

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
I N S T Y T U T M A S Z Y N P R Z E P Ł Y W O W Y C H

P R A C E
I N S T Y T U T U M A S Z Y N
P R Z E P Ł Y W O W Y C H

T R A N S A C T I O N S
O F T H E I N S T I T U T E O F F L U I D - F L O W M A C H I N E R Y

82

W A R S Z A W A - P O Z N A Ń 1982

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

RADA REDAKCYJNA – EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
STEFAN PERYCZ · WŁODZIMIERZ PROSNAK
KAZIMIERZ STELLER · ROBERT SZEWAŁSKI (PRZEWODNICZĄCY · CHAIRMAN)
JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY – EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER – REDAKTOR – EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA – EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1982

Printed in Poland

ISBN 83-01-03979-5
ISSN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE – ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 340 + 90 egz.	Oddano do składania 12 X 1981 r.
Ark. wyd. 12 Ark. druk. 9,25	Podpisano do druku 18 V 1982 r.
Pap. druk. sat. kl. V, 70 g 70 × 100 cm.	Druk ukończono w maju 1982 r.
Nr zam. 577/122. W-6/523.	

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

ANDRZEJ MATUSZKIEWICZ

Gdańsk

Zastosowanie równania BGKW do wyznaczania wymiany masy, energii i pędu na granicy rozdziału faz*

Zbadano procesy kondensacji i parowania na płaskiej nieskończonej powierzchni cieczy, z uwzględnieniem nierównowagi oraz niepełnej akomodacji masy, energii i pędu. Wyznaczono odpowiednie strumienie na granicy rozdziału faz. Stwierdzono istnienie sprzężenia między wymianą masy, energii i pędu. Każdy ze strumieni masy, energii i pędu w pierwszym przybliżeniu jest kombinacją liniową strumieni masy energii i pędu w zerowym przybliżeniu.

Wykaz oznaczeń

f – funkcja rozkładu prędkości,
 h – entalpia na jedną molekułę,
 J – strumień w obszarze I,
 j – strumień w obszarze II,
 $J[A], j[A]$ – strumienie wielkości fizycznej A :
 $A=1$ – oznacza liczbę molekuł,
 $A=e=\frac{1}{2}mv^2$ – oznacza energię,
 $A=p_1=mv_1$ – oznacza składową prostopadłą pędu,
 $A=p_2=mv_2$ – oznacza składową równoległą pędu,
 k – stała Boltzmanna,
 l – średnia droga swobodna,
 m – masa molekuły,
 n – gęstość molekuł,
 P – ciśnienie statyczne,
 $\mathbf{r}=(x_1, x_2, x_3)$,
 t – czas,
 T – temperatura bezwzględna,
 u – prędkość średnia pary,
 $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ – prędkość molekuły,
 $\tilde{v}$ – prędkość najbardziej prawdopodobna,

x_i – współrzędne przestrzenne,
 α – współczynnik akomodacji liczby cząstek,
 β – współczynnik akomodacji energii,
 γ – współczynnik akomodacji składowej prostopadłej pędu,
 δ – współczynnik akomodacji składowej równoległej pędu,
 λ – współczynnik przewodnictwa ciepła,
 μ – współczynnik lepkości,
 τ – czas relaksacji.

Wskaźniki

$i=1, 2, 3$ – współrzędne kartezjańskie,
 s – powierzchnia cieczy w równowadze z parą,
 $+$ – strumień w kierunku dodatnim osi x_1 ,
 $-$ – strumień w kierunku ujemnym osi x_1 .

* Praca wykonana w ramach problemu międzyresortowego MR.I.26, pt. „Podstawy projektowania maszyn i urządzeń energetycznych”, grupa tematyczna 05.

ANDRZEJ MATUSZKIEWICZ

Gdańsk

Zastosowanie równania BGKW do wyznaczania wymiany masy, energii i pędu na granicy rozdziału faz*

Zbadano procesy kondensacji i parowania na płaskiej nieskończonej powierzchni cieczy, z uwzględnieniem nierównowagi oraz niepełnej akomodacji masy, energii i pędu. Wyznaczono odpowiednie strumienie na granicy rozdziału faz. Stwierdzono istnienie sprzężenia między wymianą masy, energii i pędu. Każdy ze strumieni masy, energii i pędu w pierwszym przybliżeniu jest kombinacją liniową strumieni masy energii i pędu w zerowym przybliżeniu.

