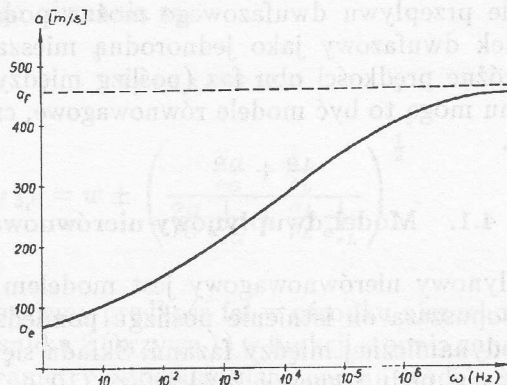
$$\begin{aligned} \alpha_k \rho_k \frac{\partial h_k}{\partial z} + \alpha_k \rho_k w_k \frac{\partial h_k}{\partial z} - \alpha_k \frac{\partial p}{\partial t} - \alpha_k w_k \frac{\partial p}{\partial z} - E_k - T_k(w_{ki} - w_k) + \\ + \Gamma(h_{ki} - h_k) - \frac{\Gamma_k}{2}(w_{ki} - w_k)^2 = Q_k + w_k \tau_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Przedstawione powyżej równania zachowania znane są już od dawna. Kluczowym problemem, przy stosowaniu tych równań do badania jednowymiarowych przepływów dwufazowych, staje się więc odpowiednie zamodelowanie procesów wymiany masy, pędu i energii pomiędzy fazami, a więc określenie Γ_k , T_k i E_k .

Jak wykazują badania eksperymentalne [20] ośrodki dwufazowe są dyspersyjne. Prędkości rozchodzenia się zaburzeń ciśnienia są zależne od częstości. Typowy przebieg takiej zależności obliczony na podstawie modelu dwupłynowego [15] przedstawia rysunek 1. Prędkość dźwięku rośnie monotonicznie wraz z częstością od prędkości równowagowej a_e , aż do tzw. prędkości zamrożonej a_f , do której zmierza asymptotycznie.

Dla fali nieskończenie wolno zmiennej ($\omega \rightarrow 0$) inercyjne człony wektora wymuszeń C_i zawsze zdążą doprowadzić ośrodek do stanu lokalnej równowagi termodynamicznej. Tak więc biegnąca fala porusza się poprzez kolejne położenie lokalnej równowagi termodynamicznej. Dla fali nieskończenie szybko zmiennej ($\omega \rightarrow \infty$) człony inercyjne C_i nie są w stanie zareagować i o prędkości fali decydują jedynie człony nieinercyjne reprezentowane przez macierze A_{ij} i B_{ij} . Matematycznym odbiciem tego faktu jest zależność prędkości charakterystyk jedynie od współczynników przy pochodnych składowych wektora stanu, tj. wyrazów reprezentujących zjawiska nieinercyjne

$$|a_f A_{ij} - B_{ij}| = 0. \quad (13)$$



Rys. 1. Typowy przebieg zależności dyspersyjnej dla modelu ciągłego przepływu dwufazowego.

Jak już wspomniano wcześniej prędkość zamrożona a_f określa warunki zadławienia przepływu. Jej precyzyjne wyznaczenie jest zatem bardzo ważne. Zależy ona jedynie od składników różniczkowych równań zachowania. Ponieważ równania te są znane, dla obliczenia prędkości a_f wystarczy podać zależności na wymianę masy, pędu i energii Γ_k, T_k, E_k pomiędzy fazami. Wiele wskazuje na to, że produkcja masy i przewodzenie ciepła, podobnie jak np. tarcie o ścianki przewodu, z natury swojej są procesami inercyjnymi. Odparowanie masy wody, czy transport ciepła wymaga skończonego czasu. Oznacza to, że w przepływie dwufazowym na prędkość zamrożoną, będącą największą prędkością propagacji informacji, wpływa jedynie nieinercyjna wymiana pędu pomiędzy fazami. W takim razie warunki określające prędkość zamrożoną, a tym samym zadławienia przepływu dwufazowego, są takie same w przypadku ośrodka jednoskładnikowego i dwuskładnikowego. Opracowanie dobrej teorii międzyfazowej wymiany pędu jest zadaniem bardzo trudnym, ponieważ zjawiska zależą silnie od struktury przepływu. Uwzględnienie tego faktu wymaga rozszerzenia analizy poza ramy modelu jednowymiarowego. Dokładne określenie członu wymiany pędu T_k wydaje się być kluczem do precyzyjnego wyznaczania prędkości zamrożonej. Obecnie jednym z najczęściej stosowanych modeli, który uwzględnia wpływ wymiany pędu, jest tzw. model masy dołączonej [21].

4. Przegląd ciągłych modeli przepływów dwufazowych

Jak wspomniano poprzednio prędkość zamrożona a_f stanowi, w przypadku braku rezonansu, największą możliwą prędkość rozprzestrzeniania się małych zaburzeń w przepływie. W rozdziale niniejszym zaprezentowano próbę analizy wpływu rozmaitych założeń na prędkość a_f . Analiza taka dostarcza wielu ciekawych informacji o falowej naturze modeli przepływu.

Ciągle modele przepływu dwufazowego można podzielić na jednorodne — traktujące ośrodek dwufazowy jako jednorodną mieszaninę i dwupłynowe — uwzględniające różne prędkości obu faz (poślizg między fazami). W zależności od równania stanu mogą to być modele równowagowe, częściowo równowagowe i nierównowagowe.

