

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
I N S T Y T U T M A S Z Y N P R Z E P Ł Y W O W Y C H

P R A C E
I N S T Y T U T U M A S Z Y N
P R Z E P Ł Y W O W Y C H

T R A N S A C T I O N S
O F T H E I N S T I T U T E O F F L U I D - F L O W M A C H I N E R Y

81

W A R S Z A W A - P O Z N A Ń 1981
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

RADA REDAKCYJNA – EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
STEFAN PERYCZ · WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ROMUALD PUZYREWSKI
KAZIMIERZ STELLER (PRZEWODNICZĄCY · CHAIRMAN) · ROBERT SZEWAŁSKI
JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY – EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER – REDAKTOR – EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA – EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright

by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1981

Printed in Poland

ISBN 83-01-03053-4
ISSN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE – ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 340 + 90 egz.	Oddano do składania 25 VI 1980 r.
Ark. wyd. 8,75 Ark. druk. 7,125	Podpisano do druku 13 IV 1981 r.
Pap. druk. sat. kl. V, 70 g 70 × 100 cm.	Druk ukończono w kwietniu 1981 r.
Nr zam. 631/49. P-4/16.	Cena zł 35,–

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

PIOTR KUBSKI, JAROSŁAW MIKIELEWICZ

Gdańsk

Przybliżona analiza oporu kropli odparowującej podczas przepływu*

Przedstawiono uproszczoną analizę oporu kropli odparowującej w przepływie. Ustalono, że opór kropli odparowującej uzależniony jest od zmian naprężeń stycznych na powierzchni kropli oraz od zmiany pędu kropli wywołanych istnieniem poprzecznego do powierzchni kropli strumienia masy odparowującej.

Wykaz oznaczeń

a – współczynnik wyrównywania temperatury,
 B – parametr opisujący intensywność odparowania kropli,
 c_f – współczynnik oporu,
 c_p – ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu,
 d – średnica kuli,
 f – parametr określony zależnością (15),
 k – współczynnik korekcyjny,
 m – masa,
 p – ciśnienie,
 R – promień kuli,
 r – ciepło parowania,
 S – powierzchnia,
 t – temperatura,
 U – prędkość poza warstwą przyścienną,
 u – prędkość w warstwie przyściennej,
 W – siła oporu,
 x, y – osie współrzędnych,
 α – współczynnik przejmowania ciepła,
 δ – grubość warstwy przyściennej,
 λ – współczynnik przewodzenia ciepła,
 μ – dynamiczny współczynnik lepkości,
 ν – kinematyczny współczynnik lepkości,
 ρ – gęstość,
 τ – czas,

τ_w – naprężenie styczne na powierzchni kuli,
 φ – kąt.

Liczby kryterialne

$(Ja) = \frac{r}{c_p \Delta t}$ – liczba Jakoba,
 $(Nu) = \frac{\alpha d}{\lambda}$ – liczba Nusselta,
 $(Pr) = \frac{\nu}{a}$ – liczba Prandtla,
 $(Re) = \frac{U_\infty d}{\gamma}$ – liczba Reynoldsa,
 $(St) = \frac{\alpha}{\rho c_p U_\infty}$ – liczba Stanton.

Indeksy dotyczą:

0 – bez odparowania,
 r – składowej promieniowej,
 s – stanu nasycenia,
 v – pary, z odparowaniem,
 x – osi współrzędnych,
 φ – składowej stycznej,
 ∞ – płynu niezaburzonego,
+ – wielkości bezwymiarowej.

* Praca wykonana w ramach problemu międzyresortowego MR. I. 26. „Podstawy projektowania maszyn i urządzeń energetycznych”, grupa tematyczna 06.

1. Wprowadzenie

Problem równoczesnego ruchu i odparowania kropli cieczy występuje w wielu zagadnieniach technicznych, w inżynierii chemicznej, w procesie destylacji, w suszarnictwie, w energetyce, w takich urządzeniach, jak mokre wieże chłodnicze, wytwornice pary, urządzenia klimatyzacyjne. Zjawiska kryzysów wrzenia w wytwornicach pary są nierozwalnie związane z ruchem i odparowaniem kropli. Podczas gaszenia ognia za pomocą wody lub innych rozdrobnionych cieczy również występuje zjawisko równoczesnego ruchu i odparowania kropli.

W pracy rozpatrzono ruch kropli cieczy odparowującej w strumieniu tej samej substancji czystej. W przypadku odparowywania kropli do innej substancji, np. powietrza, występuje dodatkowo proces dyfuzji, który w wielu przypadkach praktycznych może być pominięty, jak np. podczas gaszenia ognia za pomocą wody lub innych cieczy.

Dotychczas istnieje niewielka liczba danych eksperymentalnych dotyczących tego zjawiska, brak natomiast opracowania jego podstaw teoretycznych. W wielu badaniach teoretycznych i eksperymentalnych nieuwzględnienie poprzecznego strumienia masy z odparowującej kropli prowadzi do dużych rozbieżności między przyjętym modelem a wynikami eksperymentu.

2. Analiza teoretyczna

Przedstawiona poniżej analiza zjawiska ruchu kropli odparowującej podczas tego ruchu, ma przede wszystkim za zadanie identyfikację i wyznaczenie wielkości efektów związanych ze zmianą oporu przepływu kropli odparowującej w porównaniu z nieodparowującą.

