

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

83-84

WARSZAWA - POZNAŃ 1983

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

RADA REDAKCYJNA—EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
STEFAN PERYCZ · WŁODZIMIERZ PROSNAK · KAZIMIERZ STELLER
ROBERT SZEWAŁSKI (PRZEWODNICZĄCY - CHAIRMAN) · JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY—EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER — REDAKTOR — EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA—EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1983

Printed in Poland

ISBN 83-01-04553-1
ISBN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 340+90 egz.	Oddano do składania 17 VI 1982 r.
Ark. wyd. 21,5. Ark. druk. 16,75+1 wkl.	Podpisano do druku 22 IV 1983 r.
Pap. druk. sat. kl. V, 70 g	Druk ukończono w maju 1983 r.
Nr zam. 489/184.	E-9/215. Cena zł 200,—

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

HYDROFORUM

KONFERENCJA NAUKOWO-TECHNICZNA

na temat

PROBLEMY ROZWOJU HYDRAULICZNYCH MASZYN WIROWYCH ZE SZCZEGÓLNYM UWZGLĘDNIENIEM POTRZEB ENERGETYKI

Porąbka-Kozubnik, 20 - 23, września 1980 r.

*

HYDROFORUM

SCIENTIFIC-TECHNICAL CONFERENCE

on

DEVELOPMENT PROBLEMS OF HYDRAULIC TURBOMACHINES WITH SPECIAL ACCOUNT OF THE NEEDS OF POWER ENGINEERING

Porąbka-Kozubnik, September 20 - 23, 1980

*

ГИДРОФОРУМ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

на тему

ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ РОТОРНЫХ МАШИН С ОСОБЫМ УЧЕТОМ НУЖД ЭНЕРГЕТИКИ

Поромбка-Козубник, 20 - 23 сентября 1980 г.

RYSZARD ROHATYŃSKI

Wrocław*

Dwuwymiarowa metoda wyznaczania teoretycznych charakterystyk wirowych maszyn wodnych

W pracy omówiono podstawy teoretyczne metody obliczania przepływu przez palisady łopatek cienkich i sposób numerycznego rozwiązywania równania całkowego wiążącego gęstość cyrkulacji na łopatkę z geometrią palisady i warunkami pracy. Podano najważniejsze zależności dla obliczania teoretycznych charakterystyk palisady wirnika lub kierownicy. Opisano program obliczający charakterystyki hydrodynamiczne palisady o zadanej geometrii.

Wykaz oznaczeń

- | | |
|---|---|
| a – stała odwzorowania konforemnego, | D – średnica, |
| b – grubość warstwy prądu, | H – spad turbiny, wysokość podnoszenia pompy, |
| b_{∞} – średnia grubość warstwy prądu odpowiadająca prędkości $c_{\infty x}$, | $\bar{H} = \bar{H}_R \cdot \left(\frac{dx}{ds} \right)_0 + \bar{H}_I \left(\frac{dy}{ds} \right)_0$ – funkcja sprzęgająca (wpływowa), |
| c – bezwzględna prędkość cieczy na płaszczyźnie zespolonej, | $Q_{11} = Q/(D_z^2 \sqrt{H})$ – jednostkowa przepływność, |
| $c_{\infty} = 0,5(c_1 + c_{11})$, | $R = r/r_z$ – bezwymiarowy promień, |
| i – jednostka urojona, | R_{∞} – promień średni, odpowiadający b_{∞} , |
| $n = 0, 1, \dots, N$ – liczba porządkowa punktu obliczeniowego, | $S_{n, m}$ – współczynniki szeregu J. Weber, |
| $n_{11} = nD_z/\sqrt{H}$ – jednostkowa prędkość obrotowa, | δ – kąt wektora prędkości bezwzględnej c z osią x , |
| p – ciśnienie statyczne, | γ – wir związany lub wirowość pola prędkości, |
| p_c – ciśnienie całkowite, | $\gamma(x) = (\gamma(s)/2c_{\infty}) \cdot (ds/dx)$ – bezwymiarowy wir transformowany na oś odciętych, |
| r – promień, | $\gamma(s)$ – wir związany na linii szkieletowej łopatki na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, |
| s – współrzędna krzywoliniowa mierzona wzdłuż łopatki, | φ – zmienna pomocnicza; $\varphi_n = \pi n/N$, gdzie $\cos \varphi = 2x - 1$, |
| t – podziałka palisady na płaszczyźnie, | χ – kąt między elementem łopatki i osią x , |
| u – prędkość unoszenia na płaszczyźnie, | q – źródłowość, |
| w – prędkość względna cieczy na płaszczyźnie, | $\xi = 2\pi(x_0 - x)/t$; $\eta = 2\pi(y_0 - y)/t$, |
| x, y – rzeczywista i urojona oś współrzędnych w płaszczyźnie zespolonej, | ρ – gęstość cieczy, |
| z – współrzędna zespolona, | ω – prędkość kątowa wirnika, |
| $B = b_{\infty}/b$ – współczynnik grubości warstwy prądu, | |

* Instytut Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej.

Γ – cyrkulacja cieczy w palisadzie,
 $\Phi_z = c_{xz}/u_z$ – wyróżnik wydajności,
 $\psi = gH/u_z^2$ – wyróżnik ciśnienia.

