

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

87

WARSZAWA - POZNAŃ 1984

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with/special reference to fluid-flow machinery

RADA REDAKCYJNA - EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
STEFAN PERYCZ · WŁODZIMIERZ PROSNAK · KAZIMIERZ STELLER
ROBERT SZEWAŁSKI (PRZEWODNICZĄCY - CHAIRMAN) · JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY - EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER - REDAKTOR - EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA - EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1984

Printed in Poland

ISBN 83-01-05677-0

ISSN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 300 + 90 egz.	Oddano do składania 30 XI 1983 r.
Ark. wyd. 10,25. druk. 9,5	Podpisano do druku 3 IX 1984 r.
Pap. druk. sat. kl. V, 70 g, 70×100	Druk ukończono we wrześniu 1984 r.
Cena zł 120,-. A-12/542.	Zamówienie nr 160/36.

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

CEZARY ORLIKOWSKI

Gdańsk

Zastosowanie modeli sieciowych i liczb strukturalnych do analizy układów hydraulicznych. Część I*

W pracy podjęto próbę zastosowania metody modeli sieciowych i liczb strukturalnych do analizy układów hydraulicznych. W pierwszej części pracy przedstawiono możliwość bezpośredniego przeniesienia tej metody na nowy obszar zastosowań.

1. Wstęp

Prowadzone w Zakładzie Regulacji Maszyn i Automatyki Instytutu Maszyn Przepływowych PAN prace związane z badaniem własności dynamicznych regulatorów turbin były inspiracją do podjęcia tematu doskonalenia metod ich analizy. Regulatory takie są złożonymi układami dynamicznymi, a główną ich część stanowią elementy hydrauliczne. Urządzenia te są ogólnie nieliniowe, lecz z dotychczasowych doświadczeń autora wynika celowość badania także ich modeli liniowych. W tych ramach podjęto prace nad opracowaniem topologicznej metody analizy układów hydraulicznych stosowanych w urządzeniach automatyki.

Typowy proces analizy układu fizycznego składa się zwykle z trzech następujących etapów:

- konstruowanie modelu fizycznego układu,
- układanie równań układu,
- rozwiązywanie równań.

W związku z zastosowaniem komputerów do rozwiązywania równań, pracochłonność analizy złożonych obiektów związana jest obecnie nie z samymi obliczeniami, lecz z układaniem równań, programowaniem komputerów i przygotowaniem danych do obliczeń [6].

Obecnie wykonywane prace zmierzają do takiego doskonalenia metod analizy, aby ułatwić — przenieść na komputer lub w ogóle pominąć — etap układania równań.

Metody, które te cele osiągają związane są z przedstawieniem badanego układu za pomocą pewnej struktury graficznej nazywanej modelem topologicznym, umożliwiającą

* Praca wykonana w ramach Programu Rządowego PR-8 pt.: „Kompleksowy rozwój energetyki”, kierunek 6.

cym formalizację zapisu układu, formalizację układania równań lub ich rozwiązywania $[1 \div 4, 6 \div 13]$. Pewna wyróżniona grupa takich metod nosi nazwę metod topologicznych. Metody topologiczne odnoszą się do układów liniowych, stacjonarnych, a ich cechą charakterystyczną jest otrzymywanie wyniku na podstawie działań nad modelem topologicznym układu. Proces analizy przebiega w tym przypadku następująco:

- konstruowanie modelu fizycznego,
- konstruowanie modelu topologicznego,
- wykonanie działań nad modelem topologicznym.

Zaletą metod topologicznych przejawia się w łatwiejszym sposobie otrzymywania wyników w formie symbolicznej, tj. w postaci wzoru podającego w sposób jawny zależność wyniku od parametrów układu [1]. Niektóre z metod topologicznych umożliwiają – wtedy, gdy istnieje możliwość bezpośredniej transformacji układu w model topologiczny – ominięcie etapu układania równań.

Opracowane dotąd metody topologiczne, umożliwiające ominięcie etapu układania równań odnoszą się przede wszystkim do układów elektrycznych oraz do niektórych układów mechanicznych. Jedną z takich metod jest opracowana przez Bellerta i Woźniackiego metoda liczb strukturalnych [3]. Metodę tę opracowano do analizy układów elektrycznych.

Zaletami metody liczb strukturalnych są:

- bezpośredni związek algorytmu obliczeniowego ze strukturą układów,
- względnie mała liczba operacji w procesie analizy,
- duża oszczędność zapisu wzorów obliczeniowych,
- dobra przydatność do komputerowej techniki obliczeń, ze względu na korzystanie z operacji i działań stosowanych w teorii zbiorów,
- odpowiedniość różnorodnych przekształceń obliczanego układu w prostych działaniach algebraicznych na liczbach strukturalnych.

W ostatnich latach ukazały się publikacje traktujące o zastosowaniu metody liczb strukturalnych do analizy układów mechanicznych, wskazując zarazem na celowość rozszerzania jej zastosowań na układy nieelektryczne (np. [1, 2, 13]). Dlatego prace związane z opracowaniem topologicznej metody analizy układów hydraulicznych rozpoczęto od zbadania możliwości zastosowania metody liczb strukturalnych.

Niniejsza praca jest prezentacją wyników rozważań nad możliwościami zastosowania tej metody zawartych w rozprawie doktorskiej autora [8].

Zagadnienia jakie w związku z tym wymagały rozwiązania wynikają z charakteru rozważanych układów i metody analizy. Otóż, metoda liczb strukturalnych związana jest z odwzorowaniem badanych układów w model topologiczny nazywany siecią [5] (lub modelem sieciowym). Model taki jest zgodny ze strukturą układu elektrycznego. Natomiast w przypadku posłużenia się tą metodą do analizy układów nieelektrycznych, konstruowanie modelu sieciowego jest często utrudnione i zalety metody zostają w takim przypadku pomniejszone, niekiedy w sposób wyraźny. Ponadto fizyczny charakter rozważanych układów hydraulicznych wymaga zastosowania modeli sieciowych ze źródłami sterowanymi. Dla tego rodzaju modeli sieciowych algorytm obliczeń ma bardziej skomplikowaną postać. Wynika stąd problem czasu obliczeń przy analizie złożonych układów hydraulicznych. W związku z tym celem tej pracy było opracowanie, na podstawie me-

tody modeli sieciowych i liczb strukturalnych, takiej metody topologicznej, która byłaby odpowiednia do analizy układów hydraulicznych. Niniejsza, pierwsza, część pracy poświęcona jest zaprezentowaniu metody modeli sieciowych, liczb strukturalnych oraz jej bezpośredniemu zastosowaniu do układów hydraulicznych. Będą także wskazane niedogodności takiego podejścia wynikające ze specyfiki układów hydraulicznych. W drugiej części pracy zostanie zaprezentowana zmodyfikowana metoda analizy z zastosowaniem modeli sieciowych i liczb strukturalnych, odpowiednia do układów hydraulicznych.

