

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

79

WARSZAWA - POZNAŃ 1980
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

RADA REDAKCYJNA — EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
STEFAN PERZYCH · WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ROMUALD PUZYREWSKI
KAZIMIERZ STELLER (PRZEWODNICZĄCY — CHAIRMAN) · ROBERT SZEWAŁSKI
JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY — EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER — REDAKTOR — EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA — EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszersa 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1980

Printed in Poland

ISBN 83-01-02691-X
ISSN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — ODDZIAŁ W POZNANIU

Wydanie I. Nakład 370+90 egz. Ark. wyd. 11. Ark. druk. 8,25. Papier sat. kl. V, 70 g, 70×100. Oddano do składowania 2 I 1980 r. Podpisano do druku w listopadzie 1980 r. Druk ukończono w listopadzie 1980 r. Zam. nr 343/20, T-6/506.
Cena zł 40.—

DRUKARNIA UNIWERSYTETU IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

JAROSŁAW MIKIELEWICZ, EUGENIUSZ IHNATOWICZ

Gdańsk

Analiza ruchu falowego cienkiego filmu cieczowego poruszanego przez naprężenia styczne na granicy rozdziału faz*

Rozpatrzono ruch falowy cienkiej warstwy cieczy poruszanej przez intensywny ruch fazy gazowej. Zbadano wpływ naprężeń stycznych oraz gradientu ciśnienia na parametry ruchu falowego.

Spis oznaczeń

a – amplituda fali,	τ – naprężenia styczne,
c – prędkość fali,	φ – funkcja odchylenia powierzchni filmu
k – liczba falowa,	od wartości średniej zdefiniowana w za-
K – parametr zdefiniowany w zależności (9),	leżności (15),
p – ciśnienie,	ω – częstość fali.
t – czas,	
w – prędkość,	Indeksy dotyczą:
x, y – współrzędne,	i – granicy rozdziału faz ciecz-para,
δ – grubość filmu wodnego,	0 – wielkości zastępczej,
λ – długość fali,	w – ścianki,
μ – lepkość dynamiczna,	– wartości średniej,
ν – lepkość kinematyczna,	' – cieczy,
ρ – gęstość,	" – gazu.
σ – napięcie powierzchniowe,	

1. Wstęp

W związku z prowadzonymi w Instytucie Maszyn Przepływowych PAN badaniami nad zagadnieniem odrywania się kropeł z powierzchni filmu, rozpatrzono ruch falowy cienkiego filmu cieczowego poruszanego przez naprężenia styczne działające na granicy rozdziału faz ciecz-para.

Proces odrywania się kropeł z filmu uzależniony jest głównie od struktury ruchu falowego filmu. W pierwszym etapie tworzenia się fal powstają fale o małej amplitudzie. Poznanie takiego ruchu falowego może dostarczyć cennych informacji dotyczących również in-

* Pracę wykonano w ramach problemu międzyresortowego MR. I. 26, „Podstawy projektowania maszyn i urządzeń energetycznych”, grupa tematyczna 06.

nych struktur ruchu falowego filmu, a w konsekwencji procesu odrywania się kropeł z grzbietów fal. Ruch falowy o małych amplitudach może być rozwiązany w sposób klasyczny za pomocą teorii małych zaburzeń. Teoria małych zaburzeń pozwala na określenie parametrów ruchu falowego, takich jak: prędkość ruchu falowego, długość fali, itp.

W pracy zajęto się próbą teoretycznego zbadania wpływu naprężeń stycznych na granicy rozdziału faz oraz gradientu ciśnienia na ruch falowy cienkiego filmu cieczowego. Rozwiązanie takiego ruchu falowego uzyskano przez zastosowanie metody zaproponowanej przez Kapicę [1].

Zastosowanie wyników badań zagadnienia odrywania się kropeł z powierzchni filmu, jak również związanego z nim ruchu falowego filmu, jest istotne w technice. Można je np. wykorzystać do lepszego opisu zjawisk zachodzących w przepływie dwufazowym-pięścieniowym oraz do badań hydrodynamiki przepływu cienkich warstw cieczy płynących po powierzchni łopatek kierowniczych w ostatnich stopniach części niskoprężnej turbiny parowej.

