

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

77

WARSZAWA - POZNAŃ 1980

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

RADA REDAKCYJNA - EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
STEFAN PERYCZ · WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ROMUALD PUZYREWSKI
KAZIMIERZ STELLER (PRZEWODNICZĄCY · CHAIRMAN) · ROBERT SZEWAŁSKI
JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY - EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER - REDAKTOR - EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA - EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright

by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1980

Printed in Poland

ISBN 83-01-01613-2

ISSN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 1000 - 90 egz.	Oddano do składania 5 XII 1978 r.
Arty. wyd. 15. Arty. druki 11,775	Podpisano do druku 1 II 1980 r.
Page. druki. nat. 40. 1/4, 70 g 70 x 100 cm.	Druk ukończono w lutym 1980 r.
Net. waga 170 g	Cena zł 50,- L-7/751.

DRUKARNIA UNIWERSYTETU IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

JÓZEF WIĘCKOWSKI

Gdańsk

Elementy dynamiki mostu promowego z luzami obrotowymi w opisie dyskretnym

Sformułowano zadanie zderzenia ze złożoną częstką w układzie dyskretnym łańcuchowym z jednostronnymi więzami holonomicznymi. W ramach modelu zderzenia plastycznego rozwiązano zagadnienie ruchu mostu nieskończonego pod działaniem siły skupionej.

1. Wstęp

Most promowy stanowi łańcuch pontonów połączonych przegubami umożliwiającymi względne, ograniczone obroty tych pontonów. Urządzenie może służyć jako przystań lub most do przejmowania ładunków ze statku w strefie brzegowej i transportu tych ładunków do brzegu.

Dynamikę układów tego rodzaju opisywano dotychczas modelem ciągłym belki z więzami jednostronnymi, które narzucały ograniczenia względnych ruchów pontonów [3, 4, 5, 6]. Elementy belek przyjmowano doskonale sztywne. Odształcalność według modelu sprężystego podano jedynie dla przypadku skręcania [2, 5].

Niniejsza praca ma na celu opisanie tego samego układu rzeczywistego modelem dyskretnym, przy czym założenia dotyczące uproszczonej hydromechaniki problemu pozostały niezmiennione. Reakcje cieczy dane są zatem przez sztywność na obrót i przemieszczenia pionowe, a efekty czysto dynamiczne można uwzględnić powiększając masę i moment bezwładności masy o dodatkowe wielkości zredukowane. Okazało się, że stosując metody rachunku różnicowego [1] można uzyskać dla układów dyskretnych efektywne rozwiązania przez funkcje elementarne. Dodatkowe sformułowanie ogólne problemu zderzenia w układach łańcuchowych pozwoliło na ogólną klasyfikację modeli zderzenia ważnych dla zadań tego rodzaju.

Przewiduje się, że po uzyskaniu wielu ważnych praktycznie rozwiązań i analizie numerycznej będzie można przeprowadzić analizę relacji między ciągłym i dyskretnym opisem tego samego obiektu rzeczywistego i w konfrontacji z doświadczeniem wskazać dalsze kierunki badań.

W artykule przedstawia się kolejno — ogólne sformułowanie problemu zderzenia układu holonomicznego ze złożoną częstką jako zadanie przygotowawcze oraz pojęcie układu łańcuchowego, a następnie sformułowanie szczególnego problemu ruchu mostu promowego

z luzami obrotowymi i rozwiązanie zadania ruchu mostu nieskończonego, obciążonego siłą skupioną w jednym przegubie przy zerowych warunkach początkowych. Rozwiązanie uzyskano dla szczególnego przypadku, gdy łańcuch pontonów posiada jedną częstość drgań własnych. Pracę kończy wyznaczenie sił wewnętrznych i prosty przykład liczbowy. Obszerna analiza numeryczna zostanie przedstawiona w osobnej pracy.

2. Zderzenie złożonej cząstki z więzami holonomicznymi jednostronnymi

Przez złożoną cząstkę rozumiemy układ o n stopniach swobody spełniający w pewnym przedziale czasu jednostronne więzy holonomiczne w postaci równości. Oznacza to, że w tym przedziale czasu mamy równania ruchu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j + R_j, \quad (2.1)$$

$$j = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie reakcje więzów

$$R_j = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad k < n, \quad (2.2)$$

a więzy dane w postaci $\varphi_i \geq 0$ spełnione są jako równości

$$\varphi_i(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0, \quad (2.3)$$

$$i = 1, 2, \dots, k.$$

Rozpatrzmy zderzenie złożonej cząstki z jednostronnymi więzami holonomicznymi

$$\psi_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \geq 0, \quad (2.4)$$

$$i = 1, 2, \dots, L, \quad k + L < n.$$

Niech w chwili $t = t_0$, chwili zderzenia, parametry ruchu złożonej cząstki będą

$$q_j^{(-)}, \dot{q}_j^{(-)}, \ddot{q}_j^{(-)}. \quad (2.5)$$

Spełniają one równanie więzów ψ_i w postaci

$$\psi_i(q_1^{(-)}, q_2^{(-)}, \dots, q_n^{(-)}) = 0, \quad (2.6)$$

$$i = 1, 2, \dots, L,$$

oraz konieczny warunek zderzenia

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} \dot{q}_j^{(-)} < 0, \quad (2.7)$$

$$i = 1, 2, \dots, L.$$

W procesie zderzenia nie zmieniają się współrzędne $q_j^{(-)}$. Impulsy danych sił zewnętrznych Q_j są zatem zerem, natomiast impulsy reakcji więzów φ_i i ψ_i są skończone i powodują przyrosty prędkości.

Z równania (2.1) mamy całkując w otoczeniu $t = t_0$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)_{t=t_0^+} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)_{t=t_0^-} = I_{w,j} + I_{z,j}, \quad (2.8)$$

$$j = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie impulsy wewnętrzne w cząstce

$$I_{w,j} = \sum_{i=1}^k \mu_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.9.1)$$

a impulsy zewnętrzne od więzów ψ_i

$$I_{z,j} = \sum_{i=1}^L v_i \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.9.2)$$

μ_i , v_i są mnożnikami Lagrange'a dla impulsów. Ponieważ więzy są jednostronne postaci $\varphi_i > 0$, $\psi_i > 0$, mnożniki Lagrange'a muszą spełniać nierówność

$$\mu_i \geq 0, \quad v_i \geq 0, \quad (2.10)$$

$$i = 1, 2, \dots, k, \quad i = 1, 2, \dots, L.$$

Jeżeli będziemy postulowali energię kinetyczną układu w postaci

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \dot{q}_\alpha A_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta \quad (2.11)$$

oraz oznaczymy skoki prędkości wywołane zderzeniem przez $\delta \dot{q}_j$, tzn.

$$\delta \dot{q}_j \equiv \dot{q}_j^{(+)} - \dot{q}_j^{(-)}, \quad (2.12)$$

to układ równań (2.8) przyjmie postać

$$\sum_{\alpha=1}^n A_{j\alpha} \delta \dot{q}_\alpha = \sum_{i=1}^k \mu_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^L v_i \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j}, \quad (2.13)$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

Na to aby po zderzeniu ruch był zgodny z więzami prędkości muszą spełniać relację

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} \delta \dot{q}_j \geq 0, \quad (2.14.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, k,$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} (\dot{q}_j^{(-)} + \delta \dot{q}_j) \geq 0, \quad (2.14.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, L.$$

Dodatkowo można nałożyć ograniczenia na energię kinetyczną układu po zderzeniu

relację

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n (\ddot{q}_{\alpha}^{(-)} + \delta \dot{q}_{\alpha}) A_{\alpha\beta} (\ddot{q}_{\beta}^{(-)} + \delta \dot{q}_{\beta}) \leq \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \dot{q}_{\alpha}^{(-)} A_{\alpha\beta} \dot{q}_{\beta}^{(-)}. \quad (2.15)$$

Każdy ciąg $\delta \dot{q}_j$, $j=1, 2, \dots, n$ spełniający równanie (2.13) oraz nierówności (2.14) i (2.15) będziemy nazywali modelem zderzenia.

Gdy chociaż jedna z nierówności (2.14.1) jest silna, mówimy o zderzeniu z wyprośniowaniem.

Gdy chociaż jedna z nierówności (2.14.2) jest silna, mówimy o zderzeniu z odbiciem.

Gdy nierówność (2.15) jest równością, zderzenie nazywamy zachowawczym.

