

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
I N S T Y T U T M A S Z Y N P R Z E P Ł Y W O W Y C H

PRACE
I N S T Y T U T U M A S Z Y N
P R Z E P Ł Y W O W Y C H

T R A N S A C T I O N S
O F T H E I N S T I T U T E O F F L U I D - F L O W M A C H I N E R Y

82

W A R S Z A W A - P O Z N A Ń 1982

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

RADA REDAKCYJNA – EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
STEFAN PERYCZ · WŁODZIMIERZ PROSNAK
KAZIMIERZ STELLER · ROBERT SZEWAŁSKI (PRZEWODNICZĄCY · CHAIRMAN)
JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY – EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER – REDAKTOR – EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA – EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1982

Printed in Poland

ISBN 83-01-03979-5
ISSN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE – ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 340 + 90 egz.	Oddano do składania 12 X 1981 r.
Ark. wyd. 12 Ark. druk. 9,25	Podpisano do druku 18 V 1982 r.
Pap. druk. sat. kl. V, 70 g 70 × 100 cm.	Druk ukończono w maju 1982 r.
Nr zam. 577/122. W-6/523.	

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

GERARD ŚLIWIŃSKI

Gdańsk

Elementy teorii indukcyjnego pomiaru przepływu*

W pracy przedstawiono rozwiązania równania na sygnał pomiarowy przepływomierza indukcyjnego ze szczególnym uwzględnieniem funkcji opisującej rozkład pola magnetycznego.

Wykaz oznaczeń

$\vec{A}$ — potencjał wektorowy pola magnetycznego,	$\nabla \times$ — operator rotacji wektora,
$\vec{B}$ — wektor indukcji magnetycznej,	∇ — operator divergencji wektora,
$\vec{E}$ — wektor natężenia pola elektrycznego,	∇^2 — operator skalarny (Laplasjan),
$\vec{I}$ — wektor gęstości prądu elektrycznego	μ — współczynnik przenikalności magnetycznej,
k — wskaźnik transformacji całkowitej Fouriera,	ϵ — stała dielektryczna,
x, y, z — współrzędne prostokątne,	σ — przewodność elektryczna,
r, φ, z — współrzędne walcowe,	ω — częstość zmian prądu w obwodzie,
	Re — liczba Reynoldsa.

1. Wstęp

Istnieje obecnie wiele metod umożliwiających pomiar prędkości, czy też natężenia przepływu. Wysokie wymagania stawiane technice pomiarowej przez współczesne procesy technologiczne inspirują dalsze poszukiwania i badania w zakresie nowych metod i ich udoskonaleń. Automatyzacja i kompleksowe sterowanie procesów pociągają za sobą konieczność ciągłej kontroli i pomiaru z wymaganą dokładnością. Obecna tendencja w technice pomiarowej to coraz powszechniejsze stosowanie metod ogólnie zwanych elektrycznymi (tzn. sygnał pomiarowy jest wielkością elektryczną o standardowym zakresie wartości) przy pomiarach wielkości nieelektrycznych. Jedną z metod pomiarowych, stosowanych do laboratoryjnych i przemysłowych pomiarów przepływu, odpowiadającą powyższym wymaganiom jest metoda indukcyjna. Ma ona wiele zalet, wśród których najważniejsze to liniowa zależność między wielkością mierzoną i sygnałem pomiarowym, prostota konstrukcji miernika i stosunkowo duża dokładność. Zastosowania jakie znalazła indukcyjna metoda pomiaru przepływu (logi morskie, kriogenika, medycyna, przemysł) oparte są na półempirycznych badaniach, ponieważ pełny opis teoretyczny metody

* Praca wykonana w ramach problemu międzyresortowego MR.I.26, „Podstawy projektowania maszyn i urządzeń energetycznych”, grupa tematyczna 10.

nastęrcza wiele trudności. Można przy tym wyodrębnić niejako dwie grupy zagadnień. Pierwszą stanowią rozwiązania równań elektrodynamiki w walcowym obszarze o skończonej długości. Drugą, sformułowanie problemu brzegowego (równoznaczne założeniu rozkładu pola indukcji magnetycznej) w taki sposób, by model analityczny w miarę dokładnie opisywał zjawiska fizyczne. Pole magnetyczne mierników kształtowane jest przez zamknięte uzwojenia zasilane na ogół prądem przemiennym. Kształt uzwojeń i inne zależności geometryczne, warunki zasilania oraz własności materiałów konstrukcyjnych mają zasadniczy wpływ na postać funkcji opisującej rozkład pola magnetycznego. Jest ona przedmiotem niniejszego opracowania. Opierając się na istniejącej, niekompletnej jak dotychczas, teorii indukcyjnego pomiaru przepływu przedstawiono metodę analizy rozkładu pola magnetycznego. Model miernika jest przy tym dwuwymiarowy i jakościowo odpowiada określonej klasie mierników, uważanych ogólnie za mierniki z polem jednorodnym; jego adekwatność względem rzeczywistej konstrukcji zależy jedynie od wymaganej dokładności obliczeń.

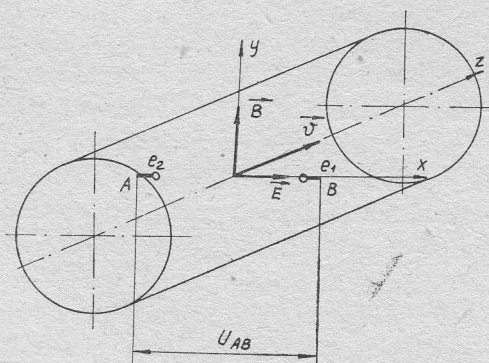
Zakres rozważań ograniczono do typowych mierników przepływu wody i będących roztworami wodnymi cieczy przemysłowych; podane rozwiązania mają jednak charakter ogólny i można je zastosować w wielu innych nie omawianych tu przypadkach.

