

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

77

WARSZAWA - POZNAŃ 1980

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

RADA REDAKCYJNA - EDITORIAL BOARD

TADEUSZ GERLACH · HENRYK JARZYNA · JERZY KRZYŻANOWSKI
STEFAN PERYCZ · WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ROMUALD PUZYREWSKI
KAZIMIERZ STELLER (PRZEWODNICZĄCY · CHAIRMAN) · ROBERT SZEWAŁSKI
JÓZEF ŚMIGIELSKI

KOMITET REDAKCYJNY - EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER - REDAKTOR - EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA - EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright

by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1980

Printed in Poland

ISBN 83-01-01613-2

ISSN 0079-3205

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 1000 - 90 egz.	Oddano do składania 5 XII 1978 r.
Arty. wyd. 10. Arty. druki 10,775	Podpisano do druku 1 II 1980 r.
Page. druki. nat. 40. 1/4, 70 g 70 x 100 cm.	Druk ukończono w lutym 1980 r.
Net. waga 170/180	Cena zł 50,- L-7/751.

DRUKARNIA UNIWERSYTETU IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

CEZARY ORLIKOWSKI

Gdańsk

Uogólniony algorytm do analizy i optymalizacji hydraulicznych układów regulacji automatycznej z linią długą*

W pracy sformułowano algorytm do analizy i optymalizacji liniowych modeli matematycznych hydraulicznych układów regulacji automatycznej zawierających długie linie hydrauliczne. Przedstawiony algorytm umożliwia analizę i optymalizację takich układów.

1. Wstęp

Złożone układy hydrauliczne regulacji automatycznej składają się z wielu elementów (człony formujące sygnał, wzmacniacze, człony wykonawcze itp.). Często elementy te połączone są ze sobą przewodami hydraulicznymi transmitującymi sygnały. Jeśli długość takich przewodów jest znaczna (wymaganie konstrukcyjne), to zachodzi potrzeba uwzględnienia ich właściwości dynamicznych przy projektowaniu układów regulacji.

Długie linie hydrauliczne mogą być przyczyną niepożądanych oscylacji i opóźnień w układzie regulacji. Pojawia się więc problem doboru najkorzystniejszych parametrów linii [1, 2]. Ponieważ zwykle długość linii jest narzucona, pozostaje kwestia doboru powierzchni przekroju. Badanie wpływu tego i innych parametrów linii hydraulicznej na dynamikę układu wymaga zbudowania odpowiedniego algorytmu obliczeniowego.

Dotychczasowe doświadczenia autora wyniesione z udziału w pracach, związanych z badaniem własności dynamicznych hydraulicznych układów regulacji turbin energetycznych wskazują na celowość analizy modeli liniowych. Wykazują one dużą użyteczność i praktycznie wystarczają do analizy większości układów, przynajmniej w zakresie wstępnej oceny ich właściwości. Z doświadczeń tych wynika także nieodzowność stosowania techniki komputerowej.

W stosowaniu techniki komputerowej do analizy złożonych układów jedną z bardziej żmudnych i pracochłonnych czynności jest układanie algorytmów (programów). Naturalną tendencją jest usiłowanie budowy dostatecznie ogólnych algorytmów, które umożli-

* Praca wykonana w ramach problemu międzyresortowego MR. I. 26, pt. „Podstawy projektowania maszyn i urządzeń energetycznych”, grupa tematyczna 09.

liwiłyby obliczanie pewnej klasy układów, a nie tylko jednego zadania. W tym celu należy znać sposób matematycznego opisu (model) klasy układów.

W przypadku układów liniowych o parametrach skupionych ich transmitancje mają postać funkcji wymiernej i to pozwala zbudować algorytm obliczania, np. charakterystyk częstotliwościowych dla tej klasy układów.

W pracy podjęto próbę określenia ogólnej postaci transmitancji układów liniowych, zawierających podukłady o parametrach rozłożonych i określenia algorytmu ich analizy.

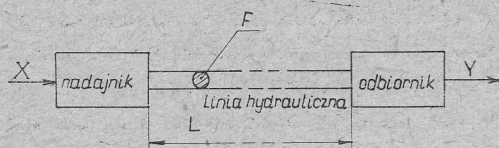
Przedstawiono algorytm opisu układów uzyskany metodą energetyczną. Rozważania przeprowadzono najpierw dla uproszczonego schematu układu z jedną linią, a następnie rozpatrzone ogólny przypadek tego układu i wreszcie najdalej posunięte uogólnienie dotyczy układu z wieloma liniami hydraulicznymi. Algorytm najogólniejszy zawiera w sobie schematy uproszczone, jako przypadki szczególne.

Opracowanie oddzielnych algorytmów analizy dla przypadków szczególnych pozwala na uproszczenie przygotowania danych i skrócenie czasu obliczeń w przypadku stosowania techniki komputerowej. Ponadto, dokładniejsze rozważania uproszczonego schematu z jedną linią pozwalają na szerszą interpretację uzyskanych rezultatów.

2. Uproszczony schemat blokowy układu hydraulicznego z jedną linią hydrauliczną

Na wstępie do rozważań przyjęty zostanie układ składający się z trzech zasadniczych członów: nadajnika sygnału, linii przekazującej sygnał i odbiornika sygnału (rys. 1).

Sygnał wejściowy X , poprzez nadajnik i linię hydrauliczną o powierzchni F i długości L , jest transmitowany do odbiornika. Sygnał wyjściowy z odbiornika (i z całego układu) oznaczono symbolem Y .



Rys. 1

Do takiego schematu można sprowadzić wiele układów, poprzez redukcję elementów układu znajdujących się przed i za linią, do dwóch członów. W przypadku gdy nie jest to możliwe (patrz pkt 5), można w ten sposób rozpatrywać fragment układu składający się z dwóch jego elementów połączonych linią hydrauliczną.

