

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

79

WARSZAWA - POZNAŃ 1980
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

RADA REDAKCYJNA — EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
STEFAN PERYCZ · WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ROMUALD PUZYREWSKI
KAZIMIERZ STELLER (PRZEWODNICZĄCY — CHAIRMAN) · ROBERT SZEWAŁSKI
JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY — EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER — REDAKTOR — EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA — EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN

ul. Gen. Józefa Fiszersa 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright

by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1980

Printed in Poland

ISBN 83-01-02691-X

ISSN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — ODDZIAŁ W POZNANIU

Wydanie I. Nakład 370+90 egz. Ark. wyd. 11. Ark. druk. 8,25. Papier sat. kl. V, 70 g,
70×100. Oddano do składania 2 I 1980 r. Podpisano do druku w listopadzie 1980 r. Druk
ukończono w listopadzie 1980 r. Zam. nr 343/20, T-6/506.

Cena zł 40.—

DRUKARNIA UNIWERSYTETU IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

JERZY SZCZĘSNY

Gdańsk

Kryterium stabilności dwóch klas nieliniowych układów automatycznej regulacji*

Część II. Układy ze strefą nieczułości

W pracy, dla określonej klasy układów nieliniowych ze strefą nieczułości, przeprowadzono analizę dynamiczną w obszarze małych odchyłeń i na tej podstawie sformułowano kryterium stabilności. Kryterium to – oparte na tzw. ekwiwalentnym układzie liniowym – pozwala w efektywny sposób wyznaczać obszary i granice stabilności lokalnej.

Zamieszczono przykłady praktycznego zastosowania podanego kryterium.

Spis oznaczeń

r – próg nieczułości,
 s – zmienna zespolona,
 t – czas,
 v – rząd astatyzmu części liniowej,
 y_0, η_0, ξ_0 – amplitudy sygnałów y, η, ξ ,
 $y(s), \eta(s), \xi(s)$ – transformatory Laplace'a sygnałów y, η, ξ ,
 $y_E(t)$ – odpowiedź skokowa ekwiwalentnego układu liniowego,
 λ – przeregulowanie odpowiedzi $y_E(t)$,
 $G_L(s)$ – transmitancja części liniowej,
 $G_s(s)$ – transmitancja części statycznej,

$G_E(s)$ – transmitancja ekwiwalentnego układu liniowego,
 G_{Nlok} – granica stabilności lokalnej układu nieliniowego,
 P_1 – punkt rozgałęzienia (bifurkacji) 1-go rodzaju,
 $\tilde{P}_1$ – jak wyżej, lecz wyznaczony metodą przybliżoną.

Indeksy

f – końcowy (finalny),
 s – statyczny,
 L – liniowy,
 N – nieliniowy,
 E – ekwiwalentny

1. Wprowadzenie

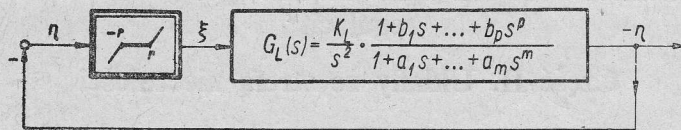
W części I opracowania przeanalizowano klasę 1 układów z histerezą [1]. Obecnie – zgodnie z uwagami poczynionymi w rozdziale 1 części I – zajmiemy się układami nieliniowymi klasy 2, zawierającymi jedną nieliniowość $\xi = f(\eta)$ typu *strefa nieczułości* oraz część liniową z astatyzmem rzędu $v=2$.

* Praca wykonana w ramach problemu międzyresortowego MR. I. 26, grupa tematyczna 10.

Na podstawie analizy ruchu układu nieliniowego w obszarze małych odchyłeń sformułujemy kryterium stabilności lokalnej. Analizę dynamiczną przeprowadzimy w podobny sposób, jak w części I dla układów klasy 1 z histerezą.

2. Układy klasy 2 ze strefą nieczułości

Dowolny układ nieliniowy klasy 2 ze strefą nieczułości $\xi=f(\eta)$ można przedstawić schematem podanym na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat układu nieliniowego klasy 2 ze strefą nieczułości

Część liniowa układu wyraża się transmitancją $G_L(s)$:

$$G_L(s) = \frac{K_L}{s^2} \frac{1+b_1s+\dots+b_ps^p}{1+a_1s+\dots+a_ms^m} = \frac{K_L}{s^2} G_s(s),$$

gdzie

$\frac{K_L}{s^2}$ – część astatyczna (rzęd astatyzmu $v=2$),

$G_s(s) = \frac{1+b_1s+\dots+b_ps^p}{1+a_1s+\dots+a_ms^m} = \frac{L_s(s)}{M_s(s)}$ – część statyczna o współczynniku wzmocnienia równym jedności.

Odnosnie do części liniowej $G_L(s)$ przyjmujemy następujące założenia:

- 1) rząd astatyzmu $v=2$, $K_L > 0$,
- 2) $p < n$ (gdzie rząd układu nieliniowego $n=m+2$ może być dowolnie wysoki),
- 3) część statyczna $G_s(s)$ jest stabilna, przy czym wszystkie bieguny s_i transmitancji $G_s(s)$ są liczbami rzeczywistymi: $s_i < 0$ ($i=1, 2, \dots, m$),
- 4) w przypadku układów rzędu $n \geq 4$ dodatkowo zakładamy, że transmitancję $G_s(s)$ części statycznej można przedstawić w formie iloczynu:

$$G_s(s) = (1 + T_0 s) G_s^*(s) \quad T_0 \geq 0,$$

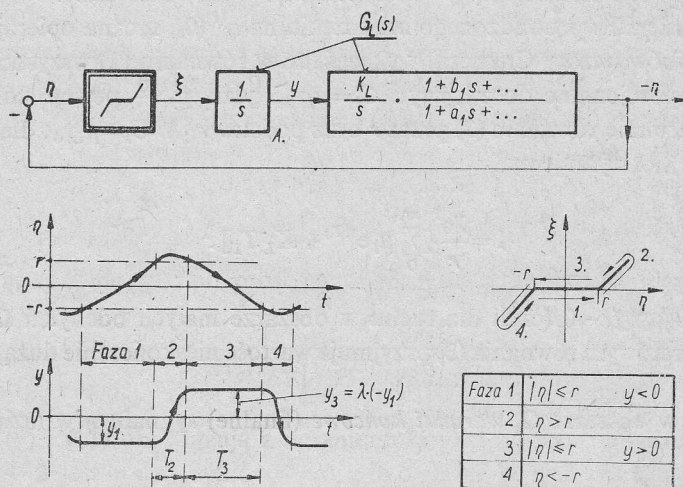
przy czym transmitancja $G_s^*(s)$ posiada tę własność, iż odpowiedź skokowa $h^*(t)$ części $G_s^*(s)$ jest monotonicznie rosnącą (niemalejącą) funkcją czasu i o wartości początkowej $h^*(0+) \geq 0$.

