

P O L S K A A K A D E M I A N A U K

INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

80

WARSZAWA - POZNAŃ 1981

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

RADA REDAKCYJNA - EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
STEFAN PERYCZ · WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ROMUALD PUZYREWSKI
KAZIMIERZ STELLER (PRZEWODNICZĄCY - CHAIRMAN) · ROBERT SZEWAŁSKI
JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY - EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER - REDAKTOR - EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA - EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright

by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1981

Printed in Poland

ISBN 83-01-02692-8

ISSN 0079-3205

PANSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 340+90 egz. Ark. wyd. 10. Ark. druk. 7,5 Papier druk. sat. kl. V,
70 g. 70×100 cm. Oddano do składania 26 kwietnia 1980 r. Druk ukończono
w lutym 1981 r. Zamówienie nr 486/34, T-2/778. Cena zł 40,-

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

KAZIMIERZ RUP*

Kraków

Określenie pola temperatury i prędkości cieczy w rurze kołowej przy termicznych warunkach brzegowych drugiego rodzaju

W pracy określono ustalone pole temperatury i prędkości cieczy w zakresie przepływu laminarnego, realizowanego w rurze kołowej. Niejednorodność pola temperatury płynącej cieczy spowodowana jest skokową zmianą strumienia ciepła na ścianie. W rozważaniach uwzględniono zmiany dynamicznego współczynnika lepkości wraz ze zmianą temperatury.

Zagadnienie nieizotermicznego przepływu cieczy sprowadzono do rozwiązania nieliniowego równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych (zagadnienie Neumana). Ponadto, w rozważaniach wykorzystano koncepcję grubości termicznej warstwy przyściennej. Przebieg obliczeń zilustrowano przykładami liczbowymi.

Wykaz oznaczeń

$a = \lambda_0 / (c_p \cdot \rho_0)$ — współczynnik wyrównania temperatury,	x — współrzędna,
b — bezwymiarowy parametr uwzględniający zmianę współczynnika lepkości cieczy wraz z temperaturą,	y — współrzędna bezwymiarowa,
c_p — ciepło właściwe cieczy przy stałym ciśnieniu,	α — współczynnik wnikania ciepła,
f — współczynnik strat tarcia,	δ — bezwymiarowa grubość termicznej warstwy przyściennej,
p — ciśnienie statyczne,	η — pozorna zmienna całkowania,
q^* — strumień ciepła na ścianie rury,	λ — współczynnik przewodnictwa cieplnego,
q — parametr nastawialny,	μ — dynamiczny współczynnik lepkości cieczy,
r — współrzędna,	ξ — pozorna zmienna całkowania,
r_s — promień rury,	ρ — gęstość cieczy,
T — temperatura bezwymiarowa,	$Nu = 2r_s \alpha / \lambda$ — liczba Nusselta,
t — temperatura,	$Re = \bar{U} \rho 2r_s / \mu$ — liczba Reynoldsa.
U — prędkość cieczy,	
$\bar{U}$ — prędkość średnia,	
X — współrzędna bezwymiarowa,	

Indeksy:

0	— dla $X=0$,
s	— na ścianie rury.

1. Wstęp

W przypadku nieizotermicznego przepływu cieczy o nieuformowanym polu prędkości i temperatury występuje znaczna trudność przy analitycznym całkowaniu układu równań różniczkowych opisujących taki przepływ, zwłaszcza gdy uwzględnia się zmiany własności fizycznych cieczy wraz ze zmianą temperatury. Uwzględnienie zmian własności fizycznych

* Instytut Aparatury Przemysłowej i Energetyki, Politechnika Krakowska.

cieczy, a w szczególności zmian współczynnika lepkości, z uwagi na jego silną zależność od temperatury staje się w praktyce konieczne.

Znane analityczne rozwiązania ściśle [1], opisujące podobne przepływy, udało się uzyskać jedynie przy założeniu niezmienności własności fizycznych cieczy wraz z temperaturą.

Również przy założeniu niezmienności wspomnianych własności cieczy uzyskano w [2, 3] rozwiązania numeryczne rozważanego problemu. Natomiast numeryczną analizę podobnego przepływu (warunki brzegowe pierwszego rodzaju) przy założeniu zmienności współczynnika lepkości przedstawiono w [4].

W pracy zastosowano do rozwiązania postawionego zagadnienia metodę uśredniania poprawek funkcjonalnych [5, 6, 7]. Metoda uśredniania poprawek funkcjonalnych jest analityczną, wewnętrzną metodą przybliżoną rozwiązywania równań różniczkowych, całkowych i różniczkowo-całkowych. Idea przewodnia wymienionej metody polega w ogólności na zastąpieniu samej poszukiwanej funkcji (lub jej pochodnej), ciąglej w pewnym obszarze, przez jej średnią całkową w tym obszarze.