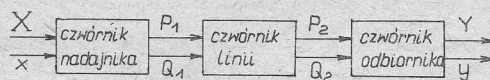
3. Opis matematyczny rozważanego układu hydraulicznego

3.1. Ustalenia wstępne

Algorytm analizy układu przedstawionego na rysunku 1 powinien być dostosowany do różnych nadajników i odbiorników. W tym celu należy przyjąć możliwie uniwersalną postać opisu układu.

Ujmowanie energetyczne rozpatrywanych zjawisk jest postępowaniem najogólniejszym. Przyjmiemy więc metodę opisu energetyczną, dwuparametrową (w tym przypadku czwórnikową) [3]. Powyższy układ daje się wówczas przedstawić jako łańcuchowe połączenie trzech czwórników, odpowiadających odpowiednio nadajnikowi, linii hydraulicznej i odbiornikowi (rys. 2).

W tym sposobie przedstawienia układu mamy, zamiast jednego interesującego nas sygnału wejściowego X , parę sygnałów X i x , których iloczyn stanowi moc przekazywaną



Rys. 2

do układu. Analogicznie dla odbiornika, iloczyn sygnału wyjściowego Y i drugiego parametru y stanowi moc wyjściową układu. Ponadto, jeden z każdej pary sygnałów czwórnika jest parametrem przepływowym (analogicznie do natężenia przepływu Q), a drugi jest parametrem ciśnieniowym (uogólnione ciśnienie). Przyjmujemy na wstępie, że parametrami przepływowymi są x i y , a ciśnieniowymi X i Y . Oznacza to, że dla sygnałów (parametrów) x , X , y , Y o nieokreślonej ogólnie naturze fizycznej oraz sygnałów P (ciśnienie) i Q (objętościowe natężenie przepływu) stosujemy następujące analogie:

$$P \leftrightarrow X, Y,$$

$$Q \leftrightarrow x, y.$$

Przyjęcie takiej właśnie analogii nie jest niczym uwarunkowane i nie wpływa na końcowe wyniki. Dla jednoznaczności rozważań wygodnie jest jednak poczynić konkretne ustalenia.

Impedancję Z i admitancję G definiuje się następująco:

$$Z = \frac{1}{G} = \frac{\text{parametr ciśnieniowy}}{\text{parametr przepływowy}}.$$

Własności dynamiczne każdego z trzech czwórników są określone przez czteroelementowe macierze transmitancji. Umawiając się, że pozioma kreska nad symbolem sygnału oznacza jego transformatę Laplace'a, możemy napisać równania czwórników w postaci operatorowej.

Wyjściowe równania czwórników nadajnika i odbiornika przyjmiemy w postaci impedancyjnej ze względu na ujednolicenie opisu, gdyż w rozważaniach prowadzonych w punktach 5 i 6 zachodzi konieczność takiego opisania układów tam omawianych.

Równanie czwórnika nadajnika

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{P}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{Q}_1 \end{bmatrix} = Z_n \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{Q}_1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

równanie czwórnika odbiornika

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_2 \\ \bar{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Q}_2 \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_0 \begin{bmatrix} \bar{Q}_2 \\ \bar{y} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Równanie czwórnika linii hydraulicznej najlepiej jest przyjąć w postaci łańcuchowej, z uwagi na prostą postać elementów macierzy

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_2 \\ \bar{Q}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_L \begin{bmatrix} \bar{P}_2 \\ \bar{Q}_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Rozpatrzmy na początek najprostszy przypadek hydraulicznego układu regulacji z linią długą, jak na rysunku 1. W związku z tym równania (1) i (2) zostaną poniżej przekształcone do postaci łańcuchowej oraz zredukowane do równań, w których występować będą tylko interesujące nas sygnały.

3.2. Równanie nadajnika

Zapisując równanie macierzowe (1) w postaci układu równań, mamy

$$\bar{X} = a_{11} \bar{x} + a_{12} \bar{Q}_1, \quad (4)$$

$$\bar{P}_1 = a_{21} \bar{x} + a_{22} \bar{Q}_1. \quad (5)$$

Równania te przekształcimy do postaci łańcuchowej

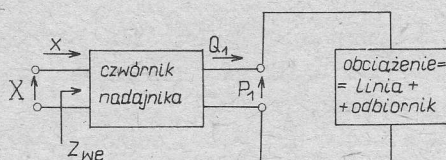
$$\bar{X} = \frac{a_{11}}{a_{21}} \bar{P}_1 + \frac{-\det \mathbf{Z}_n}{d_{21}} \bar{Q}_1, \quad (6)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{a_{21}} \bar{P}_1 + \frac{-a_{22}}{a_{21}} \bar{Q}_1. \quad (7)$$

Zmienną $\bar{x}$ możemy wyeliminować przez podstawienie

$$\bar{x} = \frac{1}{Z_{we}} \bar{X}, \quad (8)$$

gdzie Z_{we} jest impedancją wejścia układu (rys. 3), całkowicie określoną przez parametry



Rys. 3

nadajnika i jego obciążenie, a więc przez macierz $\mathbf{Z}_n$ oraz $\bar{P}_1$ i $\bar{Q}_1$. Równanie (7) nie wnosi więc nowych informacji do opisu nadajnika. Ostatecznie, interesującym nas równaniem dającym związek między sygnałami $\bar{X}$, $\bar{P}_1$ i $\bar{Q}_1$ jest równanie (6).

3.3. Równanie odbiornika

Dla pełnego opisu odbiornika brakuje jeszcze równania określającego obciążenie jego czwórnika (impedancji $Z_0 = \bar{Y}/\bar{y}$ pokazanej na rys. 4). Przepiszmy równanie (2) w postaci układu równań (łańcuchowych)

$$\bar{P}_2 = \frac{b_{11}}{b_{21}} \bar{Y} + \frac{-\det \bar{Z}_0}{b_{21}} \bar{y}, \quad (9)$$

$$\bar{Q}_2 = \frac{1}{b_{21}} \bar{Y} + \frac{-b_{22}}{b_{21}} \bar{y}. \quad (10)$$

Wprowadzając oznaczenie impedancji Z_0 , otrzymujemy

$$\bar{P}_2 = \left(\frac{b_{11}}{b_{21}} - \frac{\det \bar{Z}_0}{b_{21} Z_0} \right) \bar{Y}, \quad (11)$$

$$\bar{Q}_2 = \left(\frac{1}{b_{21}} - \frac{b_{22}}{b_{21} Z_0} \right) \bar{Y}. \quad (12)$$

Równania (11) i (12) są szukanymi równaniami odbiornika.