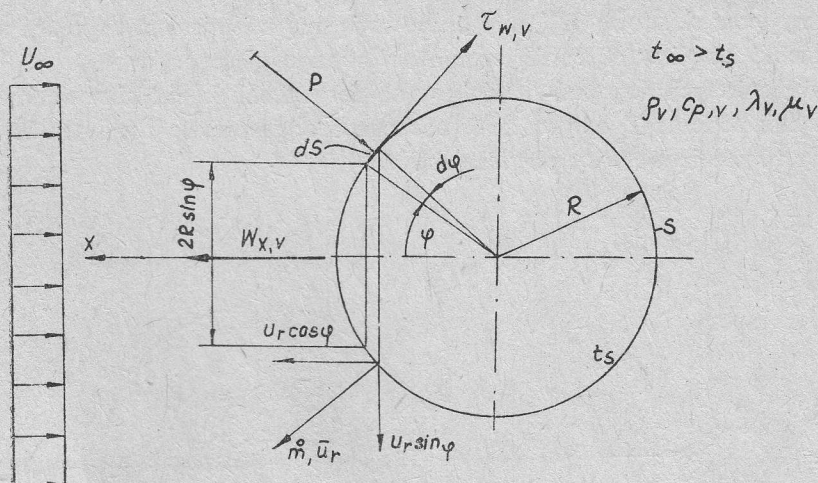
Zmianę wspomnianego oporu przepływu kropli wywołuje strumień masy odparowującej, prostopadły do powierzchni kropli. Jego nierównomierność na powierzchni kropli wywołana jest niejednorodnością warunków wymiany ciepła. Strumień odparowującej nierównomiernie masy powoduje zmianę pędu poruszającej się kropli, jak również i zmianę naprężeń stycznych na jej powierzchni.

W rozważaniach pominięto pulsację i deformację kropli oraz ruch płynu wewnątrz kropli.

Rozważania dotyczą małych kropli, których kształt zbliżony jest do kuli, a ich opływ odbywa się bez oderwania. Przyjęto ponadto, że opływ kuli poza warstwą przyścienną jest opływem potencjalnym.

W celu określenia wpływu odparowania na ruch kropli, rozpatrzmy zagadnienie laminarnego opływu kulistej kropli cieczy o temperaturze nasycenia t_s na powierzchni, ciepłe parowania r i o promieniu R , przez płyn (będący parą tej cieczy) o gęstości ρ_v , współczynniku lepkości dynamicznej μ_v , ciepłe właściwym przy stałym ciśnieniu $c_{p,v}$, współczynniku przewodzenia ciepła λ_v , o temperaturze $t_\infty > t_s$, poruszający się z prędkością niezaburzoną U_∞ (rys. 1).

Ponieważ temperatura płynu opływającego t_∞ jest wyższa od temperatury kropli t_s , na jej powierzchni pojawia się strumień masy odparowującej $\dot{m}$ określony wektorem prędkości $\vec{u}$. Na powierzchnię kropli działa ponadto naprężenie styczne $\tau_{w,v}$ oraz ciśnienie



Rys. 1. Szkic do zagadnienia opływu kropli odparowującej

nie p wywołane opływem. Wówczas w kierunku osi x działa całkowita siła oporu $W_{x,v}$ kropli odparowującej, zaś całkowity współczynnik oporu $c_{f,v}$ kropli odparowującej może być zdefiniowany jako iloraz siły $W_{x,v}$ przez energię kinetyczną przepływającego strumienia $\frac{1}{2}\rho_v U_\infty^2$ oraz przekrój kuli πR^2

$$c_{f,v} = \frac{W_{x,v}}{\frac{1}{2}\rho_v U_\infty^2 \pi R^2}. \quad (1)$$

Całkowita siła oporu odparowującej kropli może być opisana poprzez składowe

$$W_{x,v} = W'_x + W''_{x,v} + W'''_{x,v}, \quad (2)$$

przy czym poszczególne składowe wyrażają się następująco:

– składowa ujmująca opór ciśnienia

$$W'_x = \int_S p \cos \varphi dS; \quad (3)$$

– składowa pochodząca od naprężeń stycznych dla opływu w obecności strumienia masy odparowującej

$$W''_{x,v} = - \int_S \tau_{w,v} \sin \varphi dS; \quad (4)$$

– składowa ujmująca zmianę pędu kropli wywołaną istnieniem nierównomierności poprzecznego strumienia masy odparowującej $dm/d\tau$

$$W'''_{x,v} = \int_S \bar{u}_r \frac{dm}{d\tau}. \quad (5)$$

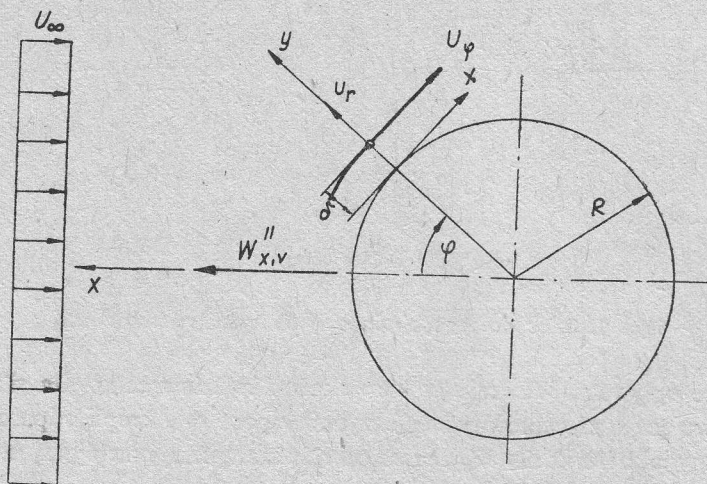
Przystąpimy teraz do bliższego określenia poszczególnych składowych siły oporu.