Wykaz oznaczeń

f – funkcja rozkładu prędkości,
 h – entalpia na jedną molekułę,
 J – strumień w obszarze I,
 j – strumień w obszarze II,
 $J[A], j[A]$ – strumienie wielkości fizycznej A :
 $A=1$ – oznacza liczbę molekuł,
 $A=e=\frac{1}{2}mv^2$ – oznacza energię,
 $A=p_1=mv_1$ – oznacza składową prostopadłą pędu,
 $A=p_2=mv_2$ – oznacza składową równoległą pędu,
 k – stała Boltzmanna,
 l – średnia droga swobodna,
 m – masa molekuły,
 n – gęstość molekuł,
 P – ciśnienie statyczne,
 $\mathbf{r}=(x_1, x_2, x_3)$,
 t – czas,
 T – temperatura bezwzględna,
 u – prędkość średnia pary,
 $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ – prędkość molekuły,
 $\tilde{v}$ – prędkość najbardziej prawdopodobna,

x_i – współrzędne przestrzenne,
 α – współczynnik akomodacji liczby cząstek,
 β – współczynnik akomodacji energii,
 γ – współczynnik akomodacji składowej prostopadłej pędu,
 δ – współczynnik akomodacji składowej równoległej pędu,
 λ – współczynnik przewodnictwa ciepła,
 μ – współczynnik lepkości,
 τ – czas relaksacji.

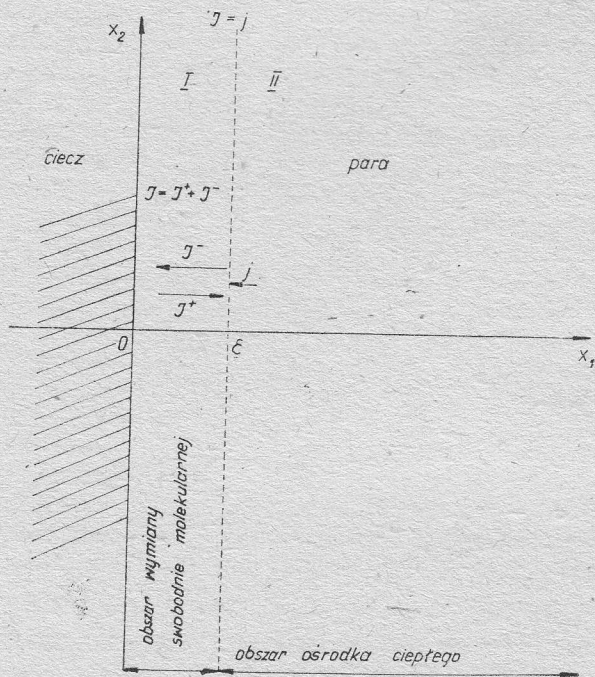
Wskaźniki

$i=1, 2, 3$ – współrzędne kartezjańskie,
 s – powierzchnia cieczy w równowadze z parą,
 $+$ – strumień w kierunku dodatnim osi x_1 ,
 $-$ – strumień w kierunku ujemnym osi x_1 .

* Praca wykonana w ramach problemu międzyresortowego MR.I.26, pt. „Podstawy projektowania maszyn i urządzeń energetycznych”, grupa tematyczna 05.

1. Wstęp

Podstawowym problemem kinetycznej teorii parowania i kondensacji jest określenie strumieni masy, energii i pędu na granicy rozdziału faz. Szczególnie dużo uwagi poświęcono próbom określenia strumienia masy. Pierwszym znanym związkiem było wyrażenie Hertza-Knudsen [1], zmodyfikowane następnie przez Schragego [2]. Ostatnio coraz częściej podejmowane były próby określenia tych strumieni przez rozwiązanie równania Boltzmanna [3, 4] lub przez rozwiązanie równania BGKW (Bhatnagera, Grossa, Krooka i Welandera), tzn. równania Boltzmanna, w którym całkę zderzeń zastąpiono przez jej model [5, 6]. W pracy [3] rozwiązano niestacjonarny problem kondensacji na płaskiej powierzchni cieczy. Równanie Boltzmanna rozwiązano metodą momentów. Jako momenty wybrano gęstość, strumień masy, ciśnienie i składową strumienia ciepła prostopadłą do powierzchni rozdziału faz. Stwierdzono, że wyższe momenty mają znikomy wpływ na otrzymywane wyniki. Uwzględniono również wpływ niepełnej akomodacji masy i energii, pomijając ewentualną niepełną akomodację innych wielkości fizycznych. Ze wszystkich wymienionych prac, w [4] najpełniej uwzględniono problem warunków brzegowych na powierzchni rozdziału faz. Funkcję rozkładu prawdopodobieństwa molekuł wylatujących z powierzchni rozdziału faz określono na podstawie funkcji rozkładu prawdopodobieństwa molekuł dochodzących do powierzchni rozdziału faz, oraz na podstawie prawdopodobieństwa rozproszenia, które w ogólności może zależeć zarówno od prędkości molekuł dochodzących jak i wychodzących z powierzchni rozdziału faz. Rozwiązując metodą wariacyjną zlinearyzowane równanie Boltzmanna (w jednym wymiarze), z określonym wa-



Rys. 1

runkiem brzegowym, otrzymano wyrażenia analityczne na wielkość skoku ciśnienia i temperatury na granicy rozdziału faz. Wyrażenia te są funkcjonalami prawdopodobieństwa rozproszenia. Praca ta ma duże znaczenie teoretyczne i może stanowić podstawę do dalszych badań. Jednakże praktyczne jej wykorzystanie jest obecnie niemożliwe ze względu na trudności określenia prawdopodobieństwa rozproszenia na granicy rozdziału faz. W celu wyznaczenia wypadkowego strumienia molekuł kondensujących się w [5] rozwiązano stacjonarne równanie BGKW, w przypadku jednowymiarowym, metodą dyskretnych prędkości. W warunkach brzegowych uwzględniono tylko jeden parametr, którym był współczynnik akomodacji masy. W pracy [6] rozwiązano stacjonarne równanie BGKW, w trzech wymiarach, metodami rachunku zaburzeń. Jednocześnie jednak przyjęto tutaj najdalej idące założenia co do warunków brzegowych na powierzchni rozdziału, a mianowicie zakładano pełną akomodację wszystkich wielkości fizycznych.