3.4. Zestawienie równań układu

Interesować nas będą takie modele linii hydraulicznej, których czwórniki są energetycznie symetryczne. Odpowiada to modelom linii jednorodnej o parametrach rozłożonych i modelom o parametrach skupionych, lecz rozmieszczonych symetrycznie. Wówczas w równaniu (3) dla elementów macierzy A_L , zachodzi równość $l_{11} = l_{22}$

Uwzględniając to, wprowadzimy oznaczenia

$$\lambda_1 = l_{11} = l_{22}, \quad \lambda_2 = l_{12}, \quad \lambda_3 = l_{21} \quad (13)$$

oraz

$$\alpha_1 = \frac{a_{11}}{a_{21}}, \quad \alpha_2 = -\frac{\det \bar{Z}_n}{a_{21}}, \quad (14)$$

$$\beta_1 = \frac{b_{11}}{b_{21}} - \frac{\det \bar{Z}_0}{b_{21} Z_0}, \quad \beta_2 = \frac{1}{b_{21}} - \frac{b_{22}}{b_{21} Z_0}. \quad (15)$$

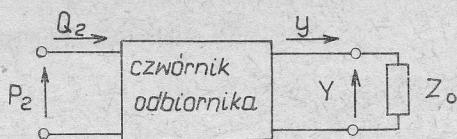
Wówczas końcowa postać równań opisujących człony układu (rys. 1) jest następująca: równanie nadajnika

$$\bar{X} = \alpha_1 \bar{P}_1 + \alpha_2 \bar{Q}_1, \quad (16)$$

równanie odbiornika

$$\bar{P}_2 = \beta_1 \bar{Y}, \quad (17)$$

$$\bar{Q}_2 = \beta_2 \bar{Y}, \quad (18)$$



Rys. 4

równanie linii długiej

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_2 \\ \bar{Q}_2 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

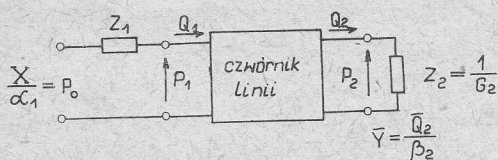
W równaniach tych α_1 i α_2 opisują własności dynamiczne nadajnika, β_1 i β_2 – odbiornika, a λ_1 , λ_2 i λ_3 – linii hydraulicznej.

3.5. Inna postać współczynników nadajnika i odbiornika

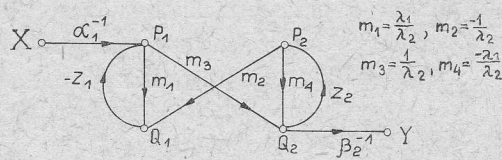
Transmitancja rozważanego układu

$$H(s) = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}, \quad (20)$$

którą można wyznaczyć z układu równań (16) ÷ (19) zależy od współczynników α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , charakterystyk dynamicznych nadajnika i odbiornika (również od λ_1 , λ_2 , λ_3 , lecz nie jest to dla nas obecnie interesujące). Współczynniki te można wyznaczyć dla każdej konkretnej realizacji modelu nadajnika i odbiornika.



Rys. 5



Rys. 6

Ponieważ α_1 , α_2 , β_1 , β_2 nie mają prostej interpretacji fizycznej, postaramy się znaleźć inny zestaw współczynników dla nadajnika i odbiornika.

W tym celu równanie (16) napiszemy w postaci:

$$\bar{P}_1 = \frac{1}{\alpha_1} \bar{X} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \bar{Q}_1 = \bar{P}_0 - Z_1 \bar{Q}_1, \quad (21)$$

przy $\alpha_1 \neq 0$, gdzie

$$P_0 = \frac{\bar{X}}{\alpha_1}, \quad (22)$$

$$Z_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}. \quad (23)$$

Równania (17) i (18) zastąpimy następującymi:

$$Z_2 = \frac{\bar{P}_2}{\bar{Q}_2}, \quad (24)$$

$$\bar{Y} = \bar{Q}_2 \frac{1}{\beta_2}, \quad (25)$$

gdzie

$$Z_2 = \frac{\beta_1}{\beta_2}, \quad (26)$$

przy $\beta_2 \neq 0$.

W równaniach (21), (24), (25) Z_1 jest impedancją na wejściu linii hydraulicznej, a Z_2 – impedancją obciążenia linii. Na rysunkach 5 i 6 pokazano odpowiadający równaniom (19) i (21)÷(25) schemat sieciowy i graf przepływowy.

W przypadku nadajnika, dla którego nierówność $\alpha_1 \neq 0$ nie byłaby tożsamościowo spełniona, należałoby posługiwać się admitancją w miejsce impedancji. Równania mają wówczas postać:

$$Q_1 = \bar{Q}_0 - \bar{G}_1 \bar{P}_1, \quad (27)$$

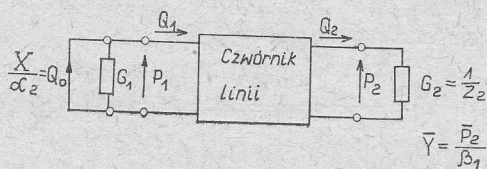
gdzie

$$\bar{Q}_0 = \frac{1}{\alpha_2} \bar{X}, \quad G_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \quad (28)$$

Podobnie jest dla odbiornika, gdyby nierówność $\beta_2 \neq 0$ nie była tożsamościowo spełniona, to zamiast (24) i (25) należałoby posługiwać się równaniami

$$G_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{\bar{Q}_2}{\bar{P}_2}, \quad \bar{Y} = \bar{P}_2 \frac{1}{\beta_1}. \quad (29)$$

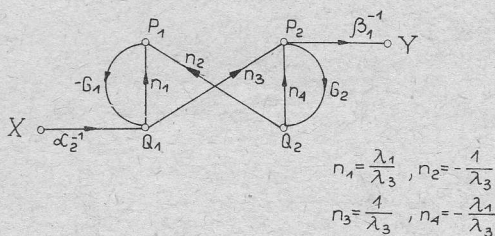
Odpowiedni schemat i graf przepływowy pokazują rysunki 7 i 8.