3. Układ łańcuchowy

Przez układ łańcuchowy będziemy rozumieli układ mechaniczny o przeliczalnej liczbie stopni swobody opisany równaniami (2.1) z jednostronnymi więzami holonomicznymi

$$\begin{aligned} Aq_{j+1} + Bq_j + Cq_{j-1} + D &\geq 0, \\ j &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty, \end{aligned} \quad (3.1)$$

gdzie A, B, C, D — stałe niezależne od wskaźnika j . Nierówności (3.1) opisują oczywiście przypadek szczególny. Ogólnie układ mechaniczny nazwiemy łańcuchowym, jeżeli macierz formy liniowej po lewej stronie układu nierówności (3.1) będzie pasmowa i każde pasmo (linia równoległa do przekątnej głównej) będzie się składało z jednakowych liczb.

Niech w zadanej chwili t układ staje się złożoną cząstką z więzami holonomicznymi (3.1) spełnionymi w postaci równości dla wskaźników $j=R+1, R+2, \dots, R+S$. Aby znaleźć współrzędne uogólnione zgodne z więzami dla złożonej cząstki znajdziemy rozwiązanie ogólne układu równań liniowych

$$\begin{aligned} Aq_{j+1} + Bq_j + Cq_{j-1} + D &= 0, \\ j &= R+2, R+3, \dots, R+S-1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Układ ten można sprowadzić do abstrakcyjnego równania różniczkowego drugiego rzędu z pochodną różnicową [1]. Funkcją wykładniczą jest tutaj funkcja β^j , gdzie β jest liczbą. Rozwiązanie jednorodnego równania (3.2) ($D=0$) sprowadza się do podstawienia

$$q_{R+j} = \beta^j \quad (3.3)$$

i rozwiązania równania charakterystycznego

$$A\beta^2 + B\beta + C = 0. \quad (3.4)$$

W przypadku jednokrotnych pierwiastków $0 \neq \beta_1 \neq \beta_2 = 0$, rozwiązanie ogólne jest

$$q_{R+j} = E_1 \beta_1^j + E_2 \beta_2^j, \quad (3.5.1)$$

w przypadku pierwiastka dwukrotnego $\beta \neq 0$

$$q_{R+j} = E_1 \beta^j + E_2 j \beta^j, \quad (3.5.2)$$

w przypadku pierwiastków zespolonych niezerowych

$$\begin{aligned}\beta_{1,2} &= \alpha_1 + i\alpha_2 = \rho(\cos \chi + i \sin \chi), \\ q_{R+j} &= E_1 \rho^j \cos j\chi + E_2 \rho^j \sin j\chi.\end{aligned}\quad (3.5.3)$$

Rozwiązanie układu niejednorodnego (3.2) można znaleźć np. metodą uzmiennienia stałej w rozwiązaniach układu jednorodnego. Jest to analogia elementarnej metody wyznaczenia całek ogólnych równań różniczkowych liniowych o współczynnikach stałych. Otrzymamy kolejno, w przypadku (3.5.1)

$$q_{R+j} = E_1 \beta_1^j + E_2 \beta_2^j - \frac{D}{A} \left(\frac{\beta_1^j}{\beta_1 - \beta_2} \sum_{k=1}^{j-1} \beta_1^{-k} + \frac{\beta_2^j}{\beta_2 - \beta_1} \sum_{k=1}^{j-1} \beta_2^{-k} \right), \quad (3.6.1)$$

w przypadku (3.5.2)

$$q_{R+j} = E_1 \beta^j + E_2 j \beta^j - \frac{D}{A} \sum_{k=2}^j \beta^{j-k} (j+1-k), \quad (3.6.2)$$

w przypadku (3.5.3)

$$q_{R+j} = E_1 \rho^j \cos j\chi + E_2 \rho^j \sin j\chi + \frac{D}{A} \sum_{k=2}^j \rho^{-k} \left[\frac{\sin(k-1)\chi - \cos(k-1)\chi}{\sin \chi} \right]. \quad (3.6.3)$$

Łatwo zauważyć, że $\sin \chi \neq 0$. Gdyby bowiem było $\sin \chi = 0$, to pierwiastek równania charakterystycznego byłby dwukrotny. E_1, E_2 są współrzędnymi uogólnionymi strefy zwarcia zgodnymi z więzami.

Równania ruchu strefy zwarcia otrzymamy dodając równania (2.1) od wskaźnika $j=R$ do $j=R+S$ pomnożone odpowiednio w przypadku różnych pierwiastków $\beta_1 \neq \beta_2$ i rzeczywistych przez β_m^j . Otrzymamy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{E}_m} \right) - \frac{\partial T}{\partial E_m} + \frac{\partial U}{\partial E_m} = \sum_{j=1}^S Q_{R+j} \beta_m^j, \quad (3.7.1)$$

$$m=1, 2.$$

W przypadkach pozostałych

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{E}_m} \right) - \frac{\partial T}{\partial E_m} + \frac{\partial U}{\partial E_m} = \sum_{j=1}^S Q_{R+j} \gamma_m(j), \quad (3.7.2)$$

$$m=1, 2,$$

gdzie dla pierwiastka dwukrotnego

$$\gamma_1(j) = \beta^j, \quad \gamma_2(j) = j\beta^j, \quad (3.8.1)$$

a dla pierwiastków zespolonych

$$\gamma_1(j) = \rho^j \cos j\chi, \quad \gamma_2(j) = \rho^j \sin j\chi. \quad (3.8.2)$$

4. Równania ruchu pontonów mostu promowego

Przyjmijmy schemat geometryczny mostu jak na rys. 4.1.

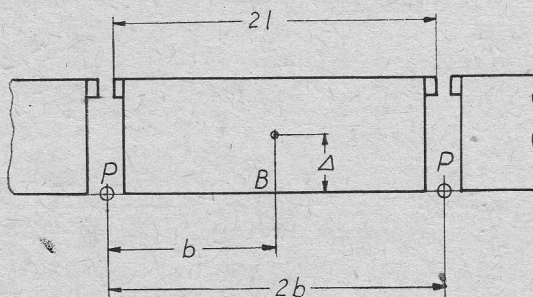
Jeżeli K oznacza sztywność na przemieszczenia pionowe, L – sztywność na obroty pontonów, to energia potencjalna całego mostu

$$U = \sum_i \left[\frac{K}{8} (q_i + q_{i+1})^2 + \frac{L}{8b^2} (q_{i+1} - q_i)^2 \right], \quad (4.1.1)$$

a energia kinetyczna

$$T = \sum_i \left[\frac{m}{8} (\dot{q}_i + \dot{q}_{i+1})^2 + \frac{\tilde{I}}{8b^2} (\dot{q}_{i+1} - \dot{q}_i)^2 \right], \quad (4.1.2)$$

gdzie q_i – przemieszczenia pionowe przegubów P , z_i – przemieszczenia poziome przegubów P , $\tilde{I} = I + m\Delta^2$ – całkowity moment bezwładności pontonu względem punktu B ,



Rys. 4.1. Schemat geometryczny mostu

m – masa jednego pontonu. Więzy narzucone są na każdą kolejną trójkę przemieszczeń węzłów w ten sposób, że względny kąt obrotu dwóch sąsiednich pontonów jest ograniczony zadaną liczbę $2\varphi_0 > 0$. Prowadzi to do relacji

$$q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1} + 2\varphi_0 b \geq 0. \quad (4.2)$$

Aby wyznaczyć siły wewnętrzne wzajemnego oddziaływania przy znanym ruchu, należy napisać równania ruchu pontonu między dwoma przegubami (rys. 4.2) rozpatrując dwa przypadki brak styku pontonów ($S_i = 0$) i styk pontonów ($S_i \neq 0$).

– Równanie ruchu postępowego pionowego

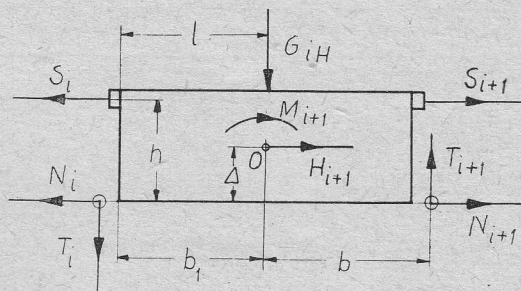
$$\frac{m}{2} (\ddot{q}_{i+1} + \ddot{q}_i) + \frac{K}{2} (q_{i+1} + q_i) = G_{i+1} + T_i - T_{i+1}. \quad (4.3.1)$$

– Równanie ruchu postępowego poziomego

$$\frac{m\Delta}{2b} (\ddot{q}_{i+1} - \ddot{q}_i) + m\ddot{Z}_{i+1} = (N_{i+1} - N_i) + (S_i - S_{i+1}) + H_{i+1}. \quad (4.3.2)$$

– Równanie ruchu obrotowego dookoła środka masy pontonu O

$$\frac{I}{2b} (\ddot{q}_{i+1} - \ddot{q}_i) + \frac{L}{2b} (q_{i+1} - q_i) = M_{i+1} + \Delta(N_i - N_{i+1}) - b(T_i + T_{i+1}) + (h - \Delta)(S_i - S_{i+1}). \quad (4.3.3)$$