Każda z wymienionych prac bada jedynie pewien fragment problemu związanego z określeniem strumieni na granicy rozdziału faz w procesach kondensacji i parowania. Problem jest na tyle złożony, że aby zbadać jedną z jego części (np. wpływ wielkości bodźców wymuszających) należy poczynić daleko idące uproszczenia w traktowaniu innych (np. warunków brzegowych). W celu gruntownego zbadania wzajemnych sprzężeń między wymianą masy, energii i pędu w procesach kondensacji i parowania, jak również w celu zbadania wpływu niepełnej akomodacji tych wielkości na wartości odpowiednich strumieni, zaproponowano poniższy model jednoskładnikowego układu ciecz—para (rys. 1).

Jedna półprzestrzeń wypełniona jest cieczą, drugą zaś zajmuje para. Ciecz i para rozdzielone są płaską powierzchnią rozdziału faz. W półprzestrzeni, w której znajduje się para wyróżnić można dwa obszary:

— I obszar wymiany swobodnie molekularnej, którego grubość ε jest dużo mniejsza od długości drogi swobodnej. W obszarze tym cząsteczki pary nie zderzają się ze sobą i swobodnie przemierzają ten obszar. Strumień jakiegokolwiek wielkości fizycznej jest sumą algebraiczną dwóch swobodnie molekularnych strumieni, tzn.

$$J = J^+ + J^- \quad (1)$$

— II obszar, ośrodka ciągłego. Tutaj głównym mechanizmem przenoszenia są zderzenia między molekułami. W obszarze tym obowiązują wszystkie podstawowe prawa termohydrodynamiki. W obszarze tym strumień jakiegokolwiek wielkości fizycznej może być wyrażony poprzez odpowiednie prawa fenomenologiczne (np. prawa Fouriera, Newtona, itp.). Na granicy tych dwóch obszarów spełniony musi być związek

$$J = j \quad (2)$$

Powstaje w tym miejscu pytanie, na ile usprawiedliwione jest pomijanie zderzeń między molekułami gazu w cienkiej warstwie przy powierzchni cieczy. Założenie takie można uzasadnić następująco: Funkcja

$$\varphi(x_1) = \exp\left(-\frac{x_1}{l}\right)$$

przedstawia ułamek molekuł, które po przebyciu drogi x_1 od ostatniego zderzenia w dalszym ciągu poruszają się swobodnie [7]. Ustalając grubość warstwy swobodnie moleku-

łarnej (ε) dostatecznie małą, otrzymuje się gwarancję, że zderzenia między molekułami będą w niej bardzo rzadkie. Jeśli

$$\varepsilon \ll l,$$

to odpowiednia część molekuł, które ostatnie swoje zderzenie miały w okolicach $x_1 = \varepsilon$ i zmierza w kierunku powierzchni rozdziału faz, dociera tam nie zderzając się z innymi molekułami. Z drugiej strony w warstwie tej zderzeniom mogą ulegać molekuły, które swoje ostatnie zderzenie miały w odległości

$$x_1 \gg \varepsilon,$$

jednak ze względu na eksponencjalnie malejący charakter funkcji $\varphi(x_1)$ tylko niewielka ich część dotrze tam. A zatem gęstość zderzeń (tzn. liczba zderzeń w jednostce objętości i w jednostce czasu) maleje wraz ze zbliżaniem się do powierzchni rozdziału faz. Wybierając ε dostatecznie małe, otrzymuje się warstwę, w której zderzenia molekuł gazu między sobą odgrywają drugorzędą rolę.

Jednocześnie pojawia się inny problem. W jakim przypadku dopuszczalne jest zastąpienie dokładnej funkcji rozkładu prędkości molekuł w obszarze

$$\varepsilon < x_1 < l$$

przez funkcję będącą rozwiązaniem równania Boltzmana w obszarze ośrodka ciągłego. Jest to możliwe do przyjęcia jeśli w obszarze tym podstawowe parametry makroskopowe zmieniają się dostatecznie wolno (zob. niżej warunki (25) i (26)).

