

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
I N S T Y T U T M A S Z Y N P R Z E P Ł Y W O W Y C H

P R A C E
I N S T Y T U T U M A S Z Y N
P R Z E P Ł Y W O W Y C H

T R A N S A C T I O N S
O F T H E I N S T I T U T E O F F L U I D - F L O W M A C H I N E R Y

81

W A R S Z A W A - P O Z N A Ń 1981
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

RADA REDAKCYJNA – EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
STEFAN PERYCZ · WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ROMUALD PUZYREWSKI
KAZIMIERZ STELLER (PRZEWODNICZĄCY · CHAIRMAN) · ROBERT SZEWAŁSKI
JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY – EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER – REDAKTOR – EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA – EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright

by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1981

Printed in Poland

ISBN 83-01-03053-4
ISSN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE – ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 340 + 90 egz.	Oddano do składania 25 VI 1980 r.
Ark. wyd. 8,75 Ark. druk. 7,125	Podpisano do druku 13 IV 1981 r.
Pap. druk. sat. kl. V, 70 g 70 × 100 cm.	Druk ukończono w kwietniu 1981 r.
Nr zam. 631/49. P-4/16.	Cena zł 35,–

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

JÓZEF WIĘCKOWSKI*

Gdańsk

Dynamika pewnego układu łańcuchowego z ciągłym widmem częstości własnych

Rozwiązano ogólnie równania ruchu mostu promowego w zakresie liniowym dla dowolnych parametrów układu oraz zadanie nieliniowe pod obciążeniem siłą skupioną w jednym przegubie.

1. Wstęp

Artykuł jest kontynuacją badań nad dynamiką mostu promowego w opisie ciągłym i dyskretnym [1 - 5]. Rozpatruję się sztywne pontony, luzy obrotowe oraz płaską linię ugięcia układu. Zakłada się również model zderzenia plastycznego pontonów. Hydromechanikę problemu przyjmuje się maksymalnie uproszczoną. Reakcje cieczy dane są sztywnością na obrót i przemieszczenia pionowe, a efekty dynamiczne można uwzględnić powiększając masę i moment bezwładności masy o dodatkowe wielkości zredukowane.

Przedstawione rozwiązanie jest rozszerzeniem rezultatów uzyskanych w pracy [5], w której postulowano taki związek między parametrami pontonów, aby most nieograniczony posiadał jedną częstość drgań własnych, a każda forma odkształcenia była funkcją własną problemu. Odstąpimy od tego założenia rozwiązując zagadnienie ogólnie. Wykażemy przy tym, że widmo częstości drgań własnych wypełnia przedział ograniczony w sposób ciągły.

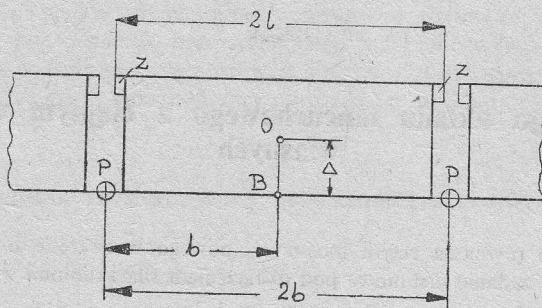
Dzięki uzyskaniu metody postępowania prowadzącej do całek ogólnych zarówno dla układu swobodnego jak i częściowo zwartego (po interwencji więzów), można szukać analitycznych i numerycznych rozwiązań różnych zadań o znaczeniu praktycznym. Rozwiązano szczególne zadanie wzrostu strefy zwarcia pontonów pod działaniem siły skupionej przy zerowych warunkach początkowych. Jest to przykład uproszczonego modelu rozładunku statku na tymczasową przystań lub prom w strefie brzegowej.

Uzyskanie rozwiązania w ogólnym przypadku, bez narzucenia żadnych ograniczeń na parametry mostu pozwoli na przygotowanie eksperymentu weryfikującego zakres stosowności rozpatrywanego modelu oraz analizę jakościową i numeryczną zachowania się układu przy innych obciążeniach zewnętrznych.

* Instytut Okrętowy Politechniki Gdańskiej.

2. Formy drgań i częstości układu swobodnego

Niech q_j ($j=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$) oznaczają pionowe przemieszczenia przegubów łączących pontony mostu (rys. 2.1). m – będzie masą pontonu, k – sztywnością hydrostatyczną na przemieszczenia pionowe. Jeżeli $2b$ oznacza odległość między sąsiednimi przegubami, Δ – odległość środka masy pontonu (łącznie z masą zredukowaną) od linii prostej łączącej dwa sąsiednie przeguby tego samego pontonu, I – moment bezwładności



Rys. 2.1. Schemat fragmentu mostu promowego
P – przegub, z – zderzak

masy pontonu względem środka masy, L – sztywność hydrostatyczna na obrót, to możemy wprowadzić wielkości zredukowane

$$\check{L} \equiv \frac{L}{b^2}, \quad (2.1.1)$$

$$\check{I} \equiv \frac{I + \Delta^2 m}{b^2}. \quad (2.1.2)$$

Równania ruchu mostu swobodnego przy nie stykających się pontonach i bez obciążenia będą [5]

$$\frac{m + \check{I}}{2} \ddot{q}_j + \frac{m - \check{I}}{4} \ddot{q}_{j+1} + \frac{m - \check{I}}{4} \ddot{q}_{j-1} + \frac{K + \check{L}}{2} q_j + \frac{K - \check{L}}{4} q_{j+1} + \frac{K - \check{L}}{4} q_{j-1} = 0, \quad (2.2)$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty.$$

Szukamy rozwiązań harmoniczych w czasie z częstością ω , ograniczonych dla wszystkich j . Postulując

$$q_j = C_j e^{i\omega t}, \quad (2.3)$$

$$j = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty,$$

otrzymujemy nieskończony układ równań algebraicznych względem C_j z parametrem ω :

$$C_{j+1} \left(\frac{K - \check{L}}{4} - \omega^2 \frac{m - \check{I}}{4} \right) + C_j \left(\frac{K + \check{L}}{2} - \omega^2 \frac{m + \check{I}}{2} \right) + C_{j-1} \left(\frac{K - \check{L}}{4} - \omega^2 \frac{m - \check{I}}{2} \right) = 0, \quad (2.4)$$

$$j = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty.$$

Dzięki temu, że macierz współczynników układu (2.4) jest pasmowa i posiada trzy linie równoległe do przekątnej głównej otrzymamy równanie charakterystyczne drugiego stopnia względem r postulując

$$C_j = A r^j, \quad (2.5)$$

gdzie A – stała dowolna. Równanie to ma postać

$$r^2 + 2 \frac{K + \check{L} - \omega^2(m + \check{I})}{K - \check{L} - \omega^2(m - \check{I})} r + 1 = 0. \quad (2.6)$$

Jest rzeczą oczywistą, że dla tych wartości ω , dla których równanie (2.6) posiada pierwiastki rzeczywiste i różne od jedności, rozwiązania są zawsze nieograniczone. Odrzucamy te rozwiązania, nie mogą one bowiem opisywać dopuszczalnych ruchów układu. W pozostałych przypadkach wygodnie jest zapisać rozwiązania równania (2.6) w postaci

$$r_{1,2} = -\frac{K + \check{L} - \omega^2(m + \check{I})}{K - \check{L} - \omega^2(m - \check{I})} \pm 2i \frac{\sqrt{(\omega^2 \check{I} - \check{L})(K - \omega^2 m)}}{|K - \check{L} - \omega^2(m - \check{I})|}. \quad (2.7)$$

Rozwiązania te są zespolone jeżeli

$$\omega^2 \in \left(\min \left(\frac{\check{L}}{\check{I}}, \frac{K}{m} \right), \max \left(\frac{\check{L}}{\check{I}}, \frac{K}{m} \right) \right). \quad (2.8)$$

Ponieważ, jak łatwo sprawdzić, jest wtedy $|r_i| = 1$ ($i = 1, 2$), otrzymaliśmy rozwiązania ograniczone i przedział (2.8) jest przedziałem kwadratów częstości drgań własnych.