4.1. Model dwupłynowy nierównowagowy

Model dwupłynowy nierównowagowy jest modelem najbardziej ogólnym z badanej klasy. Dopuszcza on istnienie poślizgu pomiędzy fazami i nie zakłada równowagi termodynamicznej między fazami. Składa się z sześciu równań będących bilansami masy, pędu i energii każdej fazy (10 ÷ 12). Dodatkowo istnieją oddzielne dla pary i cieczy równania stanu postaci

$$\rho_k = \rho_k(p, h_k), \quad (14)$$

gdzie ciśnienie P jest jednakowe dla obu faz. Prędkość dźwięku w każdej z faz z osobna można wyrazić za pomocą wcześniej omawianej zależności termodynamicznej

$$a_{ek} = \left[\frac{1}{\rho_k} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial h_k} \right)_p + \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial p} \right)_{h_k} \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho_k} \right)_{s_k} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Zakładając, że człony wymiany masy, pędu i energii pomiędzy fazami nie zawierają składników nieinercyjnych (różniczkowych), z wyprowadzonej zależności dyspersyjnej (2) otrzymujemy wyrażenie na prędkość zamrożoną a_f w postaci

$$(a_f - w_L)(a_f - w_G) \left[(a_f - w_G)^2 (a_f - w_L)^2 (\alpha_L \rho_G \frac{1}{a_{eL}^2} + \alpha_G \rho_L \frac{1}{a_{eG}^2}) + \right. \\ \left. - \alpha_G \rho_L (a_f - w_L)^2 - \alpha_L \rho_G (a_f - w_G)^2 \right] = 0. \quad (16)$$

Zakładając ponadto, iż w danym momencie prędkości obu faz są takie same $w_G = w_L = w$ otrzymujemy

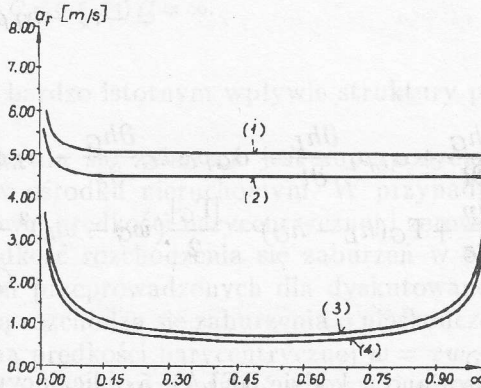
$$(a_f - w)^4 \left[(a_f - w)^2 (\alpha_L \rho_G \frac{1}{a_{eL}^2} + \alpha_G \rho_L \frac{1}{a_{eG}^2}) - (\alpha_G \rho_L + \alpha_L \rho_G) \right] = 0. \quad (17)$$

Pierwiastkami powyższego równania są

$$a_{f\ 1,2,3,4} = w,$$

$$a_{f\ 5,6} = w \pm \left(\frac{\frac{\alpha_G}{\rho_G} + \frac{\alpha_L}{\rho_L}}{\frac{\alpha_G}{\rho_G} \frac{1}{a_{eG}^2} + \frac{\alpha_L}{\rho_L} \frac{1}{a_{eL}^2}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Przyjmując $w = 0$ otrzymujemy prędkość fal w ośrodku nieruchomym. Zależność (18) przedstawiono na rysunku 2 (krzywa 1) w funkcji stopnia zapelnienia $\alpha = \alpha_G$. Do obliczeń przyjęto parametry odpowiadające parze i wodzie z linii nasycenia, pod ciśnieniem $p = 10^6$ Pa. Jak widać, w całym zakresie zmienności α prędkość propagacji zaburzeń jest większa od prędkości dźwięku w parze a_{eG} . Wzór (18) stanowi swego rodzaju średnią ważoną prędkości a_G i a_L . Tak więc jedynym mechanizmem obniżenia prędkości zamrożonej w mieszaninie dwufazowej poniżej prędkości dźwięku każdego ze składników może być nieinercyjna wymiana masy, pędu bądź energii pomiędzy fazami. Dla granicznych stopni zapelnienia prędkość a_f zdąża do prędkości dźwięku każdej z faz, tzn. do a_{eG} gdy $\alpha_G \rightarrow 1$ i a_{eL} gdy $\alpha_L \rightarrow 1$.



Rys. 2. Prędkość zamrożona w funkcji stopnia zapelnienia ($u = 0$, $p = 10^6$ Pa)

- (1) Model dwupłynowy nierównowagowy bez masy dołączonej,
- (2) Model dwupłynowy częściowo równowagowy bez masy dołączonej,
- (3) Model jednorodny nierównowagowy,
- (4) Model jednorodny częściowo równowagowy.

4.2. Model dwupłynowy częściowo równowagowy

W modelu tym zakłada się, że jeden ze składników mieszaniny (załóżmy, że jest nim para) znajduje się w stanie nasycenia. Wówczas równania stanu dla pary

redukują się do postaci

$$\begin{aligned}\rho_G &= \rho_G(p), \\ h_G &= h_g(p), \\ T_G &= T_G(p).\end{aligned}\tag{19}$$

Jest to równoważne z założeniem, że wymiana ciepła w kierunku doprowadzającym parę do stanu nasycenia ma charakter niebezpiecznościowy (nieinercyjny) i jest nieskończenie wielka. W konsekwencji tego założenia, model dwupłynowy upraszcza się do pięciu równań. Przyjęto, że równania energii będące sumą dwóch bilansów jest wspólne dla obu faz. W ten sposób model przyjmuje następującą postać

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_k \rho_k w_k) - \Gamma_k = \alpha_k \rho_k w_k \frac{\dot{A}}{A},\tag{20}$$

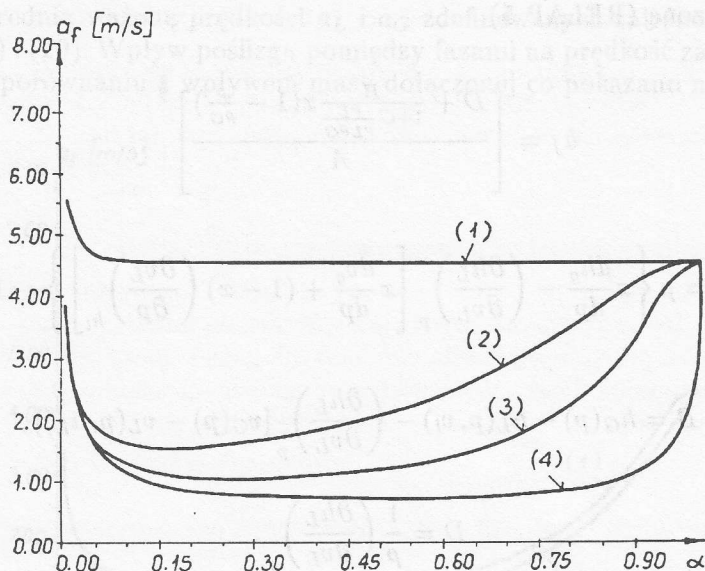
$$\begin{aligned}\alpha_k \rho_k \frac{\partial w_k}{\partial t} + \alpha_k \rho_k w_k \frac{\partial w_k}{\partial z} + \alpha_k \frac{\partial p}{\partial z} - T_k - \Gamma_k (w_{ki} - w_k) = \\ = -\tau_k - \alpha_k \rho_k g \cos \phi,\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}\alpha_G \rho_G \frac{\partial h_G}{\partial t} + \alpha_L \rho_L \frac{\partial h_L}{\partial t} - \alpha_G \rho_G w_G \frac{\partial h_G}{\partial z} - \alpha_L \rho_L w_L \frac{\partial h_L}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial t} + \\ + (\alpha_G w_G + \alpha_L w_L) \frac{\partial p}{\partial z} + \Gamma_G (h_L - h_G) - \frac{|\Gamma_G|}{2} (w_G - w_L)^2 - T_L (w_G - w_L) = \\ = Q + w_G \tau_G + w_L \tau_L.\end{aligned}\tag{22}$$