Omawiana metoda charakteryzuje się, w porównaniu z innymi analitycznymi metodami przybliżonymi, względną łatwością wyznaczania funkcji aproksymującej rozwiązanie ściśle oraz możliwością wyznaczenia dowolnego, n -tego przybliżenia. Ponadto warto zaznaczyć, że metoda uśredniania poprawek funkcjonalnych eliminuje intuicyjny wybór funkcji aproksymującej rozwiązanie ściśle.

Otrzymane w pracy wyniki porównano z innymi dostępnymi w literaturze rozwiązaniami przybliżonymi [8, 9]. Zależność funkcyjną zmian współczynnika lepkości cieczy wraz z temperaturą przyjęto do rozważań w podobnej postaci jak w [4, 9]. Zależność ta jest charakterystyczna dla większości cieczy, a zwłaszcza olejów mineralnych w zakresach temperatur do 370 K.

2. Analiza pola temperatury cieczy

Zagadnienie nieizotermicznego przepływu cieczy przez rurę kołową o stałym strumieniu cieplnym na ścianie rozwiązano przy następujących założeniach:

- 1) przepływ cieczy jest ustalony, laminarny i charakteryzuje się osiową symetrią,
- 2) rozkład prędkości w przekroju wejściowym jest paraboliczny,
- 3) ciecz posiada w przekroju wejściowym stałą temperaturę,
- 4) brak jest wewnętrznych źródeł ciepła,
- 5) pomija się wpływ pola sił masowych jako małych w porównaniu z siłami powierzchniowymi (ciśnienia) i siłami lepkości,
- 6) wpływ przewodności cieplnej cieczy wzdłuż osi przepływu jest bardzo mały w porównaniu z przewodnością ciepła w kierunku normalnym do kierunku przepływu,
- 7) ciśnienie w cieczy jest stałe w przekroju poprzecznym rury,
- 8) zmiany prędkości cieczy w kierunku przepływu są małe ($\partial U/\partial x \ll \partial U/\partial r$).

Uwzględniając wymienione założenia, równania energii i ruchu cieczy można uapisać [10, 11]

$$U \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial t}{\partial r} \right], \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu(t) \frac{\partial U}{\partial r} \right] = \frac{dp}{dx}. \quad (2)$$

Układ równań różniczkowych (1), (2) wraz z zależnością funkcyjną, opisującą zmiany współczynnika lepkości cieczy z temperaturą i warunkami granicznymi w postaci

$$\begin{cases} r=r_s, & -\lambda \frac{\partial t}{\partial r} = q^*, \\ r=0, & \frac{\partial t}{\partial r} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$t(x=0, r) = t_0, \quad (4)$$

$$\begin{cases} r=r_s, & U=0, \\ r=0, & \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

determinują jednoznacznie pole temperatury i sprzężone z nim pole prędkości cieczy.

Dla ułatwienia, układ równań różniczkowych (1), (2) sprowadzono do jednego równania różniczkowego nieliniowego. Ponieważ współczynnik lepkości cieczy jest zależny od nieznanego pola temperatury, prędkość cieczy wyznaczamy całkując równanie (2), przy wykorzystaniu warunków (5), w sposób następujący:

$$U = -\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \int_r^{r_s} \frac{\xi}{\mu(t)} d\xi. \quad (6)$$

Prędkość średnia wynosi

$$\bar{U} = -\frac{1}{r_s^2} \frac{dp}{dx} \int_0^{r_s} r \left[\int_r^{r_s} \frac{\xi}{\mu(t)} d\xi \right] dr. \quad (7)$$

Wykorzystując (6) i (7), prędkość bezwymiarową cieczy można zapisać

$$\frac{U}{2\bar{U}} = \frac{r_s^2}{4} \frac{\int_r^{r_s} \frac{\xi}{\mu(t)} d\xi}{\int_0^{r_s} r \left[\int_r^{r_s} \frac{\xi}{\mu(t)} d\xi \right] dr}. \quad (8)$$

W celu uogólnienia dalszych rozważań wprowadza się wyrażenia bezwymiarowe

$$\begin{cases} X = \frac{x}{r_s} \frac{a}{2\bar{U}r_s}, \\ y = 1 - \frac{r}{r_s}. \end{cases} \quad (9)$$

Wyrażenia (9) sprowadzają początek układu współrzędnych na ściankę rury. Podstawiając (8), (9) oraz temperaturę bezwymiarową

$$T = \lambda \frac{t - t_0}{r_s q^*} \quad (10)$$

do równania energii (1) otrzymamy

$$\frac{\int_0^y \frac{1-\eta}{\mu} d\eta}{4 \int_0^1 (1-y) \left[\int_0^y \frac{1-\eta}{\mu} d\eta \right] dy} \frac{\partial T}{\partial X} = \frac{1}{1-y} \frac{\partial}{\partial y} \left[(1-y) \frac{\partial T}{\partial y} \right]. \quad (11)$$

Zależność funkcyjną współczynnika lepkości cieczy od temperatury przyjmujemy w postaci

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{1+bT}. \quad (12)$$

W wyrażeniu (12) wartość stałej b jest zależna od rodzaju cieczy oraz od rozważanego przedziału temperatury. Zależność (12) charakterystyczna jest dla dużej grupy cieczy, a zwłaszcza olejów mineralnych [9, 11, 12].