W skrajnych punktach tego przedziału mamy pierwiastki dwukrotne. Dla $\omega^2 = K/m$ jest $r_{1,2} = 1$, a dla $\omega^2 = \check{L}/\check{I}$ jest $r_{1,2} = -1$. Nie wszystkie rozwiązania układu (2.4) są wtedy ograniczone. Dla przypadku pierwszego mamy

$$C_j = A \quad \text{ i } \quad C_j = B_j, \quad (2.9)$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty,$$

a dla drugiego

$$C_j = A(-1)^j \quad \text{ oraz } \quad C_j = B(-1)^j j, \quad (2.10)$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty.$$

Rozwiązania ograniczone w przypadku (2.10) odpowiadają „czystym” drganiom pionowym mostu, a rozwiązania ograniczone w przypadku (2.9) „czystym” kołysaniom wzdłużnych pontonów.

Pierwiastki $r_{1,2}$ zapisujemy w postaci trygonometrycznej

$$r_{1,2} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi, \quad (2.11.1)$$

gdzie

$$\equiv \arccos \chi(\omega^2), \quad (2.11.2)$$

$$\chi(\omega^2) \equiv -\frac{K + \check{L} - \omega^2(m + \check{I})}{K - \check{L} - \omega^2(m - \check{I})}. \quad (2.11.3)$$

Funkcja $\chi(\omega^2)$ ma następujące własności w przedziale (2.8)

$$\chi\left(\frac{K}{m}\right) = 1 \Rightarrow \varphi(\chi) = 0, \quad (2.12.1)$$

$$\chi\left(\frac{\check{L}}{\check{I}}\right) = 0 \Rightarrow \varphi(\chi) = \pi. \quad (2.12.2)$$

Można również wykazać, że gdy $K/m \neq \check{L}/\check{I}$, to funkcja χ nie posiada asymptoty pionowej w domkniętym przedziale (2.8). Istotnie, miejscem zerowym mianownika w ilorazie po prawej stronie równania (2.11.3) jest

$$\omega^2 = \frac{K - \check{L}}{m - \check{I}} \quad (2.13)$$

i prosto sprawdzić, że albo lewa, albo prawa strona nierówności podwójnej

$$\frac{K}{m} < \frac{K - \check{L}}{m - \check{I}} < \frac{\check{L}}{\check{I}} \quad (2.14)$$

nie jest spełniona.

Dodatkowo

$$\frac{d^2}{d\omega^2} \chi(\omega^2) = 2 \frac{m\check{I} \left(\frac{K}{m} - \frac{\check{L}}{\check{I}} \right)}{[K - \check{L} - \omega^2(m - \check{I})]^2} \quad (2.15)$$

jest stałego znaku w przedziale (2.9), a to świadczy, że $\chi(\omega^2)$ i również $\varphi(\omega)$ są monotoniczne w tym przedziale.

Możemy teraz skonstruować ogólne rozwiązanie dla drgań swobodnych z ustaloną częstotliwością ω :

$$\begin{aligned} q_j &= A_1 r_1^j e^{i\omega t} + A_2 r_2^j e^{i\omega t} \equiv A_1 e^{i(\omega t + j\varphi)} + A_2 e^{i(\omega t - j\varphi)} \equiv \\ &\equiv A_1 e^{i\varphi(j + \frac{\omega}{\varphi}t)} + A_2 e^{-i\varphi(j - \frac{\omega}{\varphi}t)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

A_1, A_2 są stałymi dowolnymi. Rozwiązania (2.16) opisują fale harmoniczne przemieszczające się w przeciwnych kierunkach z prędkością (w ilościach pontonów na sekundę)

$$V = \frac{\omega}{\varphi} \quad (2.17.1)$$

lub, jeżeli odległość między przegubami jest $2b$, w

$$v = \frac{2b\omega}{\varphi}. \quad (2.17.2)$$

Ponieważ część rzeczywista i urojona relacji (2.16) spełnia równania ruchu, ogólna całka równania jednorodnego będzie:

$$q_j = \Phi_1(j) [A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t] + \Phi_2(j) [B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t], \quad (2.18)$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty,$$

gdzie

$$\Phi_1(j) \equiv \cos j\varphi, \quad (2.19.1)$$

$$\Phi_2(j) \equiv \sin j\varphi \quad (2.19.2)$$

są parzystą i nieparzystą (względem j) formą drgań swobodnych.

3. Rozwiązanie zagadnienia początkowego

Dla wyjaśnienia sposobu rozwiązania zadania przyjmujemy, że zadana jest początkowa forma odkształcenia $d(j)$ parzysta względem j i spełniająca warunek

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (d(n))^2 < +\infty. \quad (3.1)$$

Poszukujemy takiej funkcji $A_2(\omega)$, aby

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} A_2(\omega) \Phi_1(j\varphi(\omega)) d\omega = d(j), \quad (3.2)$$

$$j=0, \pm 1, \dots, \pm \infty.$$

Niech

$$\omega_1^2 \equiv \frac{K}{m} < \omega_2^2 \equiv \frac{\check{L}}{\check{I}} \quad (3.3)$$

i wprowadźmy funkcję odwrotną do funkcji (2.11) w przedziale $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$. Funkcja taka ze względu na monotoniczność w tym przedziale istnieje. Otrzymamy

$$\begin{aligned} \omega = \Omega(\varphi) &= \left[\frac{K \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \check{L} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{m \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \check{I} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left[\frac{K(1 + \cos \varphi) + \check{L}(1 - \cos \varphi)}{m(1 + \cos \varphi) + \check{I}(1 - \cos \varphi)} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Po zmianie zmiennych w całce (3.2) z ω na φ i przy założeniu (3.3)

$$\int_0^\pi A_2[\Omega(\varphi)] [\Omega(\varphi)]' \cos j\varphi d\varphi = d(j), \quad (3.5)$$

$$j=0, 1, 2, \dots, +\infty.$$

Relację tę można traktować jako regułę obliczania współczynników Fouriera parzystej funkcji

$$A_2[\Omega(\varphi)] [\Omega(\varphi)]'. \quad (3.6)$$

Korzystając ze znanego wzoru na współczynniki rozwinięcia otrzymamy

$$A_2(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{d\varphi}{d\omega} \left[\frac{1}{2} d(0) + \sum_{n=1}^{\infty} d(n) \cos(n\varphi(\omega)) \right]. \quad (3.7)$$

Podstawiając funkcję $A_2(\omega)$ do (2.18) przy $A_1 = B_1 = B_2 = 0$, całkując w granicach ω_1, ω_2 , a następnie przechodząc do zmiennej φ , otrzymamy rozwiązanie spełniające zadane warunki rozkładu przemieszczeń początkowych w chwili $t=0$

$$\begin{aligned} q_j = & \frac{1}{\pi} d(0) \int_0^{\pi} \cos(\Omega(\varphi)t) \cos j\varphi d\varphi + \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} d(n) \int_0^{\pi} \cos(\Omega(\varphi)t) \cos n\varphi \cos j\varphi d\varphi, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, +\infty.$$