2. Zastosowanie metody liczb strukturalnych do analizy prostych układów hydraulicznych

Jak już wspomniano, do analizy metodą liczb strukturalnych należy badany układ przedstawić w postaci modelu sieciowego. Układy hydrauliczne, które można odwzorować w model sieciowy bez źródeł sterowanych będą nazywane prostymi układami hydraulicznymi.

Poniżej omówiono pojęcia związane z modelem sieciowym (bez źródeł sterowanych). Przyjęto ujęcie teoriomnogościowe dogodne w dalszych, bardziej ogólnych, rozważaniach.

Modelem sieciowym (w ujęciu teoriomnogościowym) nazywać się będzie czwórkę uporządkowaną

$$S = \langle \Gamma, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_g \rangle, \quad (1)$$

w której

$$\Gamma = \langle \theta, K, P \rangle \quad (2)$$

jest grafem określonym przez zbiór wierzchołków θ i zbiór gałęzi K oraz relacją

$$P \in \theta \times \theta \times K. \quad (3)$$

Zakłada się ponadto, że relacja P posiada własności, które gwarantują mocną spójność grafu Γ oraz wykluczają istnienie w grafie gałęzi, które są pętłami. Trzy pozostałe elementy występujące w definicji modelu sieciowego są funkcjami określonymi następująco:

$$\varphi_x: \theta \rightarrow X, \quad \varphi_y: K \rightarrow Y, \quad \varphi_g: K \rightarrow G. \quad (4)$$

Funkcja φ_x przyporządkowuje wierzchołkom $v \in \theta$ wielkości fizyczne $x \in X$ nazywane wielkościami wierzchołkowymi, funkcja φ_y przyporządkowuje gałęziom $k \in K$ wielkości fizyczne $y \in Y$ nazywane wielkościami przepływowymi, zaś funkcja φ_g przyporządkowuje gałęziom $k \in K$ operatory $g \in G$ określające związek między wielkościami x przyporządkowanymi wierzchołkom incydentnym z gałęzią k oraz wielkością przepływową y przyporządkowaną tej gałęzi (rys. 1)

$$y = g(x_i - x_j). \quad (5)$$

W tabeli 1 podano wielkości x i y dla różnych układów fizycznych.

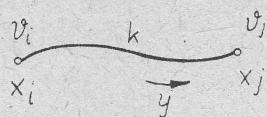
Jeśli wszystkie wielkości przepływowe związane z układem można wyznaczyć w funkcji wielkości wierzchołkowych, to mówi się, że układ posiada opis admitancyjny. Operatory $g \in G$ noszą wówczas nazwę admitancji gałęzi modelu sieciowego. W dalszej części pracy rozważane będą układy posiadające opis admitancyjny.

Tabela 1

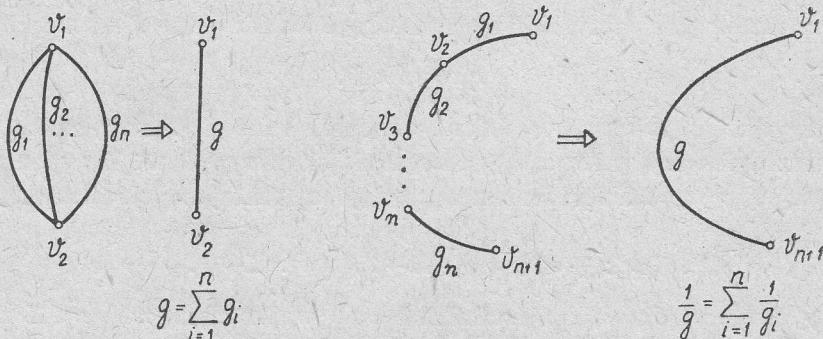
Wielkości wierzchołkowe i przepływowe

Układy	Wielkość wierzchołkowa x	Wielkość przepływowa y
— hydrauliczne	ciśnienie p	objętościowe natężenie przepływu q
— pneumatyczne	ciśnienie p	objętościowe natężenie przepływu q
— mechaniczne translacyjne	prędkość liniowa u	siła f
— mechaniczne rotacyjne	prędkość kątowna ω	moment obrotowy m
— elektryczne	potencjał elektryczny v	natężenie prądu i

Element modelu sieciowego, przedstawiony na rysunku 1, dla którego spełnione jest równanie (5) nosi nazwę liniowego elementu bilateralnego. Admitancja g określa jego właściwości. Z definicji admitancji (5) wynika sposób obliczania admitancji zastępczych dla członów bilateralnych połączonych równoległe i szeregowo (rys. 2).



Rys. 1. Element bilateralny



Rys. 2. Równoległe i szeregowo połączenie elementów bilateralnych

Układy hydrauliczne, które mogą być odwzorowane w model sieciowy S mogą się więc składać z elementów bilateralnych — spełniających równanie (5), a także mogą w ich skład wchodzić niezależne źródła wielkości x i y . W tabeli 2 podano pewien zbiór takich członów wraz z odpowiadającymi im równaniami. Z postaci tych równań wynika, że człony te można traktować jako człony bilateralne układu hydraulicznego. Należy zauważyć, że w równaniach członów obrazujących wpływ ściśliwości cieczy występuje różnica ciśnień $p - p_0$, gdzie p_0 jest ciśnieniem odniesienia (atmosfery). Atmosferę utożsamia się tu z wierzchołkiem odniesienia dla układów hydraulicznych. Przyjmuje się ponadto, że wierzchołek odniesienia ma równą zeru wartość sygnału wierzchołkowego.