2. Określenie strumieni w obu obszarach poprzez rozkład prawdopodobieństwa prędkości molekuł

Strumień jakiejkolwiek wielkości fizycznej $A(v)$ przez powierzchnię prostopadłą do osi x_1 , można w obszarze II wyrazić następująco:

$$j[A] = \int_{-\infty}^{\infty} \int \int d^3v v_1 A(v) f(v), \quad (3)$$

gdzie $f(v)$ jest rozkładem prawdopodobieństwa prędkości molekuł pary. Jeżeli przyjąć oznaczenia

$$\hat{f}(v) = \begin{cases} f^+ & \text{gdy } v_1 > 0, \\ f^- & \text{gdy } v_1 < 0, \end{cases} \quad (4)$$

to $j[A]$ można zapisać w powyższy sposób tylko dzięki temu, że w obszarze II f^+ i f^- mają tę samą postać funkcyjną. Inaczej wygląda to w obszarze wymiany swobodnie molekularnej. W tym obszarze f^- musi mieć taką samą postać jak na granicy obszaru ośrodka ciągłego ($x_1 = \varepsilon$), ponieważ nie ma tu zderzeń, które mogłyby ją zmienić. Postać f^+ w obszarze wymiany swobodnie molekularnej określona jest przez właściwości emisyjne powierzchni jak i zderzenia cząsteczek pary z cząsteczkami cieczy, mechanizm których jest zasadniczo różny od zderzeń molekuł w gazie. Jeśli znane są funkcje f^+ i f^- w obszarze wymiany

swobodnie molekularnej, to strumienie J^+ i J^- jakiejkolwiek wielkości fizycznej $A(v)$ można wyrazić następująco:

$$J^+[A] = \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 dv_3 \int_0^{\infty} dv_1 v_1 A(v) f^+(v), \quad (5)$$

$$J^-[A] = \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 dv_3 \int_{-\infty}^0 dv_1 v_1 A(v) f^-(v). \quad (6)$$

Tym samym można znaleźć wartość wypadkowego strumienia $J[A]$. Jednakże znalezienie funkcji f^+ jest dzisiaj praktycznie niemożliwe. Liczba parametrów potrzebnych do jej określenia jest zbyt duża aby można ją było wyznaczyć eksperymentalnie, zaś wszelkie próby teoretyczne mają bardzo spekulatywny charakter.

Jednak liczbę parametrów potrzebnych do określenia wymiany między powierzchnią cieczy a parą można wyraźnie zmniejszyć wprowadzając tak zwane współczynniki akomodacji. W pracy tej zdefiniowano je w taki sposób, aby z jednej strony umożliwiły wyznaczenie wypadkowych strumieni, z drugiej zaś pokrywały się ze współczynnikami akomodacji określonymi w przypadku, gdy gradient temperatury i prędkość średnia pary są równe zeru.

Współczynnik akomodacji liczby cząstek

$$\alpha = \frac{J^+[1] + J^-[1]}{J^s[1] + J^-[1]}, \quad (7)$$

gdzie wskaźnik s oznacza taki strumień emitowany z powierzchni, jaki występowałby gdyby ciecz i para były w równowadze*. Tak więc wypadkowy strumień masy jest równy

$$J[1] = \alpha (J^s[1] + J^-[1]). \quad (8)$$

Współczynnik akomodacji energii

$$\beta = \frac{J^+[e] + J^-[e]}{J^s[e] + J^-[e]}, \quad (9)$$

a wypadkowy strumień energii

$$J[e] = \beta (J^s[e] + J^-[e]). \quad (10)$$

Współczynnik akomodacji składowej pędu prostopadłej do powierzchni rozdziału faz zdefiniowano następująco:

$$\gamma = \frac{J^+[p_1] + J^-[p_1] - P}{J^s[p_1] + J^-[p_1] - P}, \quad (11)$$

gdzie p_1 oznacza składową pędu prostopadłą do powierzchni rozdziału faz, zaś P — ciśnienie hydrostatyczne na granicy obszarów I i II. Strumień pędu unormowano tutaj w taki sposób, aby w stanie równowagi był on równy zeru, a nie ciśnieniu statycznemu, jak to wynika z określenia (3). Na granicy obszarów I i II zachodzi równość

$$j[p_1] - P = J^+[p_1] + J^-[p_1] - P, \quad (12)$$

* W opisywanym układzie równowaga oznacza równość temperatury w całej przestrzeni oraz $u=0$.

a jeśli weźmie się pod uwagę (11) to można napisać następującą równość:

$$J[p_1] - P = j[p_1] - P = \gamma(J^s[p_1] + J^-[p_1] - P). \quad (13)$$

Współczynnik akomodacji składowej pędu p_2 równoległej do powierzchni rozdziału faz jest równy:

$$\delta = \frac{J^+[p_2] + J^-[p_2]}{J^s[p_2] + J^-[p_2]}, \quad (14)$$

a ponieważ

$$J^s[p_2] = 0, \quad (15)$$

to

$$J[p_2] = \delta J^-[p_2]. \quad (16)$$

3. Równanie BGKW i jego przybliżone rozwiązanie

Wszystkie strumienie wyznaczono z funkcji rozkładu, która jest rozwiązaniem równania BGKW