1. Równanie wyjściowe

W układzie pomiarowym jak na rys. 1 ciecz płynąca przewodem z prędkością $\vec{v}$ w polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ indukuje pole elektryczne o natężeniu

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}.$$

Ponieważ każdy ładunek elektryczny zawarty w cieczy porusza się, właściwy jest tu drugi „primowany” układ współrzędnych (x', y', z', t') , poruszający się względem układu odniesienia (x, y, z, t) w kierunku osi z z prędkością jednostajną $\vec{v}$. Wielkości opisujące pole



Rys. 1. Idea układu pomiarowego

elektromagnetyczne w obu układach związane są transformacją Lorentza. Wobec niezmienniczości związków materiałowych i równań Maxwella względem tej transformacji i przy założeniu $v \ll c$, można napisać (opuszczając znaki „prim”)

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{I} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

oraz

$$\vec{B} = \underline{\mu} \vec{H}, \quad (1.3)$$

$$\vec{D} = \underline{\varepsilon} \vec{E}, \quad (1.4)$$

$$\vec{I} = \underline{\sigma} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.5)$$

Warunek formalny $\partial \vec{B} / \partial t = 0$ odpowiada polu magnetycznemu niezależnemu od czasu. Skojarzenie równań (1.1)÷(1.5) daje w efekcie równanie Poissona

$$\nabla^2 V = K^* \operatorname{div}(\vec{v} \times \vec{B}), \quad (1.6)$$

gdzie K^* — stała materiałowa, $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$.

Szczegółowe informacje dotyczące wpływu własności materiałowych na działanie mierników indukcyjnych znaleźć można w [1,4].

W pracy [3] przyjęto równanie (1.6) jako dokładne również w przypadku, gdy częstotliwość prądu w uzwojeniach wytwarzających pole magnetyczne jest niewielka (50 Hz). Warunek $\partial B / \partial t = 0$ daje $\nabla \times E = 0$ co pozwala na obliczenie napięcia międzyelektrodowego U_{AB} w prosty sposób. Interesujące ujęcie zagadnienia zaproponował Cushing [2]. Wydzielenie składowych $\vec{E}_b$ i $\vec{E}_w$ wektora wzbudzonego pola elektrycznego $\vec{E}$ prowadzi do warunków

$$\nabla \times \vec{E}_b = 0 \quad \text{ i } \quad \nabla \vec{E}_b = \nabla \vec{E} \quad \text{ oraz } \quad \nabla \times \vec{E}_w = \nabla \times \vec{E} \quad \text{ i } \quad \nabla \vec{E}_w = 0,$$

gdzie $\vec{E} = \vec{E}_b + \vec{E}_w$, $\vec{E}_b$ — składowa bezwirowa wektora $\vec{E}$, $\vec{E}_w$ — składowa wirowa wektora $\vec{E}$. Można więc napisać równanie (1.6) dla składowej $\vec{E}_b$

$$\nabla^2 V_1 = K_1^* \operatorname{div}(\vec{v} \times \vec{B}),$$

przy czym

$$\vec{E}_b = -\operatorname{grad} V_1.$$

Różnica potencjałów V_1 w dwóch różnych punktach płaszczyzny prostopadłej do osi rury jest różna od zera, bo pole bezwirowe $\vec{E}$ posiada potencjał z definicji. Natomiast pole $\vec{E}_w = E_w \exp(j\omega t)$ nie jest tu brane pod uwagę. Zastanawiające jest jednak, że takie rozwiązanie jest również zależne od czasu poprzez czynnik $j\omega$ występujący w K_1^* (patrz [4]).

Sygnał pomiarowy obliczany przytoczonymi wyżej metodami równy jest

$$U_{AB} = K_i^* D B_0 \bar{v},$$

gdzie D — średnica wewnętrzna przewodu, $\bar{v}$ — średnia prędkość czynnika w przewodzie

$$\left(\bar{v}(r) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r v \cdot r \cdot dr \right), \quad B_0 \text{ — wartość indukcji magnetycznej na linii łączącej elektrody.}$$

We wszystkich przypadkach różne są jedynie wyrażenia na K_i^* . Rozwiązanie takie jest znacznym uproszczeniem, a to z następujących powodów:

— W większości przypadków badane przepływy są burzliwe. Rozkład prędkości cieczy w przewodzie jest więc funkcją promienia, a niekiedy (przepływy niesymetryczne osiowo), również współrzędnej kątowej — $\vec{v} = v(r, \varphi)$.

— Wspomniana wartość B_0 jest miarą wektora indukcji magnetycznej leżącego w płaszczyźnie elektrod i prostopadłego do osi elektrod; miernik rzeczywisty posiada skończoną długość, więc istnieją efekty brzegowe, niejednorodność pola $\vec{B}$ oraz trzy jego składowe $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$.

— Generacja sygnału pomiarowego z pewnością zależy od kształtu obszaru; rozwiązanie równania różniczkowego (1.6) ma tę samą własność.

Rozwiązanie zagadnienia brzegowego dla równania (1.6) za pomocą funkcji Greena okazuje się znacznie bardziej przydatne do celów analizy. Znalazienie takiej funkcji jest osobnym problemem, nawet wtedy gdy wiadomo o jej istnieniu. Pierwsze takie rozwiązanie (dwuwymiarowe) [5, 6] w płaszczyźnie elektrod określa napięcie międzyelektrodowe jako

$$U_{AB} = 2 \frac{B}{\pi R} \iint \vec{v}(x, y) \vec{W}^{(2)}(x, y) dx dy, \quad (1.7)$$

gdzie $\vec{W}^{(2)} = \text{grad } G$, G — funkcja Greena obszaru płaskiego $R^2 = x^2 + y^2$, przy czym $\vec{W}^{(2)}(x, y)$ jako jeden z trzech wektorów wzajemnie prostopadłych jest wektorem w kierunku x o wartości zależnej od położenia wewnątrz obszaru, w tym przypadku $\text{grad } G = \vec{W}_x^{(2)}(x, y)$. Krzywe $W_x^{(2)} = f(x, y)$ są owalami Cassini'ego. Interpretacją fizyczną funkcji $\vec{W}$ jest zdolność poszczególnych, nieskończenie małych elementów przekroju rury do generowania napięcia U_{AB} . $W(x, y)$ nazywa się funkcją wagową dwuwymiarową w przepływo mierzu indukcyjnym. Rozwinięciem teorii opartej na funkcji wagowej były kolejne prace [7, 8], określające drugą składową $\vec{W}^{(2)}(x, y)$ w płaszczyźnie elektrod. W wyrażeniu na U_{AB} uwzględniono możliwość istnienia drugiej składowej pola magnetycznego B_x (co w rzeczywistości ma miejsce)

$$U_{AB} = K^* \iint [W_y^{(2)}(x, y) B_x(x, y) - W_x^{(2)}(x, y) B_y(x, y)] v(x, y) dx dy. \quad (1.8)$$

