

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

79

WARSZAWA - POZNAŃ 1980
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

RADA REDAKCYJNA — EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
STEFAN PERZYCH · WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ROMUALD PUZYREWSKI
KAZIMIERZ STELLER (PRZEWODNICZĄCY — CHAIRMAN) · ROBERT SZEWAŁSKI
JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY — EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER — REDAKTOR — EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA — EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszersa 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1980

Printed in Poland

ISBN 83-01-02691-X
ISSN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — ODDZIAŁ W POZNANIU

Wydanie I. Nakład 370+90 egz. Ark. wyd. 11. Ark. druk. 8,25. Papier sat. kl. V, 70 g, 70×100. Oddano do składania 2 I 1980 r. Podpisano do druku w listopadzie 1980 r. Druk ukończono w listopadzie 1980 r. Zam. nr 343/20, T-6/506.

Cena zł 40.—

DRUKARNIA UNIWERSYTETU IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

SŁAWOMIR JANECKI

Gdańsk

Funkcja Lagrange'a i zasada Hamiltona dla liniowych, jednowymiarowych układów ciągłych poddanych działaniu obciążeń niezachowawczych*

Przedstawiono ogólne równania ruchu lepko-sprężystego, liniowego ośrodka ciągłego opisanego liniowymi, jednowymiarowymi modelami i znajdującego się pod działaniem obciążeń niezachowawczych. Wyprowadzono funkcję Lagrange'a i sformułowano zasadę Hamiltona, dla przyjętej klasy modeli i oddziaływań. Pokazano możliwość zastosowania tej zasady do dyskretyzacji i przybliżonego, numerycznego rozwiązania zadania ogólnego.

Wstęp

W wielu problemach mechaniki ciał odkształcalnych zachodzi potrzeba badania zachowania się konstrukcji pod działaniem obciążeń niezachowawczych i uwzględnienia wewnętrznych sił dysypatywnych. Krąg tego typu zagadnień jest szeroki. Wystarczy wspomnieć o oddziaływaniu ośrodka gazowego na ruch łopat wirników helikopterowych i łopatek roboczych maszyn przepływowych, o wpływie tarcia w łożyskach, przecieków pary przez uszczelnienia, pól magnetycznych i elektrycznych na ruch wirników turbogeneratorów. Tego rodzaju zadania opisywane są równaniami różniczkowymi z warunkami granicznymi, tworzącymi niesamosprężony problem brzegowy.

W złożonych zadaniach mechaniki konstrukcji dla układów zachowawczych, tworzących samosprężone zagadnienia brzegowe, można otrzymać rozwiązania przybliżone, korzystając z zasady Hamiltona i stosując metody bezpośrednie rachunku wariacyjnego. Podobne przybliżone podejście można zastosować do złożonych układów niezachowawczych. Należy tylko posłużyć się odpowiednią zasadą wariacyjną. Taką zasadą, będącą uogólnieniem zasady Hamiltona, można sformułować wykorzystując zagadnienie brzegowe sprężone z zagadnieniem brzegowym opisującym rozważane zadanie. Uogólnioną zasadę wariacyjną dla skończonego układu punktów materialnych ustalił Liepholz [1], a dla pewnej klasy równań różniczkowych opisujących pewne zagadnienia stateczności prętów, podał Anderson [2].

* Pracę wykonano w ramach problemu międzyresortowego MR. I. 26 „Podstawy projektowania maszyn i urządzeń energetycznych”, grupa tematyczna 08.

W opracowaniu wyprowadzono ogólne równania ruchu lepko-sprężystego, liniowego ośrodka ciągłego, opisanego dowolnymi liniowymi, jednowymiarowymi modelami i znajdującego się pod działaniem szerokiej klasy obciążeń niezachowawczych. Opierając się na wspomnianej uprzednio idei, dla przyjętej klasy modeli ośrodka i oddziaływań określono uogólnioną funkcję Lagrange'a i sformułowano uogólnioną zasadę Hamiltona. Przedstawiono zastosowanie tej zasady do przybliżonego rozwiązania ogólnie postawionego problemu.

1. Zasada zachowania energii liniowego, dysypatywnego ośrodka ciągłego

W mechanice ośrodka ciągłego ciała traktuje się jako trójwymiarową rozmaitość różniczkową punktów materialnych. Przyjmijmy, że na ciało materialne $\mathcal{B}$, dające się wzajemnie jednoznacznie odwzorować na obszar B euklidesowej przestrzeni fizycznej, działają obciążenia masowe i powierzchniowe odpowiednio o intensywnościach $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in B$, $t \in R_+$ na jednostkę masy ciała $\mathcal{B}$ i $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \partial B$, $t \in R_+$ na jednostkę powierzchni zewnętrznej $\partial \mathcal{B}$ ciała $\mathcal{B}$. Pod wpływem tych obciążeń na ciele $\mathcal{B}$ powstaje pole przemieszczeń $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in B$, $t \in R_+$ oraz pole naprężeń $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in B$, $t \in R_+$ będące reakcją materiału ciała na stan odkształcenia. Wektor $\mathbf{x}$ jest wektorem pozycyjnym dowolnej cząstki X ciała $\mathcal{B}$ znajdującego się w konfiguracji aktualnej B , t jest czasem. Załóżmy również, że w konfiguracji aktualnej B ciało ma określony rozkład gęstości masy $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in B$, $t \in R_+$.

Odnosząc obciążenia, stan napięcia i gęstości masy do konfiguracji naturalnej B_1 ciała, równanie ruchu i warunek brzegowy można zapisać w postaci [3]

$$\text{Div}(\tilde{\mathbf{T}}_1 \mathbf{F}^T) + \rho_1 \mathbf{b} = \rho_1 \ddot{\mathbf{u}}, \quad (1)$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{n}_1 \tilde{\mathbf{T}}_1 \mathbf{F}^T, \quad (2)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{T}}_1(\mathbf{x}, t)$ jest symetrycznym tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa, $\mathbf{F} = \text{Grad} \mathbf{x}(\mathbf{x}, t)$ — gradientem deformacji, $\mathbf{n}_1$ — wektorem normalnym do powierzchni zewnętrznej ciała w konfiguracji B_1 w miejscu $\mathbf{x} \in \partial B_1$ oraz $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, gdzie $\mathbf{x}_1$ jest wektorem pozycyjnym cząstki X ciała w stanie B_1 .

Mnożąc skalarnie równanie (1) przez prędkość $\dot{\mathbf{u}}$ cząstki, całkując po obszarze ciała w konfiguracji odniesienia, korzystając z tożsamości

$$\text{Div}(\tilde{\mathbf{T}}_1 \mathbf{F}^T) \dot{\mathbf{u}} = \text{Div}(\tilde{\mathbf{T}}_1 \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{u}}) - \tilde{\mathbf{T}}_1 \times \dot{\mathbf{E}}, \quad (3)$$

gdzie

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T - 1) \quad (4)$$

jest tensorem odkształcenia Greena-Saint Venanta oraz stosując twierdzenie o dywergencji i warunek (2), po przekształceniach otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} \int_{B_1} \frac{1}{2} \rho_1 \dot{\mathbf{u}}^2 dV = \int_{B_1} \rho_1 \mathbf{b} \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{p}_1 \dot{\mathbf{u}} d(\partial V) - \int_{B_1} \tilde{\mathbf{T}}_1 \times \dot{\mathbf{E}} dV \quad (5)$$

— zmianę energii kinetycznej ciała z upływem czasu. Symbolem $\times$ oznaczono operację pełnego nasunięcia tensorów.