Tabela 2

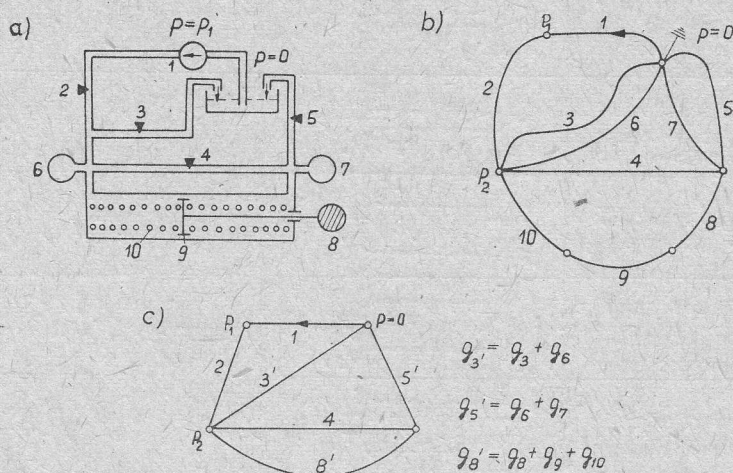
Elementy bilateralne prostych układów hydraulicznych

Nazwa elementu	Schemat	Oznaczenie członu	Równanie członu
idealne źródło ciśnienia			$P_1 - P_2 = \text{const}$
idealne źródło przepływu			$q = \text{const}$
zweźka z przepływem uwarstwianym			$q = k(P_1 - P_2)$
tłok nieważki ze sprężyną			$q = \frac{F^2 d}{c} (P_1 - P_2)$
tłok obciążony siłą tarcia lepkiego			$q = \frac{F^2}{r} (P_1 - P_2)$
tłok obciążony bezwładnością			$q = \frac{F^2}{M} \int (P_1 - P_2) dt$
wpływ masy cieczy w rurociągu			$q = \frac{F}{\rho} \int (P_1 - P_2) dt$
akumulator			$q = \frac{V}{B} \frac{d}{dt} (P - P_0)$
akumulator			$q = \frac{F^2 d}{c} (P - P_0)$

P - ciśnienie, P_0 - ciśnienie odniesienia, q - obj. natężenie przepływu, F - powierzchnia, c - sztywność sprężyny, r - wsp. tarcia lepkiego, M - masa, l - długość, V - objętość, B - moduł ścisłości cieczy, k - wsp. zweźki, ρ - gęstość cieczy.

Wierzchołek ten oznacza się jak „masę” lub uziemienie w obwodach elektrycznych. Mając dany prosty układ hydrauliczny można więc sporządzić jego model sieciowy, czyli graf połączeń gałęzi reprezentujących poszczególne człony bilateralne i przypisać wierzchołkom i gałęziom sygnały wierzchołkowe i przepływowe. Sposób takiego postępowania zostanie przedstawiony na przykładzie.

Dany jest układ hydrauliczny pokazany na rysunku 3. Składa się on z następujących członów: 1 — źródło ciśnienia, 2, 3, 4, 5 — rezystancje hydrauliczne, 6, 7 — przestrzenie akumulujące przepływ, 8 — tłok obciążony masą, 9 — tłok obciążony tarciem, 10 — tłok ze sprężyną. Wierzchołkiem odniesienia jest zbiornik spływowy z cieczą o ciśnieniu $p=0$.



Rys. 3. Konstruowanie modelu sieciowego dla prostego układu hydraulicznego

Model sieciowy należy konstruować uwzględniając fakt, iż komora z cieczą ściśliwą może być przedstawiona przez gałąź incydentną z wierzchołkiem odniesienia (tab. 2). Połączenie gałęzi odpowiadających źródłu ciśnienia oraz rezystancjom hydraulicznym jest identyczne jak połączenie elementów w rzeczywistym układzie. Gałęzie odpowiadające członom 8, 9, 10 należy połączyć szeregowo, gdyż w każdej z nich występuje ta sama wartość sygnału przepływowego, zaś całkowity spadek ciśnienia (różnica sygnałów wierzchołkowych) jest równy sumie spadków ciśnienia dla poszczególnych członów (rys. 3b). Graf układu po redukcji gałęzi szeregowych i równoległych pokazuje rysunek 3c.

Metoda liczb strukturalnych analizy układów opiera się na algebraicznym zapisie grafu modelu sieciowego w postaci liczby strukturalnej [3].

Liczba strukturalna A jest obiektem algebraicznym określonym jako nieuporządkowana rodzina kolumn a_k ,

$$A = \{a_1, \dots, a_k, \dots, a_n\}; \quad a_i \neq a_j \quad (i \neq j), \quad (6)$$

które to kolumny są nieuporządkowanymi zbiorami elementów α_{ik}

$$a_k = \{a_{1k}, \dots, a_{ik}, \dots, a_{mk}\}, \quad \alpha_{ik} \neq \alpha_{jk} \quad (i \neq j). \quad (7)$$

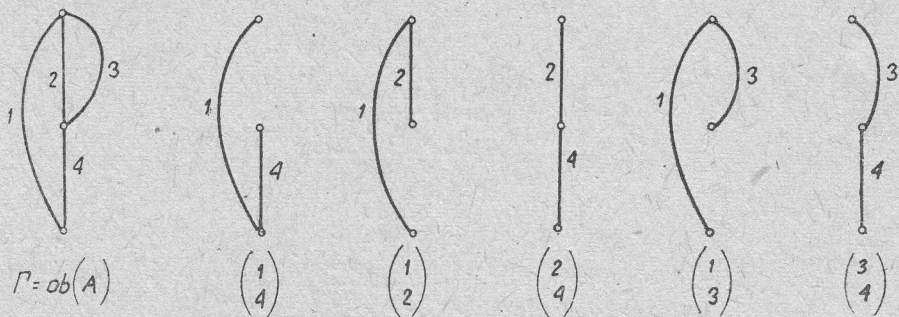
Można więc liczbę A przedstawić w postaci tablicy

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \dots, & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \dots, & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1}, & \alpha_{m2}, & \dots, & \alpha_{m,n} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Odpowiadający danej liczbie strukturalnej A graf Γ modelu sieciowego S nazywa się obrazem geometrycznym liczby A co zapisuje się

$$\Gamma = \text{ob}(A). \quad (9)$$

Kolumny $a \in A$ liczby strukturalnej A , której obrazem geometrycznym jest graf Γ , są zbiorami oznaczeń gałęzi tworzących drzewa rozpięte na wierzchołkach grafu (rys. 4). Prosty sposób konstruowania liczby strukturalnej A , dla której $\Gamma = \text{ob}(A)$, opiera się na następującym twierdzeniu [3]:



Rys. 4. Zapis grafu w postaci liczby strukturalnej

Liczba strukturalna stałowierszowa A , której obraz geometryczny jest grafem spójnym o n wierzchołkach, jest równa iloczynowi $(n-1)$ czynników pierwszych jednowierszowych

$$A = T_1 \cdot T_2 \dots T_{n-1}, \quad (10)$$

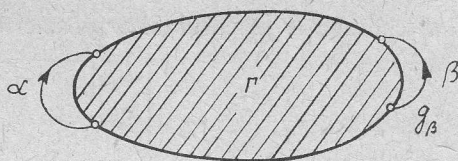
utworzonych z oznaczeń gałęzi incydentnych z dowolnie wybranymi $n-1$ wierzchołkami grafu Γ .