Rys. 4.2. Obciążenia pontonu

Postulując brak ruchów wzdłuż układu ($Z_i \equiv 0$) i rugując siły podłużne z równania ruchu obrotowego oraz wprowadzając oznaczenia

$$\check{I} = \frac{I + \Delta^2 m}{b^2}, \quad (4.4.1)$$

$$\check{L} = \frac{L}{b^2}, \quad (4.4.2)$$

otrzymujemy po przekształceniach równanie

$$\check{I} \frac{\dot{q}_{i+1} - \dot{q}_i}{2} + \check{L} \frac{\dot{q}_{i+1} - q_i}{2} = \frac{M_{i+1}}{b} + \frac{h}{b} (S_i - S_{i+1}) + H_{i+1} \frac{\Delta}{b} - (T_i + T_{i+1}). \quad (4.4.3)$$

W przypadku strefy rozwarcia ($S_i = 0$) i braku ruchów wzdłużnych układ (4.3.1) i (4.4.3) można rozwiązać względem sił tnących, otrzymując względne wzory kontrolne do obliczeń szczególnych

$$T_i = \frac{M_{i+1}}{2b} - \frac{1}{2} G_{i+1} + H_{i+1} \frac{h}{\pi b} + \frac{1}{4} [m(\ddot{q}_{i+1} + \ddot{q}_i) - \check{I}(\ddot{q}_{i+1} - \ddot{q}_i)] + \frac{1}{4} [K(q_{i+1} + q_i) - \check{L}(q_{i+1} - q_i)], \quad (4.5.1)$$

$$T_{i+1} = \frac{M_{i+1}}{2b} + \frac{1}{2} G_{i+1} + H_{i+1} \frac{h}{2b} - \frac{1}{4} [m(\ddot{q}_{i+1} + \ddot{q}_i) + \check{I}(\ddot{q}_{i+1} - \ddot{q}_i)] + \frac{1}{4} [K(q_{i+1} + q_i) + \check{L}(q_{i+1} - q_i)]. \quad (4.5.2)$$

Z równań (4.3.1), (4.3.2) i (4.3.3) otrzymujemy również impulsy sił wewnętrznych w trakcie zderzenia, całkując je w małym otoczeniu czasu zderzenia t_0 . Jeżeli

$$\delta \dot{q}_i \equiv \dot{q}_i^{(+)} - \dot{q}_i^{(-)}, \quad (4.6)$$

tzn. jest to różnica jednostronnych prędkości zderzenia przed i po zderzeniu, natomiast jeżeli przez $\check{N}_i$, $\check{S}_i$, $\check{T}_i$ oznaczymy impulsy sił wewnętrznych, to otrzymujemy kolejno

$$\frac{m}{2} (\delta \dot{q}_{i+1} + \delta \dot{q}_i) = \check{T}_i - \check{T}_{i+1}, \quad (4.7.1)$$

$$(\ddot{N}_{i+1} - \ddot{N}_i) + (\ddot{S}_i - \ddot{S}_{i+1}) = \frac{m\Delta}{2b} (\delta\dot{q}_{i+1} - \delta\dot{q}_i), \quad (4.7.2)$$

$$\frac{\ddot{I}}{2} (\delta\dot{q}_{i+1} - \delta\dot{q}_i) = (\ddot{S}_i - \ddot{S}_{i+1}) \frac{h}{b} - (\ddot{T}_i + \ddot{T}_{i+1}). \quad (4.7.3)$$

Oczywiście podczas zderzenia współrzędne uogólnione układu pozostają stałe, a impulsy sił zewnętrznych są zerami. W przypadku gdy na pontonach znajduje się poruszający się pojazd układ równań (4.7) może ulec zmianie, gdyż siły G_{i+1} , M_{i+1} , H_{i+1} mogą zawierać składniki, które będą siłami bezwładności pojazdu.

5. Równania Lagrange'a i zadania statyczne

Znajdziemy ogólne równania ruchu układu mostu pisząc równania Lagrange'a dla układu łańcuchowego z energią kinetyczną T i potencjalną U danymi relacjami (4.1.1) i (4.1.2).

Dla każdego węzła wewnętrznego równanie ruchu mostu rozwartego będzie

$$\frac{m+\ddot{I}}{2} \ddot{q}_j + \frac{m-\ddot{I}}{4} \ddot{q}_{j+1} + \frac{m-\ddot{I}}{4} \ddot{q}_{j-1} + \frac{K+\ddot{L}}{2} q_j + \frac{K-\ddot{L}}{4} q_{j+1} + \frac{K-\ddot{L}}{4} q_{j-1} = Q_j. \quad (5.1.1)$$

Jeżeli j jest numerem lewego węzła zewnętrznego, to równanie ruchu jest

$$\frac{m+\ddot{I}}{4} \ddot{q}_j + \frac{m-\ddot{I}}{4} \ddot{q}_{j+1} + \frac{K+\ddot{L}}{4} q_j + \frac{K-\ddot{L}}{4} q_{j+1} = Q_j, \quad (5.1.2)$$

natomiast jeśli j jest numerem prawego węzła zewnętrznego, to równanie ruchu jest

$$\frac{m+\ddot{I}}{4} \ddot{q}_j + \frac{m-\ddot{I}}{4} \ddot{q}_{j-1} + \frac{K+\ddot{L}}{4} q_j + \frac{K-\ddot{L}}{4} q_{j-1} = Q_j. \quad (5.1.3)$$

Dla pontonów prostokątnych o szerokości b_2 i długości $2b_1$ sztywność pionowa K hydrostatyczna i sztywność na obrót L obliczona również dla warunków hydrostatycznych wynoszą

$$K = 2b_1 b_2 \gamma. \quad (5.2.1)$$

Jeżeli postulować, że między liczbami K , m , $\ddot{L}$, $\ddot{I}$ zachodzą relacje

$$K = \alpha^2 m, \quad (5.3.1)$$

$$\ddot{L} = \alpha^2 \ddot{I}, \quad (5.3.2)$$

oznacza to, że między masą i momentem bezwładności pontonu I zachodzi związek

$$\ddot{I} = \frac{m}{3} (b_1^2 - 3\Delta^2). \quad (5.4.1)$$

Równanie to jest spełnione ściśle dla kilku przypadków zbliżonych do praktycznych. Stąd w rozwiązaniu dynamicznym będziemy postulowali relacje (5.3) ze współczynnikiem α^2 danym.

Zajmiemy się mostem nieograniczonym i zadaniem statycznym. Równania (5.1.1) przyjmują postać

$$(K - \check{L})q_{j+1} + 2(K + \check{L})q_j + (K - \check{L})q_{j-1} = 4Q_j, \quad (5.5)$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty.$$

Równania te są ważne jedynie wtedy, gdy więzy nie interweniują. Przypadek $K = \check{L}$ prowadzi do rozwiązań banalnych i nie jest możliwy dla przyjętej geometrii pontonów (wtedy $b_1 = \sqrt{3}b$). Mamy również

$$K - \check{L} = 2\gamma b_1 b_2 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{b_1^2}{b^2}\right) > 0, \quad (5.6)$$

z czego wynika, że obydwie pierwiastki równania charakterystycznego są ujemne

$$\beta_1 = \frac{1}{\beta_2} = -\frac{\sqrt{K} + \sqrt{\check{L}}}{\sqrt{K} - \sqrt{\check{L}}}. \quad (5.7)$$

W oczywisty sposób mamy $|\beta_1| > 1$, $|\beta_2| < 1$ i rozwiązanie ogólne układu równań jednorodnych (5.5)

$$q_j = A\beta_1^j + B\beta_2^j. \quad (5.8)$$

Zajmiemy się szczególnym przypadkiem obciążenia przegubu zerowego siłą $Q_0 \neq 0$. Będzie to jedyne obciążenie układu. Z warunków zanikania ugięć gdy $j \rightarrow +\infty$ i $j \rightarrow -\infty$ oraz ciągłości w miejscu przyłożenia siły otrzymamy rozwiązanie

$$q_j = \begin{cases} \frac{Q_0}{\sqrt{K\check{L}}} \beta_2^j, & j = 0, 1, 2, \dots, +\infty, \\ \frac{Q_0}{\sqrt{K\check{L}}} \beta_1^j, & j = 0, -1, -2, \dots, -\infty. \end{cases} \quad (5.9)$$

Jedynymi siłami wewnętrznymi w połączeniach są siły tnące, które wyznaczymy z równań (4.5) otrzymując

$$T_i = \frac{Q_0}{2} \beta_2^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, +\infty. \quad (5.10)$$

Dla $i = 0$ jest to oczywiście siła tnąca prawostronna. Siły tnące dla $i < 0$ są oczywiście symetryczne.