Ponieważ przyjęto w analizie, że opływ kuli poza warstwą przyścienną jest opływem potencjalnym, więc łatwo wykazać, że składowa ujmująca opór ciśnienia W'_x jest równa zero, czyli

$$W'_x = 0. \quad (6)$$

Określmy teraz składową $W''_{x,v}$ siły oporu związaną z istnieniem naprężeń stycznych na powierzchni kropli w obecności strumienia odparowującego.

Dla określenia tych naprężeń znajdziemy najpierw profil prędkości w warstwie przyściennej na kuli podczas jej opływu z równoczesnym odparowaniem (rys. 2). W tym celu rozwiążemy równania warstwy przyściennej.



Rys. 2. Warstwa przyścienna kuliste jkropki dla opływu z równoczesnym odparowaniem

Równanie ruchu we współrzędnych sferycznych (współrzędna y liczona od powierzchni kuli, przyjęto dodatkowo, że $R + y \approx R$)

$$u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial y} + \frac{u_\phi}{R} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = \frac{U_\phi}{R} \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial y^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial u_\phi}{\partial y} \right)$$

dla małych grubości warstwy przyściennej δ w porównaniu z promieniem kuli,

$$\delta \ll R,$$

wobec zależności

$$\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial y^2} \approx \frac{u_\phi}{\delta^2} \gg \frac{2}{R} \frac{\partial u_\phi}{\partial y} \approx \frac{2u_\phi}{R\delta},$$

może być uproszczone do postaci

$$U_r \frac{\partial u_\phi}{\partial y} + \frac{u_\phi}{R} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = \frac{U_\phi}{R} \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} + \nu \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial y^2}. \quad (7)$$

Uproszczone równanie ciągłości we współrzędnych sferycznych

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (u_\phi \sin \phi) + R \frac{\partial}{\partial y} (u_r \sin \phi) = 0,$$

wobec założenia, że promieniowa składowa prędkości u_r w warstwie przyściennej przyjmuje stałą wartość, tzn.

$$u_r = \text{const},$$

można sprowadzić do postaci

$$\sin \varphi \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + u_{\varphi} \cos \varphi = 0,$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{du_{\varphi}}{d\varphi} = -u_{\varphi} \operatorname{ctg} \varphi. \quad (8)$$

Ponieważ dla potencjalnego opływu kuli (poza warstwą przyścienną) zachodzi

$$U_{\varphi} = \frac{3}{2} U_{\infty} \sin \varphi, \quad (9)$$

więc

$$\frac{dU_{\varphi}}{d\varphi} = \frac{3}{2} U_{\infty} \cos \varphi. \quad (10)$$

Po uwzględnieniu związków (8), (9) i (10), równanie ruchu (7) przyjmuje postać

$$v_v \frac{d^2 u_{\varphi}}{dy^2} - u_r \frac{du_{\varphi}}{dy} + \frac{u_{\varphi}^2}{R} \operatorname{ctg} \varphi = -\frac{9}{4} \frac{U_{\infty}^2}{R} \sin \varphi \cos \varphi.$$

Wprowadzając bezwymiarowe zmienne:

– bezwymiarową współrzędną y^+ , zbudowaną na podstawie lokalnej grubości warstwy przyściennej δ ,

$$y^+ = \frac{y}{\delta}, \quad (11)$$

– bezwymiarową prędkość styczną u_{φ}^+ , zbudowaną na podstawie lokalnej wartości prędkości stycznej na granicy warstwy przyściennej,

$$u_{\varphi}^+ = \frac{u_{\varphi}}{U_{\varphi}} = \frac{\dot{u}_{\varphi}}{\frac{3}{2} U_{\infty} \sin \varphi} \quad (12)$$

oraz oznaczenia:

– parametr B , uwzględniający istnienie strumienia masy odparowującej

$$B = \frac{u_r \delta}{v_v}, \quad (13)$$

– liczbę Reynoldsa (Re) zbudowaną na średnicy kuli

$$(Re) = \frac{U_{\infty} d}{v_v}, \quad (14)$$

– parametr f

$$f = \frac{3}{4} (Re) \left(\frac{\delta}{R} \right)^2 \cos \varphi, \quad (15)$$

otrzymuje się nieliniowe równanie różniczkowe opisujące profil prędkości stycznej w warstwie przyściennej kropli

$$\frac{d^2 u_{\varphi}^+}{dy^{+2}} - B \frac{du_{\varphi}^+}{dy^+} + f(u_{\varphi}^{+2} + 1) = 0. \quad (16)$$

Warunkami brzegowymi niezbędnymi do wyznaczenia profilu prędkości w warstwie przyściennej są warunki:

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } y^+ = 0, u_\phi^+ = 0, \\ \text{oraz dla } y^+ = 1, u_\phi^+ = 1. \end{array} \right\} \quad (17)$$

