

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPŁYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

75

WARSZAWA—POZNAN 1978

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPIYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

KOMITET REDAKCYJNY — EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER — REDAKTOR — EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA — EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright

by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1978

Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 370+90 egz.	Oddano do składania 13 VII 1977 r.
Ark. wyd. 14. Ark. druk. 11,25	Podpisano do druku 22 maja 1978 r.
Papier druk. mat. kl. V, 70 g	Druk ukończono w maju 1978 r.
Nr zam. 761/58	Cena zł 45,— J-7/292

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. A. Mickiewicza w Poznaniu

RYSZARD PISKORSKI, JÓZEF WIĘCKOWSKI

Gdańsk

Modele teoretyczne zginania belek o zmiennej strukturze

Przedstawiona teoria sprowadza się do dynamiki belek zginanych z materiału idealnie usztywniającego się. Rozwiązane przykłady i analiza numeryczna są zastosowaniami do dynamiki przystani i mostów.

1. Niniejsza praca jest podsumowaniem i dalszym rozwinięciem prac [2, 3, 4, 5] na temat ciągłych modeli pewnych układów łańcuchowych z więzami jednostronnymi. Modele te powstały w związku z badaniami nad dynamiką pływających łańcuchów kontenerów, przystani, a także w związku z możliwością wykorzystania ich w problematyce mostów pływających lub statków wieloczołowych.

Autorzy nie znaleźli w dostępnej literaturze rezultatów badań teoretycznych modeli tego rodzaju z wyjątkiem [1], gdzie Z. Bursztynowski i J. Marszałek rozwiązyali zadanie statyczne skręcania pręta cienkościennego z więzami jednostronnymi.

Istotną nowością niniejszej pracy, w stosunku do prac dotychczasowych, jest usystematyzowanie modeli teoretycznych i wprowadzenie nowego modelu (tzw. model C) z jednoczesnymi luzami, ścinającym i obrotowym (pkt. 2). Nowością jest również wprowadzenie warunków granicznych na końcach stref zwarcia jako praw ruchu nieciągłości pierwszego rodzaju, jak też wyznaczenie obszernej klasy całek ogólnych dla wszystkich badanych modeli co umożliwia rozwiązywanie szeregu ważnych praktycznie problemów początkowych (pkt. 3) oraz rozwiązanie i ilustracja numeryczna zadania stacjonarnego ruchu obciążenia ciągłego po belce nieograniczonej (problem ruchu pociągu) (pkt. 4 i 5), a także zadania początkowego drgań belki pod działaniem nieporuszającej się po belce siły lub ciężaru (pkt. 6).

Autorem punktu 5 pracy jest R. Piskorski. Wprowadzenie praw ruchu nieciągłości w punkcie 2 jest częścią wspólną. Autorem pozostałej części pracy jest J. Więckowski.

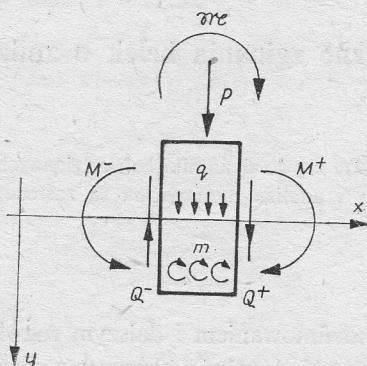
2. Postulujemy, że opis ruchu belki sprowadza się, podobnie jak w modelu Timoszenki, do przemieszczeń elementów bez obrotów y_1 oraz przemieszczeń z obrotami y_2 , tzn. że przekroje obracają się wraz z ugięciem y_2 o $\partial y_2 / \partial x$. Przyjmując umowę znaków sił

wewnętrznych i zewnętrznych jak na rys. 2.1, niżej otrzymamy równania ruchu:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + q = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (y_1 + y_2), \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} + Q + m = i \frac{\partial^3 y_2}{\partial x \partial t^2}. \quad (2.1.2)$$

Zakładamy również liniowe podłoże sprężyste typu Winklera, polarne, z zadany, zmiennym w czasie obrysem powierzchni swobodnej $Y(x, t)$. Jest to najprostszy model oddziały-



Rys. 2.1

wania hydrodynamicznego wody na belkę. Obciążenia ciągłe q siłą oraz obciążenie ciągłe m momentem będzie zatem:

$$q = q_0 - k(y_1 + y_2 - Y), \quad (2.2.1)$$

$$m = m_0 - l \frac{\partial}{\partial x} (y_2 - Y). \quad (2.2.2)$$

Nie wywołują reakcji polarnych ugięcia y_1 ze względu na brak obrotów.