Wskaźniki dolne

b – wywołany zmianą grubości warstwy prądu,
 i – idealne warunki napływu,
 m, n – odpowiednio: ustalony i bieżący punkt obliczeniowy,
 0 – ustalona współrzędna obliczeniowa,
 r – na osiowo-symetrycznej powierzchni prądu,
 s – na łopacie,
 t – styczny do łopatki,
 x, y – odpowiednio: składowe (rzuty) na oś x i y ,

z – zewnętrzny, odniesiony do zewnętrznego krańca palisady,
 γ – indukowany przez γ ,
 ω – wywołany rotacją palisady,
 ∞ – przepływ niezakłócony, wartość średnia,
 I, II – przepływ jednorodny (uśredniony) przed i za palisadą

Wskaźniki górne

(c) – całkowity,
 (r) – wskutek rotacji palisady,
 $(0), (90)$ – odpowiednio: dla $\delta_\infty = 0$ i dla $\delta_\infty = \pi/2$,
 $\pm$ – odpowiednio: po ssawnej lub tłocznej stronie łopatki,
 $*$ – odniesiony do $c_{\infty r}$.

1. Wstęp

Obliczanie przepływu przez wirniki i kierownice turbin wodnych i pomp może być uważane za uogólnienie podstawowego zagadnienia teorii palisady prostoliniowej. Dla obliczania takich palisad fundamentalne znaczenie ma praca H. Schlichtinga [1], który zastosował metodę punktów osobliwych.

Pierwsze uogólnienia metody Schlichtinga na palisady wirujące o zmiennym promieniu i zmiennej grubości warstwy prądu przypisuje się T. Cziberemu [2], R.I. Lewisowi [3], D. Pollardowi [4] i H. Horlockowi [5]. Prace te wskazały nowe możliwości analitycznego badania procesu roboczego turbomaszyn, a zwłaszcza wirowych maszyn wodnych.

Ze względu na swoiste zagadnienia teoretyczne i numeryczne odróżnia się palisady łopatek cienkich od palisad z łopatkami o skończonej grubości (palisady profilów). W tej pracy opisana jest metoda wyznaczania charakterystyk hydrodynamicznych palisad łopatek cienkich w przepływie cieczy doskonałej, tj. nieściślej i nielepkiej.

U podstaw metody leżą dość duże uproszczenia, które ograniczają możliwości bezpośredniego wykorzystania wyników obliczeń do wnioskowania o rzeczywistych charakterystykach maszyny. Najważniejsze z tych uproszczeń to:

- pominięcie lepkości i ściśłości cieczy,
- aproksymacja przepływu trójwymiarowego dwuwymiarowym przepływem po osiowo-symetrycznych powierzchniach prądu,
- założenie, że pole prądu przystaje do powierzchni łopatki,
- stacjonarność przepływu względnego,
- założenie jednorodnego pola prędkości przed i za palisadą.

Umiejętne zastosowanie metody dostarcza jednak pożytecznych informacji o procesie roboczym palisady. Dla palisady o danej geometrii określa się zależność między kątami napływu i wypływu cieczy z palisady, teoretyczne charakterystyki dławienia, warunki idealnego napływu, prędkości względne i ciśnienia statyczne na powierzchni łopatki, przyrosty energii cieczy w palisadzie itd. Znajomość tych charakterystyk ułatwia prze-

widywanie realnych własności wirnika lub kierownicy maszyny wirowej, takich jak np. stateczność charakterystyki dławienia, zakres wysokiej sprawności, własności kawitacyjne, wrażliwość na zmianę warunków pracy itp.

Dwuwymiarowa metoda obliczania przepływu cieczy doskonałej przez palisady łopatek wirników i kierownic pomp została przez autora opracowana w 1973 r. [6]. Od tego czasu algorytm metody był kilkakrotnie modyfikowany celem wprowadzenia ulepszeń numerycznych i poprawy własności użytkowych programu komputerowego. Ostatnia wersja algorytmu i programu, opracowana w ramach problemu międzyresortowego MRI-10 [7], nie była dotychczas publikowana, jakkolwiek niektóre informacje o niej zostały podane na VI Konferencji Maszyn Przepływowych w Budapeszcie [8].

Od chwili uruchomienia pierwszego programu komputerowego, metoda była z powodzeniem stosowana przy projektowaniu pomp odśrodkowych i diagonalnych. Niektóre doświadczenia i wyniki z tego zakresu przedstawił A. Zieliński w pracach [9, 10, 11].

Algorytmy i programy analizy przepływu przez palisady łopatek pomp opracowane w [7] mogą być, po niewielkich modyfikacjach, przystosowane do obliczania palisad turbin wodnych. Zostało to pokazane w pracach [12] i [13], gdzie podano uogólnione wzory, ważne dla wirników pomp i turbin wodnych. W niniejszej pracy zagadnienie obliczania teoretycznych charakterystyk palisad pomp i turbin wodnych zostało potraktowane integralnie, tak że podobieństwa i różnice stają się od razu widoczne.

Matematyczną podstawą metody jest równanie całkowe (13), którego numeryczne rozwiązanie względem wirów γ umożliwia wyznaczenie teoretycznych charakterystyk palisady o danej geometrii. Wyprowadzenie tego równania podano w rozdziale 2. Rozdział 3 wyjaśnia sposób numerycznego rozwiązania równania całkowego, a rozdział 4 — sposób wykorzystania rozwiązania do obliczania charakterystyk danej palisady. Modułowy program obliczania charakterystyk palisad łopatek cienkich jest opisany w rozdziale 5.