W przypadku, gdy

$$\omega_2^2 = \frac{\check{L}}{\check{I}} < \frac{K}{m} = \omega_1^2 \quad (3.9)$$

należy we wzorze (3.8) całkować od π do zera. Postępując analogicznie można uzyskać rozwiązania dla zadanego, parzystego, początkowego rozkładu prędkości $e(j)$ oraz nieparzystych początkowych rozkładów przemieszczeń $g(j)$ oraz prędkości $h(j)$. Otrzymamy kolejno

$$\begin{aligned} q_j = & \frac{1}{\pi} e(0) \int_0^{\pi} \frac{\sin(\Omega(\varphi)t)}{\Omega(\varphi)} \cos j\varphi d\varphi + \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e(n) \int_0^{\pi} \frac{\sin(\Omega(\varphi)t)}{\Omega(\varphi)} \cos j\varphi \cos n\varphi d\varphi, \end{aligned} \quad (3.10.1)$$

$$q_j = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} g(n) \int_0^{\pi} \cos(\Omega(\varphi)t) \sin(n\varphi) \sin(j\varphi) d\varphi, \quad (3.10.2)$$

$$q_j = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} h(n) \int_0^{\pi} \frac{\sin(\Omega(\varphi)t)}{\Omega(\varphi)} \sin(n\varphi) \sin(j\varphi) d\varphi, \quad (3.10.3)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, +\infty.$$

Oczywiście rozwiązanie można napisać również w postaci zbiorczej, gdy zadane są dowolne początkowe rozkłady przemieszczeń $r(j)$ i prędkości $p(j)$ spełniające warunki

gwarantujące rozwijalność na szereg Fouriera funkcji typu (3.6), tzn. warunki

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (p(n))^2 < +\infty, \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} (r(n))^2 < +\infty. \quad (3.11)$$

Przypadków odstępstwa od założenia (3.11) nie będziemy rozpatrywali w tej pracy.

4. Ruch mostu pod działaniem siły skupionej (pierwsze zderzenie)

Rozwiążemy problem niejednorodny z jedną siłą uogólnioną Q_0 w węźle zerowym, stałą. Jest to, jak wspomnieliśmy we wstępie, przypadek uproszczonego modelu rozładunku statku.

Znajdziemy rozwiązanie niejednorodnego układu (2.2) przy $Q_0 \neq 0$ i $Q_j = 0$ ($j = \pm 1, \dots, \pm \infty$). Sprowadza się to do rozwiązania układu równań algebraicznych

$$\frac{K + \check{L}}{2} \check{q}_0 + \frac{K - \check{L}}{4} \check{q}_1 + \frac{K - \check{L}}{4} \check{q}_{-1} = Q_0, \quad (4.1)$$

$$\check{q}_1 = \check{q}_{-1},$$

$$\frac{K + \check{L}}{2} \check{q}_j + \frac{K - \check{L}}{4} \check{q}_{j-1} + \frac{K - \check{L}}{4} \check{q}_{j+1} = 0,$$

$$j = 1, 2, \dots, +\infty.$$

Rozwiązanie jest

$$\check{q}_j = \frac{\beta^j}{\sqrt{K\check{L}}} Q_0, \quad (4.2.1)$$

gdzie

$$\beta \equiv -\frac{\sqrt{K} - \sqrt{\check{L}}}{\sqrt{K} + \sqrt{\check{L}}}. \quad (4.2.2)$$

Dodając to rozwiązanie do ogólnego rozwiązania zadania jednorodnego i spełniając zerowe warunki początkowe otrzymujemy

$$q_j = Q_0 F_j(t), \quad (4.3.1)$$

gdzie

$$F_j(t) = \frac{1}{\sqrt{K\check{L}}} \left[\beta^j - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\Omega(\varphi)t) \cos(j\varphi) d\varphi - \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \int_0^\pi \cos(\Omega(\varphi)t) \cos(n\varphi) \cos(j\varphi) d\varphi \right], \quad (4.3.2)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, +\infty.$$

Potrąfimy teraz wyznaczyć siłę Q_0 potrzebną do wystąpienia zderzenia w czasie t od początku ruchu ($t=0$). Równanie więzów interweniujących w pierwszym zderzeniu jest [5]

$$q_1 - 2q_0 + q_{-1} + 2\varphi_0 b = 0; \quad (4.4)$$

φ_0 oznacza tu maksymalny względny kąt obrotu dwóch sąsiednich pontonów. Wykorzystując parzystość rozwiązań ($q_1 = q_{-1}$) obliczamy z równania (4.4) siłę Q_0 w zależności od czasu, a z relacji (4.3.1) prędkości $\dot{q}_0^{(-)}$ i $\dot{q}_1^{(-)}$ przed zderzeniem (jednostronne granice)

$$Q_0 = \frac{\varphi_0 b}{F_0(t) - F_1(t)}, \quad (4.5.1)$$

$$\dot{q}_0^{(-)} = \varphi_0 b \frac{\dot{F}_0(t)}{F_0(t) - F_1(t)}, \quad (4.5.2)$$

$$\dot{q}_1^{(-)} = \varphi_0 b \frac{\dot{F}_1(t)}{F_0(t) - F_1(t)}. \quad (4.5.3)$$

Impulsy pierwszego zderzenia wyznaczamy stosując procedurę opisaną w pracy [5]. Wpierw wyznaczamy impulsy uogólnione, odpowiadające kolejnym współrzędnym i równaniu więzów (4.4). Następnie wyznaczamy skoki prędkości z równań ruchu (2.2) scałkowanych w otoczeniu chwili zderzenia i z warunku zgodności ruchu z więzami; po zderzeniu mnożniki Lagrange'a dla impulsów uogólnionych. Pomijając szczegóły rachunku przytoczymy jedynie wyniki końcowe obliczeń impulsów wewnętrznych pierwszego zderzenia.

Wprowadźmy oznaczenie

$$\alpha \equiv - \frac{\sqrt{m} - \sqrt{\tilde{I}}}{\sqrt{m} + \sqrt{\tilde{I}}}. \quad (4.6)$$

Impulsy ścinające $\tilde{T}_i$ ($i=0, 1, \dots, +\infty$) wyznaczamy z równań ruchu pionowego kolejnych pontonów

$$\tilde{T}_0 = 0, \quad (4.7.1)$$

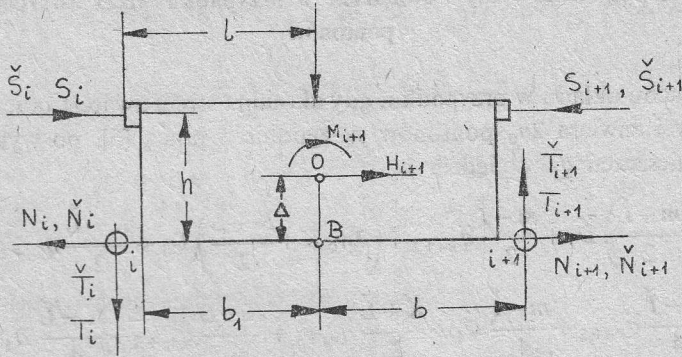
$$\begin{aligned} \tilde{T}_i &= \frac{1}{2} m \frac{1+\alpha}{3-\alpha} \alpha^{i-1} Q_0 \frac{d}{dt} (F_0 - F_1), \\ i &= 1, 2, \dots, +\infty. \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

Impuls podłużny $\check{S}_0$ wystąpi tylko w zderzaku zerowym:

$$\check{S}_0 = 2 \frac{b}{h} m Q_0 \frac{1+\alpha}{(1-\alpha)^2(3-\alpha)} \frac{d}{dt} (F_0 - F_1). \quad (4.8.1)$$

Impulsy podłużne $\check{N}_j$ występują we wszystkich przegubach. W obciążonym przegubie zerowym

$$\check{N}_0 = m \frac{b}{h} Q_0 \frac{1+\alpha}{(1-\alpha)^2(3-\alpha)} \left[2 - \frac{\Delta h}{b^2} \frac{(1-\alpha)^2}{1+\alpha} \right] \frac{d}{dt} (F_0 - F_1), \quad (4.9.1)$$



Rys. 4.1. Dodatnie skierowania sił wewnętrznych i impulsów

a w pozostałych przegubach

$$\check{N}_i = \frac{\Delta}{2b} m Q_0 \frac{1-\alpha}{3-\alpha} \alpha^{i-1} \frac{d}{dt} (F_0 - F_1), \quad (4.9.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, +\infty.$$

Siły wewnętrzne przed pierwszym zderzeniem sprowadzają się do sił tnących i podłużnych w przegubach łączących pontony. Jak wiadomo z pracy [5] siły te w przypadku $\omega_1 = \omega_2$ są stałe pomiędzy zderzeniami. W przypadku $\omega_1 \neq \omega_2$ są one zależne od czasu. Najprościej wyznaczyć siły tnące T_j z równań ruchu pionowego pontonów

$$\frac{m}{2} (\ddot{q}_{i+1} + \ddot{q}_i) + \frac{K}{2} (q_{i+1} + q_i) = T_i - T_{i+1}, \quad (4.10.1)$$

$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$$

pamiętając, że

$$T_0^+ = \frac{Q_0}{2} \quad (4.10.2)$$

oraz

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} T_i = 0. \quad (4.10.3)$$

Równania (4.10) są dane w postaci rekurencyjnej, a współrzędne i przyspieszenia uogólnione są znane z rozwiązań (4.3).