Przytoczmy szczególne przypadki równań ruchu. Jeżeli występują w belce jedynie luzy obrotowe, to $y_1 \equiv 0$, a jeżeli dodatkowo nie działają więzy, to $M \equiv 0$ i równania będą:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + q_0 - k(y_2 - Y) = \rho \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}, \quad (2.3.1)$$

$$Q + m_0 - l \frac{\partial}{\partial x} (y_2 - Y) = i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} \right). \quad (2.3.2)$$

Jeżeli brak jest luzów obrotowych, a występują jedynie przemieszczenia bez obrotów, to $y_2 \equiv 0$, a dodatkowo, gdy nie działają więzy, to $Q \equiv 0$. W tym przypadku otrzymujemy równania

$$q_0 - k(y_1 - Y) = \rho \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}, \quad (2.4.1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} + m_0 + l \frac{\partial Y}{\partial x} = 0. \quad (2.4.2)$$

W trzecim przypadku przyjmiemy, że występują luzy dwojakiego rodzaju, obrotowe związane z przemieszczeniami y_2 i ścinające związane z y_1 . Jeżeli luzy nie zostały wyczerpane, to winno być $Q \equiv 0$ i $M \equiv 0$ i równania przyjmą postać

$$q_0 - k(y_1 + y_2 - Y) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (y_1 + y_2), \quad (2.5.1)$$

$$m_0 - l \frac{\partial}{\partial x} (y_2 - Y) = i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} \right). \quad (2.5.2)$$

Można oczywiście rozpatrzeć również inne modele teoretyczne, np. tylko przemieszczenia y jednego rodzaju, ale związane z obrotami przekrojów i dopuszczające luzy ścinające, tzn. $Q \equiv 0$ w przypadku rozwarcia. Przydatność tego modelu może być jednak dokonana wyłącznie przez eksperyment lub teorię aproksymacji układów dyskretnych układem ciągłym. Równania równowagi w tym szczególnym przypadku dla rozwarcia ($Q \equiv 0$) są:

$$q_0 - k(y - Y) = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (2.6.1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} + m_0 - l \frac{\partial}{\partial x} (y - Y) = i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right). \quad (2.6.2)$$

Model ten sprawia jednak zasadniczą trudność w opisie luzów dwojakiego rodzaju, i dla rozwarcia gdy $M \equiv 0$ i $Q \equiv 0$. Prowadzi bowiem do równań sprzecznych.

Kolejne modele, dla których podano równania w przypadku rozwarcia będziemy oznaczali literami A (równania (2.3)), model B (równania (2.4)), model C (równania (2.5)) i model D (równania (2.6)). Przyjmujemy je do opisu więzów dla kolejnych modeli.

Model A. Więzy są jednostronne kinematyczne i również jednostronne, narzucone na siły wewnętrzne

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + B_0 \equiv 0 \Rightarrow M \leq 0, \quad (2.7.1)$$

$$M \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + B_0 \geq 0, \quad (2.7.2)$$

B_0 jest dodatnią stałą. W przypadku zwarcia, tzn. działania więzów, równanie (2.7.1) wyznacza ugięcie y_2 , a moment gnący M , spełniający nierówność (2.7.1), oraz siłę tnącą wyznaczymy z równań (2.1) przy $y_1 \equiv 0$, tzn.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + q = \rho \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}, \quad (2.8.1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} + Q + m = i \frac{\partial^3 y_2}{\partial x \partial t^2}. \quad (2.8.2)$$

Uogólnienie tego przypadku więzów na przypadek ograniczenia krzywizny liczbami $B_1 < B_2$ od góry i od dołu jest oczywiste.