3. Analiza dynamiczna w obszarze małych odchyłeń

Dla układów klasy 2 cała strefa nieczułości ($-r \leq \eta \leq r$) w przestrzeni stanu Ω (o współrzędnych $\eta, \eta', \dots, \eta^{(n-1)}$) stanowi odcinek osobliwy (na osi η), czyli przedstawia sobą ciągły zbiór stanów równowagi statycznej. Z tego względu, dla klasy 2 obszarem małych

odchylenie Ω_ε jest dostatecznie małe ε -otoczenie odcinka osobiwego. W obszarze Ω_ε odchylenia mogą więc przyjmować wartości $|\eta/r| \leq 1 + \varepsilon$ oraz $|\eta^{(i)}/r| \leq \varepsilon$ ($i \geq 1$), gdzie ε – dostatecznie mała (ściślej – nieskończenie mała) liczba dodatnia.

W analizie dynamicznej, obok sygnału η i jego pochodnych, będziemy również rozpatrywać sygnał y będący całką z sygnału ξ . W tym celu z części liniowej $L_L(s)$ wydzielamy jeden człon całkujący – blok A (rys. 2).



Rys. 2. Sygnały η i y w poszczególnych fazach swobodnego ruchu układu nieliniowego klasy 2

Strefa nieczułości $\xi = f(\eta)$ jest funkcją odcinkami liniową. Wobec tego, można swobodny ruch układu nieliniowego podzielić na kolejno po sobie następujące *fazy ruchu*: 1, 2, 3, ..., w których układ opisuje się odpowiednimi liniowymi równaniami różniczkowymi.

W fazach nieparzystych (1, 3, ...) sygnał y zachowuje stałe wartości ($y = \text{const}$), natomiast w fazach parzystych (2, 4, ...) wartość y ulega odpowiedniej zmianie.

Analizę swobodnego ruchu układu nieliniowego rozpoczniemy od fazy 1.

3.1. Faza 1

Niech $t=0$ oznacza chwilę, w której układ nieliniowy, wykonując swobodny ruch w fazie 1 ($y = \text{const} = y_1 < 0$), przechodzi przez położenie odpowiadające połowie strefy nieczułości, to znaczy $\eta(0) = 0$.

Ze schematu (rys. 2), przy uwzględnieniu, że $y = y_1 = \text{const}$, wynika równanie fazy 1:

$$a_m \eta^{(m+1)} + \dots + a_1 \eta'' + \eta' = -K_L y_1 = K_L y_0, \quad (1)$$

przy czym oznaczono

$$-y_1 = y_0.$$

Całka ogólna równania (1) posiada postać:

$$\eta(t) = \sum_0^m C_i e^{s_i t} + K_L y_0 t, \quad (2)$$

gdzie $s_0=0$, $s_i < 0$ ($i=1, 2, \dots, m$).

Wyraźmy warunki początkowe $\eta^{(i)}(0)$ za pomocą y_0 w sposób następujący: $\eta^{(i)}(0) = \rho_i y_0$, gdzie $\rho_0=0$, natomiast ρ_i ($i=1, 2, \dots, m$) – dowolne stałe.

Przy uwzględnieniu wprowadzonego oznaczenia na $\eta^{(i)}(0)$, można opierając się na metodzie wyznaczników (wzory Cramera) wykazać, że w równaniu (2) wszystkie stałe całkowania C_i są proporcjonalne do y_0 , czyli $C_i = \mu_i y_0$, gdzie μ_i – pewne stałe.

Dzieląc obustronnie równanie (2) przez r oraz podstawiając $C_i = \mu_i y_0$, dla końca fazy 1 ($t=T_1$, $\eta(T_1)=r$), otrzymujemy

$$1 = \frac{y_0}{r} \left[\sum_0^m \mu_i e^{s_i T_1} + K_L T_1 \right]. \quad (3)$$

W granicy, dla $y_0/r \rightarrow 0$ (czyli dla ruchu w obszarze małych odchyłeń Ω_e), wyrażenie w nawiasie kwadratowym równania (3) przyjmuje wartość nieskończenie dużą, a to oznacza, że $T_1 \rightarrow \infty$.

Wobec tego, w obszarze Ω_e warunki końcowe (finalne) sygnału η w fazie 1 przyjmują wartości:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{1,f} &= r, \\ \frac{\eta'_{1,f}}{y_0} &= K_L, \\ \frac{\eta^{(i)}_{1,f}}{y_0} &= 0 \quad (i=2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

3.2. Faza 2

Oznaczmy przez $t=0$ chwilę początkową, odpowiadającą stykowi faz 1 i 2. W chwili tej sygnał y posiada wartość początkową $y(0)=y_1=-y_0$.

Ze schematu (rys. 2) wynika transformata Laplace'a $y(s)$ sygnału $y(t)$:

$$y(s) = \frac{-1}{sG_L(s)} \eta(s) + \frac{W_\eta(0-) - W_y(0-)}{K_L L_s(s)}. \quad (5)$$

Na podstawie reguł rachunku operatorowego [3, 4], przy uwzględnieniu warunków (4), otrzymujemy:

$$W_\eta(0-) - W_y(0-) = r M_s(s) + K_L [M_s(s) - L_s(s)] \frac{y_0}{s}. \quad (6)$$

W fazie 2 obowiązuje relacja:

$$y' = \eta - r, \quad (7)$$

czyli

$$\eta(s) = sy(s) + y_0 + \frac{r}{s}. \quad (8)$$

Podstawiając równania (6) i (8) do (5) otrzymujemy transformatę sygnału y w fazie 2:

$$y(s) = \left[\frac{K_L}{s^2} \frac{1}{1 + G_L(s)} - 1 \right] \frac{y_0}{s}. \quad (9)$$

Oznaczmy przez $\Delta y_2(t)$ przyrost sygnału y w fazie 2 względem wartości początkowej $y(0) = -y_0$:

$$\Delta y_2(t) = y(t) + y_0.$$

Stąd

$$y(s) = \Delta y_2(s) - \frac{y_0}{s}. \quad (10)$$

Podstawiając (10) do (9), po prostych przekształceniach, otrzymujemy transformatę przyrostu $\Delta y_2(t)$:

$$\Delta y_2(s) = \left[\frac{K_L}{s^2} \frac{1}{1 + G_L(s)} \right] \frac{y_0}{s}. \quad (11)$$

Transformaty (9) i (11) obowiązują z ograniczeniem do zakresu ruchu układu w fazie 2. Dla końca fazy 2 jest $\eta = r$, czyli $\xi = y' = 0$, a to oznacza, że końcowemu punktowi fazy 2 ($t = T_2$) odpowiada ekstremum sygnału y , z zerową pochodną $y'(T_2) = 0$. Oznaczmy przez $y_{2,f} = y(T_2)$ wartość końcową y . Jest to zarazem wartość y w następnej fazie 3, czyli

$$y_{2,f} = y_3$$

Z kolei oznaczmy przez λ stosunek wartości y_3 do bezwzględnej wartości $|y_1| = -y_1 = y_0$ sygnału y w fazie 1:

$$\lambda = \frac{y_3}{-y_1} = \frac{y_3}{y_0}. \quad (12)$$

Wyrażenie to będziemy dalej nazywać *stosunkiem amplitud* sygnału y w fazach 3 i 1.