Wyrażenie (1.8) nie uwzględnia trzeciego wymiaru, tzn. długości rozpatrywanego obszaru walcowego. W świetle wymienionych wcześniej zastrzeżeń również pozostała trzecia składowa pola magnetycznego B_z nie jest brana pod uwagę w takim rozwiązaniu. Problem ten został ostatecznie określony poprzez znalezienie funkcji Greena w obszarze walcowym skończonej długości. Według [9] sygnał pomiarowy równy jest

$$U_{AB} = \iiint [\vec{W}^{(3)}, \vec{v}, \vec{B}] dx dy dz, \quad (1.9)$$

gdzie $[\]$ — iloczyn wektorowy, a składowe trójwymiarowej funkcji wagowej w walcowym układzie współrzędnych:

$$W_x^{(3)} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{r \cos \varphi + R \cos \psi}{(r^2 + R^2 + 2rR \cos(\varphi - \psi) + z^2)^{3/2}} - \frac{r \cos \varphi - R \cos \psi}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos(\varphi - \psi) + z^2)^{3/2}} \right], \quad (1.10)$$

$$W_y^{(3)} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{r \sin \varphi + R \sin \psi}{(r^2 + R^2 + 2rR \cos(\varphi - \psi) + z^2)^{3/2}} - \frac{r \sin \varphi - R \sin \psi}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos(\varphi - \psi) + z^2)^{3/2}} \right], \quad (1.11)$$

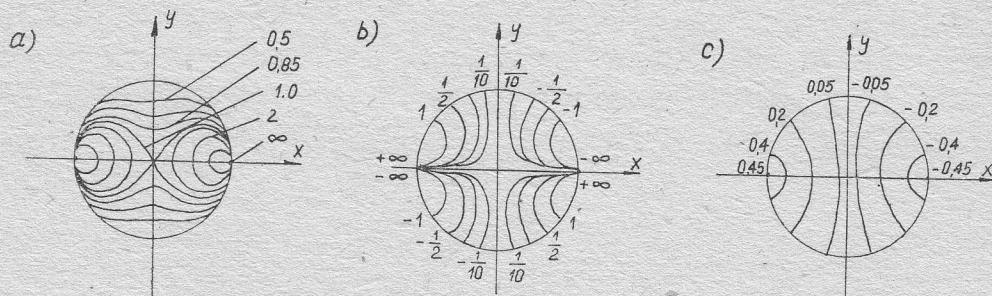
$$W_z^{(3)} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{z}{(r^2 + R^2 + 2rR \cos(\varphi - \psi) + z^2)^{3/2}} - \frac{z}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos(\varphi - \psi) + z^2)^{3/2}} \right] \quad (1.12)$$

ψ — współrzędna azymutalna punktów na powierzchni walcowej.

Jak łatwo zauważyć, składowa $W_z^{(3)}$ ma wartość równą zero w każdym punkcie płaszczyzny elektrod, czyli

$$W_z^{(3)}(x, y, z)|_{z=0} = 0.$$

Graficzny przebieg wartości wszystkich składowych $\vec{W}^{(3)}(x, y, z)$ pokazano na rysunku 2.



Rys. 2. Linie stałych wartości funkcji wagowej $W^{(3)}$ normowanych względem $1/\pi R$, według [9]; a) składowa $W_x^{(3)}(x, y, z)$, $z=0$, b) składowa $W_y^{(3)}(x, y, z)$, $z=0$, c) składowa $W_z^{(3)}(x, y, z)$, $z=1$

Interpretacja fizyczna wartości składowych wektorowej funkcji wagowej jest następująca; każda z nich ilościowo opisuje wpływ elementów przestrzeni walcowej na tworzenie sygnału, tzn. wartości produktów iloczynu wektorowego $\vec{v} \times \vec{B}$ równoległe do osi x , y oraz z . Z postaci wyrażenia podcałkowego (1.9)

$$[\vec{W}, \vec{v}, \vec{B}] = \begin{vmatrix} W_x & v_x & B_x \\ W_y & v_y & B_y \\ W_z & v_z & B_z \end{vmatrix} \quad (1.13)$$

wynika, że umożliwia ono:

- jakościową ocenę dowolnego rozkładu prędkości $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$ na powstawanie sygnału,
- badanie różnych pól magnetycznych $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$ z punktu widzenia ich przydatności w miernikach, przy znanych wartościach składowych funkcji wagowej.

Pierwsze z wymienionych zagadnień wykracza poza ramy niniejszej pracy i nie będzie tu rozpatrywane. Rozważania ogranicza się więc do problemów związanych z rozkładem pola magnetycznego. W zakończeniu tej części warto podkreślić, że

$$W_i^{(2)}(x, y) \neq W_i^{(3)}(x, y, z); \quad i = x, y, z \quad (1.14)$$

oraz

$$W_x^{(2)}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} W_x^{(3)}(x, y, z) dz, \quad W_y^{(2)}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} W_y^{(3)}(x, y, z) dz. \quad (1.15)$$

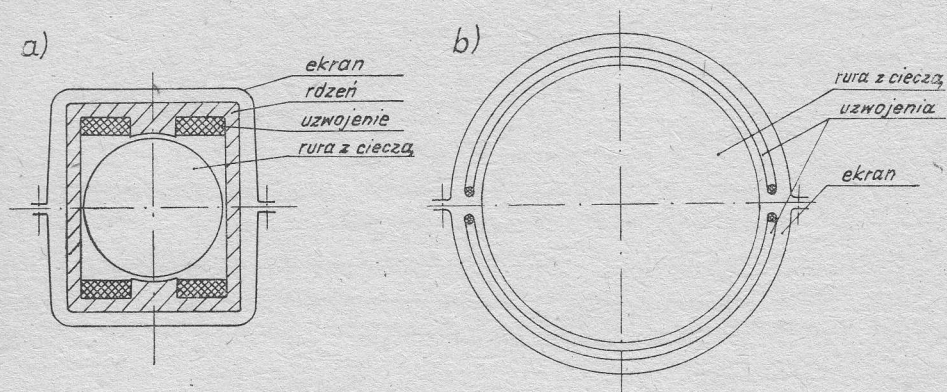
Ponadto, gdy pole magnetyczne wzdłuż rury miernika jest dostatecznie długie (dolna granica długości $1,5 \div 4$ średnic) oraz nie zmienia się jego natężenie i przebieg linii pola wewnątrz kanału, bez ryzyka popełnienia błędów [10] można stosować do analizy funkcję $W^{(2)}(x, y)$ o składowych (wg [9]):

$$W_x^{(2)} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{R + r \cos \varphi}{r^2 + R^2 + 2rR \cos \varphi} + \frac{R - r \cos \varphi}{r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi} \right], \quad (1.16)$$

$$W_y^{(2)} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{r \sin \varphi}{r^2 + R^2 + 2rR \cos \varphi} - \frac{r \sin \varphi}{r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi} \right]. \quad (1.17)$$