Podstawiając (12) do (11) otrzymujemy równanie energii cieczy w postaci bezwymiarowej

$$\frac{\int_0^y (1-\eta)(1+bT) d\eta}{4 \int_0^1 (1-y) \left[\int_0^y (1-\eta)(1+bT) d\eta \right] dy} \frac{\partial T}{\partial X} = -\frac{1}{1-y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (13)$$

Warunki graniczne (3) i (4), po uwzględnieniu (9) i (10), można zapisać

$$\begin{cases} y=0, & \frac{\partial T}{\partial y} = -1, \\ y=1, & \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$T_0(0, y) = 0. \quad (15)$$

Równanie różniczkowe (13), przy warunkach granicznych (14) i (15), rozwiązano za pomocą metody uśredniania poprawek funkcjonalnych, przy wykorzystaniu pojęcia grubości termicznej warstwy przyściennej [5, 6, 7]. Układ współrzędnych celowo przesunięto z osi rury na ściankę, aby ułatwić dalszy tok obliczeń.

Wprowadzając do rozważań grubość termicznej warstwy przyściennej wykorzystujemy ponadto warunki

$$\begin{cases} y=\delta(X), & T=0, \\ y=\delta(X), & \frac{\partial T}{\partial y}=0. \end{cases} \quad (16)$$

Grubość termicznej warstwy przyściennej jest funkcją jedynie zmiennej niezależnej X , która w rozważanym przypadku jest bezwymiarową współrzędną mierzoną w kierunku przepływu. Wprowadzając pojęcie grubości termicznej warstwy przyściennej, rozwiązanie równania różniczkowego (13), przy warunkach (14), (15) i (16), przeprowadza się w dwóch obszarach przepływu oddzielnie. W pierwszym obszarze mamy nieuformowany proces wymiany ciepła, który trwa do momentu, gdy grubość termicznej warstwy przyściennej osiągnie wartość $\delta = 1$. W drugim obszarze występuje bardziej uformowany proces wymiany ciepła i wówczas grubość termicznej warstwy przyściennej traci sens.

Zgodnie z ideą przewodnią zastosowanej metody równanie (13) aproksymuje się w pierwszej fazie równaniem

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = q_1(X), \quad (17)$$

gdzie

$$q_1(X) = \frac{2}{2\delta - \delta^2} \int_0^\delta \left\{ \frac{\int_0^y (1-\eta)(1+bT) d\eta}{4 \int_0^y (1-y) \left[\int_0^y (1-\eta)(1+bT) d\eta \right] dy} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial T}{\partial X} + \frac{1}{1-y} \frac{\partial T}{\partial y} \right\} (1-y) dy. \quad (18)$$

Całkując dwukrotnie (17) otrzymuje się rozkład temperatury w pierwszej fazie

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} q_1(X) y^2 + q_{11}(X) y + q_{12}(X), & 0 \leq y \leq \delta, \\ T = 0, & \delta \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (19)$$

Ponieważ (19) ma spełniać warunki brzegowe (14) i (16) dokładnie (metoda wewnętrzna), zatem po wykorzystaniu drugiego warunku (14) i warunków (16) otrzymamy

$$q_{11} = -1, \quad q_{12} = -\frac{\delta}{2}. \quad (20)$$

Podstawiając (20) do (19) mamy

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} q_1(X) \delta^2 \left[1 - \frac{y}{\delta} \right]^2, & 0 \leq y \leq \delta, \\ T = 0, & \delta \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (21)$$

Wykorzystując ponadto pierwszy z warunków (14), przybliżone pole temperatury cieczy w pierwszej fazie można zapisać w postaci

$$\begin{cases} T(X, y) = \frac{1}{2} \delta \left[1 - \frac{y}{\delta} \right]^2, & 0 \leq y \leq \delta, \\ T = 0, & \delta \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (22)$$

Podstawiając następnie (22) do (18) otrzymujemy po scałkowaniu

$$q_1(X) = \frac{2}{2\delta - \delta^2} \frac{1}{\frac{1}{2} \left[1 + \frac{b\delta^2}{30} (20 - 15\delta + 6\delta^2 - \delta^3) \right]} \left\{ \left[\frac{1}{12} \delta^2 - \frac{1}{20} \delta^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{120} \delta^4 + \frac{b\delta}{2} \left(\frac{1}{18} \delta^2 - \frac{1}{36} \delta^3 + \frac{1}{288} \delta^4 \right) \right] \frac{1}{2} \frac{d\delta}{dX} + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{6} \delta - \frac{3}{20} \delta^2 + \frac{1}{30} \delta^3 + \frac{1}{2} b\delta \left(\frac{4}{45} \delta - \frac{1}{15} \delta^2 + \frac{53}{5040} \delta^3 \right) \right] \frac{1}{2} \delta \frac{d\delta}{dX} \right\} - \frac{\delta}{2\delta - \delta^2}. \quad (23)$$