Specyfika powyższych problemów technicznych wiąże się z koniecznością uwzględnienia wpływu naprężeń stycznych, jak również gradientu ciśnienia, dla przepływu fazy ciekłej. Dotychczasowe rozważania nad ruchem falowym filmu cieczowego dotyczyły głównie przepływu grawitacyjnego co znajduje odbicie w wielu pracach (m. in. w [1 ÷ 4]).

2. Rozkład prędkości w filmie niezafalowanym

Przyjmijmy, że film cieczowy porusza się głównie dzięki działaniu naprężeń stycznych na powierzchni rozdziału faz ciecz-para. Równania ruchu i ciągłości dla filmu niezafalowanego przedstawiają się następująco:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = v' \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0.$$
(1)

Z równania ciągłości wynika, że dla $w_y = 0$, $\partial w_x / \partial x = 0$. Następnie, całkując równanie ruchu przy warunkach brzegowych:

$$y = 0, \quad w_x = 0,$$

$$y = 0, \quad \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\tau_w}{\mu'},$$
(2)

otrzymuje się z zależności (1) jednowymiarowy profil prędkości w postaci

$$w_x = \frac{1}{2\mu'} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + \frac{\tau_w}{\mu'} y.$$
(3)

Zwykle gradient ciśnienia można pominąć i wówczas wzór przyjmuje znaną postać

$$w_x = \frac{\tau_w}{\mu'} y.$$
(4)

W przypadku, gdy znane są naprężenia styczne τ_i na granicy rozdziału faz ciec-z-para, a nie na ścianie τ_w , z zależności (1), przy warunkach brzegowych

$$\begin{aligned} y=0, \quad w_x=0, \\ y=\delta, \quad \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\tau_i}{\mu'}, \end{aligned} \quad (5)$$

otrzymuje się

$$w_x = \frac{1}{2\mu'} \frac{dp}{dx} y^2 + \left(\frac{\tau_i}{\mu'} - \frac{1}{\mu'} \frac{dp}{dx} \delta \right) y, \quad (6)$$

gdzie δ – grubość filmu cieczowego.

Wprowadzając do wzoru (6) średnią prędkość filmu

$$\bar{w} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta w_x dy = \frac{1}{6\mu'} \frac{dp}{dx} \delta^2 + \left(\frac{\tau_i}{\mu'} - \frac{1}{\mu'} \frac{dp}{dx} \delta \right) \frac{\delta}{2} = \frac{1}{\mu'} \frac{dp}{dx} \frac{3K-2}{6} \delta^2, \quad (7)$$

otrzymuje się

$$w_x = \frac{3\bar{w}}{(3K-2)} \left[\left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + 2(K-1) \left(\frac{y}{\delta} \right) \right], \quad (8)$$

gdzie

$$K = \frac{\tau_i}{\frac{dp}{dx} \delta} \quad (9)$$

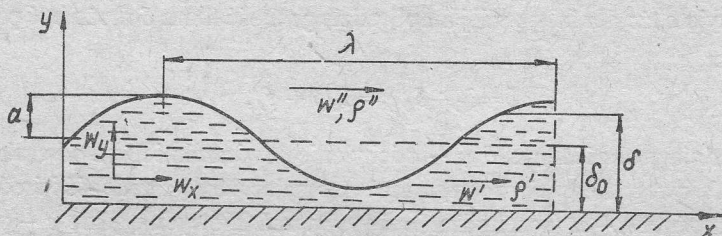
określa stosunek sił naprężeń powierzchniowych do sił wywołanych gradientem ciśnienia.

3. Ruch falowy filmu o małej amplitudzie

Po przekroczeniu określonej prędkości przepływu filmu cieczowego na powierzchni rozdziału faz powstają fale. Będą one przedmiotem przedstawionej poniżej analizy.