Siły podłużne przed pierwszym zderzeniem można wyznaczyć z równań ruchu poziomego kolejnych pontonów. Proste postępowanie, którego nie przytaczamy prowadzi do wyniku

$$N_j = \frac{m\Delta}{2b} \ddot{q}_j, \quad (4.11)$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty.$$

5. Impulsy zderzenia, ruchu i siły wewnętrzne w przypadku strefy zvarcia złożone z $2n_0$ pontonów

Równania ruchu układu w przypadku, gdy aktualna strefa zvarcia otacza symetrycznie przegub zerowy i zawiera $2n_0$ pontonów są zgodnie z pracą [5], po wykorzystaniu parzystości przemieszczeń q_j względem j :

$$\left(2n_0 m + \frac{m+\check{I}}{2}\right) \ddot{D}_1 + \frac{m-\check{I}}{2} \ddot{q}_{n_0+1} + \left(2n_0 K + \frac{K+\check{L}}{2}\right) D_1 + \frac{K-\check{L}}{2} q_{n_0+1} = Q_1(n_0), \quad (5.1.1)$$

$$\frac{m+\check{I}}{2} \ddot{q}_{n_0+1} + \frac{m-\check{I}}{4} \ddot{q}_{n_0+2} + \frac{m-\check{I}}{4} \ddot{D}_1 + \frac{K+\check{L}}{2} q_{n_0+1} + \frac{K-\check{L}}{4} q_{n_0+2} + \frac{K-\check{L}}{4} D_1 = Q_2(n_0), \quad (5.1.2)$$

$$\frac{m+\check{I}}{2} \ddot{q}_j + \frac{m-\check{I}}{4} \ddot{q}_{j+1} + \frac{m-\check{I}}{4} \ddot{q}_{j-1} + \frac{K+\check{L}}{2} q_j + \frac{K-\check{L}}{4} q_{j+1} + \frac{K-\check{L}}{4} q_{j-1} = 0, \quad (5.1.3)$$

$$j = n_0 + 2, n_0 + 3, \dots, +\infty,$$

gdzie

$$Q_1(n_0) \equiv Q_0 + \frac{K\varphi_0 b}{6} [(n_0+1)(n_0+3)(2n_0+3) + (n_0-1)(n_0-2)(2n_0-3)] + \frac{K+\check{L}}{2} \varphi_0 b (2+n_0^2), \quad (5.2.1)$$

$$Q_2(n_0) \equiv \frac{K-\check{L}}{4} \varphi_0 b (2+n_0^2); \quad (5.2.2)$$

D_1 oznacza tu współrzędną uogólnioną strefy zvarcia powiązaną ze współrzędnymi uogólnionymi przegubów w tej strefie relacją

$$q_i = D_1 - \varphi_0 b (2+i^2), \quad (5.3)$$

$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n_0.$$

Można teraz zastosować do opisu zderzenia odpowiadającego przyłączenia następnej pary pontonów do strefy zvarcia procedurą opisaną w pracy [5], rozpatrując jedynie połowę mostu ze względu na symetrię. Przytoczymy podstawowe formuły i wyniki końcowe. Dodatkowo skierowania sił wewnętrznych i impulsów podano na rysunku 4.1.

Przyłączeniu pontonu między przegubami n_0 i n_0+1 odpowiada interwencja więzów

$$q_{n_0+1} - D_1 = -(n_0^2 + 2n_0 + 3) \varphi_0 b \quad (5.4)$$

i jeżeli oznaczmy przez

$$\Delta V_{n_0} \equiv \dot{q}_{n_0+1}^{(-)} - \dot{D}_1^{(-)}, \quad (5.5)$$

gdzie $(-)$ oznacza lewostronną granicę w chwili zderzenia, a α liczbę według wzoru (4.6), to otrzymamy kolejno:

– przyrosty prędkości w chwili zderzenia

$$\delta \dot{D}_1 = \frac{2}{[(1+2n_0)(1-\alpha)+2]} \Delta V_{n_0}, \quad (5.6.1)$$

$$\delta \dot{q}_j = -\frac{(1+2n_0)(1-\alpha)}{[(1+2n_0)(1-\alpha)+2]} \alpha^{j-(1+n_0)} \Delta V_{n_0}, \quad (5.6.2)$$

$$j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, +\infty;$$

– impulsy ścinające przeguby w strefie zwania

$$\check{T}_j = -m \frac{2j}{[(1+2n_0)(1-\alpha)+2]} \Delta V_{n_0}, \quad (5.7.1)$$

$$j = 1, 2, \dots, n_0;$$

– impulsy ścinające poza strefą zwania

$$\check{T}_{n_0+i} = -\frac{m}{2} \frac{(1+2n_0)(1+\alpha)}{[(1+2n_0)(1-\alpha)+2]} \Delta V_{n_0}, \quad (5.7.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, +\infty;$$

– impulsy w zderzakach wzdłuż całej strefy zwania (powiększonej) do zderzaka n_0

$$\check{S}_j = \frac{b}{h} (\check{T}_j + 2\check{T}_{j+1} + \dots + 2\check{T}_{n_0} + \check{T}_{n_0+1}) + \frac{\check{I}}{2} (\delta \dot{q}_{n_0+1} - \delta \dot{D}_1) \frac{b}{h}, \quad (5.8)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, n_0;$$

– impulsy podłużne w przegubach strefy zwania

$$\check{N}_i = \check{S}_i + \frac{m\Delta}{b} \frac{\Delta V_{n_0}}{[(1+2n_0)(1-\alpha)+2]}, \quad (5.9.1)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n_0$$

oraz poza tą strefą

$$\check{N}_{n_0+i} = -\frac{m\Delta}{2b} \frac{(1+2n_0)(1-\alpha)}{[(1+2n_0)(1-\alpha)+2]} \beta_2^{i-1} \Delta V_{n_0}, \quad (5.9.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, +\infty.$$

Aby znaleźć siły wewnętrzne oraz ruch układu rozwiążemy układ (5.1) jednorodny postulując rozwiązania harmoniczne

$$D_1 = C_0 e^{i\omega t}, \quad (5.10.1)$$

$$q_{n_0+j} = C_j e^{i\omega t}, \quad (5.10.2)$$

$$j = 1, 2, \dots, +\infty.$$

Otrzymuje się wtedy nieskończony układ równań algebraicznych, którego rozwiązaniem jest

$$C_j = A [(\rho + r_2)r_1 - (\rho + r_1)r_2], \quad (5.11)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, +\infty,$$

r_1, r_2 wyznaczamy według relacji (2.7), A jest stałą dowolną, natomiast

$$\rho \equiv \frac{4n_0 K + K + \check{L} - \omega^2(4n_0 m + m + \check{I})}{K - \check{L} - \omega^2(m - \check{I})}. \quad (5.12)$$

Rozwiązanie (5.11) jest względem j ograniczone, gdy $|r_i| = 1$, a to zachodzi, gdy

$$\omega^2 \in \left(\min \left(\frac{K}{m}, \frac{\check{L}}{\check{I}} \right), \max \left(\frac{K}{m}, \frac{\check{L}}{\check{I}} \right) \right). \quad (5.13)$$

Zbadamy, czy rozwiązanie (5.11) może być ograniczone dla innych ω^2 . Może to być tylko wtedy, gdy czynnik $\rho + r_i = 0$, gdzie $|r_i| \leq 1$. Musi być wtedy oczywiście $|\rho| \leq 1$. Tak jednak być nie może. Jedynym możliwym pierwiastkiem jednego z równań $r_i + \rho = 0$ ($i = 1, 2$) jest

$$\omega^2 = \frac{\check{L} - 4n_0^2 K}{\check{I} - 4n_0^2 m}, \quad (5.14)$$

a dla tej wartości

$$\rho = -\frac{4n_0^2 + 4n_0 + 1}{4n_0^2 - 1} < -1 \Rightarrow |\rho| > 1. \quad (5.15)$$

Przedział częstości drgań własnych dla układu zwartego pozostaje więc niezmienny i sprowadza się do przedziału (5.13).