Rys. 7

Tak więc do opisu nadajnika i odbiornika możemy korzystać z równań zapisanych w postaci przedstawionej w tym rozdziale. Zaletą takiego opisu jest prosta interpretacja fizyczna niektórych wielkości (współczynników) występujących w tych równaniach. Należy jednak wówczas zastosować odpowiednie wzory obliczenia transmitancji (patrz p. 4).

Pokazany tu sposób przedstawienia rozważanego układu w niczym więc nie upraszcza jego analizy. Wydaje się jednak, że operowanie takimi pojęciami jak na przykład impedancja obciążenia linii, jest ważne z punktu widzenia optymalizacji jego własności dynamicznych. Stwarza to możliwość rozważania zmian własności układu w dwojakim sensie:



Rys. 8

1) doboru odpowiednich parametrów linii,

2) dopasowania niektórych parametrów nadajnika i odbiornika do linii.

Na przykład dopasowanie impedancji obciążenia linii do jej impedancji charakterystycznej pozwala uniknąć lub zmniejszyć efekt odbicia fali.

3.6. Szczegółowa postać współczynników λ_i

Omówienie różnych modeli linii hydraulicznej znajdujemy w [1] i [4]. Przy podstawowym założeniu, że przepływ jest laminarny, osiowo-symetryczny, dla modeli linii o parametrach rozłożonych współczynniki λ_i mają postać

$$\lambda_1 = \text{ch } \Gamma, \quad \lambda_2 = Z_C \text{ sh } \Gamma, \quad \lambda_3 = Z_C^{-1} \text{ sh } \Gamma. \quad (30)$$

Operator propagacji Γ i impedancja charakterystyczna Z_C zależą od modelu linii:

1) w linii bez strat

$$\Gamma = T_0 s, \quad Z_C = Z_{C0}, \quad (31)$$

2) w linii o stałej rezystancji

$$\Gamma = T_0 s \sqrt{1 + \frac{8\omega_0}{s}}, \quad Z_C = Z_{C0} \sqrt{1 + \frac{8\omega_0}{s}}, \quad (32)$$

3) w linii o rezystancji zależnej od pulsacji

$$\Gamma = \frac{T_0 s}{\sqrt{1 - \frac{2}{j \sqrt{\frac{s}{\omega_0}}} \frac{J_1 \left(j \sqrt{\frac{s}{\omega_0}} \right)}{J_0 \left(j \sqrt{\frac{s}{\omega_0}} \right)}}}}, \quad (33)$$

$$Z_C = \frac{Z_{C0}}{\sqrt{1 - \frac{2}{j \sqrt{\frac{s}{\omega_0}}} \frac{J_1^1 \left(j \sqrt{\frac{s}{\omega_0}} \right)}{J_0 \left(j \sqrt{\frac{s}{\omega_0}} \right)}}}}.$$

gdzie

$$T_0 = L \sqrt{\frac{\rho}{B}}, \quad (34)$$

– stała propagacji, $Z_{C0} = (1/F)\sqrt{B\rho}$ – nominalna impedancja charakterystyczna, $\omega_0 = 2\pi\mu/\rho F$ – pulsacja charakterystyczna, J_0, J_1 – funkcje Bessela pierwszego rodzaju, rzędu 0, 1, $j = \sqrt{-1}$, B – moduł ściśliwości cieczy, ρ – gęstość cieczy, μ – lepkość dynamiczna cieczy.

Stosowanie modelu linii bez strat jest często niewystarczające i zachodzi potrzeba uwzględnienia oporności linii. Jednak obliczenia dla modelu linii o stałej i zmiennej rezystancji (jako parametru rozłożonego) są niewygodne. W celu ułatwienia obliczeń, a jednocześnie uniknięcia błędów z pomijania lepkości cieczy, można zastosować model linii o parametrach skupiono-rozłożonych. Przyjmuje się wówczas model linii bez strat z dołączoną rezystancją skupioną R_C , rozmieszczoną po połowie na końcach linii. Taki model daje często zadowalające wyniki [1]. Macierz łańcuchowa linii A_L wyraża się wówczas iloczynem trzech macierzy

$$A_L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{R_C}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ch } T_0 s & Z_{C0} \text{ sh } T_0 s \\ Z_{C0}^{-1} \text{ sh } T_0 s & \text{ch } T_0 s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{R_C}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

a stąd

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \text{ch } T_0 s + \frac{R_C}{2Z_{C0}} \text{ sh } T_0 s, \\ \lambda_2 &= \left(\frac{R_C^2}{4Z_{C0}} + Z_{C0} \right) \text{ sh } T_0 s + R_C \text{ ch } T_0 s, \\ \lambda_3 &= Z_{C0}^{-1} \text{ sh } T_0 s, \end{aligned} \quad (36)$$

gdzie

$$R_C = \frac{8\pi\mu\rho L}{F^2}.$$

Niekiedy wygodnie jest posługiwać się sygnałami odniesionymi

$$P_1^* = \frac{P_1}{\varphi}, \quad P_2^* = \frac{P_2}{\varphi}, \quad Q_1^* = \frac{Q_1}{\psi}, \quad Q_2^* = \frac{Q_2}{\psi}, \quad (37)$$

gdzie φ i ψ – stałe rzeczywiste.