Porównując (21) i (22) otrzymujemy

$$q_1(X) = \frac{1}{\delta(X)}. \quad (24)$$

Wykorzystując (24) równanie różniczkowe (23) można przekształcić do postaci

$$1 + \frac{1}{30} b\delta^2(20 - 15\delta + 6\delta^2 - \delta^3) = \\ = \left[\frac{1}{4} \delta^2 - \frac{1}{5} \delta^3 + \frac{1}{24} \delta^4 + \frac{1}{2} b\delta^3 \left(\frac{13}{90} - \frac{17}{180} \delta + \frac{47}{3360} \delta^2 \right) \right] \frac{d\delta}{dX}. \quad (25)$$

Równanie różniczkowe (25) całkuje się przy następujących warunkach brzegowych

$$X=0, \quad \delta=0 \quad (26)$$

otrzymując

$$X = \int_0^\delta \frac{1}{1 + \frac{1}{30} b\delta^2(20 - 15\delta + 6\delta^2 - \delta^3)} \left[\frac{1}{4} \delta^2 - \frac{1}{5} \delta^3 + \frac{1}{24} \delta^4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} b\delta^3 \left(\frac{13}{90} - \frac{17}{180} \delta + \frac{47}{3360} \delta^2 \right) \right] d\delta. \quad (27)$$

Jeżeli założyć w (27) wartość parametru $b=0$, co jest równoznaczne założeniu o niezmienności własności fizycznych cieczy wraz z temperaturą, otrzymuje się

$$X = \frac{1}{120} (10\delta^3 - 6\delta^4 + \delta^5). \quad (28)$$

Równanie (28) podaje zależność $\delta = \delta(x)$ w postaci uwikłanej. W przypadku niezmiennych własności cieczy i niezależnych od zmian temperatury, uzyskano w [8] przy podobnych założeniach, za pomocą metody Targa-Śleszina następującą zależność:

$$X = \frac{\delta^3}{12} \left(1 - \frac{\delta}{5} \right). \quad (29)$$

Dla porównania przytoczono w tabeli 1 kilka wartości X dla założonych wartości δ według (28) i (29).

Ze względu na dużą pracochłonność przy analitycznym całkowaniu wyrażenia (27), całkowanie wymienionego wyrażenia przeprowadzono na elektronicznej maszynie cyfro-

Tabela 1

Lp.	δ	X wg (28)	X wg (29)
1	0,05	0,000010	0,000010
2	0,20	0,000589	0,000640
3	0,40	0,004139	0,004907
4	0,60	0,012168	0,015840
5	1,00	0,041667	0,066667

wej ODRA 1204. Do obliczeń numerycznych zastosowano metodę Simpsona. Szczegółowe obliczenia wykonano dla dwóch wartości parametru b , a mianowicie

$\alpha/b=9$ (nagrzewanie się cieczy od ścianki rury), wówczas

$$X = \int_0^{\delta} \frac{1680\delta^2 - 3024\delta^3 - 2576\delta^4 + 423\delta^5}{224[30 + 180\delta^2 - 135\delta^3 + 54\delta^4 - 9\delta^5]} d\delta, \quad (30)$$

$\beta/b = -0,9$ (chłodzenie cieczy od ścianki rury)

$$X = \int_0^{\delta} \frac{16800\delta^2 - 17808\delta^3 + 5656\delta^4 - 423\delta^5}{224[300 - 180\delta^2 + 135\delta^3 - 54\delta^4 + 9\delta^5]} d\delta. \quad (31)$$

Jak już wspomniano, w drugim obszarze przepływu pojęcie grubości termicznej warstwy przysiennej traci sens fizyczny. Podobnie jak dla pierwszego obszaru, punktem

Tabela 2

Lp.	δ	X wg (30)	X wg (31)
1	0,050	$10,999564 \cdot 10^{-6}$	$10,016548 \cdot 10^{-6}$
2	0,100	$90,740410 \cdot 10^{-6}$	$77,134341 \cdot 10^{-6}$
3	0,200	$73,008395 \cdot 10^{-5}$	$57,315969 \cdot 10^{-5}$
4	0,300	$23,572648 \cdot 10^{-4}$	$18,008701 \cdot 10^{-4}$
5	0,400	$51,980582 \cdot 10^{-4}$	$39,792761 \cdot 10^{-4}$
6	0,500	$93,108309 \cdot 10^{-4}$	$72,486346 \cdot 10^{-4}$
7	0,600	$14,658570 \cdot 10^{-3}$	$11,679748 \cdot 10^{-3}$
8	0,700	$21,154204 \cdot 10^{-3}$	$17,280395 \cdot 10^{-3}$
9	0,800	$28,682156 \cdot 10^{-3}$	$24,000665 \cdot 10^{-3}$
10	0,900	$37,107285 \cdot 10^{-3}$	$31,738340 \cdot 10^{-3}$
11	1,000	$46,278514 \cdot 10^{-3}$	$40,345071 \cdot 10^{-3}$

wyściowym jest równanie (13). Równanie różniczkowe (13) przy warunkach brzegowych (14) rozwiązano w drugiej fazie również za pomocą metody uśredniania poprawek funkcjonalnych.