Założmy, że ciało jest liniowo lekko-sprężyste. Równanie konstytutywne w tym przypadku ma postać

$$\tilde{\mathbf{T}}_1 = \mathbf{C} \times \mathbf{E} + \mathbf{D} \times \dot{\mathbf{E}}, \quad (6)$$

gdzie $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ są tensorami stałych materiałowych sprężystych i lepkich. Podstawiając związek (6) do zależności (5) oraz uwzględniając tożsamości

$$(\mathbf{C} \times \mathbf{E}) \times \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\mathbf{C} \times (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E})], \quad (7)$$

$$(\mathbf{D} \times \dot{\mathbf{E}}) \times \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{D} \times (\dot{\mathbf{E}} \otimes \dot{\mathbf{E}}), \quad (8)$$

otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{K} + \mathcal{E} + \mathcal{D}) = \int_{B_1} \rho_1 \mathbf{b} \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{p}_1 \dot{\mathbf{u}} d(\partial V) \quad (9)$$

– zmianę energii ciała w czasie, gdzie

$$\mathcal{K} = \int_{B_1} \frac{1}{2} \rho_1 \dot{\mathbf{u}}^2 dV, \quad (10)$$

$$\mathcal{E} = \int_{B_1} \frac{1}{2} \mathbf{C} \times (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}) dV, \quad (11)$$

$$\mathcal{D} = \int_0^t \int_{B_1} \mathbf{D} \times (\dot{\mathbf{E}} \otimes \dot{\mathbf{E}}) dV d\tau, \quad (12)$$

to kolejno: energia kinetyczna, energia sprężysta i energia dysypacji. Symbolem $\otimes$ oznaczono operację mnożenia tensorowego.

Wprowadzając pracę obciążeń

$$\mathcal{W} = \int_0^t \left[\int_{B_1} \rho_1 \mathbf{b} \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{p}_1 \dot{\mathbf{u}} d(\partial V) \right] d\tau \quad (13)$$

otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{K} + \mathcal{E} + \mathcal{D} - \mathcal{W}) = 0 \quad (14)$$

– zasadę zachowania energii całkowitej.

W dalszym ciągu rozważać będziemy następującą klasę obciążeń masowych

$$\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_0(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{B}_1(\mathbf{x})\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_2(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}} + (\text{Grad } \mathbf{u})\mathbf{r}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in B_1 \quad (15)$$

oraz powierzchniowych

$$\mathbf{p}_1 = \hat{\mathbf{p}}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{P}_0(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{P}_1(\mathbf{x})\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{P}_2(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}} + (\text{Grad } \mathbf{u})\mathbf{s}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial B_1, \quad (16)$$

gdzie $\hat{\mathbf{b}}_1$, $\hat{\mathbf{p}}_1$ są znanymi wektorami obciążeń statycznych, $\mathbf{B}_k$, $\mathbf{P}_k$ – znanymi tensorami oddziaływania pól zewnętrznych oraz $\mathbf{r}$ i $\mathbf{s}$ – znanymi wektorami obciążeń śledzących [4].

Pomijając obciążenia śledzące oraz przyjmując, że $\mathbf{B}_0^T = \mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_2^T = \mathbf{B}_2$, $\mathbf{P}_0^T = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_2^T = \mathbf{P}_2$, to wtedy

$$\mathcal{W} = \mathcal{T} + \mathcal{V} + \mathcal{R}, \quad (17)$$

gdzie

$$\mathcal{T} = \int_{B_1} \frac{1}{2} \rho_1 \mathbf{B}_2 \times (\dot{\mathbf{u}} \otimes \dot{\mathbf{u}}) dV + \int_{\partial B_1} \frac{1}{2} \mathbf{P}_2 \times (\dot{\mathbf{u}} \otimes \dot{\mathbf{u}}) d(\partial V), \quad (18)$$

$$\mathcal{V} = \int_{B_1} [\rho_1 \hat{\mathbf{b}} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \rho_1 \mathbf{B}_0 \times (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})] dV + \int_{\partial B_1} [\hat{\mathbf{p}} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{P}_0 \times (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})] d(\partial V), \quad (19)$$

$$\mathcal{R} = \int_0^t \left\{ \int_{B_1} \mathbf{B}_1 \times (\dot{\mathbf{u}} \otimes \dot{\mathbf{u}}) dV + \int_{\partial B_1} \mathbf{P}_1 \times (\dot{\mathbf{u}} \otimes \dot{\mathbf{u}}) d(\partial V) \right\} dt. \quad (20)$$

W ogólnym przypadku tensory $\mathbf{B}_k$ i $\mathbf{P}_k$ mogą być dowolne. Gdy $\mathbf{B}_0$ i $\mathbf{P}_0$ są symetryczne, wówczas mamy do czynienia z obciążeniami zachowawczymi typu sprężystego, w przypadku przeciwnym (antysymetryczne) są obciążeniami niezachowawczymi typu cyrkulacyjnego. Kiedy tensory $\mathbf{B}_1$ i $\mathbf{P}_1$ są symetryczne, to występują obciążenia dysypatywne, a gdy są antisymetryczne, wówczas mamy do czynienia z obciążeniami żyroskopowymi. Składniki obciążeń zależne od przyspieszeń określają oddziaływania pól zewnętrznych, powodujących pojawienie się mas towarzyszących (np. obciążenia spowodowane opływem).

W dalszej części pracy sformułowaną zasadę zachowania energii całkowitej zastosowano do wyprowadzenia ogólnych równań ruchu jednowymiarowych, liniowych modeli ciała trójwymiarowego.

2. Równania ruchu jednowymiarowych, liniowych modeli ośrodka ciągłego

Zakładamy, że obszar B_1 zajmowany przez ciało będące w stanie naturalnym można przedstawić w postaci iloczynu kartezjańskiego $B_1 = A \times A$, gdzie $A \subset R^2$ jest płaskim obszarem o brzegu ∂A , a A — odcinkiem $\langle 0, L \rangle$ linii odwzorowującej materialną oś ciała. W tym przypadku mamy do czynienia z ciałem smukłym. Przyjmujemy, że pole przemieszczeń można przedstawić

$$\mathbf{u} = U(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{q}(x^3, t), \quad \hat{\mathbf{x}} \in A, \quad x^3 \in A, \quad t \in R_+, \quad (21)$$

gdzie U jest znanym polem tensorowym określonym w obszarze A , $\mathbf{q}$ — funkcją wektorową $\{q^r\}$ niezależnych współrzędnych uogólnionych, $\hat{\mathbf{x}}(x^1, x^2)$ — wektorem pozycyjnym cząstki w przekroju A , x^3 — współrzędną wzdłuż osi ciała. W zależności od postulowanego tensora U oraz liczby współrzędnych uogólnionych mamy do czynienia z różnymi jednowymiarowymi, liniowymi modelami trójwymiarowego ciała smukłego.