Na mocy (9) sygnał $y(t)$ w fazie 2 jest odpowiedzią pewnego układu liniowego na wymuszenie skokowe $y_0 \cdot \mathbf{1}(t)$. Wobec tego, dla sygnału y wszystkie *warunki końcowe* fazy 2 ($t = T_2$) są proporcjonalne do y_0 i można je wyrazić w następujący sposób:

$$y_{2,f}^{(i)} = y_0 k_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad (13)$$

gdzie k_i — stałe zależne wyłącznie od transmitancji $G_L(s)$.

Natomiast dla sygnału η , przy uwzględnieniu (7), *warunki końcowe* przyjmują postać:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{2,f} &= r, \\ \eta_{2,f}^{(i)} &= y_0 k_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Zauważmy, że dla $i = 0$ z (12) i (13) otrzymujemy

$$y_{2,f} = y_0 k_0 = y_3 = \lambda y_0.$$

Wobec tego

$$\lambda = k_0 \neq f(y_0), \quad (15)$$

a to oznacza, że w obszarze małych odchyłeń Ω_ε stosunek amplitud λ zależy wyłącznie od transmitancji $G_L(s)$ i nie jest funkcją y_0 .

3.3. Faza 3

Niech $t=0$ oznacza chwilę początkową, odpowiadającą stykowi faz 2 i 3. W fazie 3 sygnał y zachowuje stałą wartość $y = \text{const} = y_3 = \lambda y_0$. Dla $t=0$ sygnał η posiada wartość początkową $\eta(0) = r$. Oznaczmy przez $\Delta\eta_3$ przyrost sygnału η w fazie 3 względem wartości początkowej

$$\Delta\eta_3 = \eta - \eta(0) = \eta - r. \quad (16)$$

Zgodnie z rysunkiem 2 przyrost ten dla $t > 0$ opisuje się równaniem różniczkowym:

$$a_m \Delta\eta_3^{(m+1)} + \dots + a_1 \Delta\eta_3'' + \Delta\eta_3' = -K_L y_3 = -K_L \lambda y_0, \quad (17)$$

którego całka ogólna posiada postać

$$\Delta\eta_3(t) = \sum_0^m C_i e^{s_i t} - \lambda K_L y_0 t, \quad (18)$$

gdzie $s_0 = 0$, $s_i < 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Można wykazać (patrz Dodatek A), że warunki początkowe $\Delta\eta_3^{(i)}(0+)$ są proporcjonalne do y_0 i wyrażają się równaniem (29): $\Delta\eta_3^{(i)}(0+) = \rho_i y_0$, gdzie ρ_i ($i = 0, 1, \dots, m$) – pewne stałe. Wobec tego, również wszystkie stałe całkowania C_i są proporcjonalne do y_0 , czyli $C_i = \mu_i y_0$, gdzie μ_i – stałe.

Całkę (18) można więc zapisać w następującej formie:

$$\Delta\eta_3(t) = y_0 \left[\sum_0^m \mu_i e^{s_i t} - \lambda K_L t \right]. \quad (19)$$

Rozpatrzmy przypadek $y_3 > 0$ (czyli $\lambda > 0$) i dodatkowo przyjmijmy, że w fazie 3 dla dowolnej chwili $t > 0$ spełniona jest nierówność:

$$\Delta\eta_3(t) \leq 0 \quad (\text{dla } t > 0). \quad (20)$$

Nierówność ta oznacza, że po rozpoczęciu fazy 3 układ nie wkracza ponownie w obszar fazy 2.

Przy powyższych założeniach, dla końca fazy 3 ($t = T_3$, $\Delta\eta_{3,f} = -2r$), równanie (19), po obustronnym podzieleniu przez r , przyjmuje postać:

$$-2 = \frac{y_0}{r} \left[\sum_0^m \mu_i e^{s_i T_3} - \lambda K_L T_3 \right].$$

Z równania tego wynika, że w obszarze małych odchyłeń Ω_ε (tj. gdy $y_0/r \rightarrow 0$) czas trwania fazy 3 dąży do nieskończoności ($T_3 \rightarrow \infty$) i wobec tego warunki końcowe fazy 3 przyj-

mują wartości:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{3,f} &= -r, \\ \frac{\eta'_{3,f}}{y_0} &= -\lambda K_L, \\ \frac{\eta_{3,f}^{(i)}}{y_0} &= 0 \quad (i=2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

3.4. Faza 4 oraz warunki stabilności lokalnej

Zauważmy, że jeśli spełniona jest nierówność (20) oraz $\lambda=1$, to warunki końcowe (21) sygnału η w fazie 3 różnią się tylko znakiem w stosunku do warunków końcowych (4) tego sygnału w fazie 1. Wobec tego, faza 4 (następująca po fazie 3) będzie powtórzeniem fazy 2 (ze znakiem przeciwnym), a to oznacza, że dla $\lambda=1$ w układzie nieliniowym wystąpią okresowe drgania swobodne (cykl graniczny) o amplitudzie $y_0/r=0+$.

Dla $0 < \lambda < 1$ amplituda sygnału y w kolejnych fazach parzystych (4, 6, ...) będzie maleć (układ lokalnie stabilny), natomiast dla $\lambda > 1$ amplituda y będzie narastać (układ lokalnie niestabilny).

Nietrudno zauważyć, że jeżeli spełniona jest nierówność (20) i $\lambda=0$, to z równania (19) wynika, iż nie wystąpi faza 4, ponieważ ruch układu nieliniowego zakończy się w fazie 3.

Na podstawie powyższych rozważań, można zatem dla układów klasy 2 sformułować następujące warunki stabilności lokalnej.

Jeżeli spełniona jest nierówność (20), a stosunek amplitud λ przyjmuje wartości:

$\lambda > 1$ — układ nieliniowy jest lokalnie niestabilny,

$\lambda_{kr}=1$ — układ znajduje się na granicy stabilności lokalnej,

$0 \leq \lambda < 1$ — układ jest lokalnie stabilny.

Warto zaznaczyć, że podane wyżej warunki stabilności układów klasy 2 ze strefą nieczułości są analogiczne do warunków stabilności układów klasy 1 z histerzą (por. część I, podrozdz. 3.4).

4. Ekwiwalentny układ liniowy

Poprzednio wykazaliśmy (podrozdz. 3.2), że w obszarze małych odchyień Ω_e przyrost $\Delta y_2(t)$ sygnału y w fazie 2 wyraża się transformatą (11), którą można skrótowo zapisać w następujący sposób:

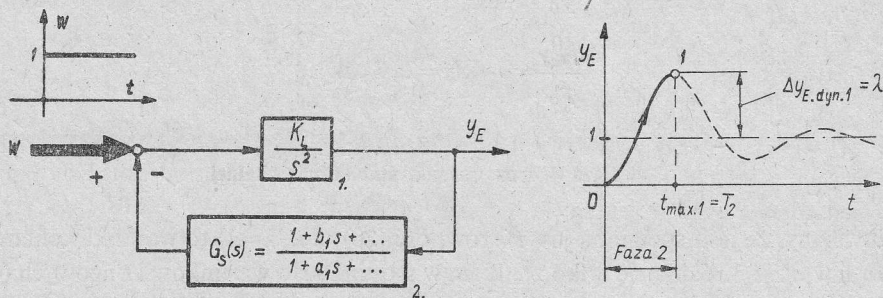
$$\Delta y_2(s) = G_E(s) \frac{y_0}{s}, \quad (22)$$

gdzie

$$G_E(s) = \frac{K_L}{s^2} \frac{1}{1 + G_L(s)}. \quad (23)$$

Transmitancja $G_E(s)$ będzie dalej nazywana *transmitancją ekwiwalentnego układu liniowego* (por. część I, rozdz. 4).