2. Pole magnetyczne

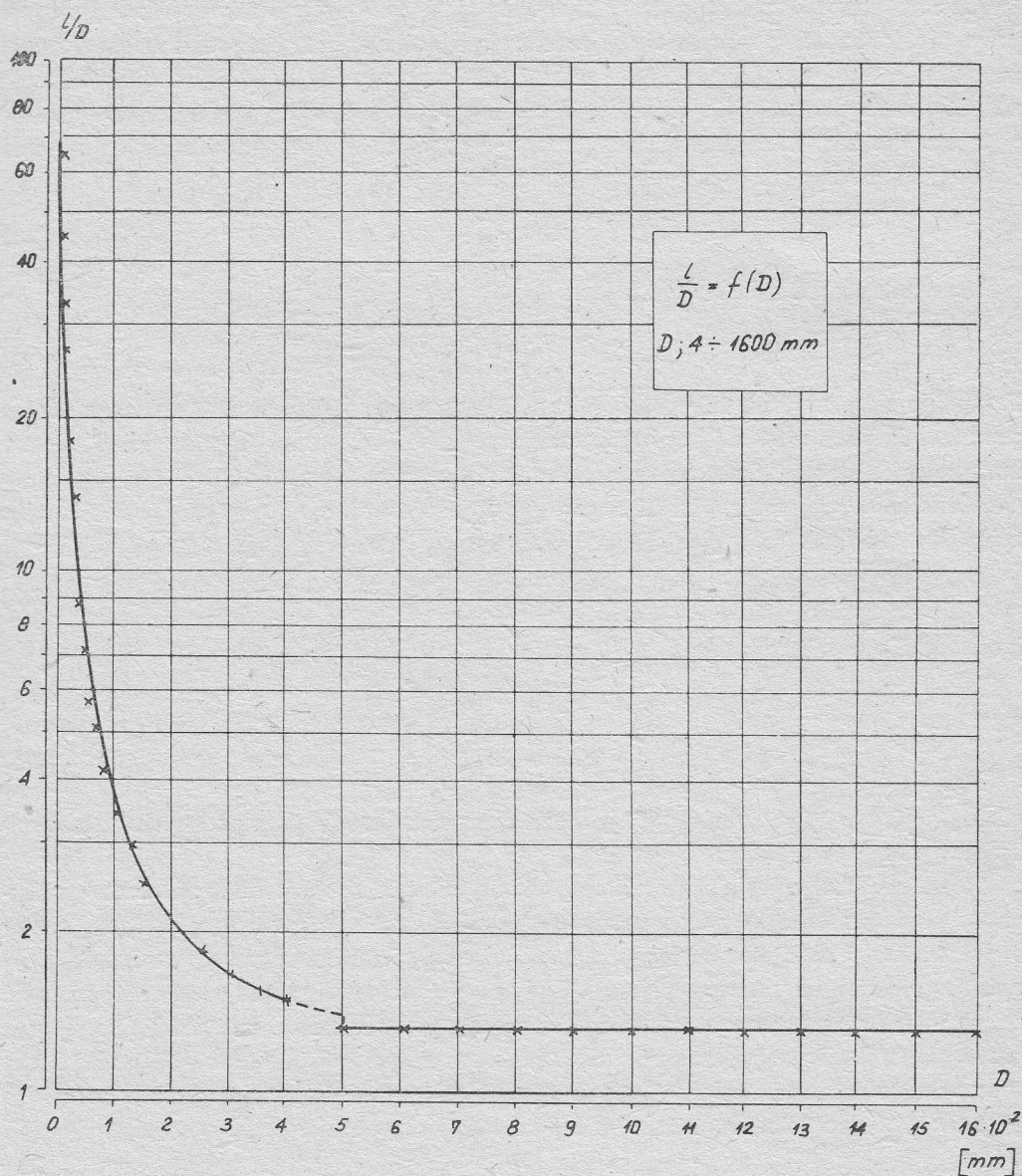
Indukcyjne mierniki przepływu w zależności od zakresu pomiarowego, do którego są przeznaczone, charakteryzują się znacznymi różnicami konstrukcyjnymi. Są one wynikiem kompromisów pomiędzy zadowalającymi własnościami metrologicznymi oraz względami



Rys. 3. Zasadnicze różnice w konstrukcji mierników przepływu; a) mierniki o średnicach do 400 mm, b) mierniki o średnicach powyżej 400 mm

ekonomicznymi. Te ostatnie zmierzają do minimum kosztów materiałowych i technologicznych. Ma to znaczenie zwłaszcza w dużych miernikach o średnicach od ok. 400 do 2400 mm. Podstawowe materiały z punktu widzenia doboru obwodu magnetycznego to m. in. rura ze stali niemagnetycznej, miedź uzwojeń, rdzeń oraz ekran.