Dla grafu z rysunku 4 mamy

$$T_1 = [1 \ 4], \quad T_2 = [1 \ 2 \ 3],$$

$$A = T_1 \cdot T_2 = [1 \ 4] [1 \ 2 \ 3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dla liczb strukturalnych są określone pewne działania i na bazie utworzonej w ten sposób algebry liczb strukturalnych formuluje się wzory do obliczania transmitancji układów fizycznych odwzorowanych w model sieciowy. Jeśli z gałęziami α i β grafu Γ są związane sygnały wejściowe i wyjściowe układu (gałęziom tym należy nadać orientację wyznaczającą dodatni zwrot wielkości wejściowej i wyjściowej — rys. 5), to transmitancje



Rys. 5. Graf układu z wyróżnioną gałęzią wejściową i wyjściową

oblicza się według następujących wzorów:

$$\begin{aligned} \kappa_P &= \frac{\Delta p_\beta}{\Delta p_\alpha} = \frac{\text{sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}{\det \frac{\partial A}{\partial \alpha}}, \\ \kappa_Q &= \frac{q_\beta}{q_\alpha} = \frac{\text{sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}{\det \frac{\partial A}{\partial \alpha}} g_\beta, \\ \kappa_{QP} &= \frac{\Delta p_\beta}{q_\alpha} = \frac{\text{sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}{\det \frac{\partial A}{\partial \alpha}}, \\ \kappa_{PQ} &= \frac{q_\beta}{\Delta p_\alpha} = \frac{\text{sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}{\det \frac{\partial A}{\partial \alpha}} g_\beta, \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie sim — funkcja jednoczesności liczby strukturalnej, $\partial/\partial\varphi$ — pochodna algebraiczna liczby strukturalnej względem φ , $\delta/\delta\varphi$ — przeciwpochodna algebraiczna liczby strukturalnej względem φ , $\det$ — funkcja wyznacznikowa liczby strukturalnej.

Przykład

Należy wyznaczyć transmitancję

$$\kappa_{PQ} = \frac{q_{s'}}{p_1 - p_0}$$

dla modelu sieciowego z rysunku 3c.

Liczba strukturalna A , której dany graf jest obrazem ma postać

$$A = [1 \ 2] [1 \ 3' \ 5'] [5' \ 8' \ 4].$$

Po pomnożeniu czynników pierwszych jednowierszowych otrzymujemy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3' & 1 & 3' & 3' & 5' & 1 & 3' & 5' & 3' & 5' & 1 & 3' & 5' \\ 5' & 5' & 5' & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8' & 8' & 8' & 8' & 8' \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$\alpha = 1, \quad \beta = 8',$$

to

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} 2 & 3' & 5' & 2 & 3' & 5' & 2 \\ 5' & 4 & 4 & 4 & 8' & 8' & 8' \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3' & 5' & 1 & 3' & 5' \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5' \end{bmatrix}.$$

Funkcje jednoczesności i wyznacznikowa wynoszą

$$\text{sim}_G \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = g_2 \cdot g_{5'},$$

$$\det_G \frac{\delta A}{\delta \alpha} = g_2 g_{5'} + g_3 g_4 + g_5 g_4 + g_4 g_2 + g_3 g_{8'} + g_5 g_{8'} + g_2 g_{8'}$$

a poszukiwana transmitancja

$$\left(\frac{q_{8'}}{p_1 - p_0} \right) = \frac{g_2 g_{5'} g_{8'}}{g_2 g_{5'} + g_3 g_4 + g_5 g_4 + g_4 g_2 + g_3 g_{8'} + g_5 g_{8'} + g_2 g_{8'}}.$$

3. Analiza układów hydraulicznych z zastosowaniem źródeł sterowanych

Proste układy hydrauliczne stanowią wąską klasę układów stosowanych w praktyce. Natomiast powszechne zastosowanie mają człony, które wymagają zastosowania modelu sieciowego ze źródłami sterowanymi (np. rezystancja hydrauliczna sterowana przemieszczeniem — rys. 6a) lub człony, których odwzorowanie w model sieciowy bez źródeł sterowanych wymaga pewnego nakładu pracy (np. tłok o dwóch różnych powierzchniach — rys. 6a).

Schemat źródła sterowanego pokazano na rysunku 7a. Jest to źródło wielkości przepływowej sterowane różnicą wielkości wierzchołkowych.

Równanie źródła sterowanego

$$y = g_{k_1, k_2} (x_3 - x_4) \quad (12)$$

przedstawia zależność między wielkościami y i Δx związanymi z różnymi parami wierzchołków — w przeciwieństwie do elementu bilateralnego (rys. 7b)

$$y = g_k (x_1 - x_2). \quad (13)$$

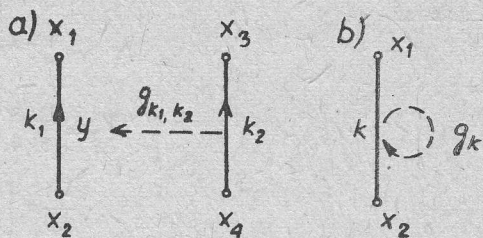
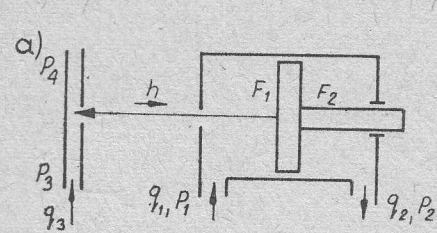
Model sieciowy S' ze źródłami sterowanymi można przedstawić w postaci następującej czwórki uporządkowanej

$$S' = \langle \Gamma', \varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_G \rangle, \quad (14)$$

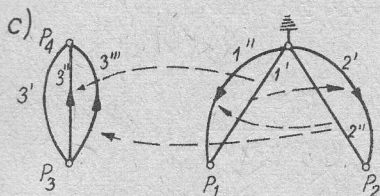
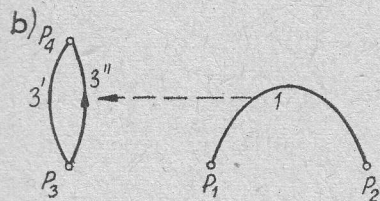
gdzie tym razem

$$\Gamma' = \langle \Gamma, P' \rangle \quad (15)$$

$$\Gamma = \langle \theta, K, P \rangle \quad (16)$$



Rys. 7. Źródło sterowane (a) i element bilateralny (b)



Rys. 6. Konstruowanie modelu sieciowego z zastosowaniem źródeł sterowanych

jest grafem częściowo zorientowanym, określonym przez zbiór wierzchołków θ , zbiór gałęzi K i relację

$$P \subset \theta \times \theta \times K \quad (17)$$

o własnościach gwarantujących nieistnienie pętli w Γ .