Znajdując całki szczególne od niejednorodności Q_1 i Q_2 i dodając je do rozwiązania (5.10), otrzymujemy rozwiązanie ogólne

$$D_1 = C_0 e^{i\omega t} + G_0. \quad (5.16.1)$$

$$q_{n_0+j} = C_j e^{i\omega t} + E \beta^{j-1}, \quad (5.16.2)$$

$$j = 1, 2, \dots, +\infty.$$

Stałe G_0 i E obliczamy z relacji

$$G_0 = \frac{2Q_1(n_0)[K(2+\beta) + \check{L}(2+\beta)] - 4Q_2(n_0)(K - \check{L})}{K^2[(1+4n_0)(2+\beta) - 1] + K\check{L}[6+4n_0(2-\beta)] + \check{L}^2(1-\beta)} \quad (5.17.1)$$

$$L = \frac{4Q_2(n_0)[K(1+4n_0) + \check{L}] - 2Q_1(n_0)(K - \check{L})}{K^2[(1+4n_0)(2+\beta) - 1] + K\check{L}[6+4n_0(2-\beta)] + \check{L}^2(1-\beta)}, \quad (5.17.2)$$

natomiast β według relacji (4.2.2).

Części rzeczywiste i urojone rozwiązań (5.16) są też całkami problemu. Po uwzględnieniu, że

$$r_{1,2} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi \quad (5.18)$$

i wykonaniu licznych przekształceń oraz po dodaniu części rzeczywistej i urojonej rozwiązań (5.16) z nowymi stałymi dowolnymi A_1, A_2 , otrzymamy

$$D_1 = \sin \varphi [A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t] + G_0, \quad (5.19.1)$$

$$q_{n_0+j} = -[\sin((j-1)\varphi + \rho \sin(j\varphi))][A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t] + E\beta^{j-1}. \quad (5.19.2)$$

Rozwiążemy zagadnienie początkowe, gdy dane są początkowe przemieszczenia ciągiem różnych od zera wartości D_1^0 i $q_{n_0+j}^0$, natomiast wszystkie prędkości są równe zero. Zadanie sprowadza się do rozwiązania względem $A(\omega)$ układu równań

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} A_1(\omega) \sin \varphi d\omega = D_1^0 - G_0, \quad (5.20.1)$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} A_1(\omega) [\sin((j-1)\varphi) + \rho(\omega) \sin j\varphi] d\omega = E\beta^{j-1} - q_{n_0+j}^0, \quad (5.20.2)$$

$$j = 1, 2, \dots, +\infty.$$

Niech $K/m < \check{L}/\check{I}$ (przypadek przeciwny będzie się tylko różnił przestawieniem granic całkowania po przejściu na zmiennej φ). Wprowadźmy oznaczenia

$$\int_0^\pi A_1[\Omega(\varphi)][\Omega(\varphi)]' \sin j\varphi d\varphi \equiv d(j), \quad (5.21.1)$$

$$j = 1, 2, \dots, +\infty$$

oraz

$$\int_0^\pi A_1[\Omega(\varphi)][\Omega(\varphi)]' \rho(\Omega(\varphi)) \sin j\varphi d\varphi \equiv d(j), \quad (5.21.2)$$

$$j = 1, 2, \dots, +\infty.$$

Z własności szeregów Fouriera wynika wprost, że

$$A_1[\Omega(\varphi)][\Omega(\varphi)]' = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} d(j) \sin j\varphi, \quad (5.22.1)$$

$$A_1[\Omega(\varphi)][\Omega(\varphi)]' \rho(\Omega(\varphi)) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} d(j) \sin j\varphi. \quad (5.22.2)$$

Rugując iloczyn $A_1\Omega'$ z tego układu otrzymamy

$$[\sum_{j=1}^{\infty} d(j) \sin j\varphi] \rho(\Omega(\varphi)) = \sum_{j=1}^{\infty} d(j) \sin j\varphi. \quad (5.23)$$

Oznaczmy przez

$$\check{C}_j \equiv E\beta^{j-1} - q_{n_0+j}^0, \quad (5.24)$$

$$j = 1, 2, \dots, +\infty,$$

wtedy równania (5.20.2) można zapisać w postaci

$$\check{C}_j \equiv d_1(j-1) + d_2(j), \quad (5.25)$$

$$j = 1, 2, \dots, +\infty,$$

przy czym $d_1(0) = 0$.

Rugując z równości (5.23) $d_2(j)$ za pomocą relacji (5.25), podstawiając

$$\rho(\Omega(\varphi)) = 2n_0 - (2n_0 + 1) \cos \varphi \quad (5.26)$$

i stosując znane elementarne wzory na rozkład iloczynu funkcji trygonometrycznych na sumę, otrzymujemy równanie (5.23) w postaci

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_1(j) \left[\frac{1-2n_0}{2} \sin(j+1)\varphi + 2n_0 \sin j\varphi - \frac{1+2n_0}{2} \sin(j-1)\varphi \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \check{C}_j \sin j\varphi. \quad (5.27)$$

Wynika stąd rekurencyjny nieskończony układ równań przez przyrównanie współczynników przy funkcjach liniowo-niezależnych

$$d_1(2) = -\frac{2}{1+2n_0} \check{C}_1 + \frac{4n_0}{1+2n_0} d_1(1), \quad (5.28)$$

$$d_1(j+1) = -\frac{2}{1+2n_0} \check{C}_j + \frac{4n_0}{1+2n_0} d_1(j) + \frac{1-2n_0}{1+2n_0} d_1(j-1).$$

Pierwsza wartość $d_1(1)$ jest wyznaczona relacją (5.20.1) i wynosi

$$d_1(1) = D_1^0 - G_0. \quad (5.29)$$

Postulując, że $d_1(j)$ są znanymi rozwiązaniami układu (5.28), (5.29), znajdziemy funkcję $A_1(\omega)$ z relacji (5.22), a następnie z (5.19.2) rozwiązania spełniające zadane początkowe warunki dla przemieszczeń i zerowe warunki dla prędkości. Wyniki końcowe obliczeń są następujące:

$$D_1 = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} (d_1(j) \int_0^{\pi} \cos(\Omega(\varphi)t) \sin j\varphi \sin \varphi d\varphi) + G_0, \quad (5.30.1)$$

$$\begin{aligned} q_{n_0+k} = & \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} d_1(j) \left\{ \frac{2n_0+1}{1} \int_0^{\pi} \cos(\Omega(\varphi)t) \sin(K+1)\varphi \sin j\varphi d\varphi - \right. \\ & \left. - 2n_0 \int_0^{\pi} \sin k\varphi \sin j\varphi \cos(\Omega(\varphi)t) d\varphi - \right. \end{aligned} \quad (5.30.2)$$

$$\left. - \frac{1-2n_0}{2} \int_0^{\pi} \sin(k-1)\varphi \sin j\varphi \cos(\Omega(\varphi)t) d\varphi \right\} - E\beta^{k-1},$$

$$k = 1, 2, \dots, +\infty.$$

W analogiczny sposób można rozwiązać przypadek, w którym zadane są zerowe warunki początkowe ($t=0$) dla przemieszczeń, natomiast warunki początkowe dla prędkości są na ogół niezerowe, ale spełniające warunek

$$(\dot{D}_1^0)^2 + \sum_{j=1}^{\infty} (\dot{q}_{n_0+j}^0)^2 < +\infty. \quad (5.31)$$

Warunek ten gwarantuje ciągły rozkład gęstości funkcji własnych na widmie częstości. Odstępstwo od tego kryterium będzie analizowane w osobnej pracy.