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{V}}\right) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\frac{f - f^{(0)}}{\tau}, \quad (17)$$

gdzie τ jest rzędu średniego czasu pomiędzy zderzeniami, zaś $f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ – rozwiązaniem równania Boltzmanna w zerowym przybliżeniu, czyli

$$f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{2kT}(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2\right] \quad (18)$$

jest rozkładem Maxwella-Boltzmanna. Rozwiązanie równania BGKW w przybliżeniu pierwszego rzędu ma postać [7]

$$f = f^{(0)} \left\{ 1 - \tau \left[\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} U_i \left(\frac{m}{2kT} U^2 - \frac{5}{2} \right) + \frac{1}{kT} A_{ij} \left(U_i U_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} U^2 \right) \right] \right\}, \quad (19)$$

gdzie $i = 1, 2, 3$ oznaczają składowe kartezjańskie,

$$A_{ij} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (20)$$

a

$$\mathbf{U} = \mathbf{v} - \mathbf{u} \quad (21)$$

jest prędkością molekuly w układzie poruszającym się z prędkością średnią. Wzór (19) zapisany jest za pomocą umowy sumacyjnej Einsteina.

W pracy przyjęto*, że

$$\tau = \frac{l}{\bar{v}}, \quad (22)$$

* W pracy przyjęto, że czas relaksacji jest równy średniemu czasowi między zderzeniami. Tym niemniej nie jest to konieczne i wyniki nie ulegają zmianie, o ile tylko czas relaksacji jest proporcjonalny do średniego czasu między zderzeniami.

gdzie $\tilde{v}$ jest prędkością najbardziej prawdopodobną

$$\tilde{v} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (23)$$

4. Geometria problemu i podstawowe założenia

Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa (19) może zależeć od czasu poprzez parametry n , T i u , a więc otrzymane wyniki są również słuszne w przypadku niestacjonarnych procesów kondensacji i parowania.

Należy jednak zaznaczyć, że zmiany w czasie nie mogą być zbyt szybkie w porównaniu ze zmianami potrzebnymi do ustalenia się równowagi lokalnej, która ustala się po czasie rzędu τ .

W celu uproszczenia całkowania wzorów (3) i (6), przyjęto następujące założenia (rys. 1) co do geometrii problemu.

Kondensacja lub parowanie ma miejsce na powierzchni cieczy, która pokrywa się z płaszczyzną (x_2, x_3) . Średnia prędkość pary posiada tylko dwie nie znikające składowe (jedynie $u_3 = 0$). Dopuszcza się zmienność parametrów n , T i u tylko w kierunku prostopadłym do powierzchni rozdziału faz, a więc składowe gradientów tych wielkości w kierunku x_2 i x_3 są równe zero. W szczególności, co warto podkreślić, wartość składowej prędkości średniej pary u_2 nie zmienia się w kierunku osi x_2 .

Nakłada się pewne ograniczenia co do wielkości przepływu pary oraz co do wielkości gradientów podstawowych parametrów, a mianowicie:

$$u_i^* = \frac{u_i}{\tilde{v}} \ll 1, \quad (i = 1, 2) \quad (24)$$

$$\Delta u_i = \frac{1}{(\tilde{v}/l)} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \ll 1 \quad (i = 1, 2) \quad (25)$$

$$\Delta T = \frac{1}{(T/l)} \frac{\partial T}{\partial x_1} \ll 1. \quad (26)$$

Ograniczenie (24) oznacza, że składowe prędkości przepływu pary są małe w porównaniu z prędkością najbardziej prawdopodobną, która jest tego samego rzędu co prędkość rozchodzenia się dźwięku. Ograniczenia (25) oraz (26) oznaczają, że zmiany parametrów u_i oraz T wzdłuż osi x_1 są małe w porównaniu ze zmianami jakie miałyby miejsce, gdyby prędkość przepływu oraz temperatura spadały odpowiednio od wartości $\tilde{v}$ do zera oraz od T do zera na odległości jednej drogi swobodnej.

Jednocześnie zakłada się, że wszystkie wielkości u_i^* , Δu_i oraz ΔT są tego samego rzędu.

5. Strumienie w przypadku pełnej akomodacji i zerowych gradientów

Warto wypisać znane wyrażenia na strumienie w przypadku, gdy powierzchnia cieczy o temperaturze T_s styka się z nieruchomą parą o jednorodnej temperaturze T , przy założeniu istnienia pełnej akomodacji wszystkich wielkości. Najpierw jednak warto wypisać

odpowiednie strumienie J^s . Można je otrzymać podstawiając do wzoru (5) kolejno $A=1$, $A=e=\frac{1}{2}mv^2$, $A=p_1=mv_1$ oraz $f^+=f^{(0)}(u=0)$. A więc strumień cząstek emitowanych z powierzchni przy pełnej akomodacji

$$J^s[1] = \frac{P_s}{\sqrt{2\pi mk T_s}}, \quad (27)$$

energii

$$J^s[e] = \frac{P_s}{\sqrt{2\pi mk T_s}} 2k T_s, \quad (28)$$

składowej normalnej pędu

$$J^s[p_1] = \frac{1}{2} P_s, \quad (29)$$

zaś na podstawie powyższych wzorów i (8), (10), (13) oraz (6) podstawiając do tego ostatniego