Rozważając teorię geometrycznie liniową posłużymy się liniową częścią tensora odkształcenia (4), to znaczy przyjmujemy

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\text{Grad } \mathbf{u} + (\text{Grad } \mathbf{u})^T]. \quad (22)$$

Podstawiając (21) do związków (10), (11), (12) i (13) oraz wykorzystując (15), (16) i (22) otrzymujemy kolejno

— energię kinetyczną

$$\mathcal{K} = \int_0^L \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} dx^3, \quad (23)$$

gdzie

$$\mathbf{M} = \int_A \rho_1 \mathbf{U}^T \mathbf{U} dA, \quad \mathbf{M}^T = \mathbf{M}, \quad (24)$$

— energię sprężystą

$$\mathcal{E} = \int_0^L [\frac{1}{2} \mathbf{q} \mathbf{K}_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \mathbf{K}_1 \mathbf{q}' + \frac{1}{2} \mathbf{q}' \mathbf{K}_2 \mathbf{q}'] dx^3, \quad (25)$$

gdzie

$$\mathbf{K}_0 = \int_A \left[\frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} \times \mathbf{C} \times \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} \right)^{(2,3)} \right] dA, \quad \mathbf{K}_0^T = \mathbf{K}_0, \quad (26)$$

$$\mathbf{K}_1 = \int_A \left[\frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} \times \mathbf{C} \times (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{U}) \right] dA, \quad (27)$$

$$\mathbf{K}_2 = \int_A [(\mathbf{U}^T \otimes \mathbf{e}_3) \times \mathbf{C} \times (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{U})] dA, \quad \mathbf{K}_2^T = \mathbf{K}_2, \quad (28)$$

— energię dysypowaną

$$\mathcal{D} = \int_0^t \int_0^L [\dot{\mathbf{q}} \mathbf{D}_0 \dot{\mathbf{q}} + 2 \dot{\mathbf{q}} \mathbf{D}_1 \mathbf{q}' + \mathbf{q}' \mathbf{D}_2 \mathbf{q}'] dx^3 dt, \quad (29)$$

gdzie

$$\mathbf{D}_0 = \int_A \left[\frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} \times \mathbf{D} \times \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} \right)^{(2,3)} \right] dA, \quad \mathbf{D}_0^T = \mathbf{D}_0, \quad (30)$$

$$\mathbf{D}_1 = \int_A \left[\frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} \times \mathbf{D} \times (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{U}) \right] dA, \quad (31)$$

$$\mathbf{D}_2 = \int_A [(\mathbf{U}^T \otimes \mathbf{e}_3) \times \mathbf{D} \times (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{U})] dA, \quad \mathbf{D}_2^T = \mathbf{D}_2, \quad (32)$$

— pracę obciążeń zewnętrznych

$$\mathcal{W} = \int_0^t \int_0^L \dot{\mathbf{q}} [\mathbf{f} + \mathbf{K}_{0F} \mathbf{q} + \mathbf{K}_{1K} \mathbf{q}' + \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{q}}] dx^3 dt, \quad (33)$$

gdzie

$$\mathbf{f} = \int_A \rho_1 \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{b}} dA + \int_{\partial A} \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{p}} d(\partial A), \quad (34)$$

$$\mathbf{K}_{0F} = \int_A \rho_1 \mathbf{U}^T \mathbf{B}_0 \mathbf{U} dA + \int_A \rho_1 \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} \mathbf{r} dA + \int_{\partial A} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{U} d(\partial A) + \int_{\partial A} \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} \mathbf{s} d(\partial A), \quad (35)$$

$$\mathbf{K}_{1F} = \int_{\partial A_1} s_3 \mathbf{U}^T \mathbf{U} d(\partial A), \quad \mathbf{K}_{1F}^T = \mathbf{K}_{1F}, \quad (36)$$

$$\mathbf{R} = \int_{A_1} \bar{\rho}_1 \mathbf{U}^T \mathbf{B}_1 \mathbf{U} dA + \int_{\partial A_1} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{U} d(\partial A), \quad (37)$$

$$\mathbf{M}_F = \int_{A_1} \rho_1 \mathbf{U}^T \mathbf{B}_2 \mathbf{U} dA + \int_{\partial A_1} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_2 \mathbf{U} d(\partial A). \quad (38)$$

W napisanych powyżej zależnościach $\mathbf{e}_3$ jest wersorem stycznym do osi modelu jednowymiarowego, nadto kropką oznaczono pochodną po czasie t , a „primem” pochodną po zmiennej x^3 .

Mając określone energie ciała i prace obciążeń, na podstawie zasady zachowania energii całkowitej (14), można wyprowadzić równania ruchu i odpowiednie warunki dla liniowych, jednowymiarowych modeli ośrodka ciągłego, poddanych obciążeniom typu (15) i (16). Rozdzielając wektor współrzędnych uogólnionych oraz obciążenia $\mathbf{f}$ na część niezależną i zależną od czasu, otrzymamy równania i warunki brzegowe statyki

$$(\mathbf{K}_2 \mathbf{q}' + \mathbf{K}_1^T \mathbf{q})' - (\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_{1F}) \mathbf{q}' - (\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_{0F}) \mathbf{q} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (39)$$

$$\mathbf{q} (\mathbf{K}_2 \mathbf{q}' + \mathbf{K}_1^T \mathbf{q})|_0^L = \mathbf{0} \quad (40)$$

oraz dynamiki

$$(\mathbf{K}_2 \mathbf{q}' + \mathbf{K}_1^T \mathbf{q} + \mathbf{D}_2 \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_1^T \dot{\mathbf{q}})' - (\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_{1F}) \mathbf{q}' - (\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_{0F}) \mathbf{q} +$$

$$- \mathbf{D}_1 \dot{\mathbf{q}}' - (\mathbf{D}_0 - \mathbf{R}) \dot{\mathbf{q}} - (\mathbf{M} - \mathbf{M}_F) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (41)$$

$$\dot{\mathbf{q}} (\mathbf{K}_2 \mathbf{q}' + \mathbf{K}_1^T \mathbf{q} + \mathbf{D}_2 \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_1^T \dot{\mathbf{q}})|_0^L = \mathbf{0}. \quad (42)$$

W wielu zadaniach mechaniki konstrukcji ruch ciała należy odnosić do pewnej, ustalonej konfiguracji ciała odkształconego. Wtedy ruch traktuje się jako zaburzenie pewnego stanu równowagi trwałej. Przykładem mogą tu być drgania konstrukcji znajdujących się w ruchu obrotowym. Aby otrzymać wyniki zgodne z doświadczeniem rozważa się małe oscylacje wokół położenia równowagi odkształconej siłami odśrodkowymi.

Następnie rozważać będziemy ruch ciała wstępnie napiętego. Pole naprężeń podczas ruchu ciała można napisać

$$\tilde{\mathbf{T}}_1 = \tilde{\mathbf{T}} + \mathbf{S}, \quad (43)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{T}}$ jest tensorem naprężeń dynamicznych, $\mathbf{S}$ – tensorem stałych naprężeń wstępnych. Wtedy we wzorze (5) mamy

$$\int_{B_1} (\mathbf{T}_1 \times \dot{\mathbf{E}}) dV = \frac{d}{dt} (\mathcal{E} + \mathcal{D} + \mathcal{W}_S), \quad (44)$$

gdzie

$$\mathcal{W}_S = \int_{B_1} (\mathbf{S} \times \mathbf{E}) dV \quad (45)$$

jest pracą naprężeń wstępnych na odkształceniach dynamicznych. Aby otrzymać wpływ naprężeń wstępnych na ruch ciała należy uwzględnić część nieliniową tensora odkształcenia (4), to znaczy należy przyjąć

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\text{Grad } \mathbf{u} + (\text{Grad } \mathbf{u})^T + (\text{Grad } \mathbf{u})(\text{Grad } \mathbf{u})^T]. \quad (46)$$