Model B. Więzy są jednostronne kinematyczne i narzucone również na siły wewnętrzne. Przyjmujemy je w najprostszej postaci symetrycznego ograniczenia kąta ugięcia od góry i od dołu

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = f \Rightarrow Q \geq 0, \quad (2.9.1)$$

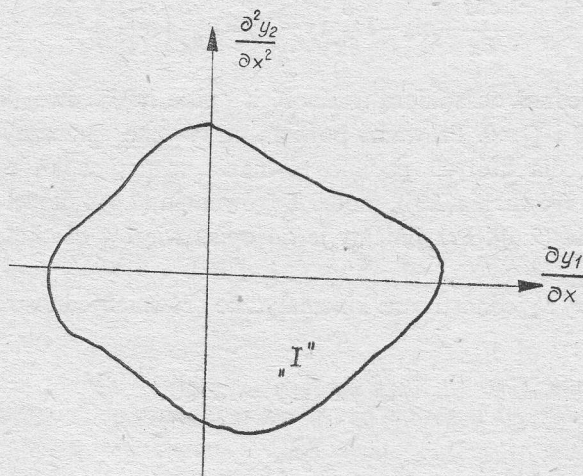
$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = -f \Rightarrow 0 \geq Q, \quad (2.9.2)$$

$$Q \equiv 0 \Rightarrow \left| \frac{\partial y_1}{\partial x} \right| \leq f. \quad (2.9.3)$$

Model C. Więzy są jednostronne, kinetyczne i narzucone również na siły wewnętrzne. Przyjmujemy, że są zadane relacją

$$\Phi \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}, \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (2.10)$$

wyznaczającą krzywą gładką na płaszczyźnie $\partial y_1 / \partial x$, $\partial^2 y_2 / \partial x^2$ (rys. 2.2).



Rys. 2.2

Więzy przyjmujemy z założenia doskonałe, tzn. praca sił tnących Q i momentów gnących M na przemieszczeniach przygotowanych $\Delta (\partial y_1 / \partial x)$ i $\Delta (\partial^2 y_2 / \partial x^2)$ musi być zerem

$$Q \Delta \left(\frac{\partial y_1}{\partial x} \right) + M \Delta \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (2.11.1)$$

Z definicji przemieszczeń przygotowanych otrzymujemy, że spełniają one relacje

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial y_1}{\partial x} \right)} \Delta \left(\frac{\partial y_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \right)} \Delta \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (2.11.2)$$

Ponieważ relacje (2.11) winny być spełnione dla różnych od zera przemieszczeń przygotowanych, siły reakcyjne Q oraz M muszą spełnić warunek

$$\begin{vmatrix} Q & M \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)} & \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\right)} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.12)$$

Wynika stąd, że siły reakcji więzów w przypadku ich działania są postaci:

$$Q = \lambda(x, t) \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)}, \quad (2.13.1)$$

$$M = \lambda(x, t) \frac{\partial \Phi}{\partial \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\right)}. \quad (2.13.2)$$

Postulując, że Φ rośnie z obszaru „I” odciętego krzywą więzów na zewnątrz (rys. 2.2) mamy dodatkowy warunek

$$\lambda(x, t) \geq 0 \quad (2.14)$$

dla zapewnienia działania więzów. Obszar „I” odpowiada wtedy dopuszczalnym parom $\partial y_1 / \partial x$, $\partial^2 y_2 / \partial x^2$ dla swobodnego ruchu. Więzy te nie opisują w pełni wszystkich zjawisk jakie zachodzą w rzeczywistych konstrukcjach łańcuchowych, gdyż nie uwzględniają możliwości pojawienia się luzów wzdłużnych. Przypadek ten omówimy w osobnej pracy. Najłatwiejszymi w zastosowaniach analitycznych lub numerycznych są w oczywisty sposób więzy liniowe, tzn. gdy funkcja Φ jest postaci

$$\Phi \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}, \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \right) \equiv A_0 \frac{\partial y_1}{\partial x} + B_0 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}. \quad (2.15)$$

Znaki stałych A_0 i B_0 wyznaczają wtedy klasę sił tnących i momentów gnących M zapewniających działanie więzów jednostronnych, gdyż

$$Q = \lambda A_0, \quad M = \lambda B_0, \quad \lambda \geq 0. \quad (2.16)$$

3. Zajmiemy się całkami ogólnymi i warunkami granicznymi dla równań opisujących kolejne modele.

Model A. Załóżmy szczególny, ważny praktycznie przypadek, gdy

$$\frac{l}{i} = \frac{k}{\rho} = \delta^2. \quad (3.1)$$

Relacja taka zachodzi wtedy z dostatecznym przybliżeniem, jeżeli pontony układu aproksymowanego mogą być rozpatrywane jako elementy liniowe o stałej gęstości, a ich kształt jest prostopadłościenny. Równania (2.3.1) można wtedy w prosty sposób rozwiązać.