Siłę pierwszego zwarcia otrzymujemy podstawiając rozwiązanie (5.9) do równania zwarcia pontonów środkowych

$$q_1 - 2q_0 + q_{-1} = -2\varphi_0 b. \quad (5.11.1)$$

Proste przekształcenia prowadzą do wyniku

$$Q_{01} = \frac{\varphi_0 b}{2} \sqrt{\check{L}} (\sqrt{K} + \sqrt{\check{L}}). \quad (5.11.2)$$

Rozważmy przypadek ogólny gdy strefa zwarcia pontonów rozciąga się od wskaźnika $i = -n_0$ do wskaźnika $i = n_0$. Posługujemy się tutaj równaniami (3.7) i ogólnym rozwiązaniem dla ugięć w strefie zwarcia, parzystym względem i

$$q_i = D_1 - \varphi_0 b (2 + i^2), \quad (5.12.1)$$

$$i = 0, \pm 1, \dots, \pm n_0.$$

Równanie Lagrange'a względem współrzędnej uogólnionej D_1 jest dla ustalonego n_0

$$\begin{aligned} \left(2n_0 K + \frac{K + \check{L}}{2}\right) D_1 + \frac{K - \check{L}}{4} (q_{-(n_0+1)} + q_{(n_0+1)}) = Q_0 + \frac{K + \check{L}}{2} \varphi_0 b (2 + n_0^2) + \\ + \frac{K \varphi_0 b}{6} [(n_0 + 1)(n_0 + 2)(2n_0 + 3) + (n_0 - 1)(n_0 - 2)(2n_0 - 3)]. \end{aligned} \quad (5.12.2)$$

Z warunków ciągłości na styku zwarcia i rozwarcia

$$\begin{aligned} D_1 = \left\{ Q_0 + \varphi_0 b \left[\frac{1}{2} (K + \check{L}) + \frac{1}{2} (K - \check{L}) \beta_2 \right] (2 + n_0^2) + \frac{\varphi_0 b K}{6} [(n_0 + 1)(n_0 + 2)(2n_0 + 3) + \right. \\ \left. + (n_0 - 1)(n_0 - 2)(2n_0 - 3)] \right\} \left(2n_0 K + \frac{K + \check{L}}{2} + \frac{K - \check{L}}{2} \beta_2 \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

W równaniach tych Q_0 nie jest oczywiście siłą dowolną. Jest ona zawarta w przedziale $\langle Q_{0, \min}(n_0), Q_{0, \max}(n_0) \rangle$. Dolna wartość odpowiada pierwszemu zwarcu i może być wyznaczona z warunku, że moment wszystkich sił działających na ponton między przegubami $n_0 - 1$ i n_0 względem przegubu $n_0 - 1$ znika. Liczne przekształcenia prowadzą do rezultatu

$$\begin{aligned} Q_{0, \min} = \frac{\varphi_0 b}{6(\sqrt{K} + \sqrt{\check{L}})} [4K \sqrt{K} n_0 (2n_0^2 - 3n_0 + 1) + K \sqrt{\check{L}} (8n_0^3 - 8n_0 + 3) + \\ + 6\check{L} \sqrt{K} n_0 (2n_0 - 1) + 3\check{L} \sqrt{\check{L}} (2n_0 - 1)]. \end{aligned} \quad (5.14.1)$$

Dla $K = \check{L}$ otrzymujemy bardzo prosty rezultat

$$Q_{0, \min} = \frac{\varphi_0 b k}{3} n_0 (4n_0^2 - 1). \quad (5.14.2)$$

Obliczając stałą D_1 dla tego przypadku i podstawiając do równania (5.12) obliczamy ekstremalne zgięcia

$$q_0 = \frac{2n_0^2 \sqrt{K\check{L}} + (2n_0^2 - 2n_0 + 1) K + (2n_0 - 1) \check{L}}{2\sqrt{K} (\sqrt{K} + \sqrt{\check{L}})} \varphi_0 b. \quad (5.15)$$

Pominiemy teraz szczegóły rachunku podając rezultaty obliczeń parametrów zgięcia mostu.

Ugięcia poza strefę zwania i na jej brzegu

$$q_i = \frac{1}{2} (1 - 2n_0) \frac{\sqrt{K} - \sqrt{\tilde{L}}}{\sqrt{K}} \beta_2^{i-n_0} \varphi_0 b, \quad (5.16)$$

$$i = n_0, n_0 + 1, \dots, +\infty.$$

Siły tnące poza strefą zwania i na jej brzegu

$$T_i = \frac{1 - 2n_0}{4} \sqrt{\tilde{L}} (\sqrt{K} - \sqrt{\tilde{L}}) \beta_2^{i-n_0} \varphi_0 b, \quad (5.17)$$

$$i = n_0, n_0 + 1, \dots, +\infty.$$

Do obliczenia sił wewnętrznych w strefie zwania wygodnie posłużyć się równaniem (4.5.2) w postaci

$$T_i = T_{i+1} + \frac{K}{2} (q_i + q_{i+1}). \quad (5.18)$$

Otrzymujemy wtedy wzór rekurencyjny na obliczenie kolejnych sił tnących

$$T_j = T_{n_0} + \frac{K}{2} (q_{n_0} + 2q_{n_0-1} + \dots + 2q_{j+1} + q_j). \quad (5.19)$$

Z równania (4.4.3) wyznaczamy siły podłużne na zderzakach w strefie zwania

$$S_j = \frac{b}{h} \left[T_{n_0} + 2T_{n_0-1} + \dots + 2T_{j+1} + T_j - \frac{\varphi_0 b \tilde{L}}{2} (n_0^2 - j^2) \right]. \quad (5.20)$$

Z równania (4.3.2) wynika, że w strefie zwania $S_j = N_j$, tzn. oprócz sił podłużnych na zderzakach występują jeszcze tej samej wielkości siły w przegubie.

6. Zadania dynamiczne w opisie liniowym (bez zderzeń)

Rozwiążemy szczegółowo zadanie dynamiki mostu pod obciążeniem skupionym w przegubie $i=0$ przy zerowych warunkach początkowych i w fazie wzrostu strefy zwania. Ogólne rozwiązanie zadania dla mostu nieograniczonego jest proste w przypadku, gdy spełnione są równania (5.3), tzn. $K = \alpha^2 m$, $\tilde{L} = \alpha^2 \tilde{I}$. Układ równań (5.1.1) sprowadza się wtedy do postaci

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m + \tilde{I}}{2} q_j + \frac{m - \tilde{I}}{4} q_{j+1} + \frac{m - \tilde{I}}{4} q_{j-1} \right) + \\ + \left(\frac{m + \tilde{I}}{2} q_j + \frac{m - \tilde{I}}{4} q_{j+1} + \frac{m - \tilde{I}}{4} q_{j-1} \right) \alpha^2 = Q_j(t). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$P_j \equiv \frac{m + \tilde{I}}{2} q_j + \frac{m - \tilde{I}}{4} q_{j+1} + \frac{m - \tilde{I}}{4} q_{j-1}, \quad (6.2)$$

sprowadzamy każde równanie układu (6.1) do postaci

$$\ddot{P}_j + \alpha^2 P_j = Q_j(t). \quad (6.3)$$

Ogólnym rozwiązaniem jest

$$P_j(t) = C_{1j} \sin \alpha t + C_{2j} \cos \alpha t + \frac{1}{\alpha} \int_0^t Q_j(\tau) \sin \alpha(t-\tau) d\tau. \quad (6.4)$$

Znajdziemy w pierw rozwiązanie szczególne dla q_j odpowiadające trzeciemu kolejnemu składnikowi w rozwiązaniu (6.4). W tym celu założymy, że obciążenie siłą uogólnioną działa jedynie w przegubie $j=k$ i napiszemy rozwiązanie w postaci

$$q_j = q_j^0 \frac{1}{\alpha} \int_0^t Q_k(\tau) \sin \alpha(t-\tau) d\tau. \quad (6.5)$$

Układ (6.2) sprowadza się wtedy do postaci

$$\frac{m+\check{I}}{2} q_j^0 + \frac{m-\check{I}}{4} q_{j+1}^0 + \frac{m-\check{I}}{4} q_{j-1}^0 = 0, \quad (6.6.1)$$

$$j \neq k \quad \text{ i } \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$$

oraz

$$\frac{m+\check{I}}{2} q_k^0 + \frac{m-\check{I}}{4} q_{k+1}^0 + \frac{m-\check{I}}{4} q_{k-1}^0 = 1. \quad (6.6.2)$$