Dla przypadku jednowymiarowego, liniowego modelu ciała (21) istotna składowa pracy naprężeń wstępnych wyraża się wzorem

$$\mathcal{W}_S = \int_0^L (\frac{1}{2} \mathbf{q} \mathbf{K}_{0S} \mathbf{q} + \mathbf{q} \mathbf{K}_{1S} \mathbf{q}' + \frac{1}{2} \mathbf{q}' \mathbf{K}_{2S} \mathbf{q}') dx^3, \quad (47)$$

gdzie

$$\mathbf{K}_{0S} = \int_A \text{tr}_{(2,3)} \left[\frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} \mathbf{S} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} \right)^{(2,3)}_T \right] dA, \quad \mathbf{K}_{0S}^T = \mathbf{K}_{0S}, \quad (48)$$

$$\mathbf{K}_{1S} = \int_A \text{tr}_{(2,3)} \left[\frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \hat{\mathbf{x}}_1} \mathbf{S} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{U}) \right] dA,$$

$$\mathbf{K}_{2S} = \int_A \text{tr}_{(2,3)} [(\mathbf{U}^T \otimes \mathbf{e}_3) \mathbf{S} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{U})] dA, \quad \mathbf{K}_{2S}^T = \mathbf{K}_{2S}. \quad (49)$$

Wtedy równania i warunki brzegowe dla dynamiki mają postać

$$[(\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_{2S}) \mathbf{q}' + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_{1S})^T \mathbf{q} + \mathbf{D}_2 \dot{\mathbf{q}}' + \mathbf{D}_1^T \dot{\mathbf{q}}]' - (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_{1S} - \mathbf{K}_{1F}) \mathbf{q}' + \\ - (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{0S} - \mathbf{K}_{0F}) \mathbf{q} - \mathbf{D}_1 \dot{\mathbf{q}}' - (\mathbf{D}_0 - \mathbf{R}) \dot{\mathbf{q}} - (\mathbf{M} - \mathbf{M}_F) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (50)$$

$$\dot{\mathbf{q}} [(\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_{2S}) \mathbf{q}' + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_{1S})^T \mathbf{q} + \mathbf{D}_2 \dot{\mathbf{q}}' + \mathbf{D}_1^T \dot{\mathbf{q}}]_0^L = \mathbf{0}. \quad (51)$$

3. Zasada wariacyjna dla zagadnień niezachowawczych

Równanie ruchu (50) można napisać w postaci operatorowej

$$\mathcal{A} \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (52)$$

Będziemy przyjmować, że $\mathcal{A}$ jest liniowym operatorem różniczkowym, określonym na rozmaiłości $\mathcal{M}$ funkcji $\mathbf{q}(x^3, t)$ całkowalnych z kwadratem i spełniających warunki brzegowe

$$\mathbf{H} \mathbf{q}|_0^L = \mathbf{0}, \quad (53)$$

gdzie

$$\mathbf{H} = (\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_{2S}) \mathbf{q}' + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_{1S})^T \mathbf{q} + \mathbf{D}_2 \dot{\mathbf{q}}' + \mathbf{D}_1^T \dot{\mathbf{q}} \quad (54)$$

jest wektorem sił wewnętrznych.

Poszukiwać będziemy pary $(\mathcal{A}^*, \mathcal{M}^*)$ złożonej z operatora różniczkowego $\mathcal{A}^*$ formalnie sprzężonego z operatorem $\mathcal{A}$ oraz rozmaiłości $\mathcal{M}^*$ funkcji $\mathbf{q}_*(x^3, t)$ całkowalnych z kwadratem oraz spełniających równanie

$$\mathcal{A}^* \mathbf{q}_* = \mathbf{0} \quad (55)$$

i warunki brzegowe

$$\mathbf{H}^* \mathbf{q}_*|_0^L = 0, \quad (56)$$

gdzie $\mathbf{H}^*$ jest nieznanym, sprzężonym wektorem sił wewnętrznych.

Operator różniczkowy $\mathcal{A}^*$ określony na rozmaitości $\mathcal{M}$ nazywamy formalnie sprzężonym z operatorem $\mathcal{A}$, określonym na rozmaitości $\mathcal{M}$ jeśli [5]:

$$\bigwedge_{\mathbf{q}_* \in \mathcal{M}} \bigwedge_{\mathbf{q} \in \mathcal{M}} \langle \mathbf{q}_*, \mathcal{A} \mathbf{q} \rangle = \langle \mathcal{A}^* \mathbf{q}_*, \mathbf{q} \rangle + \mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_*), \quad (57)$$

gdzie funkcję $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_*)$ nazywamy zespoleniem wektorów $\mathbf{q}$ i $\mathbf{q}_*$.

Przyjmując, że rozważane funkcje wektorowe należą do przestrzeni $\mathcal{L}^2(A \times R_+)$ funkcji całkowalnych z kwadratem, to ich iloczyn skalarny określamy

$$\bigwedge_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathcal{L}^2} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle = \int_0^t \int_0^L \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 dx^3 dt. \quad (58)$$

Aby wyznaczyć parę $(\mathcal{A}^*, \mathcal{M}^*)$ należy całkować przez części iloczyn skalarny $\langle \mathbf{q}^*, \mathcal{A} \mathbf{q} \rangle$. Postępując tak otrzymujemy formalnie sprzężone równanie ruchu (55) w jawnej postaci:

$$[(\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_{2S}) \mathbf{q}'_* + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_{1S} - \mathbf{K}_{1F})^T \mathbf{q}_* - \mathbf{D}_2 \dot{\mathbf{q}}_* - \mathbf{D}_1^T \dot{\mathbf{q}}_*]' - \mathbf{K}_1 \mathbf{q}'_* - \\ - (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{0S} - \mathbf{K}_{0F}^T) \mathbf{q}_* + \mathbf{D}_1 \dot{\mathbf{q}}_* + (\mathbf{D}_0 - \mathbf{R}^T) \dot{\mathbf{q}}_* - (\mathbf{M} - \mathbf{M}_F^T) \ddot{\mathbf{q}}_* = 0 \quad (59)$$

oraz zespolenie

$$\mathcal{L} = \int_0^L (\pi^* \mathbf{q} - \pi \mathbf{q}_*)|_0^t dx - \int_0^t (\mathbf{H}^* \mathbf{q} - \mathbf{H} \mathbf{q}_*)|_0^L dt - \frac{1}{2} (\mathbf{q} \mathbf{D}_2 \mathbf{q}'_* + \mathbf{q}_* \mathbf{D}_2 \mathbf{q}')|_0^L, \quad (60)$$

gdzie

$$\mathbf{H}^* = (\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_{2S}) \mathbf{q}'_* + (\mathbf{K}_1^T + \mathbf{K}_{1S}^T - \mathbf{K}_{1F}^T) \mathbf{q}_* - \mathbf{D}_2 \mathbf{q}'_* - \mathbf{D}_2 \dot{\mathbf{q}}_* - \mathbf{D}_1^T \dot{\mathbf{q}}_* \quad (61)$$

jest poszukiwaną sprzężoną siłą wewnętrzną, a

$$\pi = (\mathbf{M} - \mathbf{M}_F) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} (\mathbf{D}_0 - \mathbf{R}) \mathbf{q} + \mathbf{D}_1 \mathbf{q}' - \frac{1}{2} (\mathbf{D}_2 \mathbf{q}')' \quad (62)$$

i

$$\pi^* = (\mathbf{M} - \mathbf{M}_F^T) \dot{\mathbf{q}}_* - \frac{1}{2} (\mathbf{D}_0 - \mathbf{R}^T) \mathbf{q}_* - \mathbf{D}_1 \mathbf{q}'_* + \frac{1}{2} (\mathbf{D}_2 \mathbf{q}'_*)' \quad (63)$$

są wektorami pędów uogólnionych.