W celu określenia długości fali ruchu falowego filmu rozpatrzono fale o małej amplitudzie (rys. 1).

Przyjęto niestacjonarny ruch filmu; porusza się on ruchem laminarnym. Równanie ruchu takiego filmu, przy uwzględnieniu sił kapilarnych działających na granicy rozdziału



Rys. 1. Schemat przepływu zafalowanego filmu cieczowego

faz i po wykorzystaniu równania zachowania masy, można przedstawić według [3] jako:

$$\frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} - \left(\int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} dy \right) \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\sigma}{\rho'} \frac{d^3 \delta}{dx^3} - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p}{\partial x} + v' \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \quad (10)$$

Równanie ciągłości daje zależność

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta w_x dy \right). \quad (11)$$

Poszukiwany profil prędkości w_x jest funkcją współrzędnych x i y oraz czasu t . Rozpatrzone fale, których długość λ jest duża w porównaniu z grubością filmu δ . W tym przypadku równania (10) i (11) mogą być uśrednione względem grubości filmu δ .

Wprowadzając profil prędkości (8) do równań (10) i (11) oraz przyjmując, że średnia prędkość filmu $\bar{w} = \bar{w}(x, t)$ otrzymano:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{3K-2} \left[\left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + 2(K-1) \left(\frac{y}{\delta} \right) \right] \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \left(\frac{3}{3K-2} \right)^2 \bar{w} \left[\left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + 2(K-1) \left(\frac{y}{\delta} \right) \right]^2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \\ & - \left(\frac{3}{3K-2} \right)^2 \bar{w} \left[\frac{2y}{\delta^2} + \frac{2(K-1)}{\delta} \right] \left[\frac{y^3}{3\delta^2} + \frac{K-1}{\delta} y^2 \right] \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \\ & = \frac{\sigma}{\rho'} \frac{d^3 \delta}{dx^3} - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p}{\partial x} + v' \frac{3\bar{w}}{3K-2} \frac{2}{\delta^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Uśredniając zależność (12) względem współrzędnej y otrzymano:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{3} + (K-1) \right] \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{3\bar{w}}{3K-2} \left[\frac{1}{15} + \frac{1}{3}(K-1) + \frac{2}{3}(K-1)^2 \right] \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \\ & = \frac{\sigma}{\rho'} \frac{3K-2}{3} \frac{d^3 \delta}{dx^3} + \frac{2v'\bar{w}}{\delta^2} - \frac{1}{\rho'} \frac{3K-2}{3} \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned} \quad (13)$$

Równanie zachowania masy (11) można przedstawić w postaci

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = - \frac{\partial (\bar{w}\delta)}{\partial x}. \quad (14)$$

W analizie przyjęto, że dla fal o małej amplitudzie grubość filmu δ może być przedstawiona jako

$$\delta = \delta_0 + \delta_0 \varphi = \delta_0 (1 + \varphi), \quad (15)$$

gdzie δ_0 — średnia grubość filmu, $\delta_0 \varphi$ — odchylenie powierzchni filmu od grubości średniej.

Dla ruchu falowego filmu cieczowego można przyjąć, że jego grubość i średnia prędkość zależą od argumentu $x - ct$ (rozchodzenie się zaburzeń falowych), gdzie c — prędkość fali.

Stąd

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = -c \frac{\partial \delta}{\partial x} = -c \delta_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = -c \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}. \quad (17)$$

Wprowadzając zależności (15), (16) i (17) do równania ruchu (13) i równania ciągłości (14), otrzymano

$$\begin{aligned} -c \left[\frac{1}{3} + (K-1) \right] \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{3\bar{w}}{(3K-2)} \left[\frac{1}{15} + \frac{1}{3}(K-1) + \frac{2}{3}(K-1)^2 \right] \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \\ = \frac{\sigma}{\rho'} \frac{3K-2}{3} \frac{d^3 \delta}{dx^3} + \frac{2v'\bar{w}}{\delta^2} - \frac{1}{\rho'} \frac{3K-2}{3} \frac{\partial p}{\partial x}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [(c - \bar{w}) \delta_0 (1 + \varphi)] = 0. \quad (19)$$