Rozwiązanie układu (6.6) z warunkiem

$$\lim_{j \rightarrow \pm \infty} q_j^0 = 0 \quad (6.7)$$

oraz warunkiem ciągłości równań dla $j=k$ prowadzi do rezultatu

$$q_j^0 = \frac{1}{\sqrt{m\check{I}}} \begin{cases} \beta_2^{j-k}, & j \geq k, \\ \beta_1^{j-k}, & -k \geq j. \end{cases} \quad (6.8)$$

Rozwiązanie odpowiadające pierwszym dwom składnikom po prawej stronie rozwiązania (6.4) najłatwiej uzyskać wprost z jednorodnego układu (6.1). Postulując rozwiązanie w postaci $q_j = \check{q}_j e^{\omega t}$ otrzymamy układ równań

$$\frac{m+\check{I}}{2} \check{q}_j (\alpha^2 + \omega^2) + \frac{m-\check{I}}{4} \check{q}_{j+1} (\alpha^2 + \omega^2) + \frac{m-\check{I}}{4} \check{q}_{j-1} (\alpha^2 + \omega^2) = 0. \quad (6.9)$$

Układ ten jest tożsamościowo spełniony dla $\omega = \pm i\alpha$. Mamy zatem niezależne wzajemne rozwiązania dla częstości α postaci

$$q_j^1 = B_{1j} \sin \alpha t + B_{2j} \cos \alpha t, \quad (6.10)$$

$$j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty.$$

Rozwiązania te opisują drgania swobodne układu. Jak widać, występuje tylko jedna częstość drgań własnych, a każda forma odkształcenia jest funkcją własną.

Trzecim składnikiem rozwiązania ogólnego układu (6.1) jest rozwiązanie jednorodnego układu (6.2)

$$q_j^2 = A_1 \beta_1^j + A_2 \beta_2^j. \quad (6.11)$$

Suma rozwiązań (6.5) dla wszystkich k , rozwiązań (6.10) oraz (6.11) daje całkę ogólną układu wyjściowego w zakresie liniowym bez zderzeń.

Niech będzie obciążony tylko przegub zerowy stałą siłą Q_0 . Przy zerowych warunkach początkowych otrzymujemy rozwiązanie

$$q_j = \frac{Q_0}{\alpha^2 \sqrt{\tilde{I}m}} (1 - \cos \alpha t) \begin{cases} \beta_2^j, & j \geq 0, \\ \beta_1^j, & 0 \geq j. \end{cases} \quad (6.12)$$

Znajdziemy najmniejszą siłę $Q_0 = Q_{01}$, przy której nastąpi styk w pontonach przegubu zerowego bez zderzenia. Zajdzie to dla $\alpha t = \pi$ przy spełnieniu przez rozwiązania (6.12) równania więzów

$$q_1 - 2q_0 + q_{-1} + 2\varphi_0 b = 0. \quad (6.13)$$

Proste obliczenia prowadzą do wyniku

$$Q_{01} = \frac{\varphi_0 b \alpha^2}{2(1 - \beta_2)} \sqrt{\tilde{I}m}. \quad (6.14)$$

Dla $Q_0 > Q_{01}$ zderzenie wystąpi wcześniej, dla $t_z < \pi/\alpha$. Czas zderzenia wyznacza się z równania

$$\cos \alpha t_z = 1 - \frac{\varphi_0 b \alpha^2 \sqrt{\tilde{I}m}}{Q_0(1 - \beta_2)}. \quad (6.15)$$

Mechanizm zderzenia rozpatrzymy szczegółowo w następnym punkcie pracy.

7. Impulsy wewnętrzne podczas zderzeń pontonów

Weźmy przypadek szczególnie opisany w poprzednim punkcie pracy oraz obciążenie jedynie przegubu zerowego stałą siłą Q_0 przy zerowych warunkach początkowych.

W chwili pierwszego zderzenia włączają się więzy

$$q_1 - 2q_0 + q_{-1} + 2\varphi_0 b = 0. \quad (7.1)$$

Zgodnie z równaniem (2.9.2) impulsy zderzenia odpowiadające kolejnym współrzędnym uogólnionym są

$$\begin{aligned} \Xi_{-1} &= \lambda, & \Xi_0 &= -2\lambda, & \Xi_1 &= \lambda, \\ \Xi_j &= 0, & j &= \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \infty. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Układ równań nieskończonych do wyznaczenia przyrostów prędkości uogólnionych zgodnie z (2.13) jest

$$\frac{m + \tilde{I}}{2} \delta \dot{q}_{-1} + \frac{m - \tilde{I}}{4} \delta \dot{q}_0 + \frac{m - \tilde{I}}{4} \delta \dot{q}_{-2} = \lambda,$$

$$\begin{aligned}
\frac{m+\check{I}}{2} \delta \dot{q}_0 + \frac{m-\check{I}}{4} \delta \dot{q}_1 + \frac{m-\check{I}}{4} \delta \dot{q}_{-1} &= -2\lambda, \\
\frac{m+\check{I}}{2} \delta \dot{q}_1 + \frac{m-\check{I}}{4} \delta \dot{q}_0 + \frac{m-\check{I}}{4} \delta \dot{q}_2 &= \lambda, \\
\frac{m+\check{I}}{2} \delta \dot{q}_j + \frac{m-\check{I}}{4} \delta \dot{q}_{j-1} + \frac{m-\check{I}}{4} \delta \dot{q}_{j+1} &= 0, \\
j &= \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \infty.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Rozwiązanie tego układu z warunkiem znikania rozwiązań w nieskończoności prowadzi do wyniku

$$\begin{aligned}
\delta \dot{q}_0 &= -\frac{2\lambda}{\sqrt{m}} (1-\beta_2), \\
\delta \dot{q}_i &= \frac{\lambda}{\sqrt{m\check{I}}} (1-\beta_2)^2 \beta_2^{i-1}, \quad i \geq 1, \\
\delta \dot{q}_i &= \frac{\lambda}{\sqrt{m\check{I}}} (1-\beta_1)^2 \beta_1^{i-1}, \quad -1 \geq i.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Współczynnik λ wyznaczamy z relacji zgodności prędkości po zderzeniu z więzami (2.14.2). W przypadku modelu zderzenia plastycznego warunkiem tym jest równanie

$$(\dot{q}_{-1}^{(-)} + \delta \dot{q}_1) - 2(\dot{q}_0^{(-)} + \delta \dot{q}_0) + (\dot{q}_1^{(-)} + \delta \dot{q}_1) = 0. \tag{7.5}$$

Korzystając z równania (6.12) i symetrii rozkładu prędkości wyznaczamy przyrosty prędkości

$$\begin{aligned}
\delta \dot{q}_0 &= -\frac{2Q_0}{\alpha \sqrt{m\check{I}}} \frac{1-\beta_2}{3-\beta_2} \sin \alpha t_z, \\
\delta \dot{q}_i &= \frac{Q_0}{\alpha \sqrt{m\check{I}}} \frac{(1-\beta_2)^2}{3-\beta_2} \beta_2^{i-1} \sin \alpha t_z.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Impulsy tnące w sworzniach $\check{T}_i$ znajdujemy z równań impulsów dla ruchu pionowego (4.7.1) oraz równań impulsów dla ruchu obrotowego w strefie rozwarcia. Pomijamy szczegóły rachunku otrzymując

$$\check{T}_0 = 0, \quad \check{T}_i = \frac{1}{2} \frac{Q_0}{\alpha} \frac{(1-\beta_2)^2}{3-\beta_2} \beta_2^{i-1} \sin \alpha t_z. \tag{7.7}$$

Z pozostałych równań (4.7) wyznaczamy impulsy podłużne na zderzaku $i=0$ oraz impulsy podłużne w sworzniach

$$\check{S}_0 = \frac{b}{h} \frac{Q_0}{\alpha} \frac{2}{3-\beta_2} \sin \alpha t_z, \tag{7.8.1}$$

$$\check{N}_0 = \frac{Q_0}{\alpha} \frac{b}{h(3-\beta_2)} \left[2 - \frac{\Delta h}{b^2} \frac{(1-\beta_2)^2}{(1+\beta_2)} \right] \sin \alpha t_z, \quad (7.8.2)$$

$$\check{N}_i = \frac{\Delta}{2b} \frac{Q_0}{\alpha} \frac{(1-\beta_2)^3}{(1+\beta_2)(3-\beta_2)} \beta_2^{i-1} \sin \alpha t_z, \quad (7.8.3)$$

$$j=1, 2, \dots, +\infty.$$

Jest rzeczą oczywistą, że przy szczególnym doborze parametrów geometrycznych układu można uzyskać impuls $\check{N}_0=0$. Impulsy $\check{N}_j \neq 0$ wtedy, gdy $\Delta \neq 0$ i zanikają według potęg β_2 do zera w nieskończoności. Dla $m=\check{I}$ jest $\beta_2=0$ i impulsy zderzenia ograniczają się do przebiegu zerowego oraz przegubów o numerach jeden i minus jeden. Występuje więc zjawisko lokalizacji impulsów. W przypadku $m \neq \check{I}$ impulsy pojawiają się jednocześnie we wszystkich przegubach. Ze względu na sztywność elementów impulsy propagują się w układzie z nieskończoną prędkością.