Rozwiązania w przypadku niezerowych prędkości początkowych są

$$D_1 = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \dot{d}(j) \int_0^{\pi} \frac{\sin(\Omega(\varphi)t)}{\Omega(\varphi)} \sin j\varphi \sin \varphi d\varphi, \quad (5.32.1)$$

$$\begin{aligned} q_{n_0+k} = & \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \dot{d}(j) \left\{ \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin(\Omega(\varphi)t) \sin(k+1)\varphi \sin j\varphi}{\Omega(\varphi)} d\varphi - \right. \\ & - 2n_0 \int_0^{\pi} \frac{\sin k\varphi \sin j\varphi \sin(\Omega(\varphi)t)}{\Omega(\varphi)} d\varphi - \\ & \left. - \frac{1-2n_0}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin(k-1)\varphi \sin j\varphi \sin(\Omega(\varphi)t)}{\Omega(\varphi)} d\varphi \right\}, \quad (5.32.2) \\ & k=1, 2, \dots, +\infty. \end{aligned}$$

Ciąg wartości $\dot{d}(j)$ wyznacza się z układu (5.28) podstawiając $\dot{d}(j) \div \dot{d}(j)$ z wartością początkową

$$\dot{d}(j) = \dot{D}_1^0 \quad (5.33)$$

oraz stałymi

$$\check{C}_j = -\dot{q}_{n_0+j}^0, \quad (5.34)$$

$$j=1, 2, \dots, +\infty.$$

Potrąfimy teraz metodą sklejaną rozwiązań od zderzenia do zderzenia wyznaczyć kolejno: czas zderzenia z pontonem n_0+1 przylączającym się do strefy zvarcia z równania więzów (5.4), parametr ΔV_{n_0} różnicy prędkości $\dot{q}_{n_0+1}^{(-)}$ i $D_1^{(-)}$ w chwili zderzenia z relacji (5.5), skoki prędkości $\delta \dot{D}_1$, $\delta \dot{q}_j$ z relacji (5.6) i impulsy zderzenia z relacji (5.7) do (5.9)

Siły wewnętrzne nie są stałe między zderzeniami. Siły tnące T_i wyznaczamy z równań (4.10), tzn. równań ruchu pionowego kolejnych pontonów. Pewne uproszczone formuły uzyskuje się dla strefy zvarcia dzięki istnieniu jednej współrzędnej D_1 dla całej strefy (patrz relacja (5.3)). Otrzymujemy w tym przypadku formułę

$$T_r = T_0 - r(m\ddot{D}_1 + KD_1) + [2n_0 + n_0^2 + \sum_{j=1}^{j=(n-1)} j^2] \varphi_0 b, \quad (5.35)$$

$$r=1, 2, \dots, +n_0$$

co oznacza, że siły tnące w strefie zvarcia są trójkami liniowo zależne.

Siły w zderzakach wyznaczamy z równania ruchu obrotowego pontonów po wyrugowaniu z niego sił podłużnych równaniem ruchu postępowego poziomego:

$$\check{I} \frac{\ddot{q}_{i+1} - \ddot{q}_i}{2} + \check{L} \frac{q_{i+1} - q_i}{2} = \frac{h}{b} (S_i - S_{i+1}) - (T_i + T_{i+1}), \quad (5.36)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, +\infty.$$

Dla $i = n_0 - 1$ mamy tylko jedną niewiadomą w tym równaniu S_{n_0-1} , gdyż $S_{n_0} = 0$ (brak styku). Pozostałe siły obliczamy zatem wzorem rekurencyjnym przy obniżaniu wskaźników

$$S_i = \frac{b}{h} (T_i + T_{i+1}) + \frac{b}{h} \left[\check{I} \frac{\ddot{q}_{i+1} - \ddot{q}_i}{2} + \check{L} \frac{q_{i+1} - q_i}{2} \right] + S_{i+1}, \quad (5.37)$$

$$i = 1, 2, \dots, n_0 - 1.$$

Wiemy przy tym, że

$$S_{n_0} = 0. \quad (5.38)$$

Przy wykorzystaniu relacji (5.3) dla strefy zwania formuły upraszczają się do postaci

$$S_i = \frac{b}{h} (T_i + T_{i+1}) + S_{i+1} - \frac{1}{2} \check{L} \varphi_0 \frac{b^2}{h} (2i+1), \quad (5.39)$$

$$i = 1, 2, \dots, n_0 - 1.$$

Siły podłużne w przegubach znajdziemy z równania ruchu poziomego pontonów

$$\frac{m\Delta}{2b} (\ddot{q}_{i+1} - \ddot{q}_i) = N_{i+1} - N_i + S_i - S_{i+1}, \quad (5.40)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, +\infty.$$

Łatwo wykazać, że

$$N_i = \frac{m\Delta}{2b} \ddot{q}_i, \quad (5.41)$$

$$i = n_0, n_0 + 1, \dots, +\infty.$$

W strefie zwania, po wykorzystaniu relacji (5.3), otrzymamy formułę rekurencyjną

$$N_i = N_{i+1} + (S_i - S_{i+1}), \quad (5.42)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n_0 - 1.$$

Wartości startowe do obliczeń są oczywiście

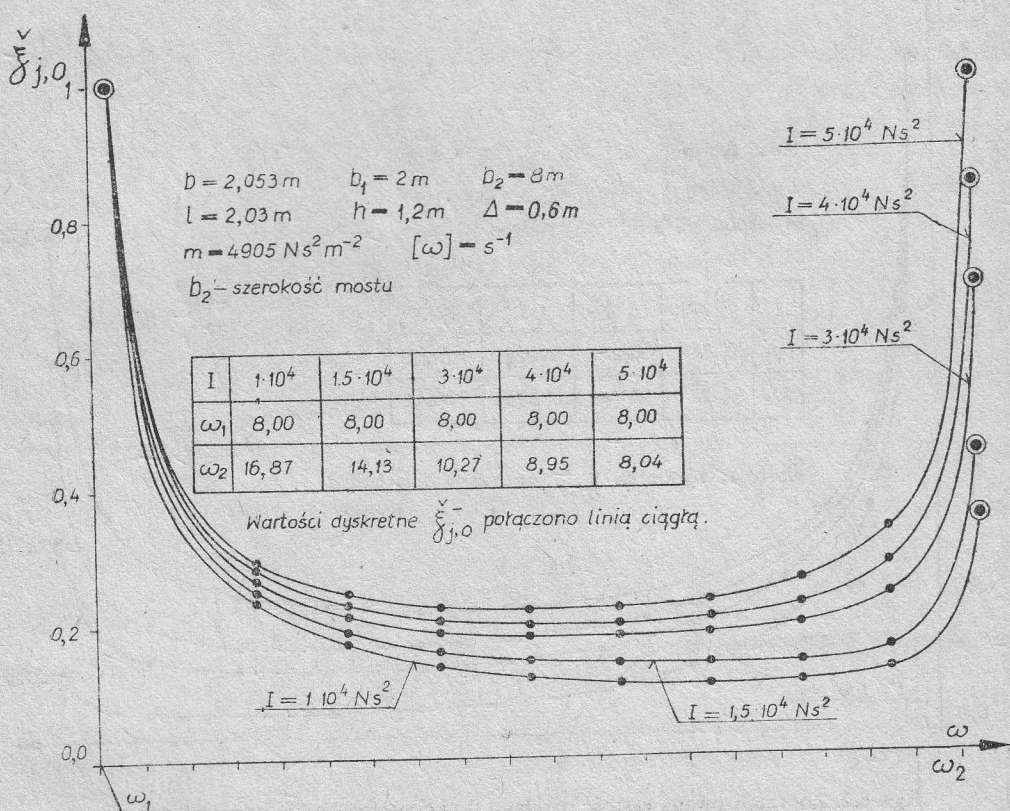
$$N_{n_0} = \frac{m\Delta}{2b} \ddot{q}_{n_0}, \quad (5.43.1)$$

$$S_{n_0} = 0. \quad (5.43.2)$$

Pozostałe wartości S_i obliczamy z wzoru (5.39).