Uwzględniając te zależności w równaniu (19) otrzymuje się następującą postać

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} P_1^* \\ Q_1^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_1^* & \lambda_2^* \\ \lambda_3^* & \lambda_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2^* \\ Q_2^* \end{bmatrix}, \\ \lambda_1^* &= \lambda_1, \quad \lambda_2^* = \lambda_2 \frac{\psi}{\varphi}, \quad \lambda_3^* = \lambda_3 \frac{\varphi}{\psi}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

gdzie

4. Transmitancja układu

Z równań (16)÷(19) wynika, że transmitancja $H(s)$ układu ma postać

$$H(s) = \frac{1}{M_H(s)}, \quad (39)$$

przy czym

- posługując się współczynnikami $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$,

$$M_H = \beta_1 \alpha_2 \lambda_3 + \alpha_1 \beta_1 \lambda_2 - (\alpha_2 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1) \lambda_3, \quad (40)$$

- posługując się współczynnikami $\alpha_1, \beta_2, Z_1, Z_2$, gdy $\alpha_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0$,

$$M_H = \alpha_1 \beta_2 (Z_1 Z_2 \lambda_3 + Z_2 \lambda_2 - (Z_1 + Z_2) \lambda_1), \quad (41)$$

- posługując się współczynnikami $\alpha_2, \beta_1, G_1, G_2$, gdy $\alpha_2 \neq 0, \beta_1 \neq 0$

$$M_H = \alpha_2 \beta_1 (\lambda_3 + G_2 \lambda_2 - (G_1 + G_2) \lambda_1), \quad (42)$$

- posługując się współczynnikami $\alpha_1, \beta_1, Z_1, G_2$, gdy $\alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0$

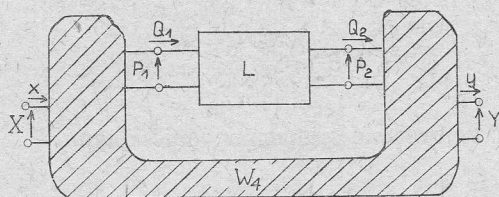
$$M_H = \alpha_1 \beta_1 (Z_1 \lambda_3 + \lambda_2 - (Z_1 G_2 + 1) \lambda_1), \quad (43)$$

- posługując się współczynnikami $\alpha_2, \beta_2, G_1, Z_2$, gdy $\alpha_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0$

$$M_H = \alpha_2 \beta_2 (Z_2 \lambda_3 + G_1 Z_2 \lambda_2 - (1 + Z_2 G_1) \lambda_1). \quad (44)$$

5. Ogólny schemat blokowy układu z jedną linią długą

Rozważony teraz zostanie przypadek bardziej ogólny, gdy układ regulacyjny, którego część stanowi linia hydrauliczna, nie daje się przedstawić jako szeregowe połączenie trzech członów: nadajnika, linii i odbiornika. Schemat takiego układu pokazuje rysunek 9.



Rys. 9

Układ składa się z czterobramnika W_4 i dwubramnika L (czwórnika) linii hydraulicznej. Do równania czwórnika linii (19) dołączamy impedancyjne równanie czterobramnika W_4 :

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Przyjmując $U=\{u_{ij}\}$, $i, j=1, \dots, 4$ i dokonując przestawienia wyrazów, możemy równanie (45) napisać w postaci:

$$\bar{X}=u_{11}\bar{x}+u_{13}\bar{Q}_1+u_{12}\bar{y}+u_{14}\bar{Q}_2, \quad (46)$$

$$\bar{P}_1=u_{31}\bar{x}+u_{33}\bar{Q}_1+u_{32}\bar{y}+u_{34}\bar{Q}_2, \quad (47)$$

$$\bar{P}_2=u_{42}\bar{y}+u_{44}\bar{Q}_2+u_{41}\bar{x}+u_{43}\bar{Q}_1, \quad (48)$$

$$\bar{Y}=u_{22}\bar{y}+u_{24}\bar{Q}_2+u_{21}\bar{x}+u_{23}\bar{Q}_1. \quad (49)$$

Oznaczone ramką dwa układy równań są analogiczne do impedancyjnych równań czwórników nadajnika i odbiornika układu uproszczonego z rysunku 1. Układ z rozdzielonym nadajnikiem i odbiornikiem jest więc szczególnym przypadkiem układu przedstawionego w tym punkcie. Zachodzi to, gdy

$$u_{12}=u_{14}=u_{21}=u_{23}=u_{32}=u_{34}=u_{41}=u_{43}=0 \quad (50)$$

i wówczas

$$\left. \begin{aligned} u_{11} &= a_{11}, & u_{13} &= a_{12}, \\ u_{31} &= a_{21}, & u_{33} &= a_{22}, \\ u_{22} &= b_{22}, & u_{24} &= b_{21}, \\ u_{42} &= b_{12}, & u_{44} &= b_{11}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Z równań (46) ÷ (49) czterobramnika można otrzymać równania układu (z wyłączeniem linii), w których nie będzie zmiennych $\bar{x}$ i $\bar{y}$. W tym celu dołączamy do (46) ÷ (49) równanie obciążenia bramy wyjściowej

$$Z_0 = \frac{\bar{Y}}{y}. \quad (52)$$

Związek między $\bar{X}$ i $\bar{x}$ jest określony przez parametry czterobramnika oraz sygnały $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$, $\bar{y}$. Po wykonaniu podstawień i uporządkowaniu wyrazów z (46) ÷ (49) i (52), otrzymujemy następujące równania:

$$\eta_{11}\bar{X}+\eta_{12}\bar{Y}+\eta_{13}\bar{P}_1+\eta_{14}\bar{Q}_1+\eta_{15}\bar{P}_2+\eta_{16}\bar{Q}_2=0, \quad (53)$$

$$\eta_{21}\bar{X}+\eta_{22}\bar{Y}+\eta_{23}\bar{P}_1+\eta_{24}\bar{Q}_1+\eta_{25}\bar{P}_2+\eta_{26}\bar{Q}_2=0, \quad (54)$$

$$\eta_{31}\bar{X}+\eta_{32}\bar{Y}+\eta_{33}\bar{P}_1+\eta_{34}\bar{Q}_1+\eta_{35}\bar{P}_2+\eta_{36}\bar{Q}_2=0. \quad (55)$$