By usunąć nieliniowość z równania (16) wyrażenie $u_\phi^{+2}(y^+)$ rozwinieśmy w szereg Taylora wokół punktu $y^+ = 1$, otrzymując

$$u_\phi^{+2}(y) = u_\phi^{+2}(1) - \frac{1-y^+}{1!} 2u_\phi^+(1)u_\phi^{+'}(1) + \dots$$

Ograniczając się do dwu pierwszych wyrazów rozwinięcia i korzystając dodatkowo z tego, że

$$\begin{array}{l} \text{dla } y^+ = 1, u_\phi^{+'} = 0 \\ \text{otrzymuje się } u_\phi^{+2}(y) \cong 1, \end{array}$$

wówczas równanie (16) sprowadza się do uproszczonego liniowego równania różniczkowego w postaci

$$\frac{d^2 u_\phi^+}{dy^{+2}} - B \frac{du_\phi^+}{dy^+} + 2f = 0. \quad (18)$$

Rozwiązaniem równania (18) z warunkami brzegowymi (17) jest rozkład prędkości stycznej w warstwie przyściennej

$$u_\phi^+ = \frac{e^{By^+} - 1}{e^B - 1} + \frac{2f}{B} \left[y^+ - \frac{e^{By^+} - 1}{e^B - 1} \right]. \quad (19)$$

Wyznamy jeszcze, na podstawie profilu prędkości stycznej w warstwie przyściennej, gradient tej prędkości na powierzchni kuli

$$\left. \frac{du_\phi^+}{dy^+} \right|_{y^+=0} = \frac{B}{e^B - 1} + \frac{2f}{B} \left(1 - \frac{B}{e^B - 1} \right). \quad (20)$$

Pierwszy z członów prawej strony związku (20) opisuje gradient prędkości dla płaskiej płyty z wdmuchem, drugi zaś uwzględnia wpływ zakrzywienia powierzchni, na której zachodzi odparowanie.

Naprężenie styczne na powierzchni kropli odparowującej wyraża się jako

$$\tau_{w,v} = \mu_v \left. \frac{du_\phi}{dy} \right|_{y=0}$$

albo też, po wprowadzeniu bezwymiarowej prędkości stycznej u_ϕ^+ i współrzędnej y^+ , zgodnie ze wzorami (11) i (12), jako

$$\tau_{w,v} = \frac{3}{2} \frac{\mu_v U_\infty}{\delta} \sin \varphi \left. \frac{du_\phi^+}{dy^+} \right|_{y^+=0},$$

zaś po uwzględnieniu związku (20)

$$\tau_{w,v} = \frac{3}{2} \frac{\mu_v U_\infty}{\delta} \left[\frac{B}{e^B - 1} + \frac{2f}{B} \left(1 - \frac{B}{e^B - 1} \right) \right] \sin \varphi. \quad (21)$$

Zależność (21) pozwala na podstawie równania (4) wyznaczyć składową oporu $W''_{x,o}$, pochodzącą od naprężeń stycznych w obecności strumienia masy odparowującej.

Wyrażając element powierzchni dS kropli jako

$$dS = 2\pi R^2 \sin \varphi d\varphi \quad (22)$$

oraz uwzględniając powyższe, otrzymuje się

$$W''_{x,v} = 12(\pi R^2 \frac{1}{2} \rho_v U_\infty^2) (Re)^{-1} \int_0^\pi \frac{R}{\delta} \left[\frac{B}{e^B - 1} + \frac{2f}{B_1} \left(1 - \frac{B}{e^B - 1} \right) \right] \sin^3 \varphi d\varphi. \quad (23)$$

W celu wyznaczenia składowej oporu $W''_{x,v}$ musimy bliżej określić parametr B , uwzględniający istnienie strumienia masy odparowującej, oraz wyznaczyć stosunek δ/R grubości warstwy przyściennej do promienia kuli odparowującej, zawarty ponadto w parametrze f (zależność (15)).

Dla wyznaczenia stosunku δ/R przeprowadzimy następujące rozumowanie. Posłużymy się najpierw analogią w przepływie energii cieplnej i mechanicznej, opisaną zależnością Colburna

$$(St) = \frac{1}{2} c_f (Pr)^{-2/3}, \quad (24)$$

w której liczba Stanton

$$(St) = \frac{(Nu)}{(Re)(Pr)} \quad (25)$$

wyraża się poprzez liczby:

– Nusselta

$$(Nu) = \frac{\alpha d}{\lambda}, \quad (26)$$

– Prandtla

$$(Pr) = \frac{v}{a} = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad (27)$$

– Reynoldsa (Re) zgodnie z zależnością (14), gdzie α jest współczynnikiem przejmowania ciepła, zaś c_f współczynnikiem oporu tarcia.