$$f^- = f^{(0)}(u=0, T)$$

otrzymuje się, przy założeniu pełnej akomodacji, następujące strumienie wypadkowe:

$$J_0[1] = \frac{P_s}{\sqrt{2\pi mk T_s}} - \frac{P}{\sqrt{2\pi mk T}}, \quad (30)$$

$$J_0[e] = \frac{P_s}{\sqrt{2\pi mk T_s}} 2k T_s - \frac{P}{\sqrt{2\pi mk T}} 2k T, \quad (31)$$

$$J_0[p_1] - P = \frac{1}{2} \Delta P = \frac{1}{2} (P_s - P). \quad (32)$$

Związek (30) stanowi znaną formułę Hertza-Knudsen'a, wyrażającą strumień cząstek kondensujących się lub parujących słuszny przy powyższych założeniach. Poniżej wprowadzono ogólne wyrażenia na strumienie cząstek, energii i pędu w procesie kondensacji lub parowania, które jak się okazuje są równe kombinacjom liniowym powyższych trzech strumieni w zerowym przybliżeniu. Fakt ten wyraża istnienie sprzężenia między wymianą masy, energii i pędu, co nie ujawniło się w przybliżeniu rzędu zerowego.

6. Strumienie w obszarze II

Wszystkie strumienie w obszarze ośrodka ciągłego można w zasadzie określić na podstawie praw termo- i hydrodynamiki fenomenologicznej. Tym niemniej, aby móc je porównywać z wartościami strumieni z obszaru I, należy je określić z tym samym stopniem dokładności co i te drugie (zob. związki (24)–(26)). W tym celu wyznaczono je na podstawie wzoru (3) przy użyciu funkcji rozkładu (19). Pozostawiono jedynie wyrazy liniowe względem u_i^* , Δu_i oraz ΔT .

I tak, w tym przybliżeniu strumienie w obszarze II wynoszą:

– strumień cząstek

$$j[1] = n u_1, \quad (33)$$

– strumień energii

$$j[e] = hnu_1 - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_1}, \quad (34)$$

– strumień składowej prostopadłej pędu

$$j[p_1] = P - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad (35)$$

– strumień składowej równoległej pędu

$$j[p_2] = -\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad (36)$$

gdzie h jest entalpią przypadającą na jedną molekułę, λ – współczynnikiem przewodnictwa ciepła, a μ – współczynnikiem lepkości gazu jednoatomowego. Są one odpowiednio równe:

$$h = \frac{5}{2} kT, \quad (37)$$

$$\lambda = \frac{5}{2} \frac{P\tau k}{m} \quad (38)$$

oraz

$$\mu = P\tau. \quad (39)$$

7. Wyznaczenie wypadkowych strumieni w obszarze I

Do wyznaczenia wypadkowych strumieni w obszarze I konieczne jest obliczenie na podstawie (6) strumieni $J^-[A]$, podstawiając kolejno za A odpowiednie wielkości 1, $\frac{1}{2}mv^2$, mv_1 oraz mv_2 . Jak to już powiedziano wyżej, funkcja f^- w tym obszarze musi być równa funkcji f na granicy obszaru II i I, a więc można ją przyjąć w postaci jak we wzorze (19). Wykonanie dosyć długich i uciążliwych całkowań, przy zachowaniu jedynie członów liniowych względem u_i^* , Δu_i oraz ΔT daje następujące wartości:

– strumienia cząstek

$$J^-[1] = -\frac{P}{\sqrt{2\pi mkT}} [1 - \sqrt{\pi} u_1^* - \frac{2}{3} \Delta u_1], \quad (40)$$

– energii

$$J^-[e] = -\frac{P}{\sqrt{2\pi mkT}} [2kT - \frac{5}{2} kT \sqrt{\pi} u_1^* + \frac{5}{4} kT \sqrt{\pi} \Delta T - 2kT \Delta u_1], \quad (41)$$

– składowej prostopadłej pędu

$$J^-[p_1] = \frac{1}{2} P \left[1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} u_1^* + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Delta T - \frac{4}{3} \Delta u_1 \right], \quad (42)$$

— składowej równoległej pędu

$$J^-[p_2] = -\frac{1}{2}P \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} u_2^* + \Delta u_2 \right]. \quad (43)$$

Strumienie te można również wyrazić poprzez współczynniki transportu i entalpii molekuly (37)–(39). Po prostych przekształceniach otrzymuje się

$$J^-[1] = -\frac{P}{\sqrt{2\pi mkT}} + \frac{1}{2} nu_1 + \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi mkT}} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad (44)$$

$$J^-[e] = -\frac{P}{\sqrt{2\pi mkT}} 2kT + \frac{1}{2} nu_1 h - \frac{1}{2} \lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{2kT}{\sqrt{2\pi mkT}} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (45)$$

$$J^-[p_1] = \frac{1}{2}P - \sqrt{\frac{2mkT}{\pi}} nu_1 + \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} \lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (46)$$

$$J^-[p_2] = -\frac{P}{\sqrt{\pi}} u_2^* - \frac{1}{2} \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \quad (47)$$