Rysunek 3 przedstawia schemat ekwiwalentnego układu liniowego w postaci, którą nazwiemy standardową. W torze głównym (1) układu występuje część *astatyczna*, natomiast w torze sprzężenia zwrotnego (2) — część *statyczna* $G_s(s)$ układu nieliniowego (rys. 1).



Rys. 3. Ekwiwalentny układ liniowy w postaci standardowej dla układów nieliniowych klasy 2 ze strefą nieczułości

1 — część astatyczna, 2 — część statyczna

Jeżeli na wejście układu o transmitancji $G_E(s)$ podać jednostkowe wymuszenie skokowe $w(t)=1(t)$, to na wyjściu otrzymamy *odpowiedź skokową* $y_E(t)$ *ekwiwalentnego układu liniowego*.

Można wykazać (w sposób analogiczny jak w rozdz. 4 części I), że początkowy odcinek odpowiedzi skokowej $y_E(t)$, zawarty między punktem początkowym ($t=0$) i punktem pierwszego maksimum ($t_{\max 1}=T_2$), przedstawia (w skali $K=1/y_0$) przyrost $\Delta y_2(t)$ przy ruchu układu nieliniowego w fazie 2, przy czym *przeregulowanie* $\Delta y_{E \text{ dyn } 1}$ *pierwszego ekstremum* (rys. 3) *równa się wprost stosunkowi amplitud* λ :

$$\Delta y_{E \text{ dyn } 1} = \lambda = \frac{y_3}{-y_1} = \frac{y_3}{y_0}. \quad (24)$$

Wobec tego, za pomocą odpowiedzi skokowej $y_E(t)$ ekwiwalentnego układu liniowego (rys. 3), można w prosty sposób wyznaczać stosunek amplitud λ , określony wzorem (12).

Na mocy równości (24), dalej przeregulowanie $\Delta y_{E \text{ dyn } 1}$ będziemy wprost oznaczać przez λ .

5. Kryterium stabilności lokalnej

W podrozdziale 3.4 wykazaliśmy, że dla oceny stabilności lokalnej układów klasy 2 wymagane jest wyznaczenie stosunku amplitud λ oraz sprawdzenie warunku (20).

Z rozważań zamieszczanych w Dodatku B.1 wynika, że wszystkie układy klasy 2, rzędu $n \leq 3$, dla $\lambda \geq 0$ spełniają nierówność (20). Wobec tego, dla tych układów — przy uwzględnieniu równości (24) — warunki stabilności lokalnej (podane w podrozdz. 3.4) redukują się do następującego kryterium:

K.1. Kryterium stabilności lokalnej układów rzędu $n \leq 3$

Jeżeli odpowiedź skokowa $y_E(t)$ ekwiwalentnego układu liniowego (rys. 3) dla pierwszego ekstremum wykazuje przeregulowanie λ o wartości krytycznej równej jedności

$$\lambda_{kr} = 1,$$

to układ nieliniowy jest na granicy stabilności lokalnej.

Dla $\lambda > 1$ układ jest lokalnie niestabilny, natomiast dla $0 \leq \lambda < 1$ — lokalnie stabilny.

Granicy stabilności lokalnej ($\lambda_{kr} = 1$) odpowiada punkt bifurkacji 1-go rodzaju (P_1), będący początkowym punktem krzywej cyklu granicznego. W punkcie P_1 cykl graniczny wykazuje ekstremalne parametry:

$$\frac{\xi_0}{r} = 0+, \quad \frac{\eta_0}{r} = 1+, \quad T_c = \infty,$$

gdzie T_c — okres cyklu granicznego.

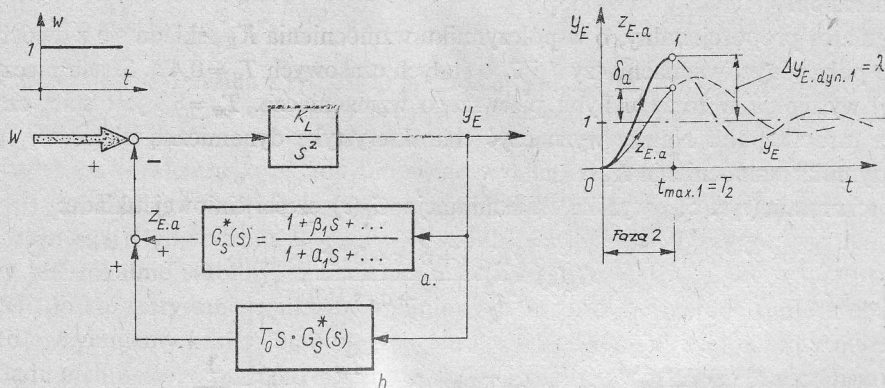
Zaznaczmy, że z relacji (15) wynika, iż w połączonej przestrzeni (o współrzędnych: amplituda drgań η_0/r oraz odpowiedni, zmienny parametr V części liniowej $G_L(s)$ układu), w punkcie bifurkacji P_1 , styczna do krzywej cyklu granicznego η_0/r jest prostopadła do osi parametru V (por. przykłady).

Przejdźmy z kolei do układów dowolnie wysokiego rzędu $n \geq 4$. Dla tych układów — zgodnie z założeniem 4, podanym w rozdziale 2 — można część statyczną $G_s(s)$ przedstawić w formie następującego iloczynu:

$$G_s(s) = (1 + T_0 s) G_s^*(s) = (1 + T_0 s) \frac{1 + \beta_1 s + \dots + \beta_{p-1} s^{p-1}}{1 + a_1 s + \dots + a_m s^m}, \quad (25)$$

gdzie $T_0 \geq 0$, $(p-1) \leq m = n-2$, a ponadto transmitancja $G_s^*(s)$ posiada tę własność, że odpowiedź skokowa $h^*(t)$ części $G_s^*(s)$ jest monotonicznie rosnącą (niemalejącą) funkcją czasu i o wartości początkowej $h^*(0+) \geq 0$.

Na mocy wzoru (23) i schematu (rys. 3) można więc układom rzędu $n \geq 4$ przyporządkować ekwiwalentny układ liniowy podany na rysunku 4, gdzie iloczynowi transmitancji (25) odpowiada równoległe połączenie bloków: a i b , przy czym przez $z_{E,a}$ oznaczono sygnał wyjściowy bloku a o transmitancji $G_s^*(s)$.