Całkując równanie (19) otrzymano

$$\delta_0 (c - \bar{w}) (1 + \varphi) = \text{const} = \delta_0 (c - w_0), \quad (20)$$

stąd

$$\bar{w} = c - \frac{c - w_0}{1 - \varphi} \approx w_0 + (c - w_0) \varphi - (c - w_0) \varphi^2 + \dots, \quad (21)$$

a następnie

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = (c - w_0) (1 - 2\varphi) \frac{d\varphi}{dx}, \quad (22)$$

gdzie w_0 , zdefiniowane w (20), oznacza średnią prędkość w zastępczym filmie gładkim o grubości odpowiadającej średniej grubości filmu zafalowanego δ_0 .

Wprowadzając równania (15), (21) i (22) do (18) otrzymuje się równanie na funkcję φ . Pierwsze przybliżenie tej funkcji można przedstawić równaniem

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\rho'} \delta_0 \frac{3K-2}{3} \frac{d^3 \varphi}{dx^3} - (c - w_0) \left\{ \frac{3w_0}{3K-2} \left[\frac{1}{15} + \frac{1}{3}(K-1) + \frac{2}{3}(K-1)^2 \right] - c \left[\frac{1}{3} + (K-1) \right] \right\} \times \\ \times \frac{d\varphi}{dx} + \frac{2v'}{\delta_0^2} (c - 3w_0) \varphi + \frac{2v'w_0}{\delta_0^2} - \frac{1}{\rho'} \frac{3K-2}{3} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Równanie (23) jest równaniem różniczkowym liniowym trzeciego rzędu. Aby rozwiązanie tego równania było periodyczne i niethumione*, zarówno wolny człon równania jak i człon przy φ muszą być równe zeru. Pierwszy warunek jest spełniony, gdy

$$w_0 = \frac{1}{\mu'} \frac{dp}{dx} \frac{3K-2}{6} \delta_0^2. \quad (24)$$

* Jeden z recenzentów zwraca uwagę na wyeliminowanie z rozważań rozwiązania z falami tłumionymi i brak uzasadnienia takiego postępowania (*przyp. Red.*).

Porównując (24) ze średnią prędkością filmu niezafalowanego (7) otrzymano

$$w_0 = \bar{w}. \quad (25)$$

Oznacza to, że w pierwszym przybliżeniu średnia grubość filmu zafalowanego δ_0 jest równa grubości filmu niezafalowanego δ .

Z drugiego warunku wynika, że

$$c = 3w_0. \quad (26)$$

Po uwzględnieniu w równaniu (23) wspomnianych wyżej warunków i relacji (25) i (26), otrzymano

$$\frac{\sigma}{\rho'} \delta_0 \frac{(3K-2)^2}{3} \frac{d^3 \varphi}{dx^3} + 2w_0^2 \left(\frac{35K^2 - 45K + 14}{5} \right) \frac{d\varphi}{dx} = 0. \quad (27)$$

Jeżeli przez k oznaczymy liczbę falową, to rozwiązanie na funkcję φ można przedstawić w postaci

$$\varphi = a \sin(kx - \omega t), \quad (28)$$

gdzie

$$k = \left[\frac{6}{5} \frac{35K^2 - 45K + 14}{(3K-2)^2} \frac{w_0'^2 \rho'}{\sigma \delta_0} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (29)$$

Gdy parametr K określony zależnością (9) dąży do nieskończoności, co odpowiada ruchowi filmu wywołanego tylko naprężeniami stycznymi, liczba falowa k wynosi

$$k = \sqrt{\frac{4,66 w_0'^2 \rho'}{\sigma \delta_0}} \quad (30)$$

i jest nieco większa niż dla przypadku filmu poruszanego przez siłę grawitacji. W przypadku filmu poruszanego siłą grawitacji stała wynosi 4,2, a nie 4,66 jak dla rozpatrywanego przypadku. Zależność (29) można przedstawić w postaci

$$k = \left[\frac{f(K) w_0'^2 \rho'}{\sigma \delta_0} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (31)$$