Relację P' określamy następująco

$$P' \subset P \times P. \quad (18)$$

Spełnia ona następujące warunki

$$\bigwedge_{r'_1 = \langle r_1, r_2 \rangle \in P'} \sim \bigvee_{r'_2 \in P'} r'_1 \neq r'_2 \wedge r_1 \in r'_2, \quad (19)$$

$$r' = \langle \langle v_1, v_2, k_1 \rangle \langle v_3, v_4, k_2 \rangle \rangle \in P' \quad \{v_1, v_2\} = \{v_3, v_4\} \Rightarrow k_1 = k_2 \wedge v_1 = v_4 \wedge v_2 = v_3. \quad (20)$$

Natomiast ϕ'_x , ϕ'_y , ϕ'_G są funkcjami

$$\phi'_x: \theta \rightarrow X, \quad \phi'_y: K \rightarrow Y, \quad \phi'_G: P' \rightarrow G. \quad (21)$$

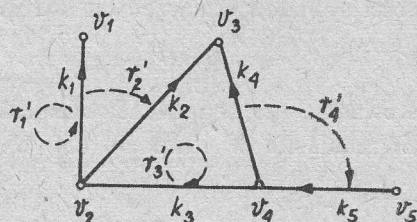
Zakłada się przy tym, że sygnał przepływowy $y = \phi'_y(k_1)$ dla $k_1 \in K$ jest zdeterminowany przez różnicę sygnałów wierzchołkowych $x_3 = \phi'_x(v_3)$ i $x_4 = \phi'_x(v_4)$ według równania (12), dla każdego elementu relacji

$$r' = \langle \langle v_1, v_2, k_1 \rangle \langle v_3, v_4, k_2 \rangle \rangle \in P', \quad (22)$$

gdzie

$$g_{k_1, k_2} = \phi'_o(r').$$

Graf Γ jest zatem grafem połączeń członów bilateralnych i gałęzi sterujących oraz gałęzi sterowanych źródeł (linia ciągła na rys. 8). Elementy relacji P' , oznaczone na rysunku 8 liniami przerywanymi, obrazują źródła sterowane, a także człony bilateralne jako szczególny przypadek źródeł sterowanych.



Rys. 8. Przykład modelu sieciowego ze źródłami sterowanymi

Elementy $r'_1, r'_2 \in P'$, gdzie

$$r'_1 = \langle \langle v_1, v_2, k_1 \rangle \langle v_3, v_4, k_2 \rangle \rangle,$$

$$r'_2 = \langle \langle v_5, v_6, k_3 \rangle \langle v_7, v_8, k_4 \rangle \rangle,$$

będą nazywane równoległymi, gdy $v_1=v_5$ i $v_2=v_6$ oraz $v_3=v_7$ i $v_4=v_8$, a szeregowymi, gdy $v_1=v_6$ i $v_3=v_8$ lub $v_2=v_5$ i $v_4=v_7$.

W modelu sieciowym S' można również stosować prawa dotyczące połączenia szeregowego i równoległego elementów. Mianowicie, n elementów równoległych (szeregowych) relacji P' , którym przyporządkowane są admitancje $g_1, \dots, g_n$, można zastąpić jednym elementem o admitancji

$$g = \sum_{i=1}^n g_i \quad \text{— dla połączenia równoległego}$$

i

$$g = \left(\sum_{i=1}^n (g_i)^{-1} \right)^{-1} \quad \text{— dla połączenia szeregowego.}$$

Zdefiniowany tutaj model sieciowy S' zawiera w sobie, jako przypadek szczególny, model sieciowy S bez źródeł sterowanych. Zachodzi to wówczas, gdy dla każdego $r' \in P'$ w postaci określonej przez równanie (22) zachodzi

$$\{v_1, v_2\} = \{v_3, v_4\}.$$

W dalszej części pracy, dla uproszczenia graficznego przedstawienia modelu S' , nie będą rysowane te elementy relacji P' , które reprezentują człony bilateralne.

Dla przykładu ilustrującego zastosowania źródeł sterowanych do modelowania układów hydraulicznych weźmy pod uwagę układ pokazany na rysunku 6a.

Na początek założmy, że $F_1 = F_2$. Wówczas $q_1 = q_2 = q$ i równania, w postaci zlinearyzowanej i operatorowej, są dla tego układu następujące:

$$q = K(s) \cdot (p_1 - p_2), \quad (23)$$

$$q_3 = \underbrace{\left. \frac{\partial Q_3}{\partial (P_3 - P_4)} \right|_*}_{q_3} \cdot (p_3 - p_4) + \underbrace{\left(\frac{\partial Q_3}{\partial H} \right)_* \frac{K(s)}{s \cdot F}}_{q_3} (p_1 - p_2), \quad (24)$$

gdzie $K(s)$ — operator uwzględniający obciążenia tłoka, s — argument przekształcenia Laplace'a.