Rys. 4. Ekwiwalentny układ liniowy dla układów nieliniowych klasy 2, rzędu $n \geq 4$

W Dodatku B.2 wykazano, że w przypadku układów rzędu $n \geq 4$, można nierówność (20) zastąpić ostrzejszym warunkiem (32):

$$\delta_a \geq 0,$$

gdzie, zgodnie z rysunkiem 4,

$$\delta_a = z_{E,a}(t_{\max 1}) - 1,$$

czyli δ_a jest przeregulowaniem sygnału $z_{E,a}$ w chwili $t = t_{\max 1}$, to znaczy w chwili, w której występuje pierwsze ekstremum odpowiedzi skokowej $y_E(t)$ ekwiwalentnego układu liniowego.

Wobec tego, dla rozpatrywanych układów, warunki stabilności (podane w podrozdz. 3.4) można wyrazić w formie następującego kryterium:

K.2. Kryterium stabilności lokalnej układów rzędu $n \geq 4$

Jeżeli odpowiedź skokowa $y_E(t)$ ekwiwalentnego układu liniowego (rys. 4) dla pierwszego ekstremum ($t = t_{\max 1}$) wykazuje przeregulowanie λ o wartości krytycznej równej jedności i jednocześnie dla $t_{\max 1}$ przeregulowanie δ_a sygnału $z_{E,a}$ jest równe lub większe od zera, czyli

$$\lambda_{kr} = 1 \quad \text{oraz} \quad \delta_a \geq 0,$$

to układ nieliniowy jest na granicy stabilności lokalnej.

Dla $\lambda > 1$ i $\delta_a \geq 0$ układ jest lokalnie niestabilny, natomiast dla $0 \leq \lambda < 1$ oraz $\delta_a \geq 0$ — lokalnie stabilny.

Podobnie jak w przypadku kryterium K.1, również i dla układów rzędu $n \geq 4$, granicy stabilności lokalnej odpowiada punkt bifurkacji 1-go rodzaju (P_1) i cykl graniczny o ekstremalnych parametrach.

Dodajmy, że przy stosowaniu kryteriów K.1 i K.2, celowe jest posługiwanie się elektro-niczną maszyną analogową, na której można łatwo zamodelować odpowiedni ekwiwalentny układ liniowy, i następnie w prosty sposób badać przeregulowanie λ sygnału $y_E(t)$, a w przypadku $n \geq 4$ — również przeregulowanie δ_a sygnału $z_{E,a}(t)$.

Na zakończenie rozpatrzmy dwa przykłady.

Przykład 1. Zbadajmy układ regulacji prędkości obrotowej turbiny parowej podany na rysunku 5a.

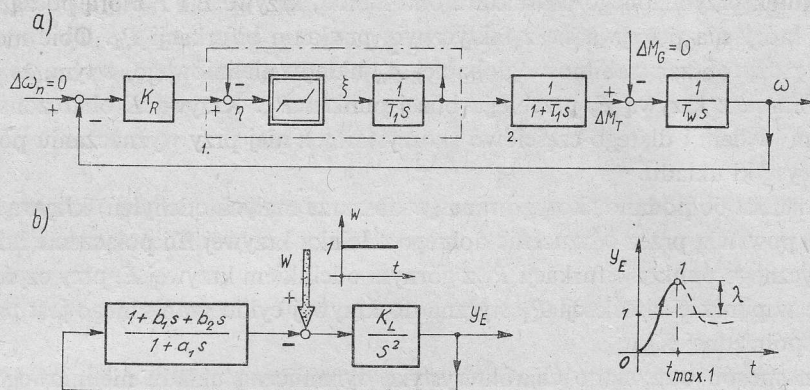
Regulator proporcjonalny, o współczynniku wzmocnienia K_R , składa się z dwóch, szeregowo połączonych wzmacniaczy 1 i 2, o stałych czasowych $T_1 = 0,4$ s. Strefa nieczułości $\xi = f(\eta)$ występuje w torze uchybu pierwszego wzmacniacza. $T_w = 8$ s jest stałą czasową wirnika turbozespołu. Należy wyznaczyć charakterystykę dynamiczną układu w funkcji współczynnika wzmocnienia K_R .

Ze schematu (rys. 5a) wynika transmitancja $G_L(s)$ części liniowej układu:

$$G_L(s) = \frac{K_L}{s^2} \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2}{1 + a_1 s},$$

gdzie

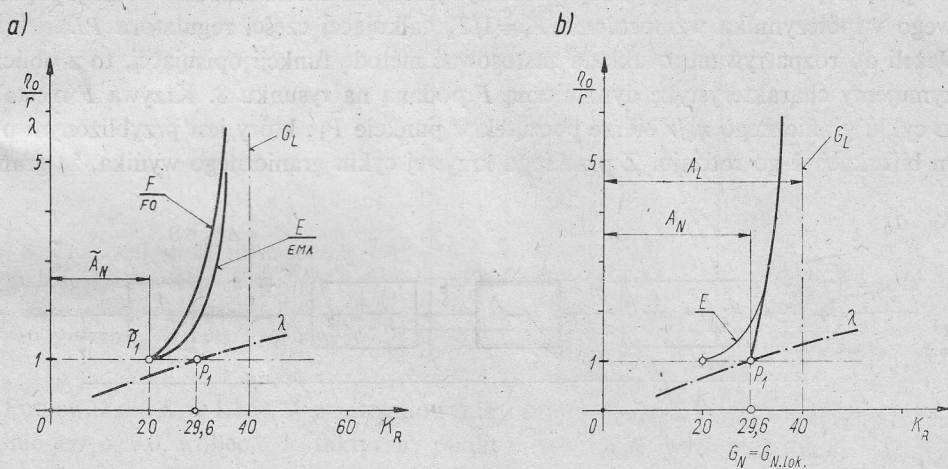
$$K_L = \frac{K_R}{T_1 T_w}, \quad a_1 = T_1, \quad b_1 = \frac{T_w}{K_R}, \quad b_2 = \frac{1}{K_L}.$$



Rys. 5. Schemat układu nieliniowego (a) oraz ekwiwalentny układ liniowy (b)

Jest to więc układ 3-go rzędu, klasy 2, i dlatego do analizy można zastosować kryterium stabilności K.1, oparte na odpowiedzi skokowej $y_E(t)$ ekwiwalentnego układu liniowego, którego schemat przedstawia rysunek 5b.

Na rysunku 6a podano charakterystyki dynamiczne układu, przy czym G_L oznacza granicę stabilności układu liniowego, to jest z pominięciem strefy nieczułości ($r=0$).

Rys. 6. Charakterystyki układu z rys. 5a; a) przeregulowanie $\lambda=f(K_R)$ i przybliżone charakterystyki dynamiczne układu, b) skorygowana krzywa cyklu granicznego

Z badań ekwiwalentnego układu liniowego wynika, że przeregulowanie λ odpowiedzi skokowej $y_E(t)$ osiąga wartość krytyczną $\lambda_{kr}=1$ dla $K_R=29,6$. Wartości tej odpowiada punkt bifurkacji 1-go rodzaju P_1 i granica stabilności lokalnej. Dla $K_R<29,6$ układ nieliniowy jest lokalnie stabilny, dla $K_R>29,6$ – niestabilny.