Powyższe cztery związki wraz z (8), (10), (13), (16), (27), (28) i (29) dają następujące wartości wypadkowych strumieni masy, energii i pędu:

$$J[1] = \alpha \left[J_0[1] + \frac{1}{2} nu_1 + \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi mkT}} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right], \quad (48)$$

$$J[e] = \beta \left[J_0[e] + \frac{1}{2} nu_1 h - \frac{1}{2} \lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} + \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right], \quad (49)$$

$$J[p_1] - P = \gamma \left[\frac{1}{2} \Delta P - \sqrt{\frac{2mkT}{\pi}} nu_1 + \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} \lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right], \quad (50)$$

$$J[p_2] = -\delta \left[\frac{P}{\sqrt{\pi}} u_2^* + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right], \quad (51)$$

gdzie J_0 i $\frac{1}{2}\Delta P$ są strumieniami w zerowym przybliżeniu wyrażonymi w związkach (30), (31) i (32). Obliczone w ten sposób strumienie muszą być równe odpowiednim strumieniom określonym w obszarze II. A więc porównując prawe strony związków (33)–(36) z prawymi stronami związków (48)–(51), otrzymuje się następujący układ równań:

$$nu_1 = \alpha \left[J_0[1] + \frac{1}{2} nu_1 + \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi mkT}} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right], \quad (52)$$

$$nu_1 h - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} = \beta \left[J_0[e] + \frac{1}{2} nu_1 h - \frac{1}{2} \lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} + \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right], \quad (53)$$

$$-\frac{4}{3} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \gamma \left[\frac{1}{2} \Delta P - \sqrt{\frac{2mkT}{\pi}} nu_1 + \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} \lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right], \quad (54)$$

$$-\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\delta \left[\frac{P}{\sqrt{\pi}} u_2^* + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right], \quad (55)$$

który pozwala wyeliminować nieznane wartości prędkości średniej u oraz gradienty tej prędkości i temperatury na granicy obszarów I i II z wyrażeń (48)–(51) na wypadkowe strumienie w obszarze I. Rozwiązując ten układ równań względem

$$nu_1, -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_1}, -\frac{4}{3} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \text{ oraz } -\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

otrzymuje się następujące wartości strumieni na granicy obszaru II i I:

$$j[1] = nu_1 = \frac{1}{D} \left\{ \alpha \left[\left(1 - \frac{1}{2} \beta\right) \left(1 - \frac{1}{2} \gamma\right) - \frac{3}{10\pi} \beta \gamma \right] J_0[1] + \right. \\ \left. + \frac{1}{5\pi} \alpha \beta \gamma \frac{1}{2kT} J_0[e] - \frac{1}{4} \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \beta\right) \gamma \frac{\Delta P}{\sqrt{2\pi mkT}} \right\}, \quad (56)$$

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{1}{D} \left\{ -\frac{1}{4} \alpha \left[5 \left(1 - \frac{1}{2} \beta\right) \left(1 - \frac{1}{2} \gamma\right) - \frac{3}{\pi} \beta \gamma \right] J_0[1] 2kT + \right. \\ \left. + \beta \left[\left(1 - \frac{1}{2} \alpha\right) \left(1 - \frac{1}{2} \gamma\right) - \frac{1}{2\pi} \alpha \gamma \right] J_0[e] + \right. \\ \left. - \frac{1}{8} \gamma \left[3 \left(1 - \frac{1}{2} \alpha\right) \beta - \frac{5}{2} \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \beta\right) \right] \frac{\Delta P}{\sqrt{2\pi mkT}} 2kT \right\}, \quad (57)$$

$$j[p_1] - P = -\frac{4}{3} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1}{D} \left[-\frac{1}{2\pi} \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \beta\right) \gamma \sqrt{2\pi mkT} J_0[1] + \right. \\ \left. - \frac{2}{5\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \alpha\right) \beta \gamma J_0[e] \frac{\sqrt{2\pi mkT}}{2kT} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \alpha\right) \left(1 - \frac{1}{2} \beta\right) \gamma \Delta P \right], \quad (58)$$

$$j[p_2] = -\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\frac{\delta}{1 - \frac{1}{2} \delta} \frac{P}{\sqrt{2\pi mkT}} (mu_2), \quad (59)$$

gdzie

$$D = \left(1 - \frac{1}{2} \alpha\right) \left(1 - \frac{1}{2} \beta\right) \left(1 - \frac{1}{2} \gamma\right) - \frac{1}{4\pi} \alpha \gamma - \frac{3}{10\pi} \beta \gamma + \frac{11}{40\pi} \alpha \beta \gamma. \quad (60)$$

Strumień cząstek, strumień ciepła oraz strumień składowej prostopadłej pędu, jak również nie wypisany tutaj strumień energii całkowitej (można go łatwo wyliczyć na podstawie wzoru (34)) są kombinacjami liniowymi strumieni cząstek, energii i pędu w zerowym przybliżeniu. Fakt ten wyraża istnienie sprzężenia między wymianą masy energii i pędu, jaka występuje w procesach kondensacji i parowania. Wyrażenia te całkowicie określają wszystkie strumienie, jakie istnieją w rozpatrywanym problemie na granicy rozdziału faz. Jednocześnie mogą one posłużyć jako warunki graniczne dla równań ciągłości, Naviera-Stokesa i równania przewodnictwa ciepła, które spełnione są w obszarze II. W szczególnym przypadku $\beta = \gamma = 0$ związek (56) przechodzi w związek Schragego na wypadkowy strumień molekuł [2].