Dla warunków brzegowych (53) i (56) drugi składnik zespolenia zeruje się. Jeśli $\mathcal{L} = 0$, to operatory $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^*$ nazywamy operatorami sprzężonymi, a rozmaitości $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^*$ dualnymi. Jeśli natomiast $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ i $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*$ wtedy zagadnienia brzegowe (52) i (53) nazywamy samosprzężonymi. Ma to miejsce tylko wtedy, kiedy nie występuje dysypacja energii ($\mathbf{D}_k = 0$), obciążenia są żyroskopowe ($\mathbf{R}^T = -\mathbf{R}$), niecyrkulacyjne i niesledzące ($\mathbf{K}_{0F}^T = \mathbf{K}_{0F}$, $\mathbf{K}_{1F} = 0$), a masy towarzyszące są symetryczne ($\mathbf{M}_F^T = \mathbf{M}_F$).

W dalszym ciągu ustalimy funkcję $\mathcal{L}$ zmiennych $\mathbf{q} \in \mathcal{M}$ i $\mathbf{q}_* \in \mathcal{M}$ oraz ich pochodnych, taką, że równania (50) i (59) będą warunkami koniecznymi stacjonarności funkcjonału

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \mathcal{L} dx dt. \quad (64)$$

Wtedy powyższy funkcjonal nazywać będziemy uogólnionym funkcjonalem działania.

Przypuśćmy, że poszukiwana funkcja ma postać

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_*, \mathbf{q}', \mathbf{q}'_*, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_*, \dot{\mathbf{q}}', \dot{\mathbf{q}}'_*) \quad (65)$$

i jest funkcją różniczkowalną względem swoich argumentów. Zatem jest ona określona lokalnie, to znaczy, że zależy od ruchów $\mathbf{q}$ i $\mathbf{q}^*$ w otoczeniu punktu (x^3, t) przestrzeni $\Omega = A \times R_+$.

W rozważanym przypadku wariację funkcjonału (64), spowodowaną zmianą ruchu, można napisać

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{J} = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \left[\frac{D\mathcal{L}}{D\mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{D\mathcal{L}}{D\dot{\mathbf{q}}} \right) \right] \delta \mathbf{q} + \left[\frac{D\mathcal{L}}{D\mathbf{q}_*} - \frac{d}{dt} \left(\frac{D\mathcal{L}}{D\dot{\mathbf{q}}_*} \right) \right] \delta \mathbf{q}_* \right\} dx dt + \\ & + \int_0^L \left(\frac{D\mathcal{L}}{D\dot{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} + \frac{D\mathcal{L}}{D\dot{\mathbf{q}}_*} \delta \mathbf{q}_* \right) \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{D\mathcal{L}}{D\dot{\mathbf{q}}'} \delta \mathbf{q} + \frac{D\mathcal{L}}{D\dot{\mathbf{q}}'_*} \delta \mathbf{q}_* \right) \Big|_0^L dt + \\ & + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}'} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}'_*} \delta \mathbf{q}_* \right) \Big|_{t_1}^{t_2} \Big|_0^L, \end{aligned} \quad (66)$$

gdzie

$$\frac{D\mathcal{L}}{D\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}'} \right), \quad \frac{D\mathcal{L}}{D\mathbf{p}'} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{p}'} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{p}}'} \right). \quad (67)$$

$$(\mathbf{p} = \mathbf{q}, \mathbf{q}_*, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_*).$$

Żądać będziemy, aby

$$\frac{D\mathcal{L}}{D\mathbf{q}_*} - \frac{d}{dt} \left(\frac{D\mathcal{L}}{D\dot{\mathbf{q}}_*} \right) \equiv \mathcal{A}\mathbf{q}, \quad \frac{D\mathcal{L}}{D\mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{D\mathcal{L}}{D\dot{\mathbf{q}}} \right) \equiv \mathcal{A}^*\mathbf{q}_* \quad (68)$$

oraz

$$\mathbf{H} = -\frac{D\mathcal{L}}{D\dot{\mathbf{q}}_*}, \quad \mathbf{H}^* = -\frac{D\mathcal{L}}{D\dot{\mathbf{q}}'}, \quad (69)$$

$$\pi = \frac{D\mathcal{L}}{D\dot{\mathbf{q}}_*}, \quad \pi^* = \frac{D\mathcal{L}}{D\dot{\mathbf{q}}'}. \quad (70)$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{J} = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [(\mathcal{A}^*\mathbf{q}_*) \delta \mathbf{q} + (\mathcal{A}\mathbf{q}) \delta \mathbf{q}_*] dx dt + \int_0^L (\pi^* \delta \mathbf{q} + \pi \delta \mathbf{q}_*) \Big|_{t_1}^{t_2} dx - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{H}^* \delta \mathbf{q} + \mathbf{H} \delta \mathbf{q}_*) \Big|_0^L dt + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}'} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}'_*} \delta \mathbf{q}_* \right) \Big|_{t_1}^{t_2} \Big|_0^L. \end{aligned} \quad (71)$$

Korzystając z ustalonych jawnych postaci operatorów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^*$ oraz zależności dla uogólnionych sił wewnętrznych $\mathbf{H}$ i $\mathbf{H}^*$ i pędów π , π^* , otrzymujemy

$$\delta \mathcal{J} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \mathcal{L} dx dt + \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}'} + \frac{1}{2} \mathbf{D}_2 \mathbf{q}'_* \right) \delta \mathbf{q} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}'_*} - \frac{1}{2} \mathbf{D}_2 \mathbf{q}' \right) \delta \mathbf{q}_* \right] \Big|_{t_1}^{t_2} \Big|_0^L, \quad (72)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \dot{\mathbf{q}}_*(\mathbf{M} - \mathbf{M}_F) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_*(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{0S} - \mathbf{K}_{0F}) \mathbf{q} - \mathbf{q} \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_{1S} \mathbf{q}' - \mathbf{q}_*(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_{1S} - \mathbf{K}_{1F}) \mathbf{q}' - \\ & - \mathbf{q}'_*(\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_{2S}) \mathbf{q}' - \frac{1}{2} \mathbf{q}_*(\mathbf{D}_0 - \mathbf{R}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_*(\mathbf{D}_0 - \mathbf{R}) \mathbf{q} + \\ & + \dot{\mathbf{q}}_* \mathbf{D}_1 \mathbf{q}' - \dot{\mathbf{q}} \mathbf{D}_1 \mathbf{q}'_* - \frac{1}{2} \mathbf{q}'_* \mathbf{D}_2 \dot{\mathbf{q}}' + \frac{1}{2} \mathbf{q}' \mathbf{D}_2 \dot{\mathbf{q}}'_* \end{aligned} \quad (73)$$

jest poszukiwaną jawną postacią uogólnioną, właściwej funkcji Lagrange'a dla liniowych, jednowymiarowych modeli ośrodka ciągłego. Przy tak dobranej funkcji Lagrange'a drugi składnik w zależności (72) równy jest zeru, gdyż na podstawie (73) mamy

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}'} = -\frac{1}{2} \mathbf{D}_2 \mathbf{q}'_*, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}'_*} = \frac{1}{2} \mathbf{D}_2 \mathbf{q}' \quad (74)$$

dla każdego x^3 i t .