Jeżeli do rozpatrywanego układu nieliniowego zastosować metodę funkcji opisującej (F_0), to otrzymujemy krzywą stabilnego cyklu granicznego – F . Natomiast z modelowania układu nieliniowego na elektronicznej maszynie analogowej (EMA) otrzymujemy krzywą E .

Na skutek przybliżonego charakteru obu metod, krzywe E i F biorą początek w punkcie $\tilde{P}_1$, który nie pokrywa się z faktycznym punktem bifurkacji P_1 . Obie metody dają więc zawężony obszar stabilności globalnej $\tilde{A}_N$ układu nieliniowego, z tym, że krzywa E , w porównaniu z krzywą F , przebiega bliżej punktu P_1 . Krzywa E obciążona jest więc mniejszym błędem i dlatego częściowo skorzystamy z niej przy wyznaczaniu poprawionej charakterystyki układu.

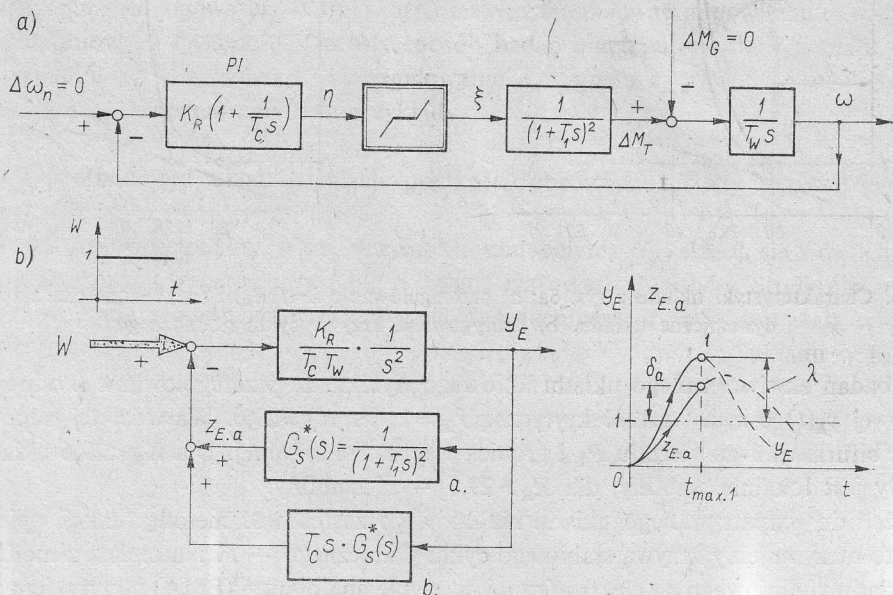
Na rysunku 6b podano skorygowaną (w obszarze małych odchyłeń) krzywą cyklu granicznego, powstałą przez odrzucenie dolnego odcinka krzywej E i połączenie łukiem gładkim faktycznego punktu bifurkacji P_1 z górnym odcinkiem krzywej E , przy czym uwzględniono, że w punkcie bifurkacji P_1 styczna do krzywej cyklu granicznego jest prostopadła do osi współrzędnej K_R .

W ten sposób otrzymano charakterystykę dynamiczną układu nieliniowego ze ściśle wyznaczonym obszarem stabilności A_N i z wystarczająco dokładnym (dla celów praktyki) przebiegiem krzywej cyklu granicznego η_0/r .

Przykład 2. Rozpatrzmy układ regulacji prędkości obrotowej turbiny parowej (rys. 7a) ze strefą nieczułości w torze głównym regulatora.

Regulator typu PI , o współczynniku wzmocnienia $K_R=25$, podaje sygnał na dwa szeregowo połączone wzmacniacze 1-go rzędu ze stałą czasową $T_1=0,35$ s. Stała czasowa wirnika wynosi $T_w=8$ s. Interesuje nas charakterystyka dynamiczna układu w funkcji prędkościowego współczynnika wzmocnienia $K_c=1/T_c$ całkującej części regulatora PI .

Jeżeli do rozpatrywanego układu zastosować metodę funkcji opisującej, to z obliczeń otrzymujemy charakterystykę dynamiczną F podaną na rysunku 8. Krzywa F niestabilnego cyklu granicznego η_0/r bierze początek w punkcie $\tilde{P}_1$, który jest przybliżonym punktem bifurkacji 1-go rodzaju. Z przebiegu krzywej cyklu granicznego wynika, że granica



Rys. 7. Schemat układu nieliniowego (a) oraz ekwiwalentny układ liniowy (b)

G_N globalnej stabilności układu nieliniowego pokrywa się z granicą G_L układu liniowego. Przejdźmy obecnie do korygowania charakterystyki w obszarze małych odchyień. Ze schematu (rys. 7a) otrzymujemy transmitancję części liniowej układu:

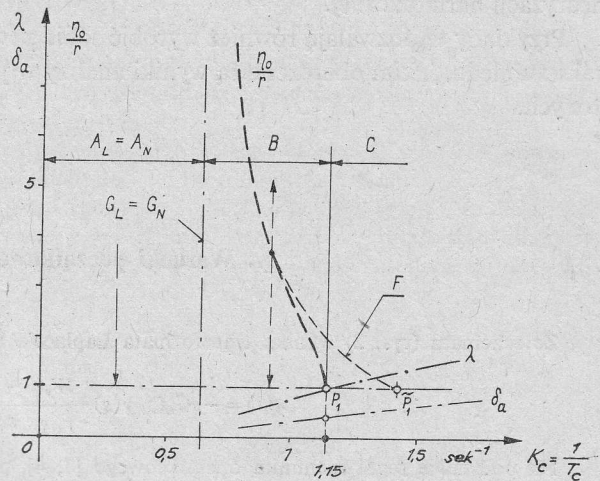
$$G_L(s) = \frac{K_R}{T_c T_w s^2} \frac{1 + T_c s}{(1 + T_1 s)^2}.$$

Wynika stąd, że jest to układ rzędu $n=4$, z astatyzmem $\nu=2$ i stabilną częścią statyczną $G_s(s)$, którą można przedstawić w formie iloczynu:

$$G_s(s) = (1 + T_c s) \frac{1}{(1 + T_1 s)^2} = (1 + T_c s) G_s^*(s).$$

Ponieważ $T_c > 0$, a odpowiedź skokowa części $G_s^*(s)$ jest funkcją niemalejącą z zerową wartością początkową, to rozpatrywany układ nieliniowy jest klasy 2 i do analizy można zastosować kryterium stabilności K.2.

Z badań (na maszynie analogowej) ekwiwalentnego układu liniowego (schemat – rys. 7b) otrzymujemy krzywe przeregulowania λ i δ_a podane na rysunku 8.



Rys. 8. Charakterystyka dynamiczna układu nieliniowego z rys. 7a

A – obszar globalnej stabilności, B – obszar z cyklem granicznym, C – obszar globalnej niestabilności

Ponieważ dla $K_c = 1,15 \text{ s}^{-1}$ przeregulowanie λ osiąga wartość krytyczną ($\lambda_{kr} = 1$) i jednocześnie jest $\delta_a > 0$, wobec tego faktyczny punkt bifurkacji P_1 występuje dla $\lambda_{kr} = 1$. Skorygowana krzywa cyklu granicznego bierze więc początek w punkcie P_1 , a nie w punkcie $\tilde{P}_1$.