Taki model zastosowano w kodzie RELAP 5 obliczającym awarie systemu chłodzenia reaktorów atomowych [22]. Dopuszczono w nim nieinercyjną (obok inercyjnej) wymianę pędu T_k pomiędzy fazami uwzględniając koncepcję masy dołączonej

$$T_k = C \alpha_L \alpha_G \rho \left[\frac{\partial w_L}{\partial t} - \frac{\partial w_G}{\partial t} + w_G \frac{\partial w_L}{\partial z} - w_L \frac{\partial w_G}{\partial z} \right],\tag{23}$$

do fazy nieciągłej. Wielkość C jest tu stałą zależną od kształtu opływanych ciał czyli od struktury przepływu; $C = 0,5$, w przypadku opływu pęcherzyków kulistych [23]. Jak pokazano na rysunku 3 wpływ nieinercyjnej wymiany pędu na prędkość zamrożoną jest bardzo silny. Różnice pomiędzy prędkością zamrożoną dla przepływu rozwarstwowanego ($C = 0$) i homogenicznego ($C = \infty$) są duże



Rys. 3. Prędkość zamrożona w funkcji stopnia zapelnienia dla modelu dwupłynowego, częściowo równowagowego (RELAP 5) z masą dołączoną ($u = 0, p = 10^6$ Pa)

(1) $C = 0$, (2) $C = 0,1$, (3) $C = 0,5$, (4) $C = \infty$.

Potwierdza to tezę o bardzo istotnym wpływie struktury przepływu na warunki zadławienia.

Prędkość rozchodzenia się zaburzeń jest superpozycją prędkości ośrodka i prędkości zaburzeń w ośrodku nieruchomym. W przypadku przepływu dwufazowego przyjęcie zerowej prędkości barycentrycznej i zerowego poślizgu prowadzi do zależności na prędkość rozchodzenia się zaburzeń w ośrodku nieruchomym. Jak wynika z obliczeń przeprowadzonych dla dyskutowanego modelu, prędkość zamrożona a_f , z którą rozchodzą się zaburzenia o nieskończenie wielkiej częstotliwości jest prostą sumą prędkości barycentrycznej $w = xw_G + (1-x)w_L$ i członu od niej niezależnego co można przedstawić w postaci równania

$$a_{f1,2} = w + \hat{a}_{f1,2}. \quad (24)$$

Wpływ poślizgu $u = w_G - w_L$ na $\hat{a}_f$ jest niewielki, rysunek 4, i polega na asymetryzowaniu prędkości $\hat{a}_f$ względem kierunku przepływu. W przypadku braku poślizgu ($u = 0$) prędkość rozchodzenia się zaburzeń w górę i w dół przepływu dana jest symetryczną zależnością

$$a_f = w \pm \hat{a}_f, \quad (25)$$

gdzie $\hat{a}_f$ jest prędkością zmrożoną w ośrodku nieruchomym. Dla badanego modelu

z masą dołączoną (RELAP 5)

$$\hat{a}_f = \left[\frac{D + \frac{B}{1+C \frac{\rho_L}{\rho_L \rho_G}} x \left(1 - \frac{\rho}{\rho_G}\right)}{A} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (26)$$

gdzie

$$A = \rho \left\{ x \frac{dh_g}{dp} - \left(\frac{\partial h_L}{\partial v_L} \right)_p \left[x \frac{dv_g}{dp} + (1-x) \left(\frac{\partial v_L}{\partial p} \right)_{h_L} \right] \right\} - 1,$$

$$B = h_G(p) - h_L(p, v_l) - \left(\frac{\partial h_L}{\partial v_L} \right)_p [v_G(p) - v_L(p, h_L)],$$

$$D = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial h_L}{\partial v_L} \right)_p. \quad (27)$$

Przyjęcie założenia, że para znajduje się na linii nasycenia prowadzi do innych niż poprzednio warunków granicznych w ośrodku gazowym gdy $x \rightarrow 1$. Na granicy z cieczą modele nierównowagowy i częściowo równowagowy zachowują się identycznie a mianowicie

$$\hat{a}_f^2(x \rightarrow 0) = a_L^2 = \frac{-v_L \left(\frac{\partial h_L}{\partial v_L} \right)_p}{\frac{1}{v_L} \left(\frac{\partial h_L}{\partial v_L} \right)_p \left(\frac{\partial v_L}{\partial p} \right)_{h_L} - 1} = a_{eL}^2, \quad (28)$$