Określając dodatkowo uogólnione wektory sił zewnętrznych

$$\mathcal{F} = \frac{D\mathcal{L}}{D\mathbf{q}_*}, \quad \mathcal{F}^* = \frac{D\mathcal{L}}{D\mathbf{q}} \quad (75)$$

równania ruchu (50) i (59) można napisać w postaci

$$\dot{\pi} = \mathcal{F}, \quad \dot{\pi}^* = \mathcal{F}^*. \quad (76)$$

Przyjmując, że na końcach przedziałów całkowania $\langle 0, t \rangle$ i $\langle 0, L \rangle$ spełnione są warunki $\partial \mathbf{q} = \partial \mathbf{q}^* = \mathbf{0}$ oraz uwzględniając równania (52) i (55), na podstawie (71) otrzymujemy $\partial \mathcal{J} = 0$.

Zatem, w rzeczywistości realizuje się ruch, dla którego

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}^* dt, \quad \mathcal{L}^* = \int_0^L \mathcal{L} dx \quad (77)$$

osiąga wartość stacjonarną dla każdego $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ w zbiorze ruchów porównawczych, spełniających warunki

$$\delta \mathbf{q}(\xi) = \delta \mathbf{q}_*(\xi) = \mathbf{0} \quad (78)$$

dla $\xi = t_1, t_2, 0$ i L .

Powyższe stwierdzenie jest uogólnieniem zasady Hamiltona dla liniowych, jednowymiarowych modeli ośrodka ciągłego, znajdujących się pod działaniem obciążeń niezachowawczych.

4. Dyskretyzacja równań ruchu jednowymiarowych układów niezachowawczych

Powyżej ustalono, że zagadnienia brzegowe (52), (53) i (55), (56) są równoważne poszukiwaniu minimum funkcjonatu (77). W związku z tym, do dyskretyzacji i przybliżonego rozwiązywania omawianych zagadnień można stosować metodę Ritz'a [6], przyjmując ciągi minimalizujące w postaci

$$\mathbf{q} = \Phi(x) \xi(t), \quad \mathbf{q}_* = \Phi_*(x) \xi_*(t), \quad (79)$$

gdzie

$$\Phi = \text{diag} [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m], \quad \Phi_* = \text{diag} [\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_m^*] \quad (80)$$

są macierzami zadanych funkcji bazowych $\varphi_{ij}, \varphi_{ij}^*, (j=1, 2, \dots, n)$, tworzących ciągi zupełne funkcji liniowo niezależnych i spełniających geometryczne warunki brzegowe. Natomiast ξ, ξ_* są wektorami nieznanymi funkcji czasu, spełniających warunki $\delta\xi = \delta\xi_* = 0$ na krańcach przedziału $\langle t_1, t_2 \rangle$. Aby uchronić się przed niestabilnością procesu Ritza, funkcje bazowe winny nadto być ortogonalne w przestrzeni Fridrichsa generowanej przez operator $\mathcal{A}$ [7].

Po podstawieniu (79) do (73) i (77) uogólniona funkcja Lagrange'a staje się formą dwuliniową funkcji niewiadomych i ich pochodnych względem czasu

$$\mathcal{L}^* = \dot{\xi}_*^T \mathbf{A} \dot{\xi} - \xi_*^T \mathbf{B}_1 \dot{\xi} + \dot{\xi}_*^T \mathbf{B}_2 \dot{\xi} - \xi_*^T \mathbf{C} \xi, \quad (81)$$

gdzie oznaczono

$$\mathbf{A} = \int_0^L \Phi_*^T (\mathbf{M} - \mathbf{M}_F) \Phi \, dx, \quad (82)$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2} \int_0^L [\Phi_*^T (\mathbf{D}_0 - \mathbf{R}) \Phi + 2\Phi_*'^T \mathbf{D}_1^T \Phi + \Phi_*'^T \mathbf{D}_2 \Phi'] \, dx, \quad (83)$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{2} \int_0^L [\Phi_*^T (\mathbf{D}_0 - \mathbf{R}) \Phi + 2\Phi_*^T \mathbf{D}_1 \Phi' + \Phi_*^T \mathbf{D}_2 \Phi'] \, dx, \quad (84)$$

$$\mathbf{C} = \int_0^L [\Phi_*^T (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{0S} - \mathbf{K}_{0F}) \Phi + \Phi_*'^T (\mathbf{K}_1^T + \mathbf{K}_{1S}^T) \Phi + \Phi_*^T (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_{1S} - \mathbf{K}_{1F}) \Phi' + \Phi_*'^T (\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_{2S}) \Phi'] \, dx. \quad (85)$$

Wykorzystując uogólnioną zasadę Hamiltona otrzymujemy równania różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach dla zadania pierwotnego

$$\mathbf{A} \ddot{\xi} = \mathbf{B} \dot{\xi} + \mathbf{C} \xi = 0 \quad (86)$$

oraz zadania sprzężonego

$$\mathbf{A}^T \ddot{\xi}_* - \mathbf{B}^T \dot{\xi}_* + \mathbf{C}^T \xi_* = 0, \quad (87)$$

gdzie

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2. \quad (88)$$

Poszukując rozwiązań w postaci

$$\xi = \bar{\xi} e^{\lambda t}, \quad (89)$$

otrzymujemy

$$(\lambda^2 \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} + \mathbf{C}) \bar{\xi} = 0, \quad (90)$$

tj. układ równań algebraicznych, liniowych i jednorodnych dla zadania pierwotnego. Na to, aby istniało rozwiązanie nietrywialne, potrzeba i wystarcza aby

$$\det(\lambda^2 \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} + \mathbf{C}) = 0. \quad (91)$$

Jest to wielomian charakterystyczny stopnia $2N$ ze względu na λ . Pierwiastkami tego równania mogą być liczby rzeczywiste lub zespolone. Jeśli część rzeczywista jednego z pierwiast-

ków zespolonych jest dodatnia, mamy do czynienia ze zjawiskiem flutteru (drzganiami o amplitudach wzrastających z upływem czasu). Jeśli natomiast jeden z pierwiastków rzeczywistych jest dodatni, występuje zjawisko rozbieżności (utrata stateczności statycznej). Drżania okresowe występują wtedy, gdy wszystkie części rzeczywiste pierwiastków zespolonych są niedodatnie.

Elementy macierzy równania (91) zależą od stałych materiałowych, rozkładu mas oraz parametrów obciążenia. Wartości krytyczne parametrów obciążenia dla zjawiska flutteru wyznacza się z warunków zerowania się części rzeczywistych pierwiastków zespolonych.

Wprowadzając oznaczenie

$$\eta = \lambda \xi \quad (92)$$

równanie (90) można przedstawić w postaci standardowej

$$\mathbf{P}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad (93)$$

wygodnej do obliczeń numerycznych, gdzie

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0, & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}, & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \text{col}(\xi, \eta), \quad (94)$$

a $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową.

Do obliczania wartości i wektorów własnych zagadnienia (93) można stosować metody i algorytmy znane w literaturze [8, 9].

5. Przykład

Poniżej przedstawiono przykład ilustrujący wykorzystanie ogólnych zależności i równań.