Korzystając z analogii Colburna (24), lokalną wartość współczynnika przejmowania ciepła α_φ na powierzchni kuli pobierającej ciepło można wyrazić za pomocą lokalnej wartości współczynnika oporu $c_{f,\varphi}$ jako

$$\frac{\alpha_\varphi d}{\lambda} = \frac{1}{2} c_{f,\varphi} (Re)_\varphi (Pr)^{1/3}. \quad (28)$$

Z drugiej jednak strony lokalną wartość współczynnika przejmowania ciepła na powierzchni kuli określa teoretycznie wyprowadzona zależność Szweca [1],

$$\frac{\alpha_\varphi d}{\lambda} = k \cdot 0,84 (Re)^{1/3} (Pr)^{1/3} \left(\frac{2 \sin \varphi}{\varphi} \right)^{1/3}. \quad (29)$$

Związek (29) dobrze oddaje charakter zależności współczynnika przejmowania ciepła od warunków wymiany ciepła. Ponieważ zależność Szweca (29) nie została zweryfikowana eksperymentalnie, wprowadzono do niej współczynnik korekcyjny k , którego wartość zostanie wyznaczona w dalszej analizie. W pracy Szweca jest oczywiście $k=1$.

Porównanie zależności (28) i (29) pozwala określić lokalną wartość współczynnika oporu dla kuli bez odparowania w postaci

$$c_{f,\varphi} = k \cdot 1,41 (\varphi \sin^2 \alpha)^{-1/3} (Re)^{-2/3}, \quad (30)$$

przy czym na podstawie związku (9) uwzględniono w (30), że

$$(Re)_\varphi = \frac{3}{2} (Re) \sin \varphi.$$

W celu znalezienia wartości średniej współczynnika oporu $c_{f,0}$ dla kuli bez odparowania wyznaczono kolejno:

— lokalną wartość naprężenia stycznego na powierzchni kuli

$$\tau_\varphi = c_{f,\varphi} \frac{1}{2} \rho_v U_\varphi^2,$$

która po uwzględnieniu związku (9) przyjmuje postać

$$\tau_\varphi = \frac{9}{4} c_{f,\varphi} \frac{1}{2} \rho_v U_\infty^2 \sin^2 \varphi; \quad (31)$$

— całkowitą siłę oporu kuli bez odparowania pochodzącą od naprężeń stycznych na jej powierzchni

$$W_0 = \int_S \tau_\varphi \sin \varphi dS,$$

która po wykorzystaniu związków (22), (31) i (30) przyjmuje postać

$$W_0 \cong 6,35k (\pi R^2 \cdot \frac{1}{2} \rho_v U_\infty^2) (Re)^{-2/3} \int_0^\pi \sin^4 \varphi (\varphi \sin^2 \varphi)^{-1/3} d\varphi,$$

a z której po scałkowaniu wynika średnia wartość współczynnika oporu $c_{f,0}$ dla kuli bez odparowania

$$c_{f,0} = \frac{W_0}{\pi R^2 \frac{1}{2} \rho_v U_\infty^2} \cong 7,14k (Re)^{-2/3}. \quad (32)$$

Wyniki badań eksperymentalnych nad współczynnikami oporu dla kuli bez odparowania, podane np. w [2], można dla zakresu zmienności liczby Reynoldsa z przedziału

$$1 \leq (Re) \leq 100$$

aprosymować w pierwszym przybliżeniu zależnością

$$c_{f,0} \cong 21,4 (Re)^{-2/3}. \quad (33)$$

Jest ona zbliżona do ogólnie znanej, np. [4], zależności $c_{f,0} = 18,5 (Re)^{-0,6}$ słusznej dla zakresu $0,2 \leq (Re) \leq 500$.

Porównanie zależności (32) i (33) pozwala wyznaczyć współczynnik korekcyjny $k=3$ w zależności Szweca (29).

Uwzględniając powyższe, zależność Szweca po weryfikacji z badaniami eksperymental-

nymi przyjmuje postać

$$\frac{\alpha_{\varphi} d}{\lambda} = 3,18 (Re)^{1/3} (Pr)^{1/3} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right)^{1/3} \quad (34)$$

i może być podstawą do wyznaczenia stosunku δ/R .

Z porównania zależności (28) i (34) wynika, że

$$\frac{1}{2} c_{f,\varphi} (Re)_{\varphi} = 3,18 (Re)^{1/3} \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right)^{1/3}, \quad (35)$$

zaś z wyrażenia określającego naprężenie styczne na powierzchni kuli podczas opływu bez odparowania

$$\tau_0 = \mu_v \frac{U_{\varphi}}{\delta_{\varphi}} = c_{f,\varphi} \frac{1}{2} \rho_v U_{\varphi}^2,$$

wyznaczono lokalną grubość warstwy przyściennej δ_{φ} jako

$$\delta = \delta_{\varphi} = \frac{\mu_v}{\frac{1}{2} c_{f,\varphi} \rho_v U_{\varphi}} = \frac{2R}{\frac{1}{2} c_{f,\varphi} (Re)_{\varphi}}, \quad (36)$$

a po uwzględnieniu związku (35) otrzymuje się wyrażenie na stosunek grubości warstwy przyściennej do promienia kuli w postaci

$$\frac{\delta}{R} = 0,63 \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right)^{1/3} (Re)^{-1/3}. \quad (37)$$

Wymaga również bliższego określenia parametr B , zdefiniowany zależnością (13), uwzględniający istnienie strumienia masy odparowującej z powierzchni kuli.