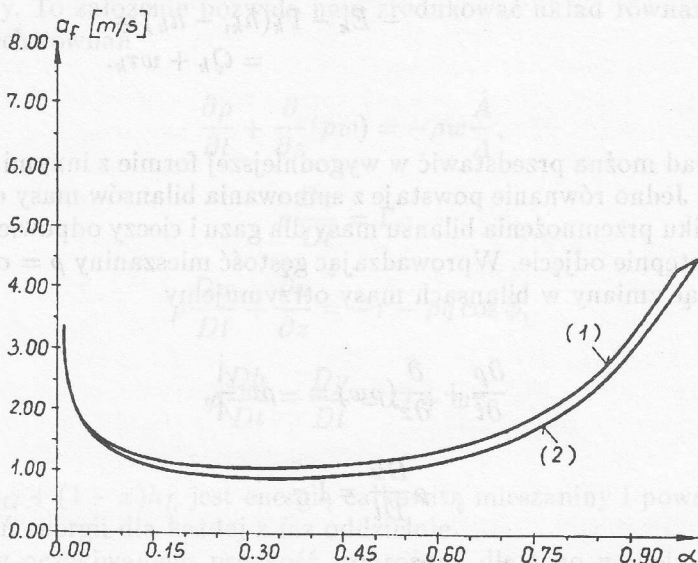
co odpowiada prędkości dźwięku w samej wodzie. Dla gazu ($x \rightarrow 1$) otrzymujemy następujący wynik

$$\hat{a}_f^2(x \rightarrow 1) = a_G^2 = \frac{v_G \left(\frac{\partial h_L}{\partial v_L} \right)_p}{\frac{1}{v_G} \left[\frac{\partial h_G}{\partial p} - \frac{dh_G}{dp} \left(\frac{\partial h_L}{\partial v_L} \right)_p \right] - 1} \neq a_{eG}^2. \quad (29)$$

Otrzymana w ten sposób prędkość jest niższa od prędkości dźwięku w parze $a_{eG}^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S$ i wykazuje zależność od parametrów termodynamicznych cieczy.

Na rysunku 3 przedstawiono zależność (26) dla $C = 0$ i $C = \frac{1}{2}$ co odpowiada kolejno przepływowi rozwarstwowemu i pęcherzykowemu. W przypadku braku nieinercyjnej wymiany pędu pomiędzy fazami ($C = 0$) prędkość zamrożona a_f

jest nadal średnią ważoną prędkości a_L i a_G zdefiniowanych zależnościami odpowiednio (28) i (29). Wpływ poślizgu pomiędzy fazami na prędkość zamrożoną jest niewielki w porównaniu z wpływem masy dołączonej co pokazano na rysunku 4.



Rys. 4. Prędkość zamrożona w funkcji stopnia zapelnienia dla modelu dwupłynowego, częściowo równowagowego z masą dołączoną ($C = 0.5$, $p = 10^6$ Pa)
(1) $u = 0$, (2) $u = 50$ m/s.

4.3. Model jednorodny nierównowagowy

Zakładając, że obie fazy poruszają się z tę samą średnią prędkością w , rozumiemy, że wymiana pędu pomiędzy fazami jest nieinercyjna i nieskończenie wielka. W tym przypadku możemy zsumować równanie pędu dla obu faz. Otrzymujemy wówczas model jednorodny nierównowagowy w postaci poniżej zapisanych równań bilansu masy i energii oraz jednego równania pędu

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_k \rho_k w_k) - \Gamma_k = -\alpha_k \rho_k w \frac{\dot{A}}{A}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} (\alpha_G \rho_G + \alpha_L \rho_L) \frac{\partial w}{\partial t} + w(\alpha_G \rho_G + \alpha_L \rho_L) \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \\ = -\tau_G - \tau_L - (\alpha_G \rho_G + \alpha_L \rho_L) g \cos \phi, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k \rho_k \frac{\partial h_k}{\partial t} + \alpha_k \rho_k w \frac{\partial h_k}{\partial z} - \alpha_k \frac{\partial p}{\partial t} - \alpha_k w \frac{\partial p}{\partial z} + \\ - E_k - \Gamma_k (h_{ki} - h_k) = \\ = Q_k + w \tau_k. \end{aligned} \quad (32)$$

Powyższy układ można przedstawić w wygodniejszej formie z innymi równaniami bilansu masy. Jedno równanie powstaje z sumowania bilansów masy dla obu faz a drugie w wyniku przemnożenia bilansu masy dla gazu i cieczy odpowiednio przez x i $(1-x)$, a następnie odjęcie. Wprowadzając gęstość mieszaniny $\rho = \alpha_L \rho_L + \alpha_G \rho_G$ i uwzględniając zmiany w bilansach masy otrzymujemy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = -\rho w \frac{\dot{A}}{A}, \quad (33)$$

$$\rho \frac{Dx}{Dt} = \Gamma_G, \quad (34)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial z} = -\tau - \rho g \cos \phi, \quad (35)$$

$$\alpha_k \rho_k \frac{Dh_k}{Dt} - \alpha_k \frac{Dp}{Dt} - E_k - \Gamma_k (h_{ki} - h_k) = Q_k + w \tau_k, \quad (36)$$

gdzie

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + w \frac{\partial f}{\partial z},$$

jest pochodną materiałową (substancjalną).

Model (33 ÷ 36) jest modelem nierównowagowym uzupełnionym równaniami stanu (14). Prędkość zamrożona dla tego modelu wynosi

$$\hat{a}_f = w \pm \left[\frac{1}{\rho \left(\frac{\alpha_L}{\rho_L} \frac{1}{a_{eL}^2} + \frac{\alpha_G}{\rho_G} \frac{1}{a_{eG}^2} \right)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (37)$$

i została przedstawiona na rysunku 2. Zależność (37) w granicznych przypadkach zdąża do prędkości w ośrodkach jednofazowych dla $\alpha_G \rightarrow 0$ i $\alpha_G \rightarrow 1$. Pomijając bardzo małe stopnie suchości, $\hat{a}_f$ jest zawsze niższa od prędkości dźwięku w parze a_G .

4.4. Model jednorodny częściowo równowagowy

Postulując dodatkowe założenia do równań stanu fazy parowej analogicznie jak w przypadku 4.2 możemy rozważyć model jednorodny (33 ÷ 36) częściowo równowagowy. To założenie pozwala nam zredukować układ równań w rozdziale 4.3 do czterech równań

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = -\rho w \frac{\dot{A}}{A}, \quad (38)$$

$$\rho \frac{Dx}{Dt} = \Gamma_G, \quad (39)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial z} = -\tau - \rho g \cos \phi, \quad (40)$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = Q + w\tau, \quad (41)$$

gdzie $h = xh_G + (1-x)h_L$ jest energią całkowitą mieszaniny i powstaje z sumowania równań energii dla każdej z faz oddzielnie.