W przekroju przegubu zerowego wszystkie impulsy są poziome. Poza tym przekrojem występuje pozioma i pionowa składowa impulsu, a więc impuls wypadkowy

$$\check{R}_i = (\check{N}_i^2 + \check{T}_i^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.9)$$

$$i=1, 2, \dots, +\infty.$$

Napiszemy teraz równanie ruchu układu i znajdziemy impulsy zderzenia dla przypadku gdy przegub został obciążony siłą Q_0 taką, że aktualnie strefa zwarcia obejmuje $2n_0$ pontonów otaczających symetrycznie przegub o numerze $i=0$. Rozwiązujemy układ równań więzów dla strefy zwarcia korzystając z rozwiązania ogólnego (3.6.2). Warunek parzystości rozwiązania względem wskaźnika i prowadzi do wyniku

$$q_i = D_1 - \varphi_0 b (2+i^2), \quad i=0, \pm 1, \dots, \pm n_0. \quad (7.10.1)$$

D jest nową współrzędną uogólnioną, zatem

$$\dot{q}_i = \dot{D}_1, \quad i=0, \pm 1, \dots, \pm n_0. \quad (7.10.2)$$

Do równania (4.1) dla energii potencjalnej i kinetycznej podstawiamy relacje (7.10) otrzymując równanie w nowych współrzędnych uogólnionych układu ($D_1, q_i, i=\pm(n_0+1), \pm(n_0+2), \dots, \pm\infty$).

Po licznych przekształceniach otrzymujemy równania ruchu. Równanie ruchu strefy zwarcia

$$\begin{aligned} & \left(2n_0 m + \frac{m+\check{I}}{2} \right) \ddot{D}_1 + \frac{m-\check{I}}{4} (\ddot{q}_{n_0+1} + \ddot{q}_{-(n_0+1)}) + \\ & + \left(2n_0 K + \frac{K+\check{L}}{2} \right) D_1 + \frac{K-\check{L}}{4} (q_{n_0+1} + q_{-(n_0+1)}) = \\ & = Q_0 + \frac{K\varphi_0 b}{6} [(n_0+1)(n_0+2)(2n_0+3) + (n_0-1)(n_0-2)(2n_0-3)] + \\ & + \frac{K+\check{L}}{2} \varphi_0 b (2+n_0^2) \end{aligned} \quad (7.11.1)$$

i pozostałej części układu

$$\frac{m+\check{I}}{2} \ddot{q}_j + \frac{m-\check{I}}{4} \ddot{q}_{j+1} + \frac{m-\check{I}}{4} \ddot{q}_{j-1} + \alpha^2 \left(\frac{m+\check{I}}{2} q_j + \frac{m-\check{I}}{4} q_{j+1} + \frac{m-\check{I}}{4} q_{j-1} \right) = 0, \quad (7.11.2)$$

$$j = \pm(n_0+1), \pm(n_0+2), \dots, \pm\infty.$$

Przylączenie pontonów o numerach $\pm(n_0+1)$ do strefy zvarcia odpowiada włączeniu się więzów postaci

$$q_{n_0+1} - D_1 = -(n_0^2 + 2n_0 + 3) \varphi_0 b, \quad (7.12.1)$$

$$q_{-(n_0+1)} - D_1 = -(n_0^2 + 2n_0 + 3) \varphi_0 b, \quad (7.12.2)$$

gdź q_{n_0} i q_{n_0-1} są zależne od D_1 .

Zgodnie z równaniem (2.9.2) impulsy odpowiadające równaniom ruchu dla współrzędnych $D_1, q_{n_0+1}, q_{-(n_0+1)}$ są

$$\Xi_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2), \quad (7.13.1)$$

$$\Xi_{n_0+1} = \lambda_1, \quad (7.13.2)$$

$$\Xi_{-(n_0+1)} = \lambda_2, \quad (7.13.3)$$

gdzie λ_1 — mnożnik Lagrange'a dla impulsów od więzów (7.12.1), a λ_2 — mnożnik dla impulsów od więzów (7.12.2). Z równań (7.11) otrzymujemy, całkując w otoczeniu chwili zderzenia, równania do wyznaczenia skoków prędkości

$$\left(2n_0 + \frac{m+\check{I}}{2} \right) \delta \dot{D}_1 + \frac{m-\check{I}}{4} (\delta \dot{q}_{n_0+1} + \delta \dot{q}_{-(n_0+1)}) = \Xi_1, \quad (7.14.1)$$

$$\frac{m+\check{I}}{2} \delta \dot{q}_j + \frac{m-\check{I}}{4} \delta \dot{q}_{j+1} + \frac{m-\check{I}}{4} \delta \dot{q}_{j-1} = \Xi_j, \quad (7.14.2)$$

$$j = \pm(n_0+1), \pm(n_0+2), \dots, \pm\infty.$$

Rozwiązujemy nieskończony układ równań (7.14.1) wykorzystując symetrię zadania ($\lambda_1 = \lambda_2$) i wyznaczamy mnożnik Lagrange'a z warunku zgodności prędkości po zderzeniu z więzami (7.12.1) przy założeniu zderzenia plastycznego, tzn.

$$(\dot{q}_{n_0+1}^{(-)} + \delta \dot{q}_{n_0+1}) - (\dot{D}_1^{(-)} + \delta \dot{D}_1) = 0. \quad (7.15)$$

Parametrem przy wyznaczeniu przyrostów prędkości jest

$$\Delta V_{n_0} \equiv \dot{q}_{n_0+1}^{(-)} - \dot{D}_1^{(-)}. \quad (7.16)$$

Po żmudnych obliczeniach otrzymujemy przyrosty prędkości

$$\delta \dot{D}_1 = \frac{2}{[(1+2n_0)(1-\beta_2)+2]} \Delta V_{n_0}, \quad (7.17.1)$$

$$\delta \dot{q}_j = - \frac{(1+2n_0)(1-\beta_2)}{[(1+2n_0)(1-\beta_2)+2]} \beta_2^{j-(1+n_0)} \Delta V_{n_0}, \quad (7.17.2)$$

$$j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, +\infty.$$

Impulsy wewnętrzne wyznaczamy z równań (4.7). Rozwiązania dla impulsów ścinających w strefie zwarcia

$$\check{T}_j = -m \frac{2j}{[(1+2n_0)(1-\beta_2)+2]} \Delta V_{n_0}, \quad (7.18.1)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, n_0.$$

$$\check{T}_{n_0+i} = -\frac{m}{2} \frac{(1+2n_0)(1+\beta_2)}{[(1+2n_0)(1-\beta_2)+2]} \beta_2^{i-1} \Delta V_{n_0}, \quad (7.18.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, +\infty.$$

Jak widać, w strefie zwarcia impulsy ścinające zmieniają się liniowo, a poza tą strefą zanikają. Impulsy podłużne na zderzakach można wyznaczyć w zależności od

$$\check{S}_j = \frac{b}{h} (\check{T}_j + 2\check{T}_{j+1} + \dots + 2\check{T}_{n_0} + \check{T}_{n_0+1}) + \frac{\check{I}}{2} (\delta \dot{q}_{n_0+1} - \delta \dot{D}_1) \frac{b}{h}, \quad (7.19)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, n_0.$$

Pozostałe impulsy są oczywiście równe zero, gdyż pontony nie stykają się ze sobą. Podamy formuły końcowe do obliczeń impulsów $\check{S}_0$ i $\check{S}_{n_0}$

$$\check{S}_{n_0} = -\frac{m \Delta V_{n_0}}{2} \frac{b}{h} \frac{4n_0 + (1+2n_0)(1+\beta_2)}{[(1+2n_0)(1-\beta_2)+2]} - \frac{\check{I} \Delta V_{n_0}}{2} \frac{b}{h}, \quad (7.20.1)$$

$$\check{S}_0 = -\frac{m \Delta V_{n_0}}{2} \frac{b}{h} \frac{4n_0(1+n_0) + (1+2n_0)(1+\beta_2)}{[(1+2n_0)(1-\beta_2)+2]} - \frac{\check{I} \Delta V_{n_0}}{2} \frac{b}{h}, \quad (7.20.2)$$

Impulsy podłużne $\check{N}_i$ są związane z impulsami $\check{S}_i$ relacjami

$$\check{N}_i = \check{S}_i + \frac{m \Delta}{b} \frac{\Delta V_{n_0}}{[(1+2n_0)(1-\beta_2)+2]}, \quad (7.21.1)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n_0,$$

$$\check{N}_{n_0+i} = -\frac{m \Delta}{2b} \frac{(1+2n_0)(1-\beta_2)}{[(1+2n_0)(1-\beta_2)+2]} \beta_2^{i-1} \Delta V_{n_0}, \quad (7.21.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, +\infty.$$

Wzory te umożliwiają zbadanie wpływu liczby pontonów na rozkład impulsów zderzenia oraz rozkładu impulsów na całym moście. Łatwo zauważyć, że wszystkie impulsy zanikają do zera z rosnącą odległością od strefy zwarcia $|i| \rightarrow +\infty$.