Zasadnicze różnice w budowie mierników w zależności od zakresu pomiarowego pokazano na rysunku 3. Ogólnie można stwierdzić, że mierniki o niewielkich średnicach ($D < 400$ mm) odznaczają się wysokim kosztem konstrukcji obwodu magnetycznego w stosunku do mierników o dużych średnicach. Jest to jednak podyktowane wymaganiami dotyczącymi dokładności. Ilustracją powyższych różnic konstrukcyjnych jest rysunek 4. Przyjmuje się dwie wielkości charakterystyczne, stosunek l/D długości rury pomiarowej do jej średnicy wewnętrznej oraz L/D stosunek długości obwodu magnetycznego do średnicy wewnętrznej rury. W zależności od średnicy zmieniają się one w granicach od $1,25 \div 100$. Szczególnie wartość L/D jest tu istotna — określa obszar oddziaływania pola magnetycznego. Znając budowę obwodu można na jej podstawie ocenić, jaka jest mierzona wzdłuż osi długość pola jednorodnego (w sensie uprzednio wspomnianym). Teoretyczne założenia o polu jednorodnym nieskończenie długim w miernikach o dużych średnicach nie są spełnione, wręcz przeciwnie — konstruuje się obwody magnetyczne dające w efekcie pewne zamierzone deformacje (patrz np. [10]) rozkładu pola magnetycznego, mając na celu osiągnięcie nieczułości miernika na zmiany rozkładu prędkości cieczy oraz liniowości wskazań w całym zakresie pomiarowym ($U_{AB} = \text{const } Re$). Powyższe zagadnienia nie są



Rys. 4. Wartość stosunku l/D w zależności od średnicy miernika na przykładzie typowych konstrukcji jak się wydaje, w całości zbadane, o czym można sądzić na podstawie aktualnych publikacji.

Podane zależności (rozdz. 1) na sygnał pomiarowy uwzględniają pole magnetyczne wprost w postaci składowych wektora indukcji, czy natężenia pola. Aby więc badać związek między wielkościami U_{AB} , $\vec{v}$, $\vec{B}$ należy jednoznacznie określić $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ lub też $\vec{B} = (B_r, B_\phi, B_z)$ z zależności geometrycznych w badanym układzie.

Opublikowane dotychczas prace nie wyczerpują powyższych zagadnień. Przeważnie przedmiotem badań są zależności ogólne obowiązujące w układach z polem magnetycznym (np. [11]), rozważane przy użyciu metody analizy harmoniczej, lub też pewne przybliżenia układów rzeczywistych [12, 13] na ogół dwuwymiarowe. Poniżej przedstawiono metodę wyznaczania rozkładu pola magnetycznego polegającą na wprowadzeniu do równań (1.1)÷(1.5) potencjału wektorowego $\vec{A}$, zdefiniowanego zależnością

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (2.1)$$

Warunek cechowania Lorentza jest

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \quad (2.2)$$

Przyjmuje się przy tym, że wartość potencjału skalarnego Φ pola elektrycznego równa jest zeru. Założenie takie jest niesprzeczne z poprzednimi, ponieważ potencjał Φ nie ma interpretacji fizycznej i w szczególności $\Phi \neq V$ (patrz równanie (1.6)).

Uzwojenia magnesujące zasilone są prądem przemiennym $\hat{I} = I \exp(j\omega t)$. Stosując zapis dla wielkości zespolonych po przekształceniach otrzymuje się:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = j\mu\sigma\omega\vec{A} + \mu\omega^2\epsilon\vec{A} + \mu\sigma\vec{v} \times \nabla \times \vec{A} \quad (2.3)$$

i ostatecznie dwa równania

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \beta^2 \vec{A} = -\mu\sigma\vec{v} \times \nabla \times \vec{A}, \quad (2.4)$$

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A}, \quad (2.5)$$

gdzie $\beta^2 = j\mu\omega(\sigma + j\omega\epsilon)$, określające jednoznacznie rozwiązanie przy zadanych warunkach brzegowych.

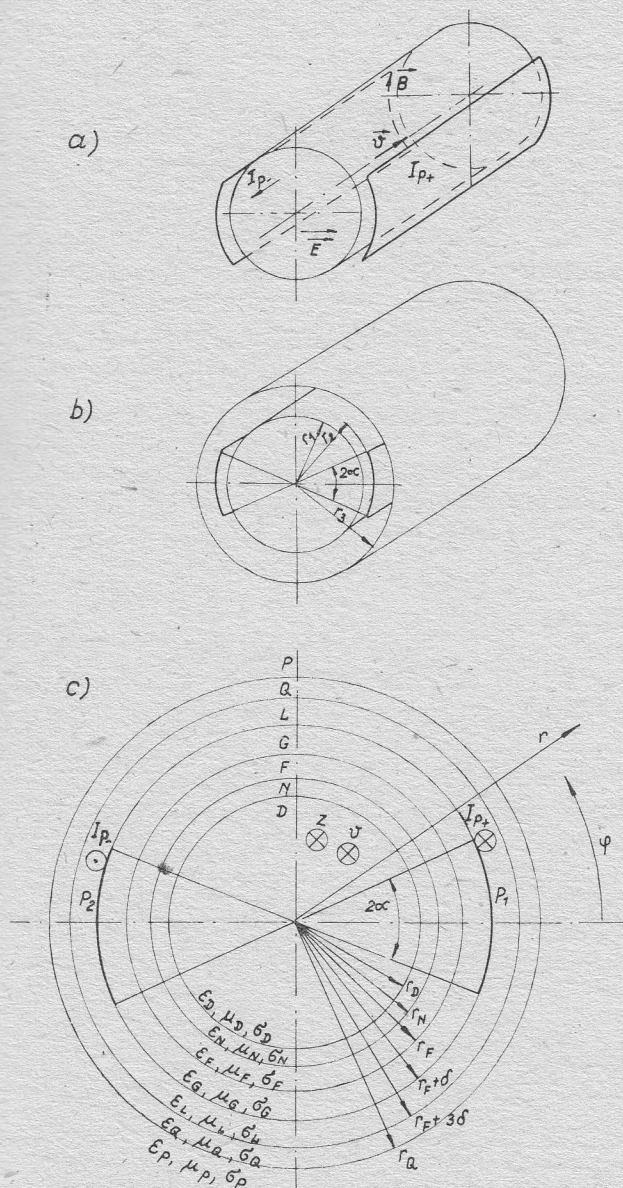
Równanie (2.4) opisuje sumę pól magnetycznych w kanale miernika; pierwotne, wzbudzone prądem I oraz wtórne powstające w wyniku oddziaływania przepływającej cieczy o przewodności σ z polem pierwotnym. Przy $\vec{v} = 0$, jednorodne wtedy równanie (2.4) opisuje pole niezaburzone przepływem. Wpływ lewej strony równania można łatwo ocenić za pomocą Re_m mnożąc obustronnie (2.4) przez wymiar liniowy. Dla wody ($\mu \approx 1,1 \mu_0$), przy prędkościach przepływu od 0,5 do 10 m/s w kanałach o średnicach od 0,05 do 2,4 m oraz zakresu przewodności od 10^{-6} do 10^{-2} S/m, wartość Re_m zmienia się w granicach od $3,5 \times 10^{-14}$ do $3,3 \times 10^{-7}$. Zależność β od wartości parametrów μ , σ , ϵ opisano w [4].