Zgodnie z oczekiwaniem prędkość zamrożona dla tego modelu, przy $w = 0$ wynosi

$$\hat{a}_f = \left[\frac{v \left(\frac{\partial h_L}{\partial v_L} \right)_p}{\frac{1}{v} \left\{ x \frac{dh_G}{dp} - \left(\frac{\partial h_L}{\partial v_L} \right)_p \left[x \frac{dv_G}{dp} + (1-x) \left(\frac{\partial v_L}{\partial p} \right)_{h_L} \right] \right\} - 1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (42)$$

i pokrywa się z prędkością obliczoną w punkcie 4.2 dla nieskończenie wielkiej masy dołączonej, rysunek 2.

Powyższy model cechuje się wielką prostotą ponieważ eliminuje kłopotliwe do określenia człony wymiany pędu i energii pomiędzy fazami T_k i E_k .

4.5. Model jednorodny równowagowy

Ostatnim i najprostszym z analizowanych modeli jest model jednorodny obustronnie równowagowy. Zakłada on nieinercyjną i nieskończenie wielką wymianę masy, pędu i energii pomiędzy fazami. Obie fazy znajdują się w stanie nasycenia. Wtedy równanie stanu przyjmuje postać $x = x(p, h)$. Równanie (39) z poprzedniego modelu staje się niepotrzebne i model przybiera postać

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = -\rho w \frac{\dot{A}}{A}, \quad (43)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial z} = -\tau - \rho g \cos \phi, \quad (44)$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = Q + w\tau. \quad (45)$$

Dla tego modelu prędkość zamrożona wynosi

$$\hat{a}_f = w \pm \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s^{\frac{1}{2}} = w \pm \left[\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_h + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial h} \right)_p} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (46)$$

gdzie

$$\frac{1}{\rho} = v = xv_G(p) + (1-x)v_L(p),$$

$$x = \frac{h - h_L(p)}{h_G(p) - h_L(p)}.$$

Prędkość $\hat{a}_f$ w tym modelu jest równoważna prędkości dźwięku w modelu homogenicznym (43÷45) pozbawionym sił wymuszających tzn. prawych stron układu równań. Dla tak uproszczonego modelu homogenicznego możemy mówić o prędkości dźwięku ponieważ układ tych równań można sprowadzić do równania falowego

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{\hat{a}_f} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0.$$

Uwzględniając jednak siły wymuszające, model (43÷45) ma własności dyspersyjne, gdyż wektor C_i układu równań jest zależny od wektora stanu. Z tego też względu prędkość równowagowa jednorodnego modelu równowagowego $\hat{a}_e$, jest mniejsza od prędkości zamrożonej. Różnica może być niewielka lub wręcz pomijalnie mała jeśli przyjmiemy, że $\frac{\dot{A}}{A} = \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} = 0(\epsilon)$, $\epsilon \ll 1$ oraz $w = 0(\epsilon)$ natomiast $\tau = \frac{1}{2} w^2 \rho f \frac{C_r}{A}$, gdzie C_r jest obwodem kanału. W takim wypadku jedynym członem powodującym dyspersję byłby człon związany z siłą masową ρg .

Przebieg a_f w funkcji α opisany równaniem (46) przedstawiono na rysunku 5. Podobnie jak dla wszystkich poprzednich modeli częściowo równowagowych, tak i tutaj, gdy założono, że obie fazy są w stanie nasycenia, prędkości $\hat{a}_f$ na granicach stosowania modelu tzn. dla $\alpha_G \rightarrow 1$ i $\alpha_G \rightarrow 0$ jest różna odpowiednio od a_{eG} i a_{eL} . O różnicach w odniesieniu do a_{eG} wspomniano już wcześniej przy okazji wprowadzenia założenia o tym, że gaz ma własności pary na linii nasycenia.

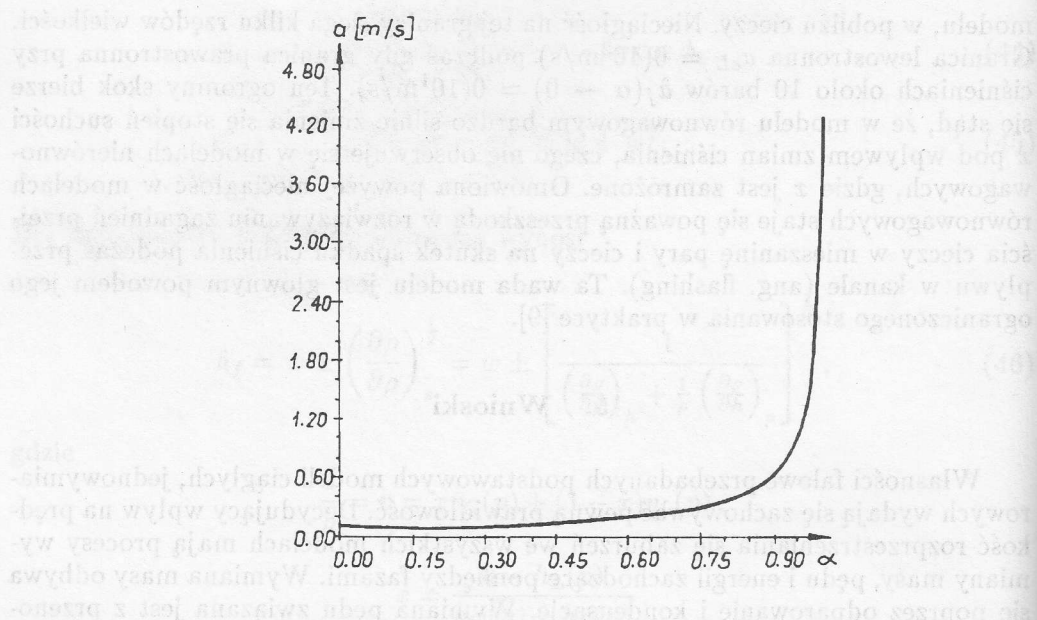
Różnice między $\hat{a}_f(\alpha_G \rightarrow 1)$ i a_{eG} można uważać za niewielkie. Obie prędkości są tego samego rzędu wielkości. Inaczej przedstawia się sytuacja na drugiej granicy

modelu, w pobliżu cieczy. Nieciągłość na tej granicy sięga kilku rzędów wielkości. Granica lewostronna $a_{eL} = 0(10^3 \text{ m/s})$ podczas gdy granica prawostronna przy ciśnieniach około 10 barów $\hat{a}_f(\alpha \rightarrow 0) = 0(10^1 \text{ m/s})$. Ten ogromny skok bierze się stąd, że w modelu równowagowym bardzo silnie zmienia się stopień suchości x pod wpływem zmian ciśnienia, czego nie obserwuje się w modelach nierównowagowych, gdzie x jest zamrożone. Omówiona powyżej nieciągłość w modelach równowagowych staje się poważną przeszkodą w rozwiązywaniu zagadnień przejścia cieczy w mieszaninę pary i cieczy na skutek spadku ciśnienia podczas przepływu w kanale (ang. flashing). Ta wada modelu jest głównym powodem jego ograniczonego stosowania w praktyce [9].