6. Przykład liczbowy

Dyskusję numeryczną problemu obejmującą wyznaczenie przemieszczeń, prędkości, impulsów wewnętrznych jak również sił wewnętrznych przedstawimy w osobnym opracowaniu. Tutaj zajmiemy się jedynie zbadaniem gęstości rozkładu funkcji własnych pobudzo-



Rys. 6.1. Znormalizowana gęstość rozkładu funkcji własnych dla współrzędnej q_0

nych siłą skupioną. Zgodnie z rozwiązaniem (4.3) możemy napisać

$$q_j = \frac{Q_0}{\sqrt{KL}} \left[1 - \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos \omega t \Xi_j(\omega) d\omega \right], \quad (6.1)$$

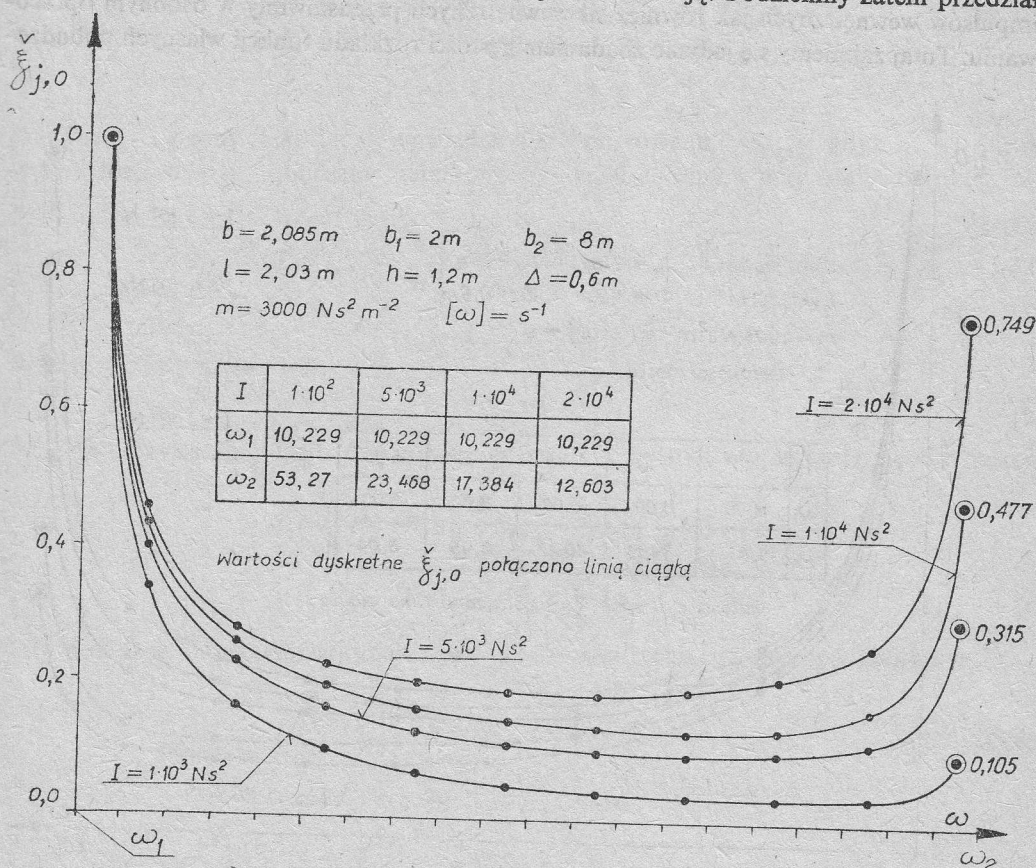
$$j = 0, 1, 2, \dots, +\infty,$$

gdzie

$$\Xi_j \equiv \frac{1}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \cos(n\varphi(\omega)) \right] \frac{-2\omega \frac{d}{d\omega^2}(\chi(\omega^2))}{\sqrt{1-\chi^2}} \cos(j\varphi(\omega)), \quad (6.2)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, +\infty$$

będziemy nazywali gęstością rozkładu funkcji własnych. Funkcję $\chi(\omega^2)$ liczymy według relacji (2.11). Łatwo sprawdzić, że dla $\omega \rightarrow \omega_1^+$ oraz $\omega \rightarrow \omega_2^-$ funkcje Ξ_j posiadają granice niewłaściwe. Całki niewłaściwe z tych funkcji jednak istnieją. Podzielimy zatem przedział



Rys. 6.2. Znormalizowana gęstość rozkładu funkcji własnych dla współrzędnej q_0

$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ na N jednakowej długości przedziałów I_r ($r = 1, 2, \dots, N$) i obliczamy ciągi liczb