Wartość funkcji $f(K)$ przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

K	0	10	100	1000	10000
$f(K)$	4,2	4,6898	4,6689	4,6669	4,6667

Funkcja $f(K)$ posiada maksimum dla $K=1, 2$, które wynosi $f(1, 2)=4,8750$. Film poruszany przez naprężenia styczne i gradient ciśnienia posiada zawsze większe liczby falowe niż film poruszany przez siłę grawitacji.

Wartość liczby falowej k , wyznaczonej z zależności (31), pozwala na określenie długości fali

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (32)$$

4. Wnioski

Powyższa analiza wykazała, że długość fali na powierzchni filmu poruszanego przez naprężenia styczne jest nieco mniejsza niż dla filmu, którego ruch wywołany jest siłą grawitacji, przy tym samym natężeniu przepływu i grubości filmu. Inne parametry ruchu falowego, jak średnia grubość oraz prędkość rozchodzenia się fal, są identyczne jak dla przypadku filmu grawitacyjnego.

Umiarkowane gradienty ciśnienia nieznacznie wpływają na liczbę falową, a tym samym i na długość fali. W obliczeniach inżynierskich ich wpływ na ruch falowy filmu może być pominięty. Przy dużych gradientach ciśnienia (parametr $K \rightarrow 0$) długość fali, jak to wynika z tabeli 1, jest taka sama jak dla przypadku filmu grawitacyjnego.

Praca wpłynęła do Redakcji w marcu 1979 r.

Literatura

- [1] P. L. Kapica, *Volnovoe tečenie tonkich sloev vjazkoj židkosti*. Žur. Eksp. i Teor. Fiz., Vol. 18, Nr 1, 1948, s. 1 - 28.
- [2] P. L. Kapica, S. P. Kapica, *Volnovoe tečenie tonkich sloev vjazkoj židkosti*. Žur. Eksp. i Teor. Fiz., Vol. 19, Nr 2, 1949, s. 105 - 120.
- [3] V. G. Levich, *Physicochemical Hydrodynamics*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs., N. J., 1962, s. 591 - 668.
- [4] P. A. Semenov, *Tečenie židkosti v tonkich slojach*. Žur. Tech. Fiz., Vol. 20, Nr 8, 1950, s. 980 - 990.

Анализ волнового движения тонкой жидкостной пленки, передвигаемой касательными натяжениями на границе раздела фаз

Резюме

При помощи теории малых возмущений анализируется волновое движение тонкой жидкостной пленки, передвигаемой интенсивным течением газообразной фазы. В анализе применен метод предложенный П. Л. Капицей. В результате определено длину волны, а также другие параметры волнового движения. Длина волны связана с безразмерным параметром K , определенным зависимостью (9). Параметр K определяет отношение сил поверхностных натяжений к силам вызванным градиентом давления. Влияние этого параметра на длину волны невелико.

Кроме того оказывается, что длина волны пленки передвигаемой интенсивным течением газообразной фазы незначительно отличается от длины волны пленки текущей под влиянием гравитационной силы.

Analysis of the Wave Motion of a Thin Liquid Film Driven by Shear Stresses at the Liquid-Gas Interface

Summary

The wave motion of a thin liquid film driven by intensive flow of gaseous phase has been studied using the perturbation theory. A method proposed by P. L. Kapica was used in the analysis. As a result the wavelength and other parameters of wave motion were obtained. The wavelength is associated with

a dimensionless parameter K defined by relation (9). This parameter expresses the ratio of surface stress forces to those caused by the pressure gradient. The effect of K on the wavelength is slight.

Besides, it follows from the studies that the wavelength of film driven by intensive flow of gaseous phase does not differ much from the wavelength of film flowing under the gravity forces.