5. Wnioski

Własności falowe przebadanych podstawowych modeli ciągłych, jednowymiarowych wydają się zachowywać pewną prawidłowość. Decydujący wpływ na prędkość rozprzestrzeniania się zaburzeń we wszystkich modelach mają procesy wymiany masy, pędu i energii zachodzące pomiędzy fazami. Wymiana masy odbywa się poprzez odparowanie i kondensację. Wymiana pędu związana jest z przeniesieniem tej cechy wraz z masą tworzącej lub zanikającej fazy jak również poprzez naprężenia styczne na powierzchni międzyfazowej prowadzące do różnicy prędkości obu faz. Ten sam wpływ mają naprężenia na ściankach kanału. Wymiana energii podobnie jak pędu odbywa się za pośrednictwem masy jak również poprzez przepływ ciepła na granicach faz a także z zewnątrz. Wszystkie te procesy działają w kierunku obniżenia prędkości fazowej. Mogą mieć charakter oddziaływania z nieskończenie dużą szybkością, bezinercyjnie lub też wymagają pewnego skończonego czasu działania czyli mogą być uważane za człony inercyjne. Procesy bezinercyjne obu faz czy też równowaga termodynamiczna, powodują obniżenie prędkości zamrożonej a tym samym zmniejszenie strumienia zadławienia przepływu dwufazowego. Procesy inercyjne nie wpływają na prędkość zamrożoną jakkolwiek są głównym powodem dyspersyjności ośrodka względem częstości zaburzeń. Obniżają prędkość równowagową a tym samym prędkość fazową w zakresie niskich częstości zaburzeń, co uwidacznia się na rysunku 1.

Spośród analizowanych tutaj modeli największą możliwą prędkość propagacji małych zaburzeń przewiduje model dwupłynowy nierównowagowy bez masy dołączonej, którego własności pokazano na rysunku 2. Prędkość zamrożona w przepływie dwufazowym spełniającym założenia modelu nierównowagowego dwupłynowego jest średnią ważoną prędkości dźwięku w cieczy i w parze i zawsze jest większa od tej ostatniej. Najmniejszą możliwą prędkość propagacji przewiduje model jednorodny równowagowy, rysunek 5, w którym procesy wymiany masy, pędu i energii pomiędzy fazami przebiegają bezinercyjnie. Skutkiem tego system dwufazowy może mieć charakter dyspersyjny tylko poprzez działanie sił zewnętrznych i efekty nieliniowe. Te ostatnie można praktycznie pominąć. Wszystkie pozostałe modele przewidują prędkości zamrożone mieszczące się w granicach wyznaczonych przez dwa wspomniane powyżej modele.



Rys. 5. Prędkość dźwięku w funkcji stopnia zapelnienia dla modelu jednorodnego, równowagowego ($p = 10^6 \text{ Pa}$).

Ważnym wnioskiem wypływającym z przeprowadzonej analizy jest stwierdzenie faktu, że zbliżone warunki zadławienia przepływu, które mogą być łatwo zweryfikowane na drodze eksperymentalnej, można uzyskać poprzez zastosowanie różnych modeli szczególnie w zakresie niskich stopni zapelnienia α odpowiadających przepływowi pęcherzykowemu. Oznacza to, że podobne prędkości zamrożone $\hat{a}_f$ można uzyskać poprzez zastosowanie modelu dwupłynowego z masą dołączoną, modelu jednorodnego nierównowagowego i modelu jednorodnego częściowo nierównowagowego co wyraźnie widać z rysunków 2, 3 i 4. Ten fakt komplikuje możliwości poznawcze. Wydaje się jednak na podstawie badań eksperymentalnych Réocreux [9,24], że decydujący wpływ na zachowanie się przepływu dwufazowego pary i cieczy mają procesy inercyjnej wymiany masy. W świetle powyższego model jednorodny, częściowo równowagowy może z powodzeniem opisać ilościowo zachowanie się przepływu w warunkach zadławienia i jednocześnie będzie w zgodzie z fizyczną interpretacją zjawisk zachodzących między fazami.

Praca wpłynęła do Redakcji we wrześniu 1989 r.

Literatura

- [1] Z. Bilicki, *Dwufazowe przepływy krytyczne w dyszach (analiza teoretyczna)*. Zeszyty Naukowe IMP PAN, 281/1188/89, 1989.