Wprowadzając związek między prędkością promieniową u_r masy odparowującej a lokalną wartością gęstości strumienia q_{φ} i ciepła parowania r w postaci

$$u_r = \frac{q_{\varphi}}{r \rho_v} = \frac{\alpha_{\varphi} \Delta t}{r \rho_v}, \quad (38)$$

gdzie $\Delta t = t_{\infty} - t_s$ jest różnicą temperatury płynu niezaburzonego t_{∞} i temperatury nasycenia t_s na powierzchni kuli, parametr B można przekształcić następująco

$$B = \frac{\delta}{v_v} \frac{\alpha_{\varphi} \Delta t}{r \rho_v} = \frac{\alpha_{\varphi} d}{\lambda} \frac{\delta}{2R} \frac{\lambda}{\rho_v v_v c_{p,v}} \cdot \frac{c_{p,v} \Delta t}{r}.$$

Wykorzystując związki (28) i (36), oznaczenie (27) oraz wprowadzając liczbę Jakoba

$$(Ja) = \frac{r}{c_{p,v} \Delta t} \quad (39)$$

parametr B sprowadza się do zależności

$$B = (Ja)^{-1} (Pr)^{-2/3}. \quad (40)$$

Otrzymane zależności (37) i (40) są niezbędne do wyznaczenia składowej oporu $W''_{x,v}$ (związek (23)), pochodzącej od naprężeń stycznych w obecności strumienia masy odparowującej. Ich podstawienie prowadzi do wyniku w postaci

$$W''_{x,v} \cong 19,0 (\pi R^2 \frac{1}{2} \rho_v U_\infty^2) (Re)^{-2/3} \left[\frac{B}{e^B - 1} \int_0^\pi \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right)^{1/3} \sin^3 \varphi d\varphi + \right. \\ \left. + 0,60 (Re)^{1/3} \frac{1}{B} \left(1 - \frac{B}{e^B - 1} \right) \int_0^\pi \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right)^{-1/3} \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi \right],$$

zaś po scałkowaniu otrzymujemy

$$W''_{x,v} \cong 21,4 (\pi R^2 \frac{1}{2} \rho_v U_\infty^2) (Re)^{-2/3} \left[\frac{B}{e^B - 1} - 0,046 (Re)^{1/3} \frac{1}{B} \left(1 - \frac{B}{e^B - 1} \right) \right]. \quad (41)$$

Wyznamy wreszcie trzecią składową siły oporu $W'''_{x,v}$, ujmującą zmianę pędu kropli wywołaną istnieniem nierównomierności poprzecznego strumienia masy odparowującej (zależność (5)).

Strumień masy odparowującej z elementu powierzchni kuli można wyrazić jako

$$\frac{dm}{d\tau} = u_r \rho_v dS, \quad (42)$$

gdzie prędkość odparowania u_r jest związana z gęstością strumienia ciepła q_φ na powierzchni kuli zależnością (38). Uwzględniając powyższe, strumień masy można wyrazić jako

$$\frac{dm}{d\tau} = \frac{\alpha_\varphi \Delta t}{r} dS. \quad (43)$$

Wówczas zmiana pędu w kierunku osi x poruszającej się kropli (rys. 1) wyraża się zgodnie z zależnością (5) oraz po uwzględnieniu związków (38), (43) i (22) jako

$$W'''_{x,v} = 2\pi R^2 \frac{1}{\rho_v} \left(\frac{\Delta t}{r} \right)^2 \int_0^\pi \alpha_\varphi^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi,$$

zaś po wykorzystaniu skorygowanej zależności Szweca (34), jako

$$W'''_{x,v} \cong 40,3 (\pi R^2 \frac{1}{2} \rho_v U_\infty^2) (Re)^{-4/3} (Pr)^{-4/3} (Ja)^{-2} \int_0^\pi \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} \right)^{2/3} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi.$$

Po scałkowaniu powyższej zależności i uwzględnieniu związku (40) ostatecznie otrzymujemy wyrażenie określające składową siłę oporu ujmującą zmianę pędu kropli, wywołaną istnieniem nierównomierności poprzecznego strumienia masy odparowującej, w postaci

$$W'''_{x,v} \cong 9,71 (\pi R^2 \frac{1}{2} \rho_v U_\infty^2) (Re)^{-4/3} B^2. \quad (44)$$

Znajomość trzech składowych siły oporu, zależności (6), (41) i (44), pozwala wyznaczyć na podstawie związku (4) całkowitą siłę oporu odparowującej kropli w postaci

$$W_{x,v} \cong 21,4 (\pi R^2 \frac{1}{2} \rho_v U_\infty^2) (Re)^{-2/3} \left[\frac{B}{e^B - 1} - 0,046 (Re)^{1/3} \frac{1}{B} \left(1 - \frac{B}{e^B - 1} \right) + 0,453 (Re)^{-2/3} B^2 \right], \quad (45)$$

a ponadto, zgodnie ze związkiem (1), całkowity współczynnik oporu kropli odparowującej jako

$$c_{f,v} \cong 21,4 (Re)^{-2/3} \left[\frac{B}{e^B - 1} - 0,046 (Re)^{1/3} \frac{1}{B} \left(1 - \frac{B}{e^B - 1} \right) + 0,453 (Re)^{-2/3} B^2 \right]. \quad (46)$$

Wyznamy jeszcze całkowity współczynnik oporu kropli bez odparowania. Może być on wyznaczony jako,

$$c_{f,0} = \lim_{B \rightarrow 0} c_{f,v}$$

co prowadzi do związku

$$c_{f,0} \cong 21,4 (Re)^{-2/3} [1 - 0,023 (Re)^{1/3}]. \quad (47)$$

Związek (47) nieznacznie różni się od (33) przyjętego jako pierwsze przybliżenie niezbędne dla wyznaczenia współczynnika korekcji k . Porównując wartości współczynnika $c_{f,0}$ z zależności (47) z danymi eksperymentalnymi można stwierdzić, że zależność (47) dość dobrze opisuje dane eksperymentalne. Dla spójności całego powyższego wyprowadzenia dalszą analizę oparto na zależności (47).