Gwiazdki przy pochodnych cząstkowych oznaczają, że wzięto wartość pochodnej w punkcie $(Q^*, Q_3^*, P_3^*, P_4^*, H^*)$. Sygnały oznaczone małymi literami oznaczają przyrosty wartości sygnałów oznaczonych dużymi literami, np.

$$Q = Q^* + q, \quad P_1 = P_1^* + p_1, \quad H = H^* + h \text{ itd.}$$

Równanie (23) odpowiada elementowi bilateralnemu (tłok o dwóch jednakowych powierzchniach). W równaniu (24) występują dwie składowe natężenia przepływu

$$q_3 = q'_3 + q''_3$$

i można je traktować jako równanie równoległe połączonych: elementu bilateralnego i źródła sterowanego. Model sieciowy tego układu pokazano na rysunku 6b. Admitancje dla tego modelu wynoszą

$$g_{3'} = \left| \frac{\partial Q_3}{\partial (P_3 - P_4)} \right|_*, \quad g_1 = K(s), \quad g_{13''} = \left(\frac{\partial Q_3}{\partial H} \right)_* \cdot \frac{K(s)}{s \cdot F}.$$

Założmy teraz, że $F_1 \neq F_2$. Równania tłoka są teraz następujące:

$$\underbrace{K(s) p_1}_{q'_1} \underbrace{r K(s) p_2}_{q''_1} = q_1,$$

$$\underbrace{r \cdot K(s) p_1}_{q'_2} \underbrace{- r^2 K(s) p_2}_{q''_2} = q_2,$$

gdzie

$$r = \frac{F_2}{F_1},$$

natomiast równanie sterowanej rezystancji hydraulicznej

$$q_3 = \underbrace{\left| \frac{\partial Q_3}{\partial (P_3 - P_4)} \right|_* (p_3 - p_4)}_{q'_3} + \underbrace{\left(\frac{\partial Q_3}{\partial H} \right)_* \frac{K(s)}{s \cdot F_1} p_1}_{q''_3} - \underbrace{\left(\frac{\partial Q_3}{\partial H} \right)_* \frac{K(s) r}{s \cdot F_1} p_2}_{q'''_3}.$$

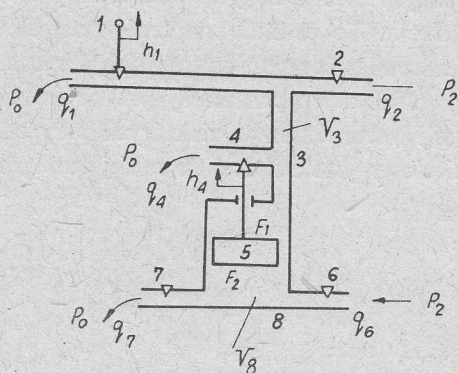
Składowe q'_1, q''_2, q'_3 natężeń przepływu interpretujemy jako sygnały przepływowe w członach bilateralnych, zaś składowe $q''_3, q'''_3, q'_1, q'_2$ — jako sygnały przepływowe źródeł sterowanych. Model sieciowy takiego układu pokazano na rysunku 6c. Admitancje dla tego modelu są następujące:

$$g_{1'} = K(s), \quad g_{2''} = -K(s) r^2, \quad g_{3'} = \left| \frac{\partial Q_3}{\partial (P_3 - P_4)} \right|_*,$$

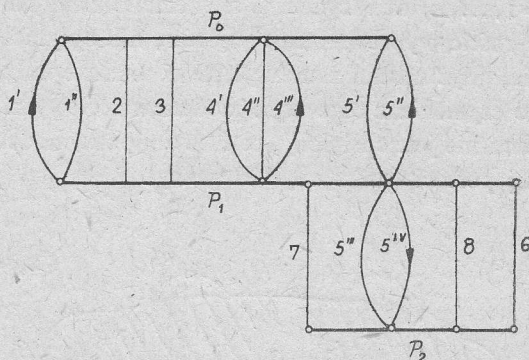
$$g_{1''2''} = -K(s) r, \quad g_{2'1'} = K(s) r, \quad g_{3''1'} = \left(\frac{\partial Q_3}{\partial H} \right)_* \cdot \frac{K(s)}{s \cdot F_1},$$

$$g_{3''2''} = - \left(\frac{\partial Q_3}{\partial H} \right)_* \frac{K(s) r}{s \cdot F_1}.$$

Na rysunku 9 przedstawiono bardziej złożony układ hydrauliczny. Składa się on z następujących członów: 1 — rezystancja hydrauliczna sterowana przemieszczeniem h_1 , 3, 8 — przestrzenie akumulujące przepływ, 2, 6, 7 — rezystancje hydrauliczne, 5 — tłok o dwóch różnych powierzchniach, 4 — rezystancja hydrauliczna sterowana przemieszczeniem h_4 .



Rys. 9. Fragment złożonego układu hydraulicznego



Rys. 10. Model sieciowy układu z rys. 9

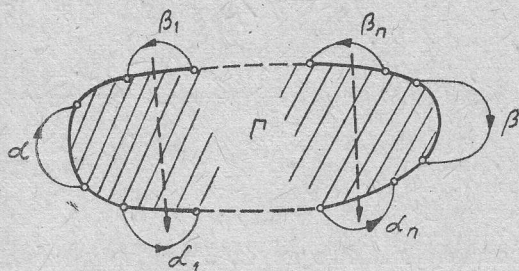
Wykorzystując omówione wcześniej schematy sieciowe ze źródłami sterowanymi można skonstruować model sieciowy tego układu pokazany na rysunku 10. Dla łatwiejszego rysowania grafu wierzchołki o wartości ciśnienia P_0 , P_1 , P_2 narysowano w postaci linii (beziimpedancyjnych — zwierających). Liczby zastosowane w oznaczeniach gałęzi grafu związane są z numerami członów układu. Admitancje członów bilateralnych i źródeł sterowanych tego modelu są następujące:

$$\begin{aligned}
 g_{1''} &= \left| \frac{\partial Q_1}{\partial P_1} \right|_*, & g_2 &= \left| \frac{\partial Q_2}{\partial P_1} \right|_*, & g_3 &= \left(\frac{V_2}{B} \right)_* \cdot s, \\
 g_{4'} &= \left| \frac{\partial Q_4}{\partial P_1} \right|_*, & g_{4''} &= \frac{K(s)r}{F_1 \cdot s} \left(\frac{\partial Q_4}{\partial H_4} \right)_*, & g_{5'} &= K(s), \\
 g_{5'''} &= K(s)r^2, & g_6 &= \left| \frac{\partial Q_6}{\partial P_2} \right|_*, & g_7 &= \left| \frac{\partial Q_7}{\partial P_2} \right|_*, \\
 g_8 &= \left(\frac{V_8}{B} \right)_* \cdot s, & g_{4''', 5'''} &= \left| \frac{\partial Q_4}{\partial H_4} \right|_* \cdot \frac{K(s)}{F_1 \cdot s}, \\
 g_{5'v5'} &= K(s)r, & g_{5''v5''} &= K(s)r,
 \end{aligned}$$