8. Wnioski

W procesach kondensacji i parowania dużą rolę odgrywają wzajemne sprzężenia między wymianą masy, energii i pędu. Klasyczny związek Schragego na strumień molekuł, nie uwzględniający tego sprzężenia, jest słuszny jedynie w granicznym przypadku $\beta = \gamma = 0$, tzn. gdy wymiana między parą a cieczą odbywa się z zerową akomodacją energii i składowej prostopadłej pędu. W celu ilościowej oceny jakości tego przybliżenia, konieczne są dokładne obliczenia liczbowe. Niestety wartości współczynników akomodacji wielu substancji nie są znane. Dotychczas wiele uwagi poświęcono współczynnikowi akomodacji liczby molekuł, czasami nazywanemu współczynnikiem kondensacji. Otrzymywane wyniki eksperymentalne są bardzo rozbieżne [8]. Być może jedną z przyczyn rozbieżności jest fakt, że do analizy wyników eksperymentalnych używano związku, który jest słuszny tylko w granicznym przypadku zerowej akomodacji energii i pędu. Wydaje się, że w ocenie wartości współczynnika akomodacji liczby molekuł mogą odgrywać pewną rolę również i inne współczynniki akomodacji.

Praca wpłynęła do Redakcji w listopadzie 1979 r.

Literatura

- [1] A. Knacke, I. Stranski, *The mechanism of evaporation*. Progr. Metal. Phys. Vol. 6, 1956, pp. 181 - 235.
- [2] A. F. Mills, R. A. Seban, *The condensation coefficient of water*. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 10, 1967, pp. 1815 - 1827.
- [3] P. N. Shankar, Franke E. Marble, *Kinetic Theory of Transient Condensation and Evaporation at a Plane Surface*. Phys. Fluids, Vol. 14, 1971, pp. 510 - 516.
- [4] H. Lang, *Evaporation and condensation for general gas-liquid surface scattering*. J. Chem. Phys. Vol. 62, 1975 pp. 858 - 863.
- [5] P. Gajewski, A. Kulicki, A. Wiśniewski, M. Zgorzelski, *Kinetic theory approach to the vapor-phase phenomena in a nonequilibrium condensation process*. Phys. Fluids, Vol. 17, 1974, pp. 321 - 327.
- [6] Yoshimoto Onishi, *Kinetic Theory Treatment of Nonlinear Half-Space Problem of Evaporation and Condensation*. J. Phys. Soc. Japan Vol. 146, 1979, pp. 303 - 309.
- [7] E. H. Kennard, *Kinetic Theory of Gases*. Mc Grow-Hill, 1938.
- [8] Kerson Huang, *Mechanika statystyczna*. PWN, Warszawa 1978, s. 104.
- [9] A. Matuszkiewicz, *Porównanie wyników eksperymentalnych i teoretycznych dotyczących wyznaczania współczynnika kondensacji wody*. Prace IMP, z. 76, 1978, s. 41.

Применение уравнения БКТВ к определению обмена массы, энергии и импульса на границе раздела фаз

Резюме

Рассматриваются процессы конденсации и испарения на плоской бесконечной поверхности жидкости, с учетом неравновесия и неполной аккомодации массы, энергии и импульса. Пользуясь функцией распределения вероятности (19), которая является решением уравнения БКТВ (17), подсчитываются потоки массы, энергии и импульса в I и II областях (см. рис. 1). Затем, пользуясь усло-

вием неразрывности потоков на границе областей I и II, устраняются неизвестные значения градиентов температуры и скорости. Благодаря этому можно подсчитать потоки молекул, энергии и импульса на границе раздела фаз. Эти потоки являются линейными комбинациями потоков молекул, энергии и импульса в нулевом приближении. Это свидетельствует о существовании сопряжения между обменом массы, энергии и импульса в процессах конденсации и испарения.

Determination of the Mass, Energy and Momentum Transfer at the Liquid-Vapour Interface Based on the BGKW Equation

Summary

Condensation and evaporation over an infinite plane surface of liquid are analyzed with nonequilibrium and incomplete accommodation of the mass, energy and momentum taken into account. Probability distribution function (19) obtained as a solution of BGKW equation (17) is employed for calculation of the mass, energy and momentum fluxes in regions I and II (see Fig. 1). Unknown values of temperature and velocity gradients are eliminated using the condition of flux continuity at the boundary of regions I and II. This makes possible calculation of molecule, energy and momentum fluxes at the liquid-vapour interface. They are linear combinations of molecule, energy and momentum fluxes in the zeroth approximation which indicates the existence of coupling between the transfer of mass, energy and momentum in condensation and evaporation processes.