2. Uogólnione równanie przepływu przez prostoliniową palisadę łopatek cienkich

Rozpatrzmy przepływ cieczy doskonałej przez prostoliniową palisadę łopatek cienkich na płaszczyźnie zmiennej zespolonej (rys. 1). Prędkość względna cieczy $w(z_0)$ w dowolnym punkcie z_0 płaszczyzny może być przedstawiona jako suma prędkości względnej przepływu niezakłóconego i prędkości indukowanej liniowym rozkładem wirów na powierzchni łopatek [1]. W całym obszarze poza konturami łopatek pole prędkości względnej jest potencjalne. Rozłóżmy w obszarze $x_a \leq x \leq x_b$, $-\infty \leq y \leq \infty$ pole wirowe i źródłowe. Wtedy prędkość względna cieczy

$$w(z_0) = w_x(z_0) - iw_y(z_0) = w_\infty + w_\gamma(z_0) + w_o(z_0) + w_b(z_0). \quad (1)$$

Ponieważ ciecz nie przenika przez łopatkę, to prędkość względna na łopatce spełnia warunek kinematyczny

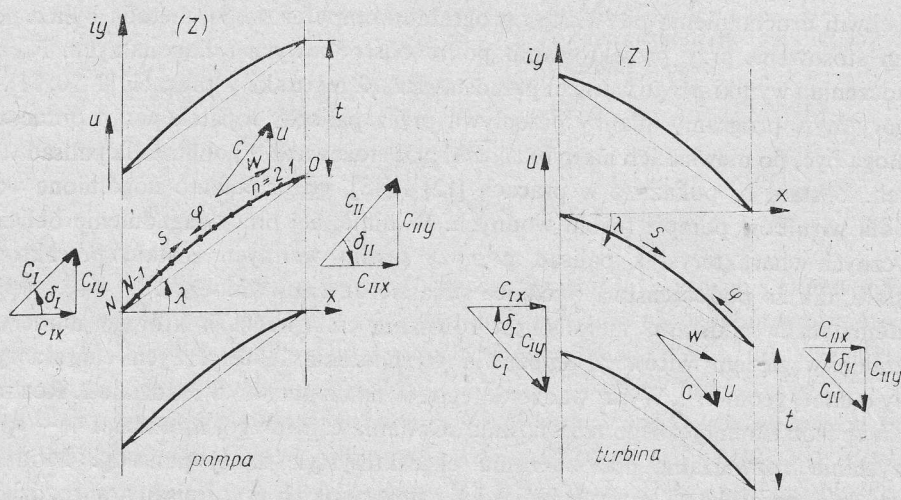
$$w_y(z_{0s}) \left(\frac{dx}{ds} \right)_0 - w_x(z_{0s}) \left(\frac{dy}{ds} \right)_0 = 0. \quad (2)$$

Z teorii palisad wiadomo [2, 6], że

$$w_r(z_{0s}) = w_{rx}(z_{0s}) - iw_{ry}(z_{0s}) = \pm \frac{1}{2} \gamma(s)_0 \cdot e^{-ix} + \frac{i}{2t} \int_{(s)} \gamma(s) \coth \frac{\pi}{t} (z_{0s} - z_s) ds. \quad (3)$$

Znaki $+$ i $-$ w równaniu (3) dobierane są zależnie od strony łopatki.

Prędkości w_ω i w_b indukowane powierzchniowym rozkładem wirowości i źródłowości zależą od sposobu rozłożenia wirów i źródeł. Dla obliczania prędkości w palisadzie osiowo-symetrycznej o zmiennym promieniu i zmiennej grubości warstwy prądu przydatne jest



Rys. 1. Palisada łopatek wirnika pompy i turbiny po odwzorowaniu na płaszczyznę zmiennej zespolonej

pole osobliwości zmienne tylko w kierunku osi palisady, tzn., że wirowość γ_ω i źródłowość q_b nie zależą od współrzędnej y [4, 5]. Prędkości indukowane takimi polami wynoszą odpowiednio

$$w_\omega(z_0) = -\frac{i}{2} \int_{x_a}^{x_0} \gamma_\omega dx + \frac{i}{2} \int_{x_0}^{x_b} \gamma_\omega dx, \quad (4)$$

$$w_b(z_0) = \frac{1}{2} \int_{x_a}^{x_0} q_b dx - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_b} q_b dx. \quad (5)$$

Wirowość γ_ω pola prędkości względnej jest określona przez prędkość kątową wirnika i kształt osiowo-symetrycznej powierzchni prądu (rys. 2). Jeśli pola prędkości na powierzchni osiowo-symetrycznej i na płaszczyźnie zmiennej zespolonej są konforemne, to między prędkościami istnieje związek [2, 7]

$$\frac{w}{w_r} = a \cdot r, \quad (6)$$

gdzie w_r — prędkość na powierzchni osiowo-symetrycznej. Zatem, dla dodatniej prędkości unoszenia, wirowość pola na płaszczyźnie

$$\gamma_\omega = -\frac{dw_y}{dx} = -\frac{du}{dx} = -2a\omega r \frac{dr}{dx}. \quad (7)$$

Z równań (4) i (7) otrzymuje się

$$w_\omega(z_0) = i a \omega \left[\frac{1}{2} (r_2^2 + r_1^2) - r^2 \right] = -\frac{i}{2} (u_1 + u_2) + i u(x_0) = i [u(x_0) - u_\infty]. \quad (8)$$