Wyrażając η_{ij} przez elementy macierzy U i uwzględniając warunek (50) (określający uproszczony schemat), otrzymuje się równania identyczne z (16) ÷ (18). Ostatecznie, układ równań (53), (54), (55) w jego ogólnej postaci i równanie linii (19) są równaniami rozważanego układu. Opierając się na tych równaniach wyznaczamy wzór na obliczanie trans-

mitancji:

$$H(s) = \frac{(r_4 r_5 - r_6 r_3)(r_6 \eta_{11} - r_2 \eta_{31}) + (r_6 r_1 - r_2 r_5)(r_4 \eta_{21} - r_4 \eta_{31})}{(r_4 r_5 - r_6 r_3)(r_2 \eta_{32} - r_6 \eta_{12}) + (r_6 r_1 - r_2 r_5)(r_4 \eta_{32} - r_6 \eta_{22})}, \quad (56)$$

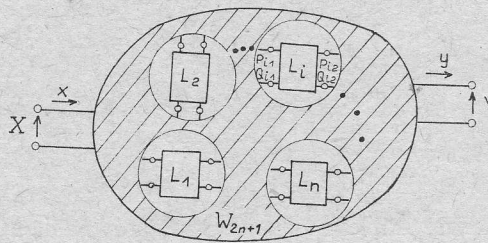
gdzie

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \eta_{13} \lambda_1 + \eta_{14} + \eta_{15} \lambda_3, & r_2 &= \eta_{13} \lambda_2 + \eta_{15} \lambda_1 + \eta_{16}, \\ r_3 &= \eta_{23} \lambda_1 + \eta_{24} + \eta_{25} \lambda_3, & r_4 &= \eta_{23} \lambda_2 + \eta_{25} \lambda_1 + \eta_{26}, \\ r_5 &= \eta_{33} \lambda_1 + \eta_{34} + \eta_{35} \lambda_3, & r_6 &= \eta_{33} \lambda_2 + \eta_{35} \lambda_1 + \eta_{36}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

6. Układ z wieloma liniami hydraulicznymi

Następnego uogólnienia dokonamy rozważając układ z wieloma liniami hydraulicznymi. Schemat takiego układu pokazano na rysunku 10.

Układ składa się z n linii hydraulicznych, reprezentowanych przez n czwórników L_i oraz wielobramnika W_{2n+2} , który ma $2n+2$ bram.



Rys. 10

Dla schematu z rysunku 10 napiszemy:
równania czwórników linii hydraulicznych

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_{i1} \\ \bar{Q}_{i1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{i1} & \lambda_{i2} \\ \lambda_{i3} & \lambda_{i1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_{i2} \\ \bar{Q}_{i2} \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, n, \quad (58)$$

i równanie impedancyjne wielobramnika

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{P}_{12} \\ \vdots \\ \bar{P}_{n1} \\ \bar{P}_{n2} \end{bmatrix} = \mathbf{W} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{12} \\ \vdots \\ \bar{Q}_{n1} \\ \bar{Q}_{n2} \end{bmatrix}, \quad (59)$$

gdzie $\mathbf{W} = \{w_{ij}\}$, $i, j = 1, \dots, 2n+2$.

W $2n+2$ równaniach, określonych przez (59) dokonamy podstawienia $\bar{y} = \bar{Y}/Z_0$ i rugujemy zmienną $\bar{x}$. W rezultacie otrzymuje się układ $2n+1$ równań, które napiszemy w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1,4n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{2n+1,1} & \dots & \dots & v_{2n+1,4n+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{Q}_{11} \\ \bar{P}_{12} \\ \bar{Q}_{12} \\ \vdots \\ \bar{P}_{n2} \\ \bar{Q}_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

Do powyższych dołączymy układ $2n$ równań linii hydraulicznych zapisanych w podobny sposób, przyjmując odpowiednie wyrazy równe zero

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda_{13} & \lambda_{11} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 & \lambda_{23} & \lambda_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & \lambda_{n1} & \lambda_{n2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 & \lambda_{n3} & \lambda_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{Q}_{11} \\ \bar{P}_{12} \\ \bar{Q}_{12} \\ \vdots \\ \bar{P}_{n2} \\ \bar{Q}_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Z (60) i (61) utworzymy wspólny układ równań i wszystkie wyrazy z $\bar{X}$ przenosimy na prawą stronę. W wyniku tego otrzymujemy

$$\mathbf{H}\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}, \quad (62)$$

gdzie $\mathbf{H}$ jest macierzą kwadratową o wymiarze $(4n+1)$,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} v_{12} & v_{13} & \dots & \dots & \dots & \dots & v_{1,4n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{2n+1,2} & v_{2n+1,3} & \dots & \dots & \dots & \dots & v_{2n+1,4n+2} \\ 0 & -1 & 0 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda_{13} & \lambda_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & \lambda_{n1} & \lambda_{n2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & -1 & \lambda_{n3} & \lambda_{n1} \end{bmatrix}, \quad (63)$$

natomiast $\mathbf{Y}$ i $\mathbf{X}$ są wektorami kolumnowymi $(4n+1)$ -elementowymi:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{Q}_{11} \\ \bar{P}_{12} \\ \bar{Q}_{12} \\ \vdots \\ \bar{P}_{n2} \\ \bar{Q}_{n2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -v_{11} \\ -v_{21} \\ \vdots \\ -v_{2n+1,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Z równania (62) obliczamy transmitancję układu

$$H(s) = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = \frac{\det \mathbf{H}'}{\det \mathbf{H}}, \quad (65)$$

gdzie macierz $\mathbf{H}'$ otrzymujemy z $\mathbf{H}$ przez zastąpienie w niej pierwszej kolumny wektorem $\mathbf{X}$.