2.1. Warunki brzegowe i graniczne

Z wykresu przedstawionego na rysunku 4 można wnioskować, że w zakresie średnic od ok. 100 mm do ok. 400 mm pole magnetyczne miernika nie jest jednorodne na dostatecznej długości rury pomiarowej; nie jest ono również niejednorodne w sensie kryterium podanego w [10]. Ta klasa mierników wydaje się więc szczególnie interesująca, również ze względu na jej najczęstsze zastosowanie w praktycznych pomiarach przemysłowych. Osiowa symetria miernika i niewielkie wymiary poprzeczne w stosunku do długości (szcze-

gólnie grubości uzwojeń) pozwalają na przyjęcie modelu do analizy w układzie współrzędnych walcowych r, φ, z (rys. 5) wraz z następującymi założeniami:

- $\frac{df}{dz} \cong 0$,
- $f(r, \varphi, z) = f(r, \varphi + 2k\pi, z)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,



Rys. 5. Model miernika przepływu; a) przepływ w nieskończenie cienkiej rurze w polu magnetycznym powierzchni z prądem, b) jak wyżej, miernik ekranowany, c) przekrój przez model miernika rzeczywistego

D – ciecz, N – izolacja, F – rura metalowa, G, L – powietrze, Q – ekran, P – otoczenie, P_1, P_2 – powierzchnie z prądem

– uzwojenia z prądem reprezentowane są przez płaty powierzchni

$$P_{1,2}(r, \varphi, z) \in]-\infty, +\infty[$$

Warunki brzegowe są następujące:

$B_{n1} = B_{n2}$, $D_{n1} = D_{n2}$ — ciągłość składowych normalnych wektorów indukcji magnetycznej i elektrycznej na granicy pomiędzy sąsiednimi ośrodkami (1 i 2),

$E_{t1} = E_{t2}$ — ciągłość składowych stycznych wektorów natężenia pola elektrycznego,

$H_{t1} - H_{t2} = \vec{I}_p$ — skok składowej stycznej wektora natężenia pola magnetycznego związany z prądem powierzchniowym $\vec{I}_p$.

Ponieważ ze względów fizycznych potencjał $\vec{A}$ nie może rosnąć nieograniczenie gdy $r \nearrow \infty$, $r \searrow 0$ nakłada się warunki graniczne

$$\lim_{r \nearrow \infty} |\vec{A}| < M_I, \quad \lim_{r \searrow 0} |\vec{A}| < M_{II},$$

gdzie M_I , M_{II} — graniczne wartości potencjału $\vec{A}$.

Nieciągły rozkład prądu $\vec{I}_p = f(\varphi)$ opisany zależnością

$$I_{p+} = \begin{cases} 0 & \text{dla } |\varphi| > \alpha \\ \frac{I}{2\alpha(r_F + \delta)} & \text{dla } |\varphi| \leq \alpha \end{cases} \quad I_{p-} = \begin{cases} 0 & \text{dla } |\varphi - \pi| > \alpha \\ -\frac{I}{2\alpha(r_F + \delta)} & \text{dla } |\varphi - \pi| \leq \alpha \end{cases}$$

sugeruje zastosowanie transformacji całkowej Fouriera, zdefiniowanej w odniesieniu do dowolnej funkcji $f(r, \varphi)$, jako

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(r) e^{ik\varphi} dk.$$

Wobec tego suma prądów I_{p+} oraz I_{p-} przyjmuje postać

$$I_{pk} = \frac{I}{\pi(r_F + \delta)} \frac{d}{d(k\alpha)} S_i(k\alpha) (1 - e^{-ik\pi}), \quad (2.6)$$

gdzie $S_i(k\alpha)$ — sinus całkowy argumentu $k\alpha$.

Podane warunki brzegowe przepisane dla potencjału wektorowego — $\vec{A}$, po transformacji — $\vec{A}_k$, są następujące:

$$A_{kz}^{(m)} - A_{kz}^{(n)} = 0, \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_m A_{kr}^{(m)} - \varepsilon_n A_{kr}^{(n)} = 0, \quad (2.8)$$

$$A_{k\varphi}^{(m)} - A_{k\varphi}^{(n)} = 0, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_m} \left(\frac{d}{dr} (r \cdot A_{k\varphi}^{(m)}) - ik A_{kr}^{(m)} \right) \Big|_{r=r_m} - \frac{1}{\mu_n} \left(\frac{d}{dr} (r \cdot A_{k\varphi}^{(n)}) - ik A_{kr}^{(n)} \right) \Big|_{r=r_n} = \\ = \begin{cases} r_{mn} \frac{I}{\pi(r_F + \delta)} \frac{\sin k\alpha}{k\alpha} (1 - e^{-ik\pi}) & \text{przy } r_{mn} = r_F + \delta, \\ 0 & \text{przy } r_{mn} \neq r_F + \delta, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{\mu_m} \left(\frac{dA_{kz}^{(m)}}{dr} \right) - \frac{1}{\mu_n} \left(\frac{dA_{kz}^{(n)}}{dr} \right) = 0 \quad (2.11)$$

oraz na podstawie (2.2) i (2.9)

$$\left(\frac{dA_{kr}^{(m)}}{dr} + \frac{1}{r} A_{kr}^{(m)} \right) \Big|_{r=r_{mn}} - \left(\frac{dA_{kr}^{(n)}}{dr} + \frac{1}{r} A_{kr}^{(n)} \right) \Big|_{r=r_{mn}} = 0. \quad (2.12)$$

Ograniczenia na transformaty składowych wektora $\vec{A}$

$$\lim_{r \nearrow \infty} |A_{kj}| < M_I, \quad \lim_{r \searrow 0} |A_{kj}| < M_{II}, \quad (2.13), (2.14)$$

gdzie $j=r, \varphi, z$, zaś m, n – kolejne sąsiednie obszary ze zbioru D, N, F, G, L, Q, P .