Warto zaznaczyć, że – w odróżnieniu od poprzedniego przykładu – w tym przypadku obszar B z cyklem granicznym występuje na prawo od granicy stabilności globalnej G_N , przy czym w obszarze B układ jest lokalnie stabilny ($\lambda < 1$) i wzbudza się twardo, ze względu na sąsiedztwo niestabilnego cyklu granicznego.

6. Podsumowanie

Przeprowadzona (w części I i II) analiza dynamiczna układów nieliniowych klasy 1 (z histerezą) i klasy 2 (ze strefą nieczułości) pozwoliła sformułować dla tych układów odpowiednie kryterium stabilności lokalnej.

Podane kryterium stanowi efektywną metodę wyznaczania obszarów i granic stabilności lokalnej w przestrzeni parametrów badanego układu.

Zasadnicza cecha tej metody polega na tym, że badany układ nieliniowy zastępujemy tzw. ekwiwalentnym układem liniowym, a następnie, na podstawie charakteru odpowiedzi skokowej ekwiwalentnego układu liniowego, wnioskujemy o stabilności lokalnej układu nieliniowego.

Do tych celów najwygodniejsza jest elektroniczna maszyna analogowa, na której – po zamodelowaniu odpowiedniego ekwiwalentnego układu liniowego – można w prosty sposób badać charakter odpowiedzi skokowej ekwiwalentnego układu liniowego w funkcji parametrów układu.

Ponieważ przy tym modelujemy układ liniowy (a więc z pominięciem członów nieliniowych w rodzaju histerezy względnie strefy nieczułości), to wyniki uzyskiwane na maszynie analogowej odznaczają się wysokim stopniem dokładności.

Zamieszczone w części I i II przykłady obliczeniowe wykazują, że na podstawie podanego kryterium można w obszarze małych odchyłeń, w odpowiedni sposób, korygować charakterystyki dynamiczne otrzymane metodami przybliżonymi, na przykład metodą linearyzacji harmoniczej.

Przykłady te pozwalają również wyrobić sobie pewien pogląd na temat wielkości i charakteru błędów, jakim obarczone są wyniki analizy w przypadku stosowania metod przybliżonych.

Dodatek

A. Warunki początkowe fazy 3

Ze schematu (rys. 2) wynika transformata Laplace'a $\eta(s)$ sygnału $\eta(t)$:

$$\eta(s) = -sG_L(s)y(s) + \frac{W_y(0-) - W_n(0-)}{sM_s(s)}. \quad (26)$$

Na podstawie reguł rachunku operatorowego [3, 4], przy uwzględnieniu warunków (13) i (14), otrzymujemy

$$W_y(0-) - W_n(0-) = rM_s(s) + y_0 F(s, k_i), \quad (27)$$

gdzie $F(s, k_i)$ – funkcja zmiennej zespolonej s oraz współczynników k_i występujących w warunkach (13) i (14).

Z równania (26), przy uwzględnieniu równań (16) i (27) oraz z relacji: $y_3 = \text{const} = \lambda y_0$, po prostych przekształceniach, otrzymujemy transformatę $\Delta\eta_3(s)$ przyrostu $\Delta\eta_3(t)$:

$$\Delta\eta_3(s) = y_0 \left[\frac{F(s, k_i)}{sM_s(s)} - \lambda G_L(s) \right]. \quad (28)$$

Z równań (28) i (15) wynika, że transformata $\Delta\eta_3(s)$ jest proporcjonalna do y_0 . Tym samym, również wszystkie warunki początkowe (dla $t=0+$) sygnału $\Delta\eta_3(t)$ są proporcjonalne do y_0 , czyli można napisać:

$$\Delta\eta_3^{(i)}(0+) = \rho_i y_0 \quad (i=0, 1, \dots, m). \quad (29)$$

gdzie ρ_i – pewne stałe zależne od transmitancji $G_L(s)$.

B. Ruch układu w fazie 3

B. 1. Rozpatrzmy układ nieliniowy klasy 2, rzędu $n=3$ (czyli $m=1$) i oznaczmy przez $t=0$ chwilę początkową fazy 3. W fazie tej ruch układu opisuje się równaniem (17) 2-go rzędu. Zastosujemy podstawienie $\Delta\eta'_3(t)=\eta'_3(t)=v(t)$. Wówczas (17) przechodzi w równanie 1-go rzędu, opisujące aperiodyczny przebieg funkcji $v(t)$.

Początkowemu punktowi fazy 3 odpowiada na wykresie $\eta(t)$ (rys. 2) odpowiedni punkt na opadającej gałęzi krzywej $\eta(t)$. Wobec tego, dla $t=0$ jest $v(0)<0$, a to oznacza, że w fazie 3 ($t>0$) funkcja $v(t)$ (o charakterze aperiodycznym) dla $\lambda\geq 0$ nie może przyjmować wartości dodatnich, czyli obowiązuje: $\eta'_3(t)=v(t)\leq 0$. Tym samym, dla układów rzędu $n=3$ spełniona jest nierówność (20):

$$\Delta\eta_3(t)=\int_0^t \eta'_3 dt \leq 0 \quad \text{dla } t>0.$$

Dla układów rzędu $n=2$ powyższy warunek jest oczywiście również spełniony.

B. 2. Przejdźmy obecnie do rozpatrzenia układu nieliniowego klasy 2, dowolnie wysokiego rzędu $n\geq 4$.

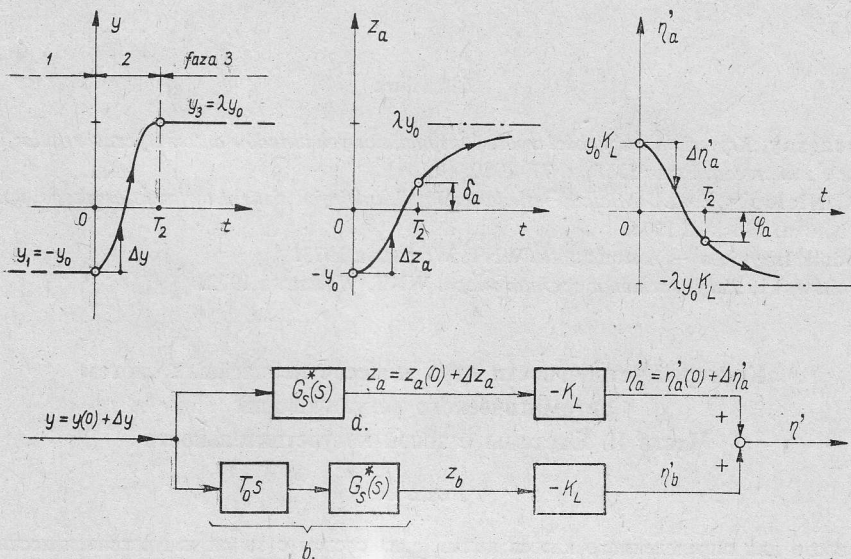
Część statyczną $G_s(s)$ układu — zgodnie z założeniem 4 (rozdz. 2) — można przedstawić w formie następującego iloczynu:

$$G_s(s)=(1+T_0s)G_s^*(s)=(1+T_0s)\frac{1+\beta_1s+\dots+\beta_{p-1}s^{p-1}}{1+a_1s+\dots+a_ms^m},$$

gdzie $T_0\geq 0$, $(p-1)\leq m=n-2$, a ponadto transmitancja $G^*(s)$ posiada tę właściwość, że odpowiedź skokowa $h^*(t)$ części $G_s^*(s)$, na wymuszenie jednostkowe $u(t)=1(t)$, jest monotonicznie rosnącą (nie-malejącą) funkcją czasu i o wartości początkowej $h^*(0+)\geq 0$.