8. Wyznaczenie sił wewnętrznych

Aby wyznaczyć siły zderzenia i impulsy w zderzakach rozwiążemy równania ruchu (7.11) przy założeniu $K = \alpha^2 m$ oraz $\check{L} = \alpha^2 \check{I}$, co jest równoważne założeniu istnienia tylko jednej częstości drgań własnych α i sprowadza problem do rozwiązania nieskończonego układu równań algebraicznych. Szereg przekształceń prowadzi do wyniku

$$\left(2n_0 m + \frac{m + \check{I}}{2}\right) D_1 + \frac{m - \check{I}}{2} q_{n_0+1} = C_{1,n_0} \sin \alpha t + C_{2,n_0} \cos \alpha t + \frac{1}{\alpha^2} \Omega_{n_0}, \quad (8.1.1)$$

$$\frac{m + \check{I}}{2} q_j + \frac{m - \check{I}}{4} q_{j+1} + \frac{m - \check{I}}{4} q_{j-1} = B_{1j,n_0} \sin \alpha t + B_{2j,n_0} \cos \alpha t, \quad (8.1.2)$$

$$j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, +\infty,$$

$$q_i = D_1 - \varphi_0 b(2 + i^2), \quad (8.1.3)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n_0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Omega_{n_0} \equiv Q_0 + \frac{K \varphi_0 b}{6} [(n_0 + 1)(n_0 + 2)(2n_0 + 3) + (n_0 - 1)(n_0 - 2)(2n_0 - 3)] + \\ + \frac{K + \check{L}}{2} \varphi_0 b(2 + n_0^2). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków początkowych mając dane w chwili początkowej przemieszczenia i prędkości $D_{1,n_0}^{(+)}$, $q_{j,n_0}^{(+)}$, $\dot{D}_{1,n_0}^{(+)}$, $\dot{q}_{j,n_0}^{(+)}$. Znak (+) oznacza parametry po zderzeniu i dołączeniu pontonów o numerach n_0 i ($-n_0$). Wyznaczając stałe z warunków granicznych otrzymujemy

$$\left(2n_0 m + \frac{m + \check{I}}{2}\right) D_1 + \frac{m - \check{I}}{2} q_{n_0+1} = \check{\Xi}_{1,n_0}(t), \quad (8.3.1)$$

$$\frac{m + \check{I}}{2} q_j + \frac{m - \check{I}}{4} q_{j+1} + \frac{m - \check{I}}{4} q_{j-1} = \check{\Xi}_{j,n_0}(t), \quad (8.3.2)$$

$$j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, +\infty,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \check{\Xi}_{1,n_0}(t) \equiv \frac{1}{\alpha} \left[\left(2n_0 m + \frac{m + \check{I}}{2}\right) \dot{D}_{1,n_0}^{(+)} + \frac{m - \check{I}}{2} \dot{q}_{n_0+1,n_0}^{(+)} \right] \sin \alpha t + \\ + \left[\left(2n_0 m + \frac{m + \check{I}}{2}\right) D_{1,n_0}^{(+)} + \frac{m - \check{I}}{2} q_{n_0+1,n_0}^{(+)} \right] \cos \alpha t + \frac{1}{\alpha^2} \Omega_{n_0}(1 - \cos \alpha t), \end{aligned} \quad (8.4.1)$$

$$\begin{aligned} \check{\Xi}_{j,n_0}(t) \equiv \frac{1}{\alpha} \left[\frac{m + \check{I}}{2} \dot{q}_{j,n_0}^{(+)} + \frac{m - \check{I}}{4} \dot{q}_{j+1,n_0}^{(+)} + \frac{m - \check{I}}{4} \dot{q}_{j-1,n_0}^{(+)} \right] \sin \alpha t + \\ + \left[\frac{m + \check{I}}{2} q_{j,n_0}^{(+)} + \frac{m - \check{I}}{4} q_{j+1,n_0}^{(+)} + \frac{m - \check{I}}{4} q_{j-1,n_0}^{(+)} \right] \cos \alpha t. \end{aligned} \quad (8.4.2)$$

Nieskończony układ równań algebraicznych (8.3) rozwiązujemy dotychczas stosowaną metodą postulując w kolejnych równaniach niejednorodność równą jeden, znajdując rozwiązanie zanikające w nieskończoności, mnożąc rezultat przez odpowiednią funkcję $\check{\Xi}_{j, n_0}(t)$ i dokonując superpozycji rozwiązań.

Można wykazać, że dla każdego n_0 i $j > n_0 + 1$ równania (8.3.2) są jednorodne. Ponieważ q_{n_0} jest powiązane z D_1 relacją (8.1.3), otrzymujemy do rozwiązania układ

$$\left(2n_0 m + \frac{m+\check{I}}{2}\right) D_1 + \frac{m-\check{I}}{2} q_{n_0+1} = \check{\Xi}_{1, n_0}(t), \quad (8.5.1)$$

$$\frac{m+\check{I}}{2} q_{n_0+1} + \frac{m-\check{I}}{4} q_{n_0+2} + \frac{m-\check{I}}{4} D_1 = \frac{m-\check{I}}{4} \varphi_0 b(2+n_0^2) + \check{\Xi}_{n_0+1, n_0}(t), \quad (8.5.2)$$

$$\frac{m+\check{I}}{2} q_j + \frac{m-\check{I}}{4} q_{j+1} + \frac{m-\check{I}}{4} q_{j-1} = 0, \quad (8.5.3)$$

$$j = n_0 + 2, n_0 + 3, \dots, +\infty.$$

Macierz współczynników tego układu jest identyczna z macierzą układu (7.14). Również kolumna wyrazów wolnych, od drugiego wyrazu począwszy, jest zerem w układzie (7.14). Dzięki tej własności można uzyskać ogólne rozwiązanie analityczne w postaci

$$D_1 = \left\{ \check{\Xi}_{1, n_0}(t) + 2\beta_2 \left[\frac{m-\check{I}}{4} \varphi_0 b(2+n_0^2) + \check{\Xi}_{n_0+1, n_0}(t) \right] \right\} (2n_0 m + \sqrt{m\check{I}})^{-1}, \quad (8.6.1)$$

$$q_j = \left\{ \beta_2^{-n_0} \check{\Xi}_{1, n_0}(t) + \frac{8n_0 m + 2(m+\check{I})}{(\sqrt{m} + \sqrt{\check{I}})^2} \beta_2^{-(n_0+1)} \left[\frac{m-\check{I}}{4} \varphi_0 b(2+n_0^2) + \check{\Xi}_{n_0+1, n_0}(t) \right] \right\} \frac{\beta_2^j}{2n_0 m + \sqrt{m\check{I}}}, \quad (8.6.2)$$

$$j = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, +\infty.$$

Wyznaczenie przyrostów prędkości ΔV_{n_0} według relacji (7.16) nie przedstawia teraz żadnych trudności, jeżeli znamy czas zderzenia t_z odpowiadający zmianie wskaźnika n_0 o jedność. Czas zderzenia znajdziemy podstawiając rozwiązania (8.6) do równania więzów

$$q_{n_0+1} - 2q_{n_0} + q_{n_0-1} + 2\varphi_0 b = 0 \quad (8.7.1)$$

lub w postaci równoważnej po wykorzystaniu relacji (8.1.3)

$$q_{n_0+1} - D_1 - \varphi_0 b(3+2n_0+n_0^2) = 0 \quad (8.7.2)$$

i znajdując najmniejszy pierwiastek t_{z, n_0} tego równania. Mimo iż równanie (8.7.2) sprowadza się do elementarnego równania trygonometrycznego postaci

$$G_1 \cos \alpha t + G_2 \sin \alpha t + G_3 = 0, \quad (8.8)$$

to jego współczynniki są tak skomplikowane, że analiza numeryczna może być dokonana jedynie na maszynie cyfrowej i w osobnej pracy.