Rozkład źródłowości q_b dobiera się tak, żeby aproksymować przyspieszenie merydionalne wywołane zmienną grubością warstwy prądu. Przybliżone rozwiązanie tego złożonego zagadnienia prowadzi do określenia źródłowości [5]

$$q_b(x) = -\frac{w_x}{b(x)} \cdot \frac{db(x)}{dx}. \quad (9)$$

Czyniąc dodatkowe założenie, że $w_x b(x) = \text{const}$ i podstawiając (9) do (5) otrzymuje się:

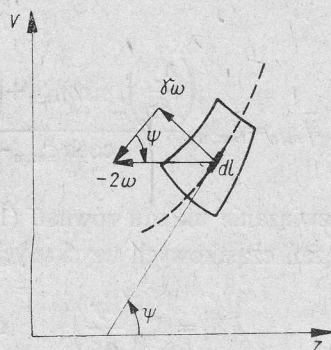
$$w_b(z_0) = w_b(x_0) = w_x(x_0) - w_{\infty x}. \quad (10)$$

Zauważmy, że

$$w_{\infty x} = c_{\infty x}, \quad w_{\infty y} + u_\infty = c_{\infty y}. \quad (11)$$

Po podstawieniu zależności (3), (8) i (10) do (1) otrzymuje się

$$w(z_{0s}) = \frac{b_\infty}{b(x_0)} w_{\infty x} + w_{yx}(z_{0s}) - i [w_{\infty y} + u_\infty - u(x_0) + w_{yy}(z_{0s})]. \quad (12)$$



Rys. 2. Wektor wirowości γ_ω pola prędkości względnej na osiowo-symetrycznej powierzchni prądu, wywołany prędkością kątową wirnika ω

Po oddzieleniu części rzeczywistej od urojonej w równaniu (3) i uwzględnieniu (11), otrzymuje się z warunku (2) uogólnione równanie przepływu przez palisadę łopatek cienkich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2t} \int_s \gamma(s) \frac{\left(\frac{dx}{ds} \right)_0 \cdot \sinh \xi + \left(\frac{dy}{ds} \right)_0 \cdot \sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta} ds = \\ = -\frac{b_\infty}{b(x_0)} c_{\infty x} \left(\frac{dy}{dz} \right)_0 + [c_{\infty y} - u(x_0)] \left(\frac{dx}{ds} \right)_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Jest to całkowe równanie Fredholma pierwszego rodzaju o jądrze osobliwym. Wyrażenie podcałkowe zawiera dwa punkty osobliwe: pierwszy, gdy $s \rightarrow s_0$ i drugi, gdy $s \rightarrow 0$ (wtedy $|\gamma(s)| \rightarrow \infty$).

3. Przekształcenie uogólnionego równania do postaci odpowiedniej dla obliczeń numerycznych

Do obliczenia całki osobliwej w równaniu (13) przystosowano metodę J. Weber [14], która aproksymuje wyrażenie podcałkowe szeregiem trygonometrycznym przyjmującym w punktach obliczeniowych te same wartości. Po przekształceniach, które opisane są w [7] równanie (13) sprowadza się do postaci dyskretnej

$$\sum_{n=1}^N S_{n,m} \gamma_n \bar{H}_{m,n} = - \left(\sin \delta_\infty - \frac{B_z}{\Phi_z} R_m^2 \cos \delta_\infty \right) \left(\frac{dx}{ds} \right)_m + B_m \cos \delta_\infty \left(\frac{dy}{ds} \right)_m, \quad (14)$$

gdzie

$$S_{n,m} = \frac{2}{N} \frac{1}{\cos \varphi_m - \cos \varphi_n} \quad \text{dla } (m-n) \text{ nieparzystych,}$$

$$S_{N,m} = \frac{1}{N} \frac{1}{1 + \cos \varphi_m} \quad \text{dla } m \text{ nieparzystych,}$$

$$S_{n,m} = 0 \quad \text{dla } (m-n) \text{ parzystych, } S_{N,m} = 0 \quad \text{dla } m \text{ parzystych,}$$

$$S_{n,n} = S_{m,m} = 0,$$

$$\gamma_n = -0,5 \gamma_n^*(x) \sin \varphi_n, \quad (15)$$

$$\bar{H}_{m,n} = \xi_{m,n} \frac{\left(\frac{dy}{ds} \right)_m \sin \eta_{m,n} + \left(\frac{dx}{ds} \right)_m \sinh \xi_{m,n}}{\cosh \xi_{m,n} - \cos \eta_{m,n}} = \bar{H}_{Jm,n} \left(\frac{dy}{ds} \right)_m + \bar{H}_{Rm,n} \left(\frac{dx}{ds} \right)_m. \quad (16)$$

Rozwiązanie układu równań (14) może być przedstawione jako superpozycja trzech rozwiązań cząstkowych uzyskanych przy prawych stronach równych

$$PS_1 = B_m \left(\frac{dy}{ds} \right)_m, \quad PS_2 = - \left(\frac{dx}{ds} \right)_m, \quad PS_3 = \pm R_m^2 \left(\frac{dx}{ds} \right)_m. \quad (17)$$