Zgodnie z ideą przewodnią wymienionej metody równanie (13) przybliża się w drugiej fazie równaniem

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = q_2(X), \quad (32)$$

gdzie

$$q_2(X) = 2 \int_0^1 \left\{ \frac{\int_0^y (1-\eta)(1+bT) d\eta}{4 \int_0^1 (1-y) \left[\int_0^y (1-\eta)(1+bT) d\eta \right] dy} \frac{\partial T}{\partial X} + \frac{1}{1-y} \frac{\partial T}{\partial y} \right\} (1-y) dy. \quad (33)$$

Całkując dwukrotnie (32) mamy

$$T = \frac{1}{2} q_2(X) y^2 + q_{21}(X) y + q_{22}(X), \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (34)$$

Wykorzystując warunki brzegowe (14) wyznacza się parametry nastawialne, otrzymując ostatecznie

$$T(X, y) = \frac{1}{2} y^2 - y + q_{22}(X), \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (35)$$

Aby wyznaczyć nieznaną parametr $q_{22}(X)$ w równaniu (35) podstawiamy je do (33). Po wykonaniu całkowania otrzymujemy w rozważanym przypadku proste równanie różniczkowe, z którego wyznacza się $q_{22}(X)$. Ma ono postać

$$\dot{q}_{22}(X) = 4. \quad (36)$$

Po scałkowaniu (36) mamy

$$q_{22}(X) = 4X + C. \quad (37)$$

Stałą C w równaniu (37) wyznacza się z warunku spójności rozwiązań w pierwszej i drugiej fazie.

Ponieważ pierwszy obszar przepływu osiąga kres w momencie, gdy grubość termicznej warstwy przyściennej wynosi $\delta = 1$, a odległość od początku układu współrzędnych wynosi X_1 , zatem porównując pole temperatury dla pierwszego i drugiego obszaru otrzymujemy na granicy obszarów przepływu warunki

$$X = X_1, \quad q_{22} = \frac{1}{2}. \quad (38)$$

Wykorzystując warunek (38) w (37) mamy

$$q_{22}(X) = 4(X - X_1) + \frac{1}{2}. \quad (39)$$

Następnie, podstawiając (39) do (35), otrzymuje się poszukiwane pole temperatury w drugiej fazie

$$T(X, y) = \frac{1}{2} [1 - y]^2 + 4(X - X_1). \quad (40)$$

Ponieważ w drugiej fazie pole temperatury i prędkości cieczy mają charakter uformowany,

własności cieczy w rozwiązaniu otrzymanym w pierwszym przybliżeniu nie mają większego wpływu na sam proces wymiany ciepła.

Wyznaczając liczbę kryterialną Nusselta określa się proces wymiany ciepła w przepływającej cieczy. Odnosząc współczynnik wnikania ciepła do początkowej różnicy temperatur, liczbę Nu można zapisać [8, 11] w postaci

$$Nu = \frac{2r_s q^*}{\lambda(t_s - t_0)}. \quad (41)$$

Podstawiając do (41) wyrażenia określające temperaturę bezwymiarową otrzymamy

$$Nu = -\frac{2}{T_s - T_0} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}. \quad (42)$$

Wprowadzając do (42) wyrażenia (22), (14) i (15) otrzymamy dla pierwszej fazy

$$Nu = \frac{4}{\delta(X)}. \quad (43)$$

3. Wyznaczenie pola prędkości cieczy

Określone pole temperatury cieczy w pierwszej i drugiej fazie jest sprzężone odpowiednio z polem prędkości cieczy. Wprowadzając wyrażenia bezwymiarowe do (8) otrzymuje się

$$\frac{U}{2\bar{U}} = \frac{\int_0^y (1-\eta)(1+bT) d\eta}{4 \int_0^1 (1-y) \left[\int_0^y (1-\eta)(1+bT) d\eta \right] dy}. \quad (44)$$