2.2. Rozwiązanie równania (2.4) dla transformaty $\vec{A}_k$

Przed różniczkowaniem równania (2.4) celowe będzie przyjęcie ograniczenia badanego tu przypadku do przepływu osiowosymetrycznego. Konstrukcja układu pomiarowego natężenia przepływu z przepływomierzem indukcyjnym zwykle wymaga spełnienia warunku osiowej symetrii przepływu, co daje się stosunkowo łatwo osiągnąć w praktyce. Przyjmuje się więc $\vec{v} = [0, 0, v_z(r)]^*$. Warunek ten uprości zależności różniczkowe w rozważanym równaniu. Po rozpisaniu na składowe transformacji oraz obustronnym pomnożeniu przez R_0^2/A_0 (równanie staje się bezwymiarowe; R – liniowy wymiar odniesienia, $A_0 = \mu_0 I / \pi$ – potencjał odniesienia) otrzymuje się związki:

$$\frac{d^2 A_{kj}^{(m)}}{d\rho^2} + a_j \frac{1}{\rho} \frac{dA_{kj}^{(m)}}{d\rho} - \left(\pi_m^2 + \frac{b_j}{\rho^2} \right) A_{kj}^{(m)} = \psi_j, \quad (2.15)$$

gdzie ρ – współrzędna liniowa, $j=r, \varphi, z$

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & \text{dla } j=z \\ -\mu_m \sigma_m v R \frac{dA_{kz}^{(m)}}{d\rho} & \text{,, } j=r \\ -\mu_m \sigma_m v R \frac{ik}{\rho} A_{kz}^{(m)} - \frac{2ik}{\rho^2} A_{kr}^{(m)} & \text{,, } j=\varphi \end{cases} \quad (2.16)$$

$$a_j = \begin{cases} 1 & \text{dla } j=z \\ 3 & \text{,, } j=r \\ 1 & \text{,, } j=\varphi \end{cases} \quad b_j = \begin{cases} k^2 & \text{dla } j=z \\ k^2 - 1 & \text{,, } j=r \\ k^2 + 1 & \text{,, } j=\varphi \end{cases}$$

Równanie (2.15) jest niejednorodnym zmodyfikowanym równaniem Bessela. Parametrem prawej strony równania (ψ_j) jest magnetyczna liczba Reynoldsa

$$R_m = \mu_m \sigma_m v R,$$

natomiast lewej strony $\pi_m = \beta_m R$.

Rozwiązanie jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i dowolnego rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego.

* Dyskusję tak przyjętego rozkładu prędkości można znaleźć w [1, 3, 8, 11].

$$A_{kj}^{(m)} = \rho^{\frac{1-a_j}{2}} \left[I_{\nu_j}(\pi_m \rho) \left(C_{1j}^{(m)} + \int_0^{\rho_m} \rho^{\frac{1+a_j}{2}} K_{\nu_j}(\pi_m \rho) \psi_j(\pi_m \rho) d\rho \right) + \right. \\ \left. + K_{\nu_j}(\pi_m \rho) \left(C_{2j}^{(m)} - \int_0^{\rho_m} \rho^{\frac{1+a_j}{2}} I_{\nu_j}(\pi_m \rho) \psi_j(\pi_m \rho) d\rho \right) \right], \quad (2.17)$$

ρ_m — oznacza tu odpowiedni promień powierzchni granicznej,

ν_j — rząd zmodyfikowanych funkcji Bessela; $\nu_j = \frac{1}{2} \sqrt{(1-a_j)^2 + 4b_j}$, $j=r, \varphi, z$.

Sześć warunków brzegowych daje C_m równań, z których można wyznaczyć wszystkie stałe całkowania $C_{1j}^{(m)}, C_{2j}^{(m)}$. Dokładnie zagadnienie to omówiono w [14]. Ponieważ szukany jest rozkład pola w kanale miernika (obszar D), znać trzeba jedynie trzy stałe

$$C_{1z}^{(D)}, C_{1r}^{(D)}, C_{1\varphi}^{(D)}.$$

Kombinacje liniowe stałych $C_{2j}^{(D)}$ i funkcji $K_{\nu_j}(\pi_D \rho)$ nie spełniają warunków granicznych.

Przekształcenie odwrotne względem przekształcenia Fouriera składowych potencjału wektorowego według (2.17), wobec związków (2.1) i (2.2), daje składowe wektora indukcji magnetycznej

$$B_r(\rho, \varphi, t=0) = f_1(A_z^{(D)}),$$

$$B_\varphi(\rho, \varphi, t=0) = f_2(A_z^{(D)}),$$

$$B_z(\rho, \varphi, t=0) = f_3(A_\varphi^{(D)}, A_r^{(D)}).$$

Każda składowa jest sumą pól magnetycznych: pola wzbudzenia wywołanego przez cewki z prądem oraz pola magnetycznego powstałego wskutek oddziaływania przepływającej cieczy. Ponieważ tylko pole o własności $\nabla \times \vec{B} = 0$ kształtuje stacjonarny rozkład natężenia pola elektrycznego zgodnie z (1.6), do wyznaczenia wartości sygnału pomiarowego równej różnicy potencjałów pomiędzy dwoma punktami konieczna jest znajomość drugiego z wymienionych pól. Stosunkowo najłatwiej osiągnąć to można rozwiązując równanie (1.6) przytoczoną metodą. Aby wszystkie wielkości występowały w jednym układzie współrzędnych (rozkład pola magnetycznego w układzie x, y, z łatwo zmierzyć) przyjmuje się:

$$B_x = B_r \cos \varphi - B_\varphi \sin \varphi,$$

$$B_y = B_r \sin \varphi + B_\varphi \cos \varphi,$$

$$B_z = B_z,$$

oraz

$$\vec{v}(x, y, z) = (0, 0, v_z(r)).$$

Według zależności podanych w części a) sygnał pomiarowy równy jest

$$U_{AB} = \int [\vec{B}, v, \vec{W}^{(3)}] r dr d\varphi dz,$$

iloczyn wektorów $\vec{B}$, $\vec{v}$, $\vec{W}$ ma postać

$$\begin{vmatrix} W_x & W_y & W_z \\ B_x & B_y & B_z \\ 0 & 0 & v_z \end{vmatrix}$$

i wartość $(B_x W_y - B_y W_x) v_z$. Wynika stąd, że składowa osiowa wektora $\vec{W}$ nie bierze udziału w tworzeniu sygnału, podobnie jak składowa B_z pola magnetycznego. Potwierdza to rezultat badań przedstawiony w [11].