7. Analiza i optymalizacja układów z liniami hydraulicznymi

Analiza sprowadzająca się do obliczenia transmitancji układów omówionych w pracy, może być wykonana przy użyciu algorytmów przedstawionych w niniejszym artykule.

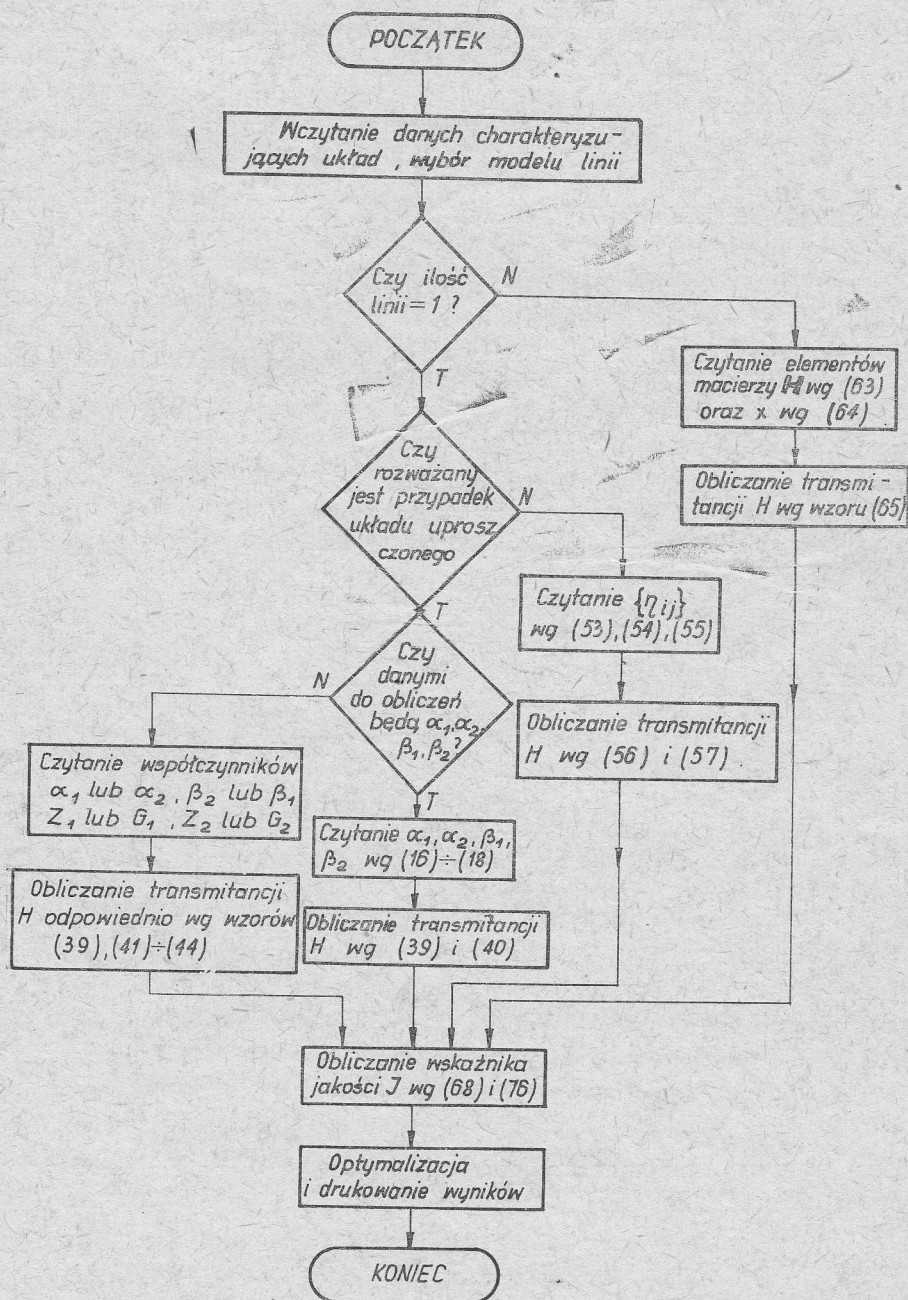
Algorytm taki może być również wykorzystany do modyfikacji własności dynamicznych układów hydraulicznych z liniami długimi. Modyfikacja taka może polegać na przykład na doborze parametrów linii. Przykład algorytmu (jego schemat blokowy) do analizy i optymalizacji, oparty na przedstawionym modelu matematycznym, jest pokazany na rysunku 11.

W proponowanym schemacie obliczeń wyróżnić można trzy zasadnicze tory. Pierwszy dotyczy obliczania układów z wieloma liniami hydraulicznymi, według wyników przedstawionych w p. 6. Drugi tor odnosi się do obliczeń układu z jedną linią, w przypadku ogólnym i trzeci dotyczy uproszczonego układu z jedną linią. Takie skonstruowanie algorytmu pozwala na skrócenie czasu obliczeń w przypadkach szczególnych, gdyż eliminuje się w ten sposób wiele zbędnych działań na elementach zerowych. W rozważanym przypadku jest to istotne z uwagi na dużą liczbę operacji potrzebnych do obliczania transmitancji i wskaźnika jakości J . Takie podejście do budowy algorytmu jest pierwszym etapem optymalizacji procesu obliczeń. Drugi etap powinien mieć miejsce podczas pisania konkretnego programu na EMC.

Optymalizacja własności dynamicznych układu (dobór odpowiednich parametrów) pociąga za sobą problem wyboru kryteriów, jakie będą stosowane przy ocenie.

W teorii regulacji duże zastosowanie znajdują całkowite kryteria jakości układów. W rozważanym przypadku możemy na przykład zastosować jako kryterium optymalizacji minimum całki

$$J = \int_0^{\infty} (Y(t) - Y_{st})^2 dt, \quad (66)$$



Rys. 11

gdzie $Y(t)$ — odpowiedź układu na skokową zmianę sygnału wejściowego $X(t)$, Y_{st} — stan ustalony tej odpowiedzi (rys. 12).