9. Przykłady

W zakończeniu pracy podamy wyniki obliczeń sił wewnętrznych w układzie w chwili zderzenia dla szczególnego przypadku gdy występuje pierwsze zderzenie w przegubie zerowym. Jest rzeczą oczywistą, że należy do tego celu wykorzystać równania ruchu pionowego podane w punkcie 4 pracy. Pominiemy wszystkie szczegóły rachunku przytaczając jedynie wzory końcowe przydatne do obliczeń. Rozpatrzmy jedynie przypadek obciążenia przegubu zero siłą skupioną i pierwsze zderzenie pontonów oraz $m \neq \tilde{I}$, natomiast $K = \alpha^2 m$ i $\tilde{L} = \alpha^2 \tilde{L}$. Jest rzeczą oczywistą, że w momencie zderzenia system nasz zmienia masę, zatem siły wewnętrzne będą miały w chwilach zderzenia nieciągłości pierwszego rodzaju, gdyż wielkości tych sił zależą od przyspieszeń, a przyspieszenia nie są ciągłe w chwilach zderzeń.

Pomijamy szczegóły rachunku odsyłając czytelnika do pracy [7].

Równanie do wyznaczenia czasu zderzenia t_z w przegubie zero

$$1 - \cos \alpha t_z = \frac{\varphi_0 b \alpha^2 \sqrt{\tilde{I} m}}{Q_0 (1 - \beta_2)}. \quad (9.1)$$

Siły wewnętrzne przed zderzeniem ($t_z = t_z^{(-)}$)

Siły tnące w przegubach

$$T_i = \frac{Q_0}{2} \beta_2^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, +\infty, \quad (9.2.1)$$

T_0 jest prawostronną siłą tnącą w przegubie.

Siły podłużne w przegubach

$$N_i = \frac{A}{2b} \frac{1 - \beta_2}{1 + \beta_2} \left[Q_0 - \frac{\varphi_0 b \sqrt{K \tilde{L}}}{1 - \beta_2} \right] \beta_2^i, \quad (9.2.2)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, +\infty.$$

Siły wewnętrzne po zderzeniu ($t_z = t_z^{+}$)

Siły tnące

$$T_0^{(+)} = \frac{Q_0}{2}, \quad (9.3.1)$$

$$T_i = \frac{1}{2} \frac{1 + \beta_2}{3 - \beta_2} (Q_0 - K \varphi_0 b) \beta_2^{i-1}, \quad (9.3.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, +\infty.$$

Siła podłużna w zderzaku zerowym

$$S_0 = \frac{b}{h} \left[\frac{2Q_0}{3 - \beta_2} - \frac{1}{2} K \varphi_0 b \frac{1 + \beta_2}{3 - \beta_2} - \frac{1}{2} \tilde{L} \varphi_0 b \right]. \quad (9.3.3)$$

Siły podłużne w przegubach

$$N_0 = S_0 + \frac{\Delta}{2b} \frac{1-\beta_2}{3-\beta_2} \left[Q_0 - \frac{1+\beta_2}{(1-\beta_2)^2} K \varphi_0 b \right], \quad (9.3.4)$$

$$N_i = \frac{\Delta}{2b} \frac{1-\beta_2}{3-\beta_2} \left[Q_0 - \frac{1+\beta_2}{(1-\beta_2)^2} K \varphi_0 b \right] \beta_2^{i-1}. \quad (9.3.5)$$

Odkładając analizę numeryczną całego rozpatrywanego problemu do osobnej pracy dokonamy kilku prostych oszacowań sił wewnętrznych w chwili zderzenia. Weźmy przykład pontonu z wodnicą prostokątną o szerokości b_2 i długości $2b_1$ (rys. 4.1).

Postulując, że zachodzą relacje (6.3) znajdujemy

$$\beta_2 = - \frac{1 - \frac{b_1 \sqrt{3}}{b \cdot 3}}{1 + \frac{b_1 \sqrt{3}}{b \cdot 3}}. \quad (9.4)$$

Ponieważ $b_1/b < 1 \Rightarrow \beta_2 < 0$. Największe możliwe β_2 otrzymamy dla $b_1/b \rightarrow 1^-$. Mamy wtedy $\beta_2 = -0,267994$. Do obliczeń przyjmijmy $\beta_2 = -0,28$. Przyjmujemy wymiary pontonu $2b_1 = 4$ m, $b_2 = 8$ m, $h = 1,2$ m, $\Delta = 0,6$ m. Sztywności hydrostatyczne, masa i momenty bezwładności masy są wtedy $K = 3,139 \cdot 10^5$ Nm⁻¹, $L = 4,186 \cdot 10^5$ Nm, $\check{L} = 0,993 \cdot 10^5$ Mm⁻¹, $m = 4,905 \cdot 10^3$ Ns²m⁻², $I = 4,774 \cdot 10^3$ Ns², $\check{I} = 1,552 \cdot 10^3$ Ns²m⁻². Odstęp przegubów można wyliczyć z wzoru (9.4) otrzymując $b = 2,053$ m. Przyjmując połowę odległości na zderzakach $l = 2,03$ m obliczamy połowę względnego maksymalnego kąta obrotu sąsiednich pontonów $\varphi_0 = 0,0191$.

Z równania (9.1) otrzymamy dla $\alpha t_z = \pi$ minimalną siłę Q_0 niezbędną do pierwszego zderzenia

$$(Q_0)_{\min} = 2,704 \cdot 10^3 \text{ N}$$

i najdłuższy czas od chwili początkowej do chwili zderzenia

$$(t_z)_{\max} = 0,393 \text{ s}.$$

Kolejne siły wewnętrzne w funkcji obciążenia Q_0 dla $t_z = z_z^{(-)}$ są

$$T_1 \cong -0,14 Q_0, \quad S_0 = 0, \quad N_0 \cong 0,260 (Q_0 - 5,408 \cdot 10^3 \text{ N}).$$

Po zderzeniu, tzn. dla $t = t_z^+$

$$T_1 \cong 0,110 (Q_0 - 1,231 \cdot 10^4 \text{ N}),$$

$$S_0 \cong 1,043 (Q_0 - 5,408 \cdot 10^3 \text{ N}),$$

$$N_0 \cong 1,101 (Q_0 - 5,408 \cdot 10^3 \text{ N}).$$

Z relacji tych wynika, że siła S_0 oddziaływania więzów jednostronnych (zderzaki) jest dodatnia tylko wtedy po zderzeniu, gdy dwukrotnie przekracza minimalną siłę

zwarcia dynamicznego. W przeciwnym wypadku ruch w styku po zderzeniu nie jest możliwy. Skoki nieciągłości sił rosną liniowo z Q_0 i dla $Q_0 = 2 (Q_0)_{\min}$ są zerem. Siły S_0 i N_0 dla $Q_0 \geq 2 (Q_0)_{\min}$ są zawsze większe po zderzeniu niż przed zderzeniem. Przeciwstawną własność posiada $|T_1|$.

Praca wpłynęła do Redakcji w lipcu 1978 r.

Literatura

- [1] R. Bittner, *Rachunek operatorów w przestrzeniach liniowych*. PWN, Warszawa 1974.
- [2] Z. Bursztynowski, J. Marszałek, *Wpływ luzów międzyogniowych na skreślenie mostu pływającego typu wstęgi*. Biul. WAT 5 (285), Warszawa 1976.
- [3] R. Piskorski, *Dynamika układu ciągłego o zmiennej strukturze na fali regularnej*. Oprac. wewn. I. O. nr 649/MR-19/76.
- [45] R. Piskorski, J. Więckowski, *Modele teoretyczne zginania belek o zmiennej strukturze*. Prace IMP, z. 75, 1978.
- [5] J. Więckowski, *Skreśnianie belek o zmiennej strukturze*. Prace IMP, z. 66, 1975.
- [6] J. Więckowski, *Wstęp do teorii zginania belek o zmiennej strukturze*. Prace IMP, z. 65, 1974.
- [7] J. Więckowski, *Elementy dynamiki mostu promowego z luzami obrotowymi w opisie dyskretnym*. Oprac. wewn. I. O. nr 771/MR-81/77.

Элементы динамики паромного моста с оборотными зазорами в дискретном описании

Резюме

Формулируется задача столкновения со сложной частицей в дискретной системе с односторонними голономическими связями. Формулируются уравнения движения цепной системы на упругом основании. Решается динамическая задача с нулевыми начальными условиями. Рассматривается мост бесконечной длины, а в динамическом случае добавочно предпринимается, что он имеет только одну частоту собственных колебаний. Определены распределения импульсов внутреннего столкновения и внутренние силы.

Elements of Dynamics of a Ferry-Bridge with Rotary Plays in a Discrete Description

Summary

The impact problem of a complex particle with unilateral holonomic constraints has been formulated and equations of motion of a chain system on a linear elastic foundation given.

A bridge of infinite length and with single eigenfrequency has been taken into consideration. Zero initial conditions and constant concentrated force were assumed. Internal impacts and forces were analysed.

Static problem has been solved for arbitrary parameter values.