Ostatecznie więc można przedstawić wyrażenie na sygnał pomiarowy, w przypadku przepływu osiowosymetrycznego i pola magnetycznego niejednorodnego o dostatecznie dużym wymiarze w kierunku z , jako

$$U_{AB} = \int [B, v, W^{(2)}] r dr d\varphi, \quad U_{AB} = \int_0^R \int_0^{2\pi} [B_x W_y^{(2)} - B_y W_x^{(2)}] v_z(r) r dr d\varphi. \quad (2.18)$$

Proponowany tu „powłokowy” model przepływomierza nadaje się również do badania wpływu dowolnego rozkładu prędkości w kanale miernika na sygnał pomiarowy; w równaniu (2.15) trzeba wtedy uwzględnić wszystkie składowe prędkości przepływu będące funkcją trzech zmiennych r , φ , z .

3. Podsumowanie

Rozważane przestrzenne pole magnetyczne zależne od dwóch współrzędnych jest opisane ogólnie trzema składowymi. Składowa osiowa (niezależna od współrzędnej osiowej) wywołana jest jedynie przez oddziaływanie pola pierwotnego na przepływającą ciecz. Przepływy o rozkładzie prędkości osiowosymetrycznym $\vec{v} = v(r)$ nie oddziałują z tą składową pola, tzn. ewentualne nierównomierności składowej B_z pola wzdłuż osi miernika nie mają wpływu na napięcia pomiarowe. Konieczne jest przy tym spełnienie warunku $B_x, B_y = \text{const}(z)$. Powyższa własność ma duże znaczenie praktyczne, wystarczy bowiem zainstalowanie odpowiednio długiego (2÷3 średnic) prostoosiowego odcinka rurociągu przed przepływomierzem, aby warunek osiowej symetrii przepływu był spełniony.

Na zakończenie warto wspomnieć, że opisany tu sposób analizy pola magnetycznego* pozwala na badanie wpływu czynników konstrukcyjnych i własności materiałowych w dowolnym zakresie zależnym od potrzeb. I tak na przykład, najprostszy model miernika to przepływ o walcowej geometrii w polu cewek z prądem. Otoczenie tego układu powierzchniami, czy obszarami o własnościach typowych materiałów konstrukcyjnych komplikuje go od strony obliczeniowej stwarzając możliwość oceny wpływu poszczególnych elementów konstrukcji na własności przyrządu.

Praca wpłynęła do Redakcji w maju 1979 r.

* Jeden z Recenzentów zwraca uwagę na to, iż wartość pracy polega na przedstawieniu pewnych aspektów metody obliczeniowej służącej do rozwiązania znanego typu pola magnetycznego. Niezależnie od tego wyraża wątpliwość co do dokładności obliczeń wobec możliwości zakłóceń spowodowanych obecnością mas ferromagnetycznych. Podkreśla również, że napięcie indukowane może mieć przebieg liniowy jedynie w niewielkich zakresach liczb Reynoldsa (przyp. Redakcji).

Literatura

- [1] W. Engl, *Relativistische Theorie des induktiven Durchflussmessers*. Archiv für Elektrotechnik, H. 46, 1961.
- [2] V. Cushing, *Induction Flowmeter*. Rev. Sci. Instr. Vol. 29, 1958.
- [3] G. Schommartz, *Induktive Strömungsmessung*. VEB Verlag, Berlin 1974.
- [4] G. Śliwiński, *Ocena wpływu własności elektromagnetycznych ośrodków na wskazania przepływomierzy elektromagnetycznych*. Zesz. Nauk. IMP PAN nr 72/962/79.
- [5] J. Shercliff, *Relation between the velocity profile and the sensitivity of electromagnetic flowmeters*. Journal of Appl. Phys. Vol. 25, nr. 6, 1954.
- [6] J. Shercliff, *The theory of electromagnetic flow measurement*. Cambridge University Press, 1962.
- [7] H. Kanai, *Implantable Electromagnetic blood Flowmeter*. J. Jap. Soc. Instr. and Contr. Eng. no. 4, 1965.
- [8] W. L. Engl, *Der induktive Durchflussmesser mit inhomogenem Magnetfeld*. Archiv für Elektrotechnik Nr 6, 1970, Nr 5, 1972.
- [9] G. Schommartz, *Greensche Funktion und Wertigkeitsvektor spezieller induktiver Stromungsmesser*. Messen-Steuern-Regeln Nr 6, 1973, Nr 10, 1973.
- [10] B. Kételsen, E. Appel, *Die Messunsicherheit induktiver Durchflussmesser mit inhomogenem Magnetfeld bei rotationssymmetrisch veränderten Strömungen*. Regelungstechnische Praxis Nr 12, 1975, Nr 1, 1976.
- [11] J. G. Fiks, *Niekotoryje woprosy teorii syntieza dwuchmiernych magnitnych polej*. Izv. AN SSSR Energetika i Transport, nr 5, 1975.
- [12] G. Kirsztejn, W. Timofiejew, *O wliwanii nieodnorodnosti magnitnogo pola w dol potoka na charakteristiki elektromagnitnych prieobrazowatelej raschoda*. Magnitnaja Gidrodinamika nr 4, 1975.
- [13] G. Kirsztejn, W. Timofiejew, *O wyborze optimalnych paramietrow magnitnoj sistemy elektromagnitnych prieobrazowatelej raschoda*. Magnitnaja Gidrodinamika nr 3, 1978.
- [14] G. Śliwiński, *Przepływomierz indukcyjny — obliczanie pola magnetycznego*. Zesz. Nauk. IMP PAN nr 74/970/79.

Элементы теории индукционного измерения расхода

Резюме

В теории индукционного измерения расхода одним из непроисследованных до сих пор вопросов является влияние функции описывающей распределение магнитного поля на измерительный сигнал. Особенно интересной кажется комплексная оценка конструкционных зависимостей и свойств материалов с точки зрения измерительных характеристик расходомеров. Аналитическая модель датчика, позволяющая производить исследования вышеупомянутых вопросов, а также дискуссия его свойств, является предметом труда.

Inductive Flow Measurements — Elements of the Theory

Summary

One of problems of the theory of inductive flow measurement which remain unexplained as yet is the influence of the function describing the magnetic field distribution on the signal obtained. A complex evaluation of design features and material properties from the viewpoint of flow-meter performance curves seems to be especially interesting. The paper is concerned with an analytical model of the meter suitable for studies of these problems. Properties of the model are discussed.