Określmy także stosunek obu współczynników oporu

$$\frac{c_{f,v}}{c_{f,0}} = \frac{\frac{B}{e^B - 1} - 0,046 (Re)^{1/3} \frac{1}{B} \left(1 - \frac{B}{e^B - 1} \right) + 0,453 (Re)^{-2/3} B^2}{1 - 0,023 (Re)^{1/3}}. \quad (48)$$

W przypadku małej intensywności odparowania, tzn. dla małych wartości parametru B , zależność (48) można przybliżyć związkiem

$$\frac{c_{f,v}}{c_{f,0}} \cong 1 - \frac{B}{2} + [0,453 (Re)^{-2/3} + 0,0833] B^2, \quad (49)$$

Tabela 1

Wartości stosunku współczynników tarcia z odparowaniem do tarcia bez odparowania według zależności (48)

B (Re)	0	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10
1	1	0,9547	0,9204	0,8832	1,040	2,160	11,62	46,36
10	1	0,9502	0,9041	0,7888	0,6714	0,7043	2,583	10,26
100	1	0,9472	0,8967	0,7592	0,5752	0,3625	0,5803	2,331

z którego wynika, że minimum oporu kropli odparowującej zachodzi przy zależności

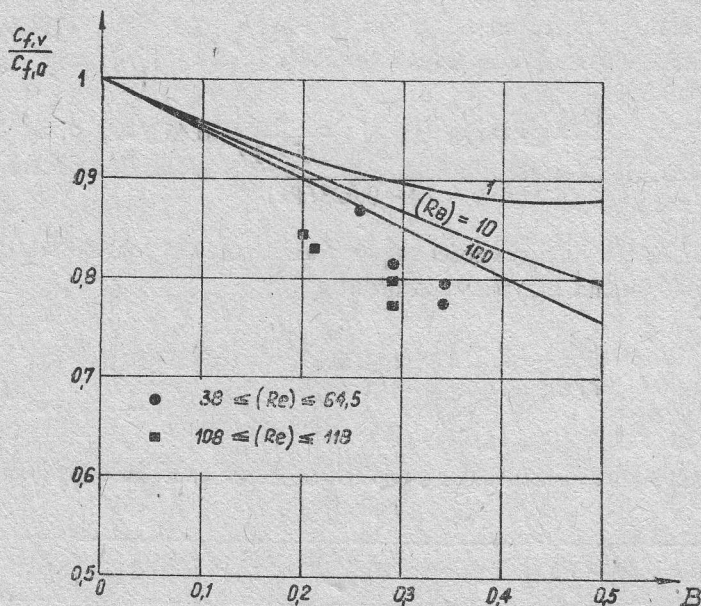
$$(Re) \cong 4,49B^{-3/2}. \quad (50)$$

Dla ilustracji przebiegu zmienności zależności (48) przeprowadzono obliczenia, których wyniki ilustruje tabela 1. Zwraca tu uwagę fakt, że początkowo dla małych wartości parametru B , określającego intensywność odparowania, stosunek tych współczynników maleje, przyjmując wartości mniejsze od jedności i tym niższe, im większa jest liczba Reynoldsa, a następnie stosunek tych współczynników rośnie, przekraczając wartość jedności i tym wyżej, im niższa jest liczba Reynoldsa.

Jak wiadomo, poprzeczny wdmuch masy do warstwy przyściennej powoduje zmniejszenie naprężeń stycznych. Efekt ten również można uzyskać dla kropli przy małych wartościach parametru B . Przy większych wartościach tego parametru, odpowiadającym dużym strumieniom masy odparowującej z kropli, współczynnik oporu kropli podwyższa się, gdyż prawdopodobnie przeważa efekt nierównomierności strumienia masy odparowującej na powierzchni kropli, wpływający istotnie na zmianę pędu kropli. Istnieją wobec tego warunki, w których opór kropli odparowującej jest minimalny.

3. Porównanie uproszczonej teorii z badaniami eksperymentalnymi

W celu eksperymentalnego zweryfikowania otrzymanej zależności opisującej stosunek współczynników oporu z odparowaniem do bez odparowania, przeprowadzono analizę wyników badań eksperymentalnych podanych w pracach [2, 3]. Jej autorzy przeprowadzili badania nad odparowaniem kropeł wody o temperaturze od 50 do 95°C, o rozmiarach



Rys. 3. Porównanie uzyskanych wyników teoretycznych z badaniami eksperymentalnymi przedstawionymi w [2, 3]

od 0,6 do 5,5 mm w powietrzu o temperaturze od 400 do 1000°C, osiągając zmienność liczby Reynoldsa w zakresie $30 \div 2090$ oraz zmienność parametru B w zakresie $0,2 \div 0,35$.

Wyniki ich eksperymentów przedstawiono na rysunku 3 w układzie współrzędnych: stosunek współczynników $c_{f,v}/c_{f,0}$ — parametr odparowania B . Na rysunku tym nanie-siono również przebieg teoretycznych wartości stosunku tych współczynników, określonych zależnością (48).