$$\xi_{j,r} \equiv \int_{I_r} \Xi_j(\omega) d\omega, \quad (6.3)$$

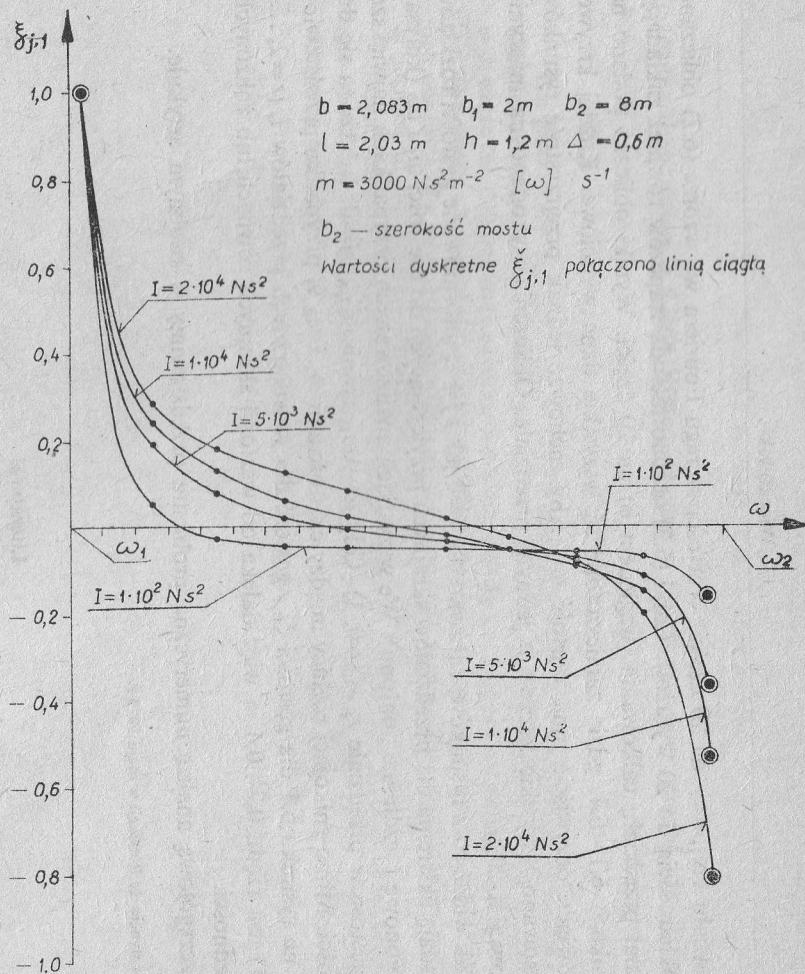
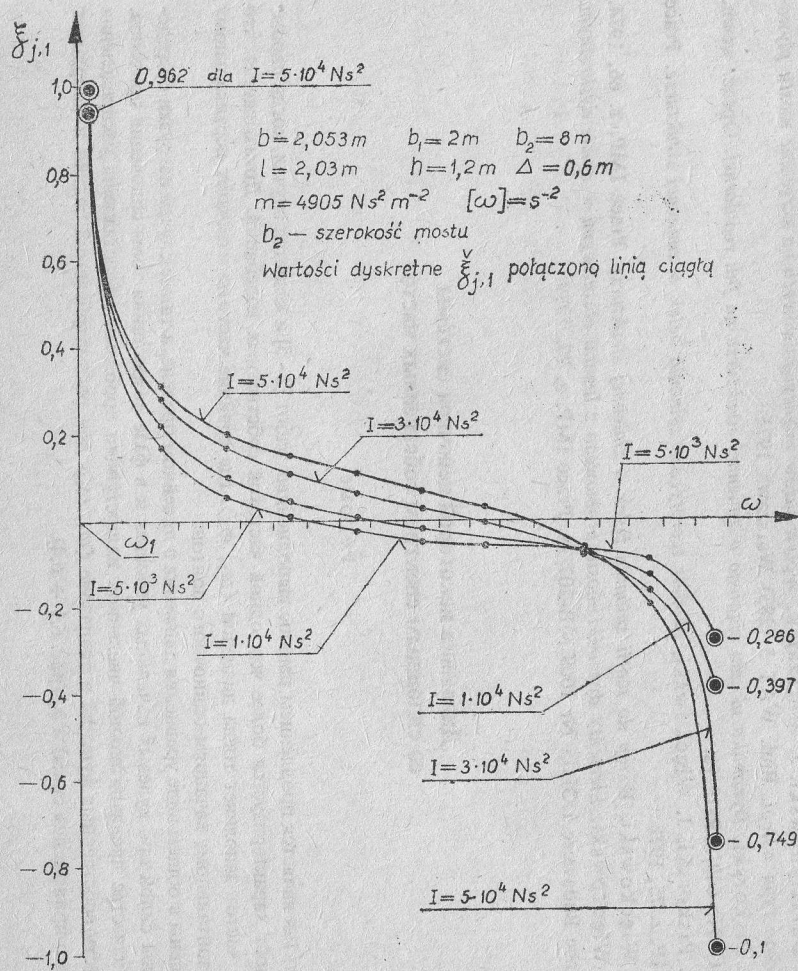
$$j = 0, 1, 2, \dots, +\infty, \quad r = 1, 2, \dots, N.$$

Znormalizujemy każdy ciąg $\{\xi_{j,r}\}$, $j = \text{const}$, według wzoru

$$\xi_{j,r} \equiv \frac{\xi_{j,r}}{\max_{s=1,2,\dots,N} |\xi_{j,s}|}. \quad (6.4)$$

Ciąg $\{\xi_{j,r}\}$ dla ustalonego j i ustalonego N informuje o wielkości udziału „paczki” funkcji własnych pobudzonych z częstotliwościami $\omega \in I_r$.

Obliczenia wykonano dla współrzędnych q_0 i q_1 przy różnych parametrach geometrycznych układu i przy zmiennym momencie bezwładności pontonu. Przyjęto podział



Rys. 6.3. Znormalizowana gęstość rozkładu funkcji własnych dla współrzędnej q_1 Rys. 6.4. Znormalizowana gęstość rozkładu funkcji własnych dla współrzędnej q_1

przedziału $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ na 20 części. Wartości szeregu Fouriera we wzorze (6.2) obliczano z dokładnością do 20 wyrazów. Całki (6.3) liczone metodą trapezów również zakładając podział przedziału całkowania (względem φ) na 20 części. Wyniki obliczeń podano na rysunkach 6.1 - 6.4, gdzie zamieszczone są wszystkie dane wyjściowe. Każdej krzywej odpowiada oczywiście inna wartość ω_2 . Aby zachować jednak przejrzystość rysunków narysowano wszystkie krzywe w jednym przedziale. Obliczenia wykonano na maszynie cyfrowej K-202.

Jak widać to z rysunków, zarówno dla $j=0$ jak i $j=1$, unormowane gęstości rozkładu posiadają ekstrema dla przedziałów skrajnych przylegających do częstości ω_1 i ω_2 (kołysanie pionowe i wzdłużne pontonu). We wszystkich analizowanych przypadkach największą jest gęstość w przedziale $I_{j,1}$ ($j=0, 1$). Gdy $\omega_2 \rightarrow \omega_1^+$ rośnie $|\xi_{j,N}|$, $j=0, 1$, i zbliża się do jedności. Mimo znikomej różnicy między częstościami ω_1 i ω_2 w przypadku przedstawionym na rysunku 6.1 dla gęstości $\xi_{0,r}$ gęstość dla wewnętrznych przedziałów I_r ($r=2, \dots, N-1$) jest rzędu $0,2 \div 0,4$, a więc daleka od wartości skrajnych równych lub zbliżonych do jedności.

Szczegółową analizę numeryczną problemu przedstawimy w osobnym artykule.

Praca wpłynęła do Redakcji w maju 1979 r.

Literatura

- [1] Z. Bursztynowski, J. Marszałek, *Wpływ luzów międzyogniwowych na skręcanie mostu pływającego typu wstęgi*. Biul. WAT 5 (285) Warszawa 1976.
- [2] R. Piskorski, *Dynamika układu ciągłego o zmiennej strukturze na fali regularnej*. Oprac. wewn. I. O. Nr 649/MR-19/76.
- [3] R. Piskorski, J. Więckowski, *Modele teoretyczne zginania belek o zmiennej strukturze*. Prace IMP, z. 75, 1978.
- [4] J. Więckowski, *Wstęp do teorii zginania belek o zmiennej strukturze*. Prace IMP, z. 66, 1974.
- [5] J. Więckowski, *Elementy dynamiki mostu promowego z luzami obrotowymi w opisie dyskretnym*. Prace Badawcze I.O.P.G Nr 1009/MR-207/78, Prace IMP, z. 77, 1979.

Динамика некоторой цепочной системы со сплошным спектром собственных частот

Резюме

Статья является продолжением раньше выполненных работ [2 - 5] и касается случая, когда паромный мост характеризуется более чем одной частотой собственных колебаний. Доказывается, что спектр частот заполняет тогда диапазон $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$, где крайние частоты отвечают вертикальному и горизонтальному качаниям одиночного понтона.

Решены в общем виде уравнения движения в линейном пределе, а также случай нагрузки сосредоточенной силой при нулевых начальных условиях и в фазе возрастания зоны сплочения понтонов.

В качестве предварительной численной иллюстрации проблемы представлены распределения плотности собственных функций в диапазоне $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ для рассматриваемой задачи и координат q_0 (место приложения силы) и q_1 (рис. 6.1 ÷ 6.4).

On the Dynamics of a Chain System Having a Continuous Spectrum of Eigenfrequencies

Summary

The paper, following earlier works [2 - 5], deals with a case of a ferry-bridge with more than one eigenfrequency. It has been shown that the frequency spectrum is continuous over the range $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$, where the limit frequencies correspond to the heaving and longitudinal rolling of a single pontoon.

The general solution of the equations of motion has been found for the linear range. Also the solution was given of a case of loading with a concentrated force at zero initial conditions and in the phase of increase of the pontoon contact zone.

Eigenfunction density distributions over the range $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ for the problem under consideration and generalized coordinate q_0 (force location) and q_1 have been determined for a preliminary numerical example.