Rozwiązania wynoszą, odpowiednio: $\gamma_n^{(0)}$, $\gamma_n^{(90)}$, $\gamma_n^{(r)}$. Złożenie rozwiązań cząstkowych daje

$$\gamma_n = \left[\gamma_n^{(0)} + \frac{B_z}{\Phi_z} \gamma_n^{(r)} \right] \cos \delta_\infty + \gamma_n^{(90)} \sin \delta_\infty. \quad (18)$$

Numeryczne całkowanie wirów $\gamma_n^{(0)}$, $\gamma_n^{(90)}$, $\gamma_n^{(r)}$ wzdłuż linii szkieletowej łopatki daje cyrkulacje

$$\Gamma^{(0)}, \Gamma^{(90)}, \Gamma^{(r)}.$$

Całkowitą cyrkulację palisady oblicza się wzorem strukturalnie identycznym do (18), w którym w miejsce wirów γ podstawia się cyrkulacje składowe Γ . Trzykrotne rozwiązanie układu równań (14) przy prawych stronach (17) jest podstawą do obliczania charakterystyk hydrodynamicznych palisady.

Prawe strony (17) i funkcja $\bar{H}_{m,n}$ zależą tylko od geometrii palisady, zatem rozwiązania cząstkowe są ważne dla wszystkich palisad geometrycznie podobnych i nie zależą od warunków pracy. Różnica między obliczaniem wirnika pompy i turbiny polega tylko na zmianie znaku prawej strony PS_3 w (17). W obu przypadkach rozmiary geometryczne i prędkości obwodowe odnoszą się do zewnętrznego promienia palisady r_z , przy tradycyjnym sposobie oznaczania $r_z=r_1$ w wirniku turbiny i $r_z=r_2$ w wirniku pompy.

4. Teoretyczne charakterystyki palisad

4.1. Zależność między kątami napływu i wypływu cieczy z palisady

Z trójkątów prędkości oraz z zależności między cyrkulacjami $\Gamma^{(0)}$, $\Gamma^{(90)}$, $\Gamma^{(r)}$ i przyrostem energii cieczy w palisadzie wynika zależność

$$\operatorname{tg} \delta_{II} = A + B \operatorname{tg} \delta_I + \frac{C}{\Phi_z}, \quad (19)$$

gdzie

$$A = -\frac{1}{B_{II}} \frac{\frac{2}{t} \Gamma^{(0)}}{1 + \frac{1}{t} \Gamma^{(90)}}, \quad (20)$$

$$B = \frac{B_I}{B_{II}} \frac{1 - \frac{1}{t} \Gamma^{(90)}}{1 + \frac{1}{t} \Gamma^{(90)}}, \quad (21)$$

$$C = -\frac{\frac{2}{t} \Gamma^{(r)}}{1 + \frac{1}{t} \Gamma^{(90)}} \frac{B_z}{B_{II}}. \quad (22)$$

W przypadku palisady nieruchomej współczynnik $C=0$ i wzór (19) upraszcza się.

4.2. Teoretyczna bezwymiarowa charakterystyka dławienia

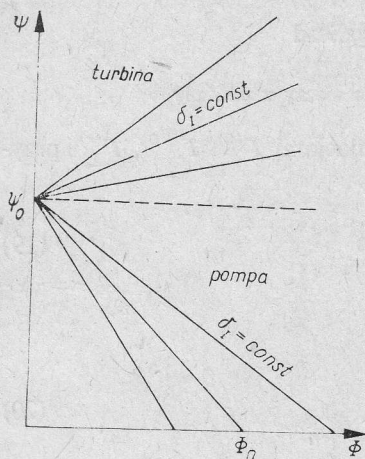
Na rysunku 3 pokazano teoretyczne krzywe dławienia $\Psi - \Phi$ wirnika turbiny wodnej i pompy. Są to linie proste, przecinające oś rzędnych w punkcie Ψ_0 i oś odciętych w punkcie Φ_0 . Zatem

$$\frac{\Psi}{\Psi_0} + \frac{\Phi}{\Phi_0} = 1. \quad (23)$$

Uwzględnienie zależności wiążących cyrkulację z trójkątami prędkości i wysokością podnoszenia (spadem) prowadzi do wzorów

$$\Psi_0 = \frac{\frac{4}{t} \Gamma^{(r)}}{1 + \frac{1}{t} \Gamma^{(90)}}, \quad (24)$$

$$\Phi_0^{-1} = - \frac{\Gamma^{(0)} + B_1 \Gamma^{(90)} \operatorname{tg} \delta_1}{B_z \Gamma^{(r)}} = F + G \operatorname{tg} \delta_1. \quad (25)$$



Rys. 3. Teoretyczne bezwymiarowe charakterystyki dlałwienia palisady wirnika turbiny i pompy

Dla turbin wodnych ważne są charakterystyki przy $\Psi = \text{const}$. Oznaczając stosunek Ψ/Ψ_0 przez P , otrzymuje się z równań (19), (23) i (25) zależności

$$\Phi = \frac{1 - P}{F + G \operatorname{tg} \delta_1}, \quad (26)$$

$$\operatorname{tg} \delta_{II} = A \frac{P}{P-1} + \left(B - \frac{CG}{P-1} \right) \operatorname{tg} \delta_1. \quad (27)$$

W równaniach (26) i (27) A, B, C, F, G są stałymi zależnymi tylko od geometrii palisady, natomiast P może być uważane za parametr uwzględniający spad turbiny ($P > 1$).