Rugując siłę tnącą Q otrzymuje się po prostych przekształceniach

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} + \delta^2 y_2 \right) - \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} + \delta^2 y_2 \right) = \delta^2 \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \alpha^2 Y \right) + \frac{1}{i} \left(\frac{\partial m_0}{\partial x} - q_0 \right), \quad (3.2.1)$$

gdzie

$$\frac{\rho}{i} \equiv \alpha^2. \quad (3.2.2)$$

Całkę ogólną równania (3.2) otrzymuje się poprzez kwadratury w postaci:

$$y_2(x, t) = D_1(x) \sin \delta t + D_2(x) \cos \delta t + \frac{1}{\delta} \int_{t_0}^t [e^{\alpha x} C_1(\tau) + e^{-\alpha x} C_2(\tau)] \sin \delta(t - \tau) d\tau + \\ + \frac{1}{\alpha \delta} \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \varphi(\tau, \xi) \sinh \alpha(x - \xi) \sin \delta(t - \tau) d\xi d\tau, \quad (3.3)$$

gdzie

$$\varphi(t, x) \equiv \delta^2 \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \alpha^2 Y \right) + \frac{1}{i} \left(\frac{\partial m_0}{\partial x} - q_0 \right), \quad (3.4)$$

natomiast $D_1(x)$, $D_2(x)$, $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$ – funkcje jednej zmiennej do wyznaczenia z warunków granicznych zadania (początkowych lub brzegowych). Ponieważ przypadek (3.2) opisuje ruch rozwartej belki, to dla sił wewnętrznych rozwiązanie ogólne jest

$$Q = i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} + \delta^2 y_2 \right) - \left(m_0 + l \frac{\partial Y}{\partial x} \right), \quad (3.5.1)$$

$$M \equiv 0. \quad (3.5.2)$$

W przypadku belki zwartej otrzymamy zgodnie z relacjami (2.7)

$$y_2(x, t) = -B_0 \frac{x^2}{2} + E_1(t)x + E_2(t), \quad (3.6)$$

gdzie $E_1(t)$ i $E_2(t)$ – dowolne funkcje czasu. Całkę ogólną dla momentu M otrzymamy rugując z równań (2.1) siłę tnącą przy $y_1 \equiv 0$

$$M - \int_{x_0}^x d\xi \int_{x_0}^{\xi} \left(q_0 - \frac{\partial m_0}{\partial \eta} + kY(\eta, t) - l \frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} \right) d\eta - \\ - k \left(E_2(t) \frac{x^2}{2} + E_1(t) \frac{x^3}{6} - B_0 \frac{x^4}{24} \right) - l B_0 \frac{x^2}{2} - \\ - \rho \left(\ddot{E}_1(t) \frac{x^3}{6} + \ddot{E}_2(t) \frac{x^2}{2} \right) + H_1(t)x + H_2(t), \quad (3.7.1.)$$

a po podstawieniu do równania (2.1.2) otrzymamy siłę tnącą

$$Q = - \int_{x_0}^x \left(q_0 - \frac{\partial m_0}{\partial \eta} + kY - l \frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} \right) d\eta + E_1(t) \left(k \frac{x^2}{2} + l \right) + kx E_2(t) + \\ + \ddot{E}_1(t) \left(\rho \frac{x^2}{2} + i \right) + \rho x \ddot{E}_2(t) - \left(kB_0 \frac{x^3}{6} + m_0 + l \frac{\partial Y}{\partial x} \right) - H_1(t), \quad (3.7.2)$$

x jest tutaj dowolnym punktem początkowym całkowania wybranym z wnętrza strefy zwania, a $E_1(t)$, $E_2(t)$, $H_1(t)$, $H_2(t)$ są dowolnymi funkcjami czasu do wyznaczenia z warunków granicznych zadania.

Warunki graniczne sprowadzają się do ciągłości ugięć $y_2(x, t)$ oraz ich pierwszych pochodnych na styku strefy zwania i strefy rozwarcia, ciągłości sił tnących na styku obydwu stref lub nieciągłości skokowej siły tnącej w miejscu obciążenia siłą skupioną. Aby wyznaczyć warunki graniczne dla momentu, trzeba ułożyć równania ruchu nieciągłości drugiej pochodnej mieszanej. Nieciągłość ta może pojawić się na styku strefy rozwarcia i strefy zwania.

Weźmy dowolny przedział ustalony $\langle x_1, x_2 \rangle$. Kręt względem początku układu współrzędnych tego odcinka belki będzie

$$J_{