- [2] W. J. Prosnak, *Mechanika Płynów*, tom II. PWN, Warszawa 1971.
- [3] H. W. Liepmann and A. Roshko, *Elements of Gas Dynamics*. Wiley, New York 1957.
- [4] L. Landau, E. Lifszic, *Mechanika Ośrodków Ciekłych*. PWN. Warszawa 1958, §63 i §78.
- [5] J. Kestin, *A Course in Thermodynamics*, Vol. II. Hemisphaera Publishing Corp., New York 1979, §21.17.
- [6] L. Mandelstam i M. A. Leontovitch, *K teorii pogłaśczenia звука v zhidkostjah*. ŽETF 7, 1937, str. 438-449.
- [7] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley, New York 1974.
- [8] Z. Bilicki, *Rozchodzenie się zaburzeń w przepływie dwufazowym z uwzględnieniem nierównowagowości*. Zeszyty Naukowe IMP PAN, 274/1187/88, 1988.
- [9] Z. Bilicki, J. Kestin, M. M. Pratt, *A reinterpretation of the Moby Dick experiment*. Przyjęte do druku w Journal of Fluid Engineering Trans., ASME 1990.
- [10] Z. Bilicki, *Własności dyspersyjnego modelu nierównowagowego w przepływach para-ciecz*. Przyjęte do druku w Zeszytach Naukowych IMP PAN, 1990.
- [11] A. Szaniawski, *Rozchodzenie się małych zaburzeń w mieszaninie cieczy z pęcherzykami gazu*. Rozprawy Inżynierskie LXXI, 5, 1957, str. 269-330.
- [12] G. K. Batchelor, *Compression waves in a suspension of gas bubbles in a liquid*, Fluid Dynamisc Transactions, eds. W. Fiszdon, P. Kucharczyk and W. J. Prosnak, 4, PWN, Warszawa 1969, str. 425-445.
- [13] D. Y. Hsieh and M. S. Plesset, *On the propagation of sound in liquid containing bubbles*. Physics of Fluids, 4, 1961, str. 970-974.
- [14] V. E. Nakoryakov, B. G. Pokusaev, I. R. Shreiber and N. A. Pribaturin, *The wave dynamics of a vapour-liquid medium*. Int. J. Multiphase Flow, 14, 1988, str. 655-677.
- [15] K. H. Ardron and R. B. Duffey, *Acoustic wave propagation in a flowing liquid-vapour mixture*. Int. J. Multiphase Flow 4, 1978, str. 303-322.
- [16] R. C. Meccredy and L. J. Hamilton, *The effects of nonequilibrium heat, mass and momentum transfer on two-phase sound speed*. Int. J. Heat Mass Transfer 15, 1972, str. 61-72.
- [17] E. Zauderer, *Partial Differential Equation of Applied Mathematics*. Wiley, New York 1983.
- [18] J. D. Ramshaw, J. A. Trapp, *Characteristics, stability and short- wavelenght phenomena in two-phase flow equation systems*. Nuclear Science and Engineering 66, 1978, str. 378-396.
- [19] J. A. Boure, A. A. Fritte, M. M. Giot, M. L. Réocreux, *Highlights of two -phase critical flow*. Int. J. Multiphase Flow 3, 1976, str. 1-22.
- [20] R. P. Kokernak and C. L. Feldman, *Velocity of sound in two phase flow of R-12*. ASHRAE JI 14, 1972, str. 35-38.
- [21] A. R. D. Thorley and O. C. Wiggert, *The effect of virtual mass on the basic equations for unsteady one-dimensional heterogeneous flows*. Int. J. Multiphase Flow 11, 1985, str. 149-160.

- [22] V. H. Ransom, R. J. Wagner and J. A. Trapp, *The RELAP 5 two - phase fluid model and numerical scheme for economic LWR system simulation*. in Transient Two - Phase Flow eds M. S. Plesset, N. Zuber and I. Catton, Hemisphere Publ. Corp., New York 1983, str. 513-531.
- [23] L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*. 2nd ed. Macmillan, New York 1950.
- [24] M. L. Réocreux, *Contribution a l'etude des debits critiques en ecoulement diphasique eau-vapeur*. Ph. D. thesis, Université Scientifique et Medicale de Grenoble. 1974.

ZAŁĄCZNIK

Analiza małych zaburzeń

Badany jest układ równań (1)

$$A_{ij}(\sigma_l) \frac{\partial \sigma_j}{\partial t} + B_{ij}(\sigma_l) \frac{\partial \sigma_j}{\partial z} + C_i(\sigma_l, z) = 0. \quad (Z-1)$$

Załóżmy, że $\sigma_j^\circ(z, t)$ jest rozwiązaniem układu (1). Pragniemy zbadać odpowiedź układu na małe zaburzenia $\delta \sigma_j(z, t)$ wprowadzone do rozwiązania $\sigma_j^\circ(z, t)$. W tym celu podstawiamy $\sigma_j^\circ = \delta \sigma_j$ do (1).

$$A_{ij}(\sigma_l^\circ + \delta \sigma_l) \frac{\partial \sigma_j^\circ + \delta \sigma_j}{\partial t} + B_{ij}(\sigma_l^\circ + \delta \sigma_l) \frac{\partial \sigma_j^\circ + \delta \sigma_j}{\partial z} + C_i(\sigma_l^\circ + \delta \sigma_l, z) = 0. \quad (Z-2)$$

Rozważana przez nas klasa modeli jest nieliniowa. Nalożone zaburzenie zmienia więc również macierze współczynników A_{ij} , B_{ij} oraz wektor wymuszeń C_i . Zakładając, że $\delta \sigma_j$ są małe rozkładamy A_{ij} , B_{ij} i C_i w szereg Taylora wokół rozwiązania niezaburzonego σ_j° i ograniczamy się do wyrazów liniowych rozwinięcia,

$$A_{ij}(\sigma_l^\circ + \delta \sigma_l) = A_{ij}(\sigma_l^\circ) + \frac{\partial A_{ij}}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^\circ) \delta \sigma_m + 0(\delta \sigma_l^2),$$

$$B_{ij}(\sigma_l^\circ + \delta \sigma_l) = B_{ij}(\sigma_l^\circ) + \frac{\partial B_{ij}}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^\circ) \delta \sigma_m + 0(\delta \sigma_l)^2,$$

$$C_i(\sigma_l^\circ + \delta \sigma_l, z) = C_i(\sigma_l^\circ, z) + \frac{\partial C_i}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^\circ, z) \delta \sigma_m + 0(\delta \sigma_l)^2 \quad (Z-3)$$

Pomijając składniki rzędu $0(\delta\sigma_l)^2$ otrzymujemy

$$\left[A_{ij}(\sigma_l^o) + \frac{\partial A_{ij}}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^o) \delta \sigma_m \right] \frac{\partial \sigma_j^o + \delta \sigma_j}{\partial t} + \left[B_{ij}(\sigma_l^o) + \frac{\partial B_{ij}}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^o) \delta \sigma_m \right] \frac{\partial \sigma_j^o + \delta \sigma_j}{\partial z} + \frac{\partial C_i}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^o, z) \delta \sigma_m = 0. \quad (Z-4)$$