Jak wynika z rysunku 3, rezultaty badań dość dobrze zgadzają się z podaną przybli-żoną teorią. Dla warunków eksperymentu proces dyfuzji pary w powietrzu nie jest istotny i może być pominięty.

Do porównania przyjmowano wyniki eksperymentów odpowiadające małym liczbom Reynoldsa, tzn. $Re \leq 100$, w zakresie których przedstawiona uproszczona teoria jest słuszna.

Trudne warunki eksperymentu spowodowały, że obserwuje się dość duży rozrzut punktów eksperymentalnych. Stąd też przedstawiona teoria opisuje dość dobrze charakter zjawiska, natomiast porównanie ilościowe jest kłopotliwe, z uwagi na niezbyt precyzyjne określenie temperatury nominalnej, przy której wyznaczono parametr B . W obliczeniach przyjmowano jako temperaturę nominalną temperaturę powietrza. Jak się wydaje, bar-dziej poprawne wyniki można uzyskać posługując się średnią temperaturą warstwy przyś-ciennej.

4. Podsumowanie

Przytoczona analiza oporu kropli odparowującej podczas przepływu nie uwzględnia pulsacji i deformacji kropli oraz ruchu płynu wewnątrz kropli. Zasadniczym jej celem było ujęcie analityczne efektów charakterystycznych dla równoczesnego ruchu i odparowania kropeł, tzn. zmiany pędu poruszającej się kropli oraz zmiany naprężeń stycznych na po-wierzchni kropli, wywołanych przez strumień masy odparowującej z jej powierzchni.

Powyższa analiza może być rozszerzona na przypadki, w których pulsacja i deformacja kropli ma miejsce przy założeniu, że wpływają one tylko na współczynnik oporu kropli bez odparowania, np. wzięty z badań eksperymentalnych, gdyż nie istnieją analizy teore-tyczne tego zagadnienia. Dotyczy ona w zasadzie liczb Reynoldsa, w zakresie których warstwa przyścienna jest dostatecznie cienka i jednocześnie nie zachodzi jej turbulizacja i oderwanie.

W przypadku kropeł większych rozmiarów, w których występuje oderwanie warstwy przyściennej, proponuje się uwzględnienie wspomnianych efektów tylko w zakresie kąta środkowego, na którym nie zachodzi oderwanie. Dokładne badania eksperymentalne mogą pozwolić na ściślejsze określenie punktu oderwania warstwy przyściennej od po-wierzchni kropli.

Znajomość oporów tarcia kropli odparowującej podczas ruchu pozwala na precy-zyjniejsze określenie torów kropli, ich separacji i czasu odparowania. Tego typu informacje są niezbędne w różnych zagadnieniach technicznych wspomnianych na wstępie.

Literatura

- [1] J. Madejski, *Teoria wymiany ciepła*. PWN, 1963.
- [2] M. C. Yuen, L. W. Chen, *Dynamics of Evaporating Water Droplets*. NU-ME/AS Report 75 - 1. NSF Grant GI-36761, May 1975.
- [3] M. C. Yuen, L. W. Chen, *Heat Transfer Measurements of Evaporating Liquid Droplets*. Int. Journal of Heat and Mass Transfer Vol. 21, pp. 537 - 542, May 1978.
- [4] C. K. Yeh, N. Zuber, *On the Problem of Liquid Entrainment*. Argonne National Laboratory, ANL-6244, 1960.

**Приближенный анализ сопротивления капли испаряющейся
во время течения**

Резюме

В работе представлен упрощенный анализ сопротивления капли испаряющейся во время течения. Анализ доказал, что изменение сопротивления испаряющейся капли по сравнению с неиспаряющейся вызвано потоком испаряющейся массы, перпендикулярным к поверхности капли. Его неравномерность на поверхности капли вызвана неоднородностью условий теплообмена. Поток испаряющейся массы вызывает изменение импульса передвигающейся капли, а также и изменение тангенциальных натяжений на ее поверхности.

Изменение импульса, вызванное неравномерностью потока массы испаряющейся на поверхности, определено пользуясь коэффициентом теплоотдачи, описанным исправленной зависимостью Швеца.

Тангенциальные натяжения на поверхности испаряющейся капли определены при использовании модели пограничного слоя, описанной сферическими координатами.

Полученные результаты сравнены с доступными результатами экспериментальных исследований [2, 3]. Достигнута удовлетворительная сходимость.

Approximate Analysis of the Drag of a Droplet Evaporating in the Flow

Summary

The paper contains a simplified analysis of the drag of a droplet evaporating in the flow. The analysis has shown that the flux of mass perpendicular to the droplet surface is responsible for the change of drag of the evaporating droplet as compared with drag of a not evaporating one. The flux of mass over the droplet surface is irregular due to the nonuniform heat exchange conditions. It causes a change of momentum of the moving droplet and changes of stresses tangent to its surface.

The change of momentum due to the irregularity of the flux of mass evaporating from the surface was determined based on the heat transfer coefficient as described by the corrected Szewec relation.

Tangent stresses at the surface of the evaporating droplet were determined from a model of boundary layer in spherical coordinates.

The results were compared with available experimental results [2, 3]. Satisfactory agreement was obtained.