Teoretyczne charakterystyki $n_{11} - Q_{11}$ wirnika turbiny można wyznaczyć wychodząc z zależności

$$n_{11} = 60 \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\Psi}}, \quad Q_{11} = \pi \sqrt{2g} \frac{b_z}{D_z} \frac{\Phi}{\sqrt{\Psi}}. \quad (28)$$

Eliminując Ψ otrzymuje się

$$Q_{11} = \frac{\pi^2 b}{60 D_z} n_{11} \Phi. \quad (29)$$

Ostatecznie, biorąc pod uwagę (26)

$$Q_{11} = \frac{\pi^2}{60} \frac{b_z}{D_z} \frac{1}{F + G \operatorname{tg} \delta_1} \left[1 - \frac{(n_{11})_0^2}{n_{11}} \right] n_{11}, \quad (30)$$

gdzie $(n_{11})_0$ oblicza się z (28) dla $\Psi = \Psi_0$.

4.3. Warunki idealnego napływu na palisadę

Gdy ciecz napływa stycznie do krawędzi wlotowej łopatki, wir związany na krawędzi wlotowej jest równy zeru. Podstawiając w równaniu (18) $\gamma_{n=N} = 0$ i eliminując wyróżnik wydajności Φ przez zastąpienie go cyrkulacjami składowymi, otrzymuje się zależność określającą średni kąt przepływu przy idealnym napływie na palisadę

$$\operatorname{tg} \delta_{\infty i} = I + J \operatorname{tg} \delta_1, \quad (31)$$

gdzie

$$I = \frac{\frac{1}{t} \Gamma^{(0)} \gamma_N^{(r)} - \frac{1}{t} \Gamma^{(r)} \gamma_N^{(0)}}{\frac{1}{t} \Gamma^{(r)} \gamma_N^{(90)} - \left(\frac{1}{t} \Gamma^{(90)} + 1 \right) \gamma_N^{(r)}}, \quad (32)$$

$$J = \frac{B_1 \gamma_N^{(r)}}{\frac{1}{t} \Gamma^{(r)} \gamma_N^{(90)} - \left(\frac{1}{t} \Gamma^{(90)} + 1 \right) \gamma_N^{(r)}}. \quad (33)$$

Zauważmy, że na podstawie kinematycznego związku

$$2 \operatorname{tg} \delta_{\infty} = B_I \operatorname{tg} \delta_I + B_{II} \operatorname{tg} \delta_{II} \quad (34)$$

można, przy danym δ_I i obliczonym $\delta_{\infty i}$ z (31), łatwo obliczyć kąt wypływu z palisady δ_{II} odpowiadający idealnym warunkom napływu.

Wyróżnik wydajności przy idealnym napływie oblicza się wzorem

$$\Phi_i^{-1} = L + M \operatorname{tg} \delta_I, \quad (35)$$

gdzie

$$L = - \frac{1}{B_z} \frac{\left[1 + \frac{1}{t} \Gamma^{(90)} \right] I + \Gamma^{(0)}}{\frac{1}{t} \Gamma^{(r)}}, \quad (36)$$

$$M = \frac{B_I - \left[1 + \frac{1}{t} \Gamma^{(90)} \right] J}{B_z \frac{1}{t} \Gamma^{(r)}}. \quad (37)$$

Dla palisady nieruchomej obowiązuje prosta zależność

$$\operatorname{tg} \delta_{\infty i} = -\frac{\gamma_N^{(0)}}{\gamma_N^{(90)}}. \quad (38)$$

Biorąc pod uwagę zależność kąta nachylenia średniej prędkości bezwzględnej od cyrkulacji składowych

$$\operatorname{tg} \delta_{\infty} = -\frac{\frac{1}{t} \Gamma^{(0)} + \frac{B_z}{\Phi_z} \frac{1}{t} \Gamma^{(r)} + B_1 \operatorname{tg} \delta_1}{1 + \frac{1}{t} \Gamma^{(90)}} \quad (39)$$

można obliczać kąt idealnego napływu na palisadę kierownicy z wzoru

$$B_1 \operatorname{tg} \delta_{1i} = \frac{\gamma_N^{(0)}}{\gamma_N^{(90)}} \left[1 + \frac{1}{t} \Gamma^{(90)} \right] - \frac{1}{t} \Gamma^{(0)}. \quad (40)$$

Po wyznaczeniu kątów δ_{∞} i δ_1 dla idealnego napływu można obliczyć całkowitą cyrkulację palisady z wzoru

$$-\frac{1}{t} \Gamma^{(c)} = \sin \delta_{\infty} + B_1 \cos \delta_{\infty} \operatorname{tg} \delta_1. \quad (41)$$

4.4. Prędkości i ciśnienia cieczy na łopacie

Prędkość względna cieczy w przepływie bez oderwania musi być styczna do powierzchni łopatki. Zakładając taki przepływ otrzymuje się zależność

$$w_{tm}^{\pm} = (B_m \cos \delta_{\infty} + w_{yxm}) \left(\frac{dx}{ds} \right)_m + \left(\sin \delta_{\infty} + w_{rym} + R_m^2 \frac{B_z}{\Phi_z} \cos \delta_{\infty} \right) \left(\frac{dy}{ds} \right)_m \pm \gamma(x)_m \left(\frac{dx}{ds} \right)_m, \quad (42)$$

gdzie prędkości w są odniesione do c_{∞} oraz

$$w_{yxm} = - \sum_{n=1}^N S_{n,m} \gamma_n \bar{H}_{Jm,n}, \quad (43)$$

$$w_{rym} = \sum_{n=1}^N S_{n,m} \gamma_n \bar{H}_{Rm,n}. \quad (44)$$

Współczynniki $\bar{H}_{Jm,n}$ i $\bar{H}_{Rm,n}$ określone są wzorem (16).