Najpierw należy ustalić równania drgań pręta poddanego działaniu obciążeń spowodowanych ruchem obrotowym. Przyjmujemy, że pręt prosty o stałym przekroju poprzecznym wykonany jest z materiału lepko-sprężystego, jednorodnego i izotropowego, że drżania jego odbywają się w płaszczyźnie ruchu obrotowego, odbywającego się ze stałą w czasie prędkością kątową względem osi prostopadłej do osi pręta. Przy poczynionych założeniach składowe tensora sprężystości i tensora dysypacji określone są następująco

$$\begin{aligned} C^{ijkl} &= G(\delta^{ik}\delta^{jk} + \delta^{il}\delta^{jk}) + \lambda\delta^{ij}\delta^{kl}, \\ D^{ijkl} &= G^*(\delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}) + \lambda^*\delta^{ij}\delta^{kl}, \end{aligned} \quad (95)$$

$$(i, j, k, l = 1, 2, 3)$$

gdzie G i λ oraz G^* i λ^* są stałymi materiałowymi, określającymi sprężyste oraz lepkie zachowanie się materiału, δ jest symbolem Kroneckera. Składowe wektora przemieszczenia dowolnej cząstki pręta, znajdującej się przed odkształceniem w miejscu (x_1^1, x_1^2, x_1^3) przyjmujemy jako

$$u_1 = 0, \quad u_2 = u_2^0(x_1^3, t), \quad u_3 = u_3^0(x_1^3, t) + x_1^2 \omega(x_1^3, t), \quad (96)$$

gdzie u_α^0 – składowe przemieszczenia cząstki znajdującej się na osi pręta, ω – kąt zgięcia.
Obciążenie masowe spowodowane jednostajnym ruchem obrotowym

$$\mathbf{b} = -\overset{2}{\Omega}\mathbf{x} - \overset{2}{\Omega}\mathbf{u} - 2\Omega\dot{\mathbf{u}}, \quad (97)$$

gdzie $\Omega = \varepsilon_{ijk}\overset{2}{\Omega}_i\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$ jest tensorem ruchu obrotowego. W dalszym ciągu przyjmiemy $\Omega_1 = -\Omega$, $\Omega_2 = \Omega_3 = 0$.

Przyjmując wektor współrzędnych uogólnionych

$$\mathbf{q} = \text{col}(u_2^0, u_3^0, \omega) \quad (98)$$

mamy

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & x_1^2 \end{bmatrix}. \quad (99)$$

Następnie określamy

$$\mathbf{M} = \rho A \text{diag}[1, 1, r^2], \quad r^2 = \frac{I}{A}, \quad (100)$$

$$\mathbf{K}_0 = GA \text{diag}[0, 0, 1], \quad \mathbf{K}_1 = GA \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (101)$$

$$\mathbf{K}_2 = GA \text{diag}[1, 0, 0] + (2G + \lambda)A \text{diag}[0, 1, r^2],$$

oraz analogicznie

$$\mathbf{D}_0 = G^*A \text{diag}[0, 0, 1], \quad \mathbf{D}_1 = G^*A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (102)$$

$$\mathbf{D}_2 = G^*A \text{diag}[1, 0, 0] + (2G^* + \lambda^*)A \text{diag}[0, 1, r^2],$$

gdzie $I = \int_A (x^2)^2 dA$. Dobierając odpowiednio układ współrzędnych przyjęto również $S = \int_A x^2 dA = 0$.

W rozważanym przypadku $\hat{\mathbf{b}} = -\overset{2}{\Omega}\mathbf{x}$, $\mathbf{B}_0 = -\overset{2}{\Omega}$, $\mathbf{B}_1 = -2\Omega$. Uwzględniając, że

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Omega \quad (103)$$

otrzymujemy

$$\mathbf{f} = \rho A \Omega^2 \text{col}(0, x_1^3, 0), \quad \mathbf{K}_{0F} = \rho A \Omega^2 \text{diag}[1, 1, r^2], \quad (104)$$

$$\mathbf{R} = 2\rho A \Omega \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poszukiwane równania ruchu przedstawimy w postaci bezwymiarowej. W tym celu wprowadzamy bezwymiarowe zmienne

$$\xi = \frac{x^3}{L}, \quad \eta = \frac{u_2^0}{L}, \quad \zeta = \frac{u_3^0}{L}, \quad \tau = \Omega t \quad (105)$$

oraz bezwymiarowe parametry

$$\mu_\alpha = \frac{C_\alpha}{\Omega L}, \quad \mu_\alpha^* = \frac{C_\alpha^*}{\Omega L}, \quad A = \frac{L}{r}, \quad \bar{R} = \frac{R}{L} \quad (106)$$

($\alpha = 1, 2$)

gdzie L , R to odpowiednio długość i promień zamocowania pręta oraz

$$C_1 = \sqrt{\frac{2G + \lambda}{\rho}}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad C_1^* = \sqrt{\frac{2G^* + \lambda^*}{\rho}} \Omega, \quad C_2^* = \sqrt{\frac{G^*}{\rho}} \Omega. \quad (107)$$

Na podstawie ogólnych równań (39) otrzymujemy bezwymiarowe równania statyki

$$\mu_1^2 \frac{d^2 \omega}{d\xi^2} - \mu_2^2 A^2 \left(\omega + \frac{d\eta}{d\xi} \right) + \omega = 0, \quad (108)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left(\omega + \frac{d\eta}{d\xi} \right) + \frac{1}{\mu_2^2} \eta = 0, \quad \mu_1^2 \frac{d^2 \zeta}{d\xi^2} + \zeta + \xi = 0.$$

Jeśli pręt jest jednym końcem utwierdzony, a drugi koniec ma swobodny, wówczas warunki brzegowe piszemy

$$\eta = \zeta = \omega = 0 \quad \text{dla} \quad \xi = \bar{R} \quad (109)$$

$$\omega + \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{d\omega}{d\xi} = 0 \quad \text{dla} \quad \xi = 1 + \bar{R}.$$

Rozwiązania układu (108) mają wtedy postać

$$\eta = \omega = 0 \quad (110)$$

oraz [10]

$$\varepsilon_S = \frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{1 + \frac{\bar{R}}{\mu_1} \sin \frac{1}{\mu_1}}{\cos \frac{1}{\mu_1}} \cos \frac{\xi - \bar{R}}{\mu_1} - \frac{\bar{R}}{\mu_1} \sin \frac{\xi - \bar{R}}{\mu_1} - 1. \quad (111)$$

Mając powyższe rozwiązania możemy ustalić składowe tensora naprężenia. Dla materiału opisanego przez (95) mamy

$$S = (2G + \lambda) \varepsilon_S \text{diag}[0, 0, 1]. \quad (112)$$

Wykorzystując to otrzymujemy

$$K_{0S} = (2G + \lambda) A \varepsilon_S \text{diag}[0, 0, 1], \quad K_{1S} = 0, \quad K_{2S} = (2G + \lambda) A \varepsilon_S \text{diag}[0, 1, r^2]. \quad (113)$$

Wtedy, na podstawie (50), równania drgań swobodnych rozważanego napiętego pręta mają postać

$$\begin{aligned} \mu_1^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + \varepsilon_S) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right] + \mu_1^{*2} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \tau \partial \xi^2} - \mu_2^2 A^2 \left(\omega + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) - \mu_2^{*2} A^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\omega + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) + \\ + (1 - \mu_1^2 A^2 \varepsilon_S) \omega - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} = 0, \\ \mu_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\omega + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) + \mu_2^{*2} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \xi} \left(\omega + \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) + \eta + 2 \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0, \\ \mu_1^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + \varepsilon_S) \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right] + \mu_1^{*2} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \tau \partial \xi^2} + \zeta - 2 \frac{\partial \eta}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} = 0. \end{aligned} \quad (114)$$

Rozwiązanie powyższego układu równań dla pręta wolnonośnego, przy pominięciu tłumienia i wpływu ścinania, zostało przedstawione w [10].

Równania sprzężone mają podobną budowę, występują w nich jedynie znaki przeciwne przed składnikami dysypatywnymi.