Zbadajmy swobodny ruch układu rzędu $n\geq 4$ w obszarze małych odchyłeń Ω_a (rys. 9) i oznaczmy przez $z_a(t)$ i $z_b(t)$ sygnały na wyjściu odpowiednio z części a i b transmitancji $G_s(s)$.

Niech $t=0$ oznacza chwilę, odpowiadającą stykowi faz 1 i 2. Z równań (4) wynika, że dla końca fazy 1 ($t=0$), przy sygnale wejściowym $y=\text{const}=y_1=-y_0$, część statyczna $G_s(s)$ osiąga stan ustalony, przy czym $\eta'(0)=K_L y_0$. Wobec tego, dla $t=0$ sygnał $z_a(t)$ przyjmuje wartość ustaloną $z_a(0)=-y_0$,



Rys. 9. Ruch układu nieliniowego klasy 2, rzędu $n\geq 4$, w fazach 2 i 3

natomiast sygnał $z_b(t)$ zeruje się: $z_b(t)=0$. Nietrudno zauważyć, że dla $t=0$ składowe prędkości η' przyjmują wartości: $\eta'_a(0)=\eta'(0)=K_L y_0$ oraz $\eta'_b(0)=0$.

Oznaczmy przez $\Delta y(t)$, $\Delta z_a(t)$ oraz $\Delta \eta'_a(t)$ przyrosty sygnałów $y(t)$, $z_a(t)$ oraz $\eta'_a(t)$ liczone od chwili $t=0$. W fazie 2 i 3 przyrost $\Delta y(t)$ jest ciągłą i niemalejącą funkcją czasu. W części I (Dodatek B.2) wykazano, że dla tak zmieniającego się sygnału wejściowego $\Delta y(t)$ sygnał $\Delta z_a(t)$, występujący na wyjściu bloku a o transmitancji $G_s^*(s)$, jest ciągłą i monotonicznie rosnącą funkcją czasu. Wobec tego, w fazach 2 i 3 przyrost pochodnej $\Delta \eta'_a(t) = -K_L \Delta z_a(t)$ jest ciągłą, monotonicznie malejącą funkcją czasu.

Na mocy właściwości przyrostu $\Delta z_a(t)$ i rysunku 9, można dla sygnału $z_b(t)$ napisać:

$$z_b(t) = T_0 \frac{d}{dt} \Delta z_a(t) \geq 0 \quad \text{dla} \quad t > 0,$$

a to oznacza, że składowa prędkości η'_b w fazach 2 i 3 nie może przyjmować wartości dodatnich, czyli

$$\eta'_b = -K_L z_b \leq 0. \quad (30)$$

Nierówność (20):

$$\Delta \eta_3(t) \leq 0 \quad (t > T_2),$$

dotyczącą przyrostu sygnału $\Delta \eta_3(t)$ w fazie 3 (tj. dla $t > T_2$), można, na podstawie rysunku 9, napisać w następującej postaci:

$$\Delta \eta_3(t) = \int_{T_2}^t \eta' dt = \int_{T_2}^t (\eta'_a + \eta'_b) dt \leq 0, \quad t > T_2. \quad (31)$$

Na mocy (30) składowa $\eta'_b \leq 0$. Wobec tego, dla spełnienia nierówności (31) wystarcza, jeżeli w fazie 3 będzie $\eta'_a \leq 0$. Ten postulat (przy uwzględnieniu monotoniczności przyrostu pochodnej $\Delta \eta'_a$ i na podstawie rys. 9) sprowadza się do warunku wystarczającego:

$$\eta'_a(T_2) = \varphi_a \leq 0,$$

czyli

$$\delta_a = z_a(T_2) \geq 0. \quad (32)$$

W ten sposób wykazaliśmy, że dla układów klasy 2, rzędu $n \geq 4$, nierówność (32) jest wystarczającym warunkiem spełnienia nierówności (20).

Praca wpłynęła do Redakcji w październiku 1978 r.

Literatura

- [1] J. Szczęsny, *Kryterium stabilności dwóch klas nieliniowych układów automatycznej regulacji. Część I. Układy z histerezą*. Prace IMP, z. 77, 1980.
- [2] R. A. Nielepin, (red.), *Metody issledowanija nelinejnych sistem awtomatycznego uprawlenija*. Izd. Nauka, Moskwa 1975.
- [3] Poradnik Inżyniera — Automatyka. WNT, Warszawa 1973.
- [4] J. Osiowski, *Zarys rachunku operatorowego*. WNT, Warszawa 1972.

Критерий устойчивости двух классов нелинейных систем автоматического регулирования

Часть II. Системы с зоной нечувствительности

Резюме

В работе для определенного класса нелинейных систем с зоной нечувствительности (рис. 1) представлен критерий устойчивости, позволяющий эффективно определять области и границы локальной устойчивости.

Критерий основывается на исследовании сигнала $y_E(t)$ (а для $n \geq 4$ также и сигнала $z_{E,a}(t)$) при подаче единичного ступенчатого воздействия $w(t) = 1(t)$ на вход т. наз. эквивалентной линейной системы (рис. 3 и 4). Значения сигналов y_E и $z_{E,a}$ в точке первого максимума ($t = t_{\max 1}$) позволяют судить о локальной устойчивости нелинейной системы.

Применяя указанный критерий целесообразно пользоваться электронно-аналоговой машиной, на которой можно легко замоделировать эквивалентную линейную систему, а затем простым способом исследовать значения сигналов $y_E(t)$ и $z_{E,a}(t)$.

Stability Criterion for Two Classes of Nonlinear Automatic Control Systems Part II. Systems with Dead Zone

Summary

A stability criterion for a particular class of nonlinear systems with a dead zone (Fig. 1) has been presented in the paper. The criterion makes possible effective determination of regions and verges of local stability.

The criterion consists in inspection of a signal $y_E(t)$ (as well as $z_{E,a}(t)$ for $n \geq 4$) resulting from the application of a unit-step-function $w(t) = 1(t)$ at the input of a so called equivalent linear system (Figs 3 and 4). Values of signals y_E and $z_{E,a}$ at the first maximum ($t = t_{\max 1}$) provide the information on the local stability of a nonlinear system.

It is convenient when applying the criterion to use an analogue electronic computer allowing for easy modeling of the equivalent linear system and simple inspection of the values of signals $y_E(t)$ and $z_{E,a}(t)$.