Ponieważ pole temperatury cieczy w pierwszej fazie opisane jest dwoma wyrażeniami (22), zatem również i bezwymiarowa prędkość cieczy będzie miała dwie postaci, w zależności od postaci wyrażenia opisującego pole temperatury. W szczególności będzie

$$\frac{U}{2\bar{U}} = \frac{y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{b\delta^2}{2} \left[y - \frac{1}{2} y^2 - \frac{y^2}{\delta} + \frac{2}{3} \frac{y^3}{\delta} + \frac{1}{3} \frac{y^3}{\delta^2} - \frac{1}{4} \frac{y^4}{\delta^2} \right]}{\frac{1}{2} + \frac{1}{60} b\delta^2(20 - 15\delta + 6\delta^2 - \delta^3)}, \quad (45)$$

dla $0 \leq y \leq \delta$

oraz

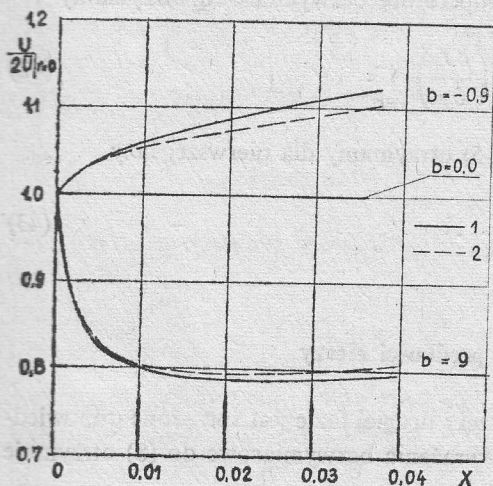
$$\frac{U}{2\bar{U}} = \frac{y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{b\delta^2}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \delta \right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{60} b\delta^2(20 - 15\delta + 6\delta^2 - \delta^3)}, \quad (46)$$

dla $\delta \leq y \leq 1$.

Bezwymiarowa prędkość cieczy w osi rury w pierwszej fazie wyniesie

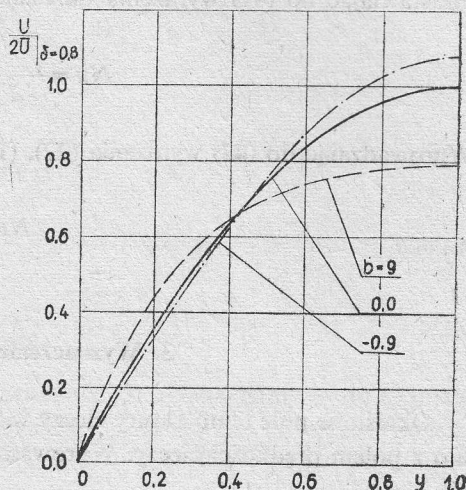
$$\frac{U}{2\bar{U}} \Big|_{y=1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} b \delta^2 \left(1 - \frac{1}{4} \delta\right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{60} b \delta^2 (20 - 15\delta + 6\delta^2 - \delta^3)} \quad (47)$$

W drugiej fazie rozwiązania prędkość bezwymiarową cieczy wyznaczamy również z wyrażenia (44), tylko wyrażenie opisujące pole temperatury w omawianej fazie ma postać



Rys. 1. Przebieg zmian bezwymiarowej prędkości cieczy wzdłuż osi przepływu

1 – rozwiązanie w [9], 2 – rozwiązanie w pracy



Rys. 2. Rozkład bezwymiarowej prędkości cieczy w przekroju poprzecznym rury

(40). W konsekwencji, po podstawieniu (40) do (44), otrzymujemy bezwymiarową prędkość cieczy w rurze kołowej w drugiej fazie

$$\frac{U}{2\bar{U}} = \frac{y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{b}{2} \left[y^3 - y^2 - \frac{1}{4} y^4 \right] + b \left(y - \frac{1}{2} y^2 \right) \left[4(X - X_1) + \frac{1}{2} \right]}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} b + 2b(X - X_1)} \quad (48)$$

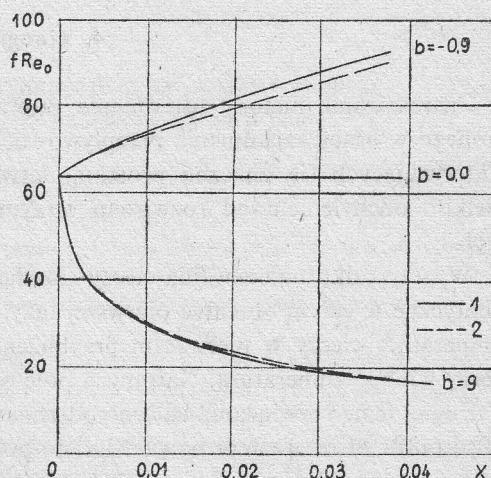
dla $0 \leq y \leq 1$.