a zależność źródła przepływu q'_1 od przemieszczenia h_1

$$q'_1 = \left(\frac{\partial Q_1}{\partial h_1} \right)_* \cdot h_1.$$

W ramach rozwijanej dotąd teorii liczb strukturalnych można również sformułować wzory do obliczania transmitancji układów odwzorowanych w model sieciowy ze źródłami sterowanymi [3, 4, 8]. W celu zapisania tych wzorów przedstawmy Γ' modelu sieciowego S' w postaci jak na rysunku 11. Wyróżniono tam gałąź wejściową α i wyjściową β oraz gałęzie sterujące β_i i sterowane α_i dla n źródeł sterowanych występujących w modelu sieciowym. Zakładamy, że gałęzie $\alpha, \beta, \alpha_i, \beta_i$ ($i=1, \dots, n$) mają orientację od wierzchołka, w którym wartość x jest niższa. Przyjmujemy ponadto, że gałęzie $\alpha, \beta, \alpha_i, \beta_i$ ($i=1, \dots, n$) są incydentne z wierzchołkiem odniesienia. To ostatnie założenie pozwoliło uprościć wyprowadzenie wzorów, nie ograniczy natomiast bardzo zakresu ich stosowania, gdyż można zauważyć, że w analizie układów hydraulicznych mamy prawie zawsze do czynienia z tego typu modelem sieciowym. Jeśli warunek ten w niektórych przypadkach nie jest spełniony, to łatwo można model sieciowy przekształcić do takiej szczególnej postaci (patrz część II pracy).



Rys. 11. Graf układu z wyróżnioną gałęzią wejściową, wyjściową i źródłami sterowanymi

Transmitancje oblicza się w tym przypadku według następujących wzorów [8]:

$$\begin{aligned} \kappa_Q &= \frac{D_{\alpha\beta}}{D} g_\beta, & \kappa_{Q,P} &= \frac{D_{\alpha\beta}}{D}, \\ \kappa_P &= \frac{D_{\alpha\beta}}{D_{\alpha\alpha}}, & \kappa_{P,Q} &= \frac{D_{\alpha\beta}}{D_{\alpha\alpha}} g_\beta, \end{aligned} \quad (25)$$

przy czym

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu} &= \text{sim}_G(A_\mu, A_\nu) + \sum_{S \in \Phi} [(-1)^{\bar{S}} \left(\prod_{\langle \alpha_k, \beta_k \rangle \in S} g_{\alpha_k, \beta_k} \right) \text{sim}_G(A_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_m}, A_{\nu\beta_1 \dots \beta_m})], \\ D &= \det A + \sum_{S \in \Phi} [(-1)^{\bar{S}} \left(\prod_{\langle \alpha_k, \beta_k \rangle \in S} g_{\alpha_k, \beta_k} \right) \text{sim}_G(A_{\alpha_1 \dots \alpha_m}, A_{\beta_1 \dots \beta_m})], \end{aligned} \quad (26)$$

gdzie $\bar{S}$ – liczność zbioru S i $\bar{S} \leq \min(n, w-1)$,

$$\{\langle \alpha_a \beta_a \rangle, \dots, \langle \alpha_k \beta_k \rangle, \dots, \langle \alpha_m \beta_m \rangle\} = S \subset C = \{\langle \alpha_1 \beta_1 \rangle, \dots, \langle \alpha_j \beta_j \rangle, \dots, \langle \alpha_n \beta_n \rangle\}$$

i Φ jest rodziną wszystkich podzbiorów zbioru C , który jest zbiorem wszystkich par oznaczeń gałęzi należących do źródeł sterowanych. Występujące tu funkcje jednoczesności oblicza się następująco [4]:

$$\text{sim}_G(A_{\alpha_1 \dots \alpha_L}, A_{\beta_1 \dots \beta_L}) = \sum_{i=1}^L (-1)^{I\alpha_i + I\beta_i} \det[b_i], \quad (27)$$

gdzie b_i jest i -tą kolumną liczby strukturalnej

$$B = A_{\alpha_1 \dots \alpha_L} \cap A_{\beta_1 \dots \beta_L} = \{b_1, \dots, b_i, \dots, b_r\}. \quad (28)$$

Dla kolumny b_i należy utworzyć z grafu Γ graf Γ_i przez zwarcie w Γ gałęzi należących do b_i . Graf Γ_i posiada L niezależnych wierzchołków i można znaleźć takie uporządkowanie par gałęzi

$$\langle \alpha_1 \beta_1 \rangle \dots, \langle \alpha_j \beta_j \rangle, \dots, \langle \alpha_L \beta_L \rangle$$

W pary

$$\langle \alpha_{p_1} \beta_{q_1} \rangle, \dots, \langle \alpha_{p_i} \beta_{q_i} \rangle, \dots, \langle \alpha_{p_r} \beta_{q_r} \rangle,$$

że każda z par $\langle \alpha_p, \beta_{q_i} \rangle$ jest incydentna z jednym wierzchołkiem niezależnym grafu Γ_i .
 I_{q_i} jest liczbą inwersji w permutacji

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_j \dots \alpha_L \\ \alpha_{p_1} \dots \alpha_{p_j} \dots \alpha_{p_L} \end{pmatrix}$$

i I_{β} , jest liczbą inwersji w permutacji

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \dots \beta_j \dots \beta_L \\ \beta_{q_1} \dots \beta_{q_j} \dots \beta_{q_L} \end{pmatrix}.$$

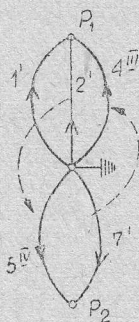
Przykład

Należy obliczyć transmitancję $\kappa = \Delta p/p/q_\alpha$ dla $\alpha=1'$, $\beta=7$ na podstawie modelu sieciowego z rysunku 9. Dokonując redukcji elementów równoległych otrzymujemy graf pokazany na rysunku 12, gdzie

$$g_2' = g_1'' + g_2 + g_3 + g_4' + g_4'' + g_5',$$

$$g_7' = g_7 + g_{5'''} + g_6 + g_8, \quad g_{4''''7'} = g_{4''''5''''} + g_{5''5''''},$$

$$q_{5IV2'} = q_{5IV5'}.$$



Rys. 12. Uproszczony model sieciowy układu z rys. 9

Liczba strukturalna dla tego grafu jest następująca:

$$A = [1^I \ 2^I \ 4^{III}] [7^I \ 5^{IV}] = \begin{bmatrix} 1^I & 2^I & 4^{III} & 1^I & 2^I & 4^{III} \\ 7^I & 7^I & 7^I & 5^{IV} & 5^{IV} & 5^{IV} \end{bmatrix},$$