Prędkości względne unormowane na osiowo symetrycznej powierzchni prądu oblicza się wzorem

$$w_{rm}^* = \frac{w_{rm}}{c_{\infty r}} = w_{tm} \frac{R_{\infty}}{R_m}. \quad (45)$$

Z równania Bernoulli'ego napisanego dla względnego układu współrzędnych wynika zależność

$$c_p = \frac{p_m - p_1}{0,5 \rho c_{\infty r}^2} = w_{rm}^{*2} - w_{r1}^{*2} + u_{r1}^{*2} - u_{rm}^{*2}. \quad (46)$$

Przyrost energii cieczy na łopatkę można obliczyć wzorem

$$Y_m = \frac{\Delta p_{cm}}{0,5 \rho c_{\infty}^2} = 2(w_{rym}^{*\pm} + u_{rm}^*) u_{rm}^* - 2c_{ryl}^* u_{rl}^*, \quad (47)$$

gdzie

$$w_{rym}^{*\pm} = \left(\sin \delta_{\infty} + w_{ym} + R_m^2 \frac{B_z}{\Phi_z} \cos \delta_{\infty} \right) \frac{R_{\infty}}{R_m} \pm \gamma(s)_{rm} \left(\frac{dy}{ds} \right)_m. \quad (48)$$

Wyróżnik ciśnienia dla wirnika oblicza się z zależności

$$\Psi = \frac{2\Delta p_c}{\rho u_{zr}^2} = \frac{4\Gamma^{(c)}}{tu_z}. \quad (49)$$

Zależności między wyróżnikiem ciśnienia i całkowitym przyrostem energii cieczy

$$Y = \frac{2\Delta p_c}{\rho c_{\infty}^2} = \Psi u_{zr}^{*2}. \quad (50)$$

Całkowity przyrost ciśnienia statycznego w palisadzie

$$c_p = \frac{p_{II} - p_I}{0,5 \rho c_{\infty}^2} = w_{rII}^{*2} - w_{rI}^{*2} + u_{rI}^{*2} - u_{rII}^{*2}. \quad (51)$$

5. Program obliczania przepływu przez palisady łopatek cienkich

W ramach pracy [7] został wykonany komputerowy program analizy przepływu przez palisady łopatek cienkich, odróżniający się od wcześniejszych programów tego typu modułową strukturą i ogólnością algorytmu. Ogólność programu polega m. in. na tym, że na podstawie danych charakteryzujących geometrię palisady, oblicza on zestaw bezwymiarowych wielkości charakteryzujących działanie palisady w cieczy doskonałej. Wielkości te zależą tylko od geometrii palisady i są jednakowe dla wszystkich palisad geometrycznie podobnych. Bezwymiarowe charakterystyki hydrodynamiczne palisady w określonych warunkach pracy są jednoznaczną funkcją tych wielkości.

Program został napisany w języku FORTRAN 1900 dla pracy w systemie operacyjnym GEORGE-3 i składa się z trzech modułów.

Moduł I (ANL 1) rozwiązuje układ równań (14) przy trzech prawych stronach (17) i oblicza wiry $\gamma_n^{(0)}$, $\gamma_n^{(90)}$, $\gamma_n^{(r)}$. Następnie obliczane są cyrkulacje składowe $\Gamma^{(0)}$, $\Gamma^{(90)}$, $\Gamma^{(r)}$ oraz niektóre wielkości ułatwiające obliczenie teoretycznych charakterystyk palisady (np. stałe A , B , C w równ. (19)). Uruchomienie modułu wymaga podania liczby punktów obliczeniowych N , podziałki t , rzędnych y_m i pochodnych $(dy/dx)_m$ linii szkieletowej łopatki w punktach obliczeniowych m oraz współczynników grubości warstwy prądu B_m i promienia R_m .

Moduł II (ANL 2) oblicza wiry i prędkości na łopatkę na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Wymaga on podania dodatkowo wyróżnika wydajności Φ i kąta napływu δ_1 , które określają warunki pracy palisady.

Moduł III(ANL 3) transformuje wyniki ANL 2 na osiowo-symetryczną powierzchnię prądu. Oblicza on:

- wiry, tj. nieciągłości prędkości względnych spowodowane łopatkami,
- prędkości indukowane przez wiry umiejscowione na łopatkach,
- prędkości względne styczne do łopatki po obu jej stronach,
- przyrosty ciśnienia statycznego po obu stronach łopatki i całkowity przyrost ciśnienia statycznego w palisadzie,
- przyrosty energii całkowitej po obu stronach łopatki,
- średnie przyrosty energii całkowitej cieczy w wirniku.

Moduły ANL mogą być realizowane oddzielnie lub sekwencyjnie, zależnie od potrzeby. Cały program może współpracować z programem KONF, który odwzorowuje palisadę osiowo-symetryczną na palisadę prostoliniową i z programem GEOM, który służy do opracowania danych geometrycznych łopatki dla modułu ANL 1. Moduł ANL 1 wchodzi także w skład tzw. programów syntezy wyznaczających kształt łopatki dla zadanego rozkładu cyrkulacji prędkości lub ciśnienia na łopatkach. W tych programach kształt łopatki odpowiadający założonym wymaganiom znajduje się w procesie iteracyjnym za pomocą kolejnych modyfikacji kształtu stanowiącego zerowe przybliżenie [8].