Bezwymiarową prędkość cieczy w osi rury w drugiej fazie rozwiązania otrzymujemy z wyrażenia (48) w postaci

$$\frac{U}{2\bar{U}} \Big|_{y=1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} b + 2b(X - X_1)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} b + 2b(X - X_1)} \quad (49)$$

Dla zobrazowania przeprowadzonych rozważań wykonano przykłady liczbowe. Uzyskane wyniki liczbowe przedstawiono w sposób graficzny na rysunkach 1 i 2. Do obliczeń

przyjęto dwie różne wartości parametru b , określającego zmianę dynamicznego współczynnika lepkości cieczy wraz z temperaturą. Wybrane wartości parametru b wynoszą 9 i $-0,9$. Pierwsza wartość parametru opisuje, zgodnie z zależnością (12), nagrzewanie cieczy od ścianki rury, natomiast druga ($b = -0,9$) – chłodzenie cieczy od ścianki rury. Mając stabelaryzowaną zależność funkcyjną $\delta = \delta(X)$ (wydruki elektronicznej maszyny cyfrowej), przedstawiono na rysunku 1 przebieg zmian prędkości cieczy wzdłuż kierunku przepływu, a na rysunku 2 rozkład prędkości cieczy w przekroju poprzecznym rury. Przekrój ten jest oddalony od początku układu współrzędnych o odległość X , taką, że $\delta(X) = 0,8$. W celu przedstawienia analizy porównawczej niektórych wyników uzyskanych w niniejszej pracy przytoczono również na rysunku 1 rozwiązanie przedstawione w pracy [9]. Należy zaznaczyć, że w pracy [9] rozważano podobny problem za pomocą metody Karmana-Pohlhausena tylko w pierwszej fazie rozwiązywania.



Rys. 3. Przebieg zmian iloczynu współczynnika strat tarcia i liczby Re przy przepływie cieczy w rurze kołowej

1 – rozwiązanie w [9], 2 – rozwiązanie w pracy

Współczynnik strat tarcia przy nieizotermicznym przepływie cieczy, której własności fizyczne zależą od zmian temperatury, dla przepływu realizowanego w rurze kołowej, wyznacza się z zależności [8, 10, 11]

$$f = - \frac{4r_s}{\rho \bar{U}^2} \frac{dp}{dx} \quad (50)$$

Podstawiając (7) oraz uwzględniając wyrażenie bezwymiarowe w (50) otrzymamy

$$f = \frac{8}{Re_0} \frac{1}{\int_0^1 (1-y) \left[\int_0^y (1-\eta)(1+bT) d\eta \right] dy} \quad (51)$$

Podstawiając do (51) wyrażenia opisujące pole temperatury (22) otrzymuje się po wykonaniu całkowania

$$f = \frac{8}{Re_0} \frac{1}{\frac{1}{8} + \frac{1}{240} b \delta^2 (20 - 15\delta + 6\delta^2 - \delta^3)} \quad (52)$$

Wyrażenie (52) opisuje zależność współczynnika strat tarcia dla pierwszej fazy rozwiązania.

Dla drugiej fazy rozwiązania wyrażenie opisujące zależność współczynnika strat tarcia otrzymuje się podstawiając (40) do (51). W przypadku gdy wartość parametru $b=0$, wyrażenie (52) łatwo sprowadzić do znanej zależności charakterystycznej dla przepływu izotermicznego. Liczba Reynoldsa w (51) i (52) jest wyznaczona dla wartości wielkości fizycznych cieczy w temperaturze t_0 .

Przebieg zmian iloczynu współczynnika strat tarcia i liczby Reynoldsa wzdłuż kierunku przepływu cieczy przedstawiono na rysunku 3. Na tym rysunku przytoczono również w celu porównania wyniki przedstawione w pracy [9].

Podobnie jak na rysunku 1 również na rysunku 3 przedstawiono krzywe zależności dla trzech wartości parametru b , a mianowicie: $b=9$, $b=0$, $b=-0,9$.

4. Uwagi końcowe

Zastosowanie metody uśredniania poprawek funkcjonalnych do rozwiązania postawionego w pracy zagadnienia przepływowo-ciepłnego umożliwiło uzyskanie wyników charakteryzujących się znaczną prostotą, łatwością w praktycznym stosowaniu oraz niewielkim odchyleniem od rozwiązań otrzymanych za pomocą innych metod przybliżonych.

W przypadku nagrzewania cieczy rozwiązanie w niniejszej pracy oraz w [9] są niemal identyczne w całym obszarze pierwszej fazy. W drugiej fazie rozwiązania otrzymane pole temperatury cieczy w pierwszym przybliżeniu nie zależy od zmian własności fizycznych cieczy wraz z temperaturą. Natomiast pole prędkości cieczy jest w pierwszym przybliżeniu w drugiej fazie rozwiązania zależne od zmian własności fizycznych cieczy (por. wyrażenia (40) i (48)). Można zatem powiedzieć, że pole prędkości w większym stopniu uzależnione jest od zmian własności fizycznych cieczy wraz z temperaturą niż pole temperatury.