Przedstawione powyżej zadania opisane równaniami (114) i warunkami brzegowymi (109) można rozwiązać w sposób przybliżony. W tym celu należy określić macierze równania (91). Ze względu na geometryczne warunki brzegowe przyjmujemy

$$\Phi = \Phi_* = \text{diag} [\varphi, \varphi, \varphi], \quad (115)$$

gdzie

$$\varphi = (\sin \pi \zeta, \sin 2\pi \zeta, \dots, \sin n\pi \zeta). \quad (116)$$

Wykorzystując zależności (82)÷(85) oraz (100)÷(104) i (111)÷(113) otrzymujemy

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \rho A L \text{diag} [\mathbf{I}, \mathbf{I}, r^2 \mathbf{I}], \quad (117)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{0R} + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^T + \mathbf{B}_2, \quad (118)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_{0S} - \mathbf{C}_{0F} + \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_1^T + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_{2S}, \quad (119)$$

gdzie

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{2} G^* A L \text{diag} [0, 0, \mathbf{I}], \quad \mathbf{B}_1 = \frac{1}{2} G^* A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{L}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{2} G^* \frac{A}{L} \text{diag} [\mathbf{L}_2, 0, 0] + \frac{1}{2} (2G^* + \lambda^*) \frac{A}{L} \text{diag} [0, \mathbf{L}_2, r^2 \mathbf{L}_2],$$

$$\mathbf{C}_0 = \frac{1}{2} G A L \text{diag} [0, 0, \mathbf{I}], \quad \mathbf{C}_1 = \frac{1}{2} G A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{L}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_2 = \frac{1}{2} G \frac{A}{L} \text{diag} [\mathbf{L}_2, 0, 0], \quad \mathbf{C}_{0S} = \frac{1}{2} (2G + \lambda) A L \text{diag} [0, 0, \mathbf{L}_0],$$

$$\mathbf{C}_{0F} = -\Omega^2 A, \quad \mathbf{C}_{2S} = \frac{1}{2} (2G + \lambda) \frac{A}{L} \text{diag} [0, \mathbf{L}_S, r^2 \mathbf{L}_S],$$

oraz

$$(L_0)_{kl} = \frac{1 + \frac{\bar{R}}{\mu_1} \sin \frac{1}{\mu}}{\cos \frac{1}{\mu_1}} a_{kl} - \frac{\bar{R}}{\mu_1} b_{kl} - \delta_{kl},$$

$$a_{kl} = \frac{1}{\mu_1} \left[\frac{(-1)^{k+l} \sin \frac{1+\bar{R}}{\mu_1} - \sin \frac{\bar{R}}{\mu_1}}{(k+l)^2 \pi^2 - 1/\mu_1^2} - \frac{(-1)^{k+l} \sin \frac{1-\bar{R}}{\mu_1} + \sin \frac{\bar{R}}{\mu_1}}{(k-l)^2 \pi^2 - 1/\mu_1^2} \right],$$

$$b_{kl} = \frac{1}{\mu_1} \left[\frac{(-1)^{k+l} \cos \frac{1+\bar{R}}{\mu_1} - \cos \frac{\bar{R}}{\mu_1}}{(k+l)^2 \pi^2 - 1/\mu_1^2} + \frac{(1)^{k+l} \cos \frac{1-\bar{R}}{\mu_1} - \cos \frac{\bar{R}}{\mu_1}}{(k-l)^2 \pi^2 - 1/\mu_1^2} \right],$$

$$(L_1)_{kl} = [1 + (-1)^{k+l}] \frac{2kl}{k^2 - l^2}, \quad (L_1)_{kk} = 0,$$

$$(L_2)_{kl} = \pi^2 k^2 \delta_{kl},$$

$$(L_S)_{kl} = \pi^2 kl \left[\frac{1 + \frac{\bar{R}}{\mu_1} \sin \frac{1}{\mu_1}}{\cos \frac{1}{\mu_1}} c_{kl} - \frac{\bar{R}}{\mu_1} d_{kl} - \delta_{kl} \right],$$

$$c_{kl} = -\frac{1}{\mu_1} \left[(-1)^{k+l} \sin \frac{1-\bar{R}}{\mu_1} + \sin \frac{\bar{R}}{\mu_1} \right] \left[\frac{1}{(k+l)^2 \pi^2 - 1/\mu_1^2} + \frac{1}{(k-l)^2 \pi^2 - 1/\mu_1^2} \right],$$

$$d_{kl} = \frac{1}{\mu_1} \left[(-1)^{k+l} \cos \frac{1-\bar{R}}{\mu_1} - \cos \frac{\bar{R}}{\mu_1} \right] \left[\frac{1}{(k+l)^2 \pi^2 - 1/\mu_1^2} + \frac{1}{(k-l)^2 \pi^2 - 1/\mu_1^2} \right],$$

zaś **I** jest macierzą jednostkową o wymiarze $n \times n$.

Praca wpłynęła do Redakcji w marcu 1979 r.

Literatura

- [1] H. Liepholz, *Über die Erweiterung des Hamiltonschen Prinzips auf lineare nichtkonservative Probleme*, Ingenieur Archiv 40, 1971, s. 53 - 67.
- [2] G. L. Anderson, *Application of Variational Method to Dissipative, Non-Conservative Problems of Elastic Stability*, J. of Sound and Vibration 27(3), 1973, s. 279 - 296.
- [3] L. E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prence-Hall, Inc. 1969.
- [4] B. B. Bołotin, *Někonsěrwatiwnyje zadaczi teorii uprugoj ustojczivosti*, Moskwa 1961.
- [5] B. Fridman, *Wybrane zagadnienia matematyki stosowanej*, PWN, Warszawa 1966.
- [6] W. Kołodziej, *Wybrane rozdziały analizy matematycznej*, BM 36, PWN, Warszawa 1970.
- [7] S. G. Michlin, *Czislennaja rializacija wariacionnych metodow*, Izd. Nauka, Moskwa 1966.
- [8] J. J. Wilkinson, C. Reinsch, *Linear Algebra, Handbook for Automatic Computation*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971.
- [9] B. T. Smith, i in., *Matrix Eigensystem Routines-EISPACK, Guide*, 2 Edition, Springer-Verlag, Berlin 1976.
- [10] S. Janecki, *Free Vibrations of Rotating Beams as Blades of Steam Turbines*, Prace IMP, z. 42 - 44, 1969, s. 607 - 622.

**Функция Лагранжа и принцип Хамилтона для линейных
одномерных сплошных систем подвергающихся действию
несохраняющихся нагрузок**

Резюме

В работе, основываясь на общих зависимостях механики сплошных сред, выводятся уравнения движения (50) вязкоупругого тела (6), замещенного произвольными линейными одномерными моделями (21) и находящегося под влиянием несохраняющихся нагрузок (15), (16).

Пользуясь уравнениями движения (50) и с ними сопряженными уравнениями (59) выводится обобщенная функция Лагранжа (73) и формулируется обобщенный принцип Хамилтона (77) для принятого класса моделей, материала и воздействий. Показана возможность применения определенного вариационного принципа к дискретизации и приближенному численному решению обобщенной задачи.

**Lagrangian Function and Hamilton's Principle for Linear Unidimensional Continuous Systems
Subject to Non-Conservative Loading**

Summary

Equations of motion (50) of viscoelastic body (6) substituted with arbitrary linear, unidimensional models (21) and subject to non-conservative loading (15), (16) have been derived based on general relations of the mechanics of continuous media. Equations of motion (50) and conjugated equations (59) have been used for derivation of a generalized Lagrangian function (73) and formulation of a generalized Hamilton's principle (77) for the assumed class of models, materials and interaction. The possibility of application of this variational principle to discretization and approximate, numerical solution of the generally formulated problem has been shown.