6. Wnioski

Przedstawione w rozdziale 2 uogólnione równanie przepływu przez palisadę umożliwia wyznaczenie charakterystyk hydrodynamicznych dwuwymiarowej palisady o danej geometrii, z uwzględnieniem sił Coriolisa i zmiennej grubości warstwy prądu. Ponieważ między polem prędkości na osiowo-symetrycznej powierzchni prądu w wirniku maszyny wirowej i polem prędkości w uogólnionej palisadzie prostoliniowej na płaszczyźnie zmiennej zespolonej istnieje jednoznaczna odpowiedniość, to równanie (13) może być wykorzystane do obliczania teoretycznych charakterystyk wirników. Przedstawienie równania (13) w postaci dostosowanej do obliczeń numerycznych (14) i rozwiązanie go z wykorzystaniem zasady superpozycji jest podstawą wyznaczenia charakterystyki palisady w określonych warunkach pracy.

W stosunku do trójwymiarowego przepływu cieczy doskonałej równanie zawiera dwa istotne uproszczenia: aproksymację przepływem po osiowo-symetrycznych powierzchniach prądu i aproksymację wpływu zmiennej grubości warstwy prądu powierzchniowym rozkładem źródłowości. Dla obu tych założeń należałoby określić warunki dopuszczalności ich stosowania i oszacować stopień uproszczenia pola prądu.

Literatura

- [1] H. Schlichting, *Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter*. VDI-Forsch. Hft. 447, 1955.
- [2] T. Czibere, *Über die Berechnung der Schaufelprofile und der Strömung um die Schaufeln von Strömungsmaschinen*. Ing. Archiv 33, 1964.
- [3] R. I. Lewis, *Internal aerodynamics of turbo-machines*. Proc. Instn. Mech. Engrs. 1964 - 65, Vol. 197, Pt 1.

- [4] D. Pollard, *The extension of Schlichting's analysis to mixed flow cascades*. Paper 22, Thermodynamics and Fluid Mechanics Convention (Liverpool) 1966.
- [5] D. Pollard, J. H. Horlock, *A Theoretical Investigation of the Effect of Change in Axial Velocity on the Potential Flow through a Cascade of Aerofoils*, ARC CP No. 619, 1963.
- [6] R. Rohatyński, A. Zieliński, J. Salamon, *Analiza palisady łopatek cienkich*. Raport Instytutu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej, nr 18, 1973.
- [7] R. Rohatyński, A. Zieliński, A. Łuszek, R. Krakowiak, *Metoda analizy i syntezy palisady łopatek cienkich*. Raport Instytutu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej nr 523, 1978.
- [8] R. Rohatyński, *A Set of Computer Programs Based on Singularity Method Designed for Use in Design of Radial and Mixed Flow Impellers*. Proc. of the VI-th Conf. on Fluid Machinery. Academiai Kiado, Budapest, 1979, s. 955 - 965.
- [9] A. Zieliński, *Przykład zastosowania metody punktów osobliwych do badania przepływu przez pompę diagonalną*. Prace Naukowe Instytutu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej nr 34, (oraz komunikat IKEM nr 297). Wrocław 1977.
- [10] A. Zieliński, *Badanie przepływu w palisadach maszyn wirowych. Obliczanie pól prędkości w palisadach łopatek cienkich na wybranej, osiowo-symetrycznej powierzchni prądu*. Przegląd Mechaniczny nr 18/1979.
- [11] A. Zieliński, *Problematyka zastosowania metody punktów osobliwych do projektowania elementów przepływowych maszyn wirowych*. Prace IMP, z. 83-84, 1983.
- [12] R. Rohatyński, *Dwuwymiarowa metoda wyznaczania teoretycznych charakterystyk wirowych maszyn wodnych*. Materiały Konferencji Hydroforum 80 Porąbka-Kozubnik 1980, s. 335 - 349.
- [13] R. Rohatyński, *A method of determination of influence of cascade geometry on theoretical characteristics of hydraulic turbomachinery*. Materiały Konferencji Hydroturbo 81, Brno 1981.
- [14] J. Weber, *The calculation of the pressure distribution on the surface of thick cambered wings and the design of wings with given pressure distribution*. ARC R. and M. No. 3026, 1955.

Two-Dimensional Method of Determining Theoretical Characteristics of Hydraulic Rotodynamic Machines

Summary

The paper presents the theoretical basis of a method of flow calculation past cascades of thin blades. A way of numerical solution of fundamental integral equation relating the circulation density on blades to the geometry and operating conditions of a cascade has been outlined. The most important relations defining the theoretical characteristics of an impeller or a guide ring cascade have been given. Some information about computer programmes designed for calculating hydrodynamic characteristics of cascades of given geometry is presented.

Двухразмерный метод определения характеристик гидромашин

Резюме

В работе представлены теоретические основы метода расчета течения через решетки тонких лопаток. Начерчен способ численного решения основного интегрального уравнения связывающего плотность циркуляции на лопатках с геометрией и условиями работы решетки. Даны основные зависимости определяющие теоретические характеристики ротора или направляющего аппарата. Представлены некоторые информации относительно программ на ЭВМ приспособленных к расчетам гидродинамических характеристик решеток заданной геометрии.