Wprowadzając oznaczenie

$$\varepsilon(t) = Y(t) - Y_{st}, \quad (67)$$

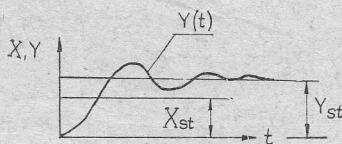
przejdźmy w całce (66) z dziedziny czasu do dziedziny częstotliwości

$$J = \int_0^{\infty} \varepsilon(t)^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\bar{\varepsilon}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi(\omega) d\omega. \quad (68)$$

Transformatę Laplace'a funkcji $\varepsilon(t)$ można określić wzorem

$$\bar{\varepsilon}(s) = \mathcal{L}[Y(t) - Y_{st} \mathbf{1}(t)] = \bar{Y}(s) - \frac{1}{s} Y_{st}, \quad (69)$$

gdzie $\mathbf{1}(t)$ – funkcja skoku jednostkowego, $\mathcal{L}$ – symbol przekształcenia Laplace'a.



Rys. 12

Uwzględniając (20) otrzymuje się

$$\bar{\varepsilon}(s) = H(s) \bar{X}(s) - \frac{1}{s} Y_{st}, \quad (70)$$

a ponieważ

$$\bar{X}(s) = \frac{1}{s} X_{st}, \quad (71)$$

to ostatecznie

$$\bar{\varepsilon}(s) = \frac{1}{s} (H(s) X_{st} - Y_{st}). \quad (72)$$

Zauważmy jeszcze, że

$$\frac{Y_{st}}{X_{st}} = H_{\omega=0} = K, \quad (73)$$

gdzie K – statyczny współczynnik wzmocnienia układu. Podstawiając w (72) $s = j\omega$, otrzymujemy

$$\varepsilon(j\omega) = \frac{1}{j\omega} (H(j\omega) - K) X_{st}, \quad (74)$$

a zapisując

$$H(j\omega) = \operatorname{Re} H(j\omega) + j \operatorname{Im} H(j\omega), \quad (75)$$

otrzymuje się wzór na funkcję podcałkową wskaźnika jakości

$$|\bar{\varepsilon}(j\omega)|^2 = \Phi(\omega) = \left(\frac{X_{st}}{\omega}\right)^2 [|H(j\omega)|^2 + K^2 - 2K \operatorname{Re} H(j\omega)]. \quad (76)$$

8. Podsumowanie

Liniowy model matematyczny układu regulacji z linią długą umożliwia zbudowanie algorytmu analizy i optymalizacji takich obiektów. Danymi wyjściowymi do obliczeń są współczynniki (funkcje zespolone) odpowiednich układów równań.

Pewną wadą, ograniczającą zastosowanie tego algorytmu, są przyjęte uproszczenia, a przede wszystkim liniowość i wyłącznie laminarny przepływ w linii hydraulicznej. Przedstawione kryterium optymalizacji należy traktować jako propozycję. W wielu przypadkach bardziej właściwe może okazać się stosowanie innych wskaźników jakości.

Analiza układów hydraulicznych z liniami długimi, przeprowadzona zgodnie z zaproponowanym algorytmem, może być wykorzystana do wstępnej oceny właściwości dynamicznych i do określenia wpływu linii hydraulicznej na te właściwości.

Przedstawiony algorytm, z uwagi na jego ogólną postać, powinien również umożliwić przeprowadzenie pewnych badań porównawczych dla różnych układów i parametrów linii hydraulicznych. Opracowanie programu obliczeniowego na EMC i wykonanie takich badań będzie stanowić następny etap przedstawionej pracy.

Praca wpłynęła do Redakcji w lutym 1978 r.

Literatura

- [1] Z. Klimacki, C. Orlikowski, *Analiza wpływu parametrów linii hydraulicznej na dynamikę układu sterowania*. Biuletyn IMP PAN, nr 144/808/1975.
- [2] Z. Klimacki, C. Orlikowski, *Teoretyczne badania wpływu zmienności ciśnienia zasilania na dynamikę hydraulicznego układu z linią długą*. Biuletyn IMP PAN, nr 142/837a/1975.
- [3] J. Antoniewicz, *Zasady automatyki*. WNT, Warszawa 1965.
- [4] A. Serwach, *Właściwości dynamiczne hydraulicznej linii długiej*. Archiwum Budowy Maszyn, t. XVII, z. 1, 1969.

Обобщенный алгоритм для анализа и оптимизации гидравлических систем автоматического регулирования длинной линией

Резюме

В сложных системах гидравлического автоматического регулирования часто выступают длинные гидравлические линии транслирующие сигналы. Иногда есть нужда учета их динамических свойств в анализе и проектировании таких систем.

В работе представлен алгоритм для анализа линейных математических моделей систем с гидравлическими линиями.

Рассуждения проводились впервые для упрощенной системы с одной линией, а затем рассмотрен общий случай системы с многими гидравлическими линиями. Для построения алгоритма принят двухпараметровый энергетический метод описания.

Полученный алгоритм может служить анализу и оптимизации гидравлических систем регулирования с длинными линиями.

Generalized Algorithm for the Analysis and Optimization of Hydraulic Automatic Control Systems with Long Lines

Summary

Complex hydraulic automatic control systems often contain hydraulic long lines along which signals are transmitted. Sometimes it is necessary to take into account their dynamic properties when analyzing and designing such systems.

In the paper an algorithm for analyzing linear mathematical models of systems comprising hydraulic lines has been presented.

First a simplified system with one line had been analyzed. This was followed by an analysis of a general case of a system with many hydraulic lines. A two-parameter method of description has been adopted for the construction of the algorithm.

The obtained algorithm can be used for the analysis and optimization of hydraulic automatic control systems with long lines.