Uwzględniając fakt, że $\sigma^o(z, t)$ jest rozwiązaniem układu (1) dochodzimy do zależności

$$A_{ij}(\sigma_l^o) \frac{\partial \delta \sigma_j}{\partial t} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^o) \delta \sigma_m \frac{\partial \sigma_j^o}{\partial t} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^o) \delta \sigma_m \frac{\partial \delta \sigma_j}{\partial t} + B_{ij}(\sigma_l^o) \frac{\partial \delta \sigma_j}{\partial t} + \frac{\partial B_{ij}}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^o) \delta \sigma_m \frac{\partial \sigma_j^o}{\partial t} + \frac{\partial B_{ij}}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^o) \delta \sigma_m \frac{\partial \delta \sigma_j}{\partial z} + \frac{\partial C_i}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^o, z) \delta \sigma_m = 0. \quad (Z-5)$$

Przyjmując zaburzenia w klasycznej postaci

$$\delta \sigma_l = \delta_l(k) \exp[i(kz - \omega t)] \quad (Z-6)$$

gdzie δ_l jest stałą amplitudą zaburzeń i podstawiając je do (Z-5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} & -A_{ij}(\sigma_l^o) \delta_j i \omega + B_{ij}(\sigma_l^o) \delta_j i k + \frac{\partial A_{ij}}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^o) \frac{\partial \sigma_j^o}{\partial t} \delta_m + \\ & + \frac{\partial B_{ij}}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^o) \frac{\partial \sigma_j^o}{\partial t} \delta_m + \\ & - \frac{\partial A_{ij}}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^o) \delta_j \delta_m i \omega \exp[i(kz - \omega t)] + \\ & + \frac{\partial B_{ij}}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^o) \delta_m \delta_j i k \exp[i(kz - \omega t)] + \frac{\partial C_i}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^o, z) \delta_m = 0. \end{aligned} \quad (Z-7)$$

Składniki 5 i 6 powyższej sumy, zawierające iloczyn $\delta_j \delta_m$, będą mniejsze od pozostałych gdy amplituda małych zaburzeń $\delta_l \rightarrow 0$. Pomijając te dwa składniki i dzieląc równanie przez czynnik $i\omega$ zależność (Z-7) przybiera postać

$$\begin{aligned}
 & A_{ij}(\sigma_l^o)\delta_j - \frac{k}{\omega}B_{ij}(\sigma_l^o)\delta_j + \\
 & + \frac{i}{\omega} \left[\frac{\partial A_{ij}}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^o) \frac{\partial \sigma_j^o}{\partial t} \delta_m + \frac{\partial B_{ij}}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^o) \frac{\partial \sigma_j^o}{\partial z} \delta_m + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial C_i}{\partial \sigma_m}(\sigma_l^o, z) \delta_m \right] = 0. \quad (Z-8)
 \end{aligned}$$

Jest to jednorodny układ równań liniowych względem $\delta_j \equiv \delta_m$. Warunkiem istnienia nietrywialnego rozwiązania jest zerowanie się wyznacznika macierzy współczynników a mianowicie

$$\begin{aligned}
 & \left| A_{ij}(\sigma_l^o) - \frac{k}{\omega}B_{ij}(\sigma_l^o) + \right. \\
 & \left. + \frac{i}{\omega} \left[\frac{\partial A_{im}}{\partial \sigma_j}(\sigma_l^o) \frac{\partial \sigma_m^o}{\partial t} + \frac{\partial B_{im}}{\partial \sigma_j}(\sigma_l^o) \frac{\partial \sigma_m^o}{\partial z} + \frac{\partial C_i}{\partial \sigma_j}(\sigma_l^o, z) \delta_m \right] \right| = 0. \quad (Z-9)
 \end{aligned}$$

Stosunek liczby falowej k do częstotliwości ω ma sens odwrotności prędkości rozchodzenia się zaburzeń. Powyższe równanie stanowi więc zależność dyspersyjną na prędkość rozchodzenia się małych zaburzeń w układzie opisywanym modelem (1). Jest ono wynikiem liniowej, lokalnej analizy metodą małych zaburzeń. Warto zwrócić uwagę na zawarte w nazwie założenia tej metody. Po pierwsze nieliniowość układu równań (1) została uwzględniona poprzez liniowe rozwinięcie macierzy współczynników A_{ij} i B_{ij} i wektora wymuszeń C_i w szereg Taylora. Po drugie sytuacja analizowana jest w konkretnym punkcie przepływu i dla konkretnego rozwiązania σ_l^o , na które nałożyliśmy zaburzenie. Po trzecie wreszcie opuszczając człony wyższego rzędu zakładamy, że amplitudy zaburzeń są małe.

Wave Phenomena Occuring in Two-Fluid, Homogeneous Two-Phase Flow Model

Summary

The paper explores features of one-dimensional wave phenomena which occur in continuous models of two-phase flow. Special attention is placed on sources of dispersion included in the models and choking condition for two-phase flow. Effects of a specific assumption contained in the models on the propagation of small disturbances with infinite frequencies is studied.

Волновые явления в двухжидкостных и однородных моделях двухфазного потока

Резюме

Представлен анализ одномерных волновых свойств, постоянных моделей двухфазных потоков. Обращено внимание на источники дисперсии моделей и на условия запираания потока. На основании испытанных моделей представлено наглядно влияние отдельных исходных данных на скорости распространения искажений с бесконечно большими частотами.

1. Wprowadzenie

Analiza stanu naprężenia w turbinach wirnikowych stopni osiowych i osiowo-przemiennowych maszyn przepływowych oraz metody ich projektowania są głównymi tematami prac badawczych [1-4]. Podczas VI Konferencji naukowej technicznej "Technologia przepływowych maszyn wirnikowych" wygłoszono na ten temat 8 referatów [5-10].

Zainteresowanie tym tematem wynika z tego, że stopnie wirnikowe są najbardziej zaawansowaną częścią maszyn przepływowych i mają decydujący wpływ na parametry pracy tych maszyn a także na ich niezawodność i trwałość.

Do wyznaczenia naprężeń i odkształceń stosuje się różne metody numeryczne. Zależą one od nich w szczególności metoda różnic skończonych i metoda elementów skończonych.

Zagadnienie jest bardziej skomplikowane jeśli wirnik pracuje w warunkach temperatur. Analiza naprężeń z uwzględnieniem poleceń materiałowych bazujących na danych z próbami projektowania (moduły cech konstrukcyjnych) jest również problemem eksploatacji maszyn (trwałość wirników) [1].