$$\alpha = 1^I, \quad \beta = 7^I,$$

$$\alpha_1 = 4^{\text{III}}, \beta_1 = 7^{\text{I}},$$

$$\alpha_2 = 5^{\text{IV}}, \quad \beta_2 = 2^{\text{I}},$$

$$\begin{array}{lll}
A_{\alpha} = [7^I \ 5^{IV}], & A_{\beta} = [1^I \ 2^I \ 4^{III}] \Rightarrow \underset{G}{\text{sim}}(A_{\alpha}, A_{\beta}) = 0, \\
A_{\alpha\alpha_1} = 0, & A_{\beta\beta_1} = 0 \Rightarrow \underset{G}{\text{sim}}(A_{\alpha\alpha_1}, A_{\beta\beta_1}) = 0, \\
A_{\alpha\alpha_2} = 1, & A_{\beta\beta_2} = 1 \Rightarrow \text{sim}(A_{\alpha\alpha_2}, A_{\beta\beta_2}) = -1, \\
A_{\alpha\alpha_1\alpha_2} = 0, & A_{\beta\beta_1\beta_2} = 0 \Rightarrow \text{sim}(A_{\alpha\alpha_1\alpha_2}, A_{\beta\beta_1\beta_2}) = 0, \\
A_{\alpha_1} = [7^I \ 5^{IV}], & A_{\beta_1} = [1^I \ 2^I \ 4^{III}] \Rightarrow \underset{G}{\text{sim}}(A_{\alpha_1}, A_{\beta_1}) = 0, \\
A_{\alpha_2} = [1^I \ 2^I \ 4^{III}], & A_{\beta_2} = [7^I \ 5^{IV}] \Rightarrow \underset{G}{\text{sim}}(A_{\alpha_2}, A_{\beta_2}) = 0, \\
A_{\alpha_1\alpha_2} = 1, & A_{\beta_1\beta_2} = 1 \Rightarrow \underset{G}{\text{sim}}(A_{\alpha_1\alpha_2}, A_{\beta_1\beta_2}) = -1,
\end{array}$$

$$\det(A) = g_1 \cdot g_7 + g_2 \cdot g_7.$$

Poszukiwana transmitancja wynosi

$$K = \frac{-g_{51V2'}}{g_1 \cdot g_7 + g_2 \cdot g_7 - g_{51V2'} \cdot g_{4''7'}}.$$

4. Podsumowanie

Przedstawiono sposób bezpośredniego zastosowania modeli sieciowych i liczb strukturalnych do analizy układów hydraulicznych. Zastosowanie modeli sieciowych bez źródeł sterowanych umożliwia analizę tylko tzw. prostych układów hydraulicznych i praktyczny zakres zastosowań metody jest wówczas niewystarczający. W celu rozszerzenia tego zakresu posłużono się modelem sieciowym ze źródłami sterowanymi. Z przedstawionych rozważań i przykładów zastosowania tego typu modeli do układów hydraulicznych wynika, że efektywność metody liczb strukturalnych zostaje w tym przypadku pomniejszona w związku z trudnościami pojawiającymi się na etapie konstruowania modelu sieciowego, a także ze względu na skomplikowany algorytm działań nad grafem tego modelu.

W drugiej części pracy zostanie przedstawiony zmodyfikowany sposób zastosowania modeli sieciowych i liczb strukturalnych, który umożliwi uniknięcie wymienionych niedogodności.

Praca wpłynęła do Redakcji w październiku 1982 r.

Literatura

- [1] A. Arczewski, *Topologiczna analiza mechanicznych drgających układów liniowych metodą liczb strukturalnych*. Arch. Bud. Maszyn, t. XIX, z. 1, 1972.
- [2] K. Arczewski, *Analiza i synteza drgających układów mechanicznych metodą liczb strukturalnych*. Praca doktorska. Politechnika Warszawska, 1974.
- [3] S. Bellert, H. Woźniacki, *Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych*. WNT, Warszawa 1968.
- [4] A. Handkiewicz, *Analiza czwórników ze sterowanymi źródłami metodą liczb strukturalnych*. Arch. Elektrotechniki, t. XXI, z. 3, 1972.
- [5] B. Korzan, *Elementy teorii grafów i sieci*. WNT, Warszawa 1978.

- [6] J. H. Milanowski, *Analiza energetyczna wybranych złożonych układów dynamicznych*. Praca doktorska, Politechnika Gdańska, 1970.
- [7] M. L. Munjal, A. V. Sreenath, M. F. Narasimham, *Velocity Ration in the Analysis of Linear Dynamical Systems*. J. Sound and Vibration, Vol. 26, No. 2, 1973.
- [8] C. Orlikowski, *Zastosowanie metody liczb strukturalnych do analizy hydraulicznych układów regulacji automatycznej turbozespołów*. Praca doktorska, IMP PAN, Gdańska 1980.
- [9] R. S. Ożarowski, *Program do badania układów dynamicznych za pomocą cyfrowej symulacji ich schematów zastępczych*. Prace VI KKA, Poznań 1974.
- [10] L. P. A. Robichaud, M. Boisvert, J. Robert, *Grafy przepływu sygnałów*. PWN, Warszawa 1968.
- [11] A. Serwach, *Modelowanie dynamiki układów hydraulicznych za pomocą maszyn matematycznych*. Prace PJAiP, nr 22, 1975.
- [12] J. V. Thoma, *Introduction to Band Graphs and Their Applications*. Pergamon Press, Oxford 1975.
- [13] J. Wojnarowski, *Grafy i liczby strukturalne jako modele układów mechanicznych*. Opracowanie Instytutu Podstaw Konstrukcji Maszyn, Politechnika Śląska — PTMTiS, nr 38, Gliwice 1977.

Применение сетевых моделей и структуральных чисел к анализу гидравлических систем. Часть I

Резюме

В работе предпринята попытка применения метода сетевых моделей и структуральных чисел к топологическому анализу гидравлических систем, не требующих применения управляемых источников. С целью расширения предела применений, представлен способ использования сетевых моделей с управляемыми источниками. Указывается при этом на неудобства связанные с непосредственным переносом метода на новую область применений.

В этой связи объявляется модификация этого метода во второй части работы.

Application of Network Models and Structural Numbers to Analysis of Hydraulic Systems, Part I

Summary

In the paper an attempt is made at applying the method of network models and structural numbers to topological analysis of hydraulic systems. A method of analyzing the so called simple hydraulic systems, i.e. such systems that do not require application of controlled sources, is presented. Also a way of adopting network models with controlled sources, intended to extend the range of application, is shown and disadvantages resulting from direct use of the method in the new field are pointed out.

In this connection the author declares to modify this method in the second part of the paper.