W przypadku przepływu rozważanych cieczy przez ogrzewaną stałym strumieniem rurę kołową maksymalna prędkość cieczy zmniejsza się o ponad 20% (w obszarze $X \approx X_1$) w stosunku do prędkości przepływu izotermicznego. Nieco mniejszy wpływ zmian własności fizycznych cieczy wraz z temperaturą na zmianę prędkości cieczy, w stosunku do przepływu izotermicznego, można zauważyć w przypadku ochładzania cieczy odbierającej stały strumień ciepła od ścianki. Podobne oddziaływanie zmian własności fizycznych cieczy wraz ze zmianą temperatury obserwuje się dla zależności iloczynu współczynnika strat tarcia i liczby Reynoldsa od bezwymiarowej współrzędnej X (rys. 3).

Praca wpłynęła do Redakcji w lutym 1979 r.

Literatura

- [1] J. R. Sellers, M. Tribus, J. S. Klein, *Heat Transfer to Laminar Flow in Round Tube or Flat Conduit - The Graetz Problem Extended*. Transactions of ASME, 78, 1956.
- [2] W. M. Kays, *Numerical Solutions for Laminar Flow Heat Transfer in Circular Tubes*. Transaction of ASME, 77, 1955.
- [3] U. Grigull, H. Tratz, *Thermischer Einlauf in ausgebildeter laminarer Rohr-Strömung*. Int. J. Heat Mass Transfer. 8, 1965.

- [4] K. N. Krishnan, V. M. K. Sastri, *Numerical Solution of Thermal Entry Length Problem with Variable Viscosities and Viscous Dissipation*. Wärme- und Stoffübertragung, 11, 1978.
- [5] J. D. Sokołow, *O metodzie osrednienija funkcjonalnych poprawok*. UMŻ, 1, 9, 1957.
- [6] J. C. Postolnik, *Odnomiernyj konwiewktiwnyj nagriew pri zawisiaszczem ot wremeni koefficientie tieploobmiena*. IFŽ, 2, 18, 1970.
- [7] K. Rup, *Modyfikacja metody usredniania funkcjonalnych poprawek w zagadnieniach konwekcji wymuszonej i przeplywu ciepla*. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 1, 16, 1978.
- [8] B. S. Pietuchow, *Tieploobmien i soprotiwlenije pri laminarnom tieczenii zhidkosti w trubach*. Moskwa 1967.
- [9] K. T. Yang, *Laminar Forced Convection of Liquids in Tubes with Variable Viscosity*. Transactions of ASME, Series C, J. Heat Transfer, 94, 1962.
- [10] F. M. White, *Viscous Fluid Flow*. Mc Graw-Hill, Inc. 1974.
- [11] S. Whitaker, *Elementary Heat Transfer Analysis*. Pergamon Press, Inc., 1976.
- [12] N. B. Wargaftik, *Sprawocznik po tieplofiziceskim swojstwam gazow i zhidkostiej*. Moskwa 1963.

Определение поля температуры и скорости движущейся жидкости в круглой трубе при граничных условиях второго рода

Резюме

В настоящей статье рассматривается приближенный анализ неизотермического, стационарного, ламинарного течения ньютоновской жидкости в круглой трубе.

Предположено, что плотность теплового потока на стенке круглой трубы будет постоянной по длине.

Нелинейную систему уравнений описывающую теплообмен в потоке жидкости (уравнение движения и энергии) сведено до одного нелинейного дифференциального уравнения. Последнее уравнение решено применяя метод усреднения функциональных поправок.

Применяя этот метод мы разделяем целое пространство течения и теплообмена на термический начальный участок и область стабилизированного теплообмена.

В термическом начальном участке трубы можно выделить две области: тепловой пограничный слой толщиной δ и неохваченное теплообменом ядро. В области стабилизированного теплообмена толщина термического пограничного слоя теряет физический смысл.

Приближенное поле температуры и скорости получено учитывая зависимость коэффициента вязкости от температуры. Зависимость коэффициента вязкости от температуры принято подобно, как в работах [4, 9]. Для большинства минеральных масел в умеренно широком температурном интервале эта зависимость верна.

Полученные результаты теоретического расчета представлены в виде графиков.

Determination of the Temperature and Velocity Fields of Liquid in a Circular Tube for the Temperature Boundary Condition of the Second Kind

Summary

In the present paper an attempt is made to approximately solve the problem of nonisothermal steady laminar flow of a Newtonian fluid in a circular tube. A nonlinear system of two partial differential equations expressing the linear momentum and energy principles is reduced to one nonlinear differential equation. The latter is solved approximately using the method of averaging functional corrections.

In the application of the method we divide the entire thermal flow into two regions, one being the thermal entrance region in which the thermal boundary-layer thickness develops and reaches the center line of the tube, and the other the fully developed thermal-flow region.

The approximations of the temperature and velocity fields are obtained under the assumption that the dynamic viscosity depends on temperature. The temperature dependence of the fluid dynamic viscosity was assumed similar to that applied in [4, 9]. Such a dependence on the temperature holds true for most liquids, especially for mineral oils. The calculated distributions of the velocity and friction factor are presented in a graphical form in terms of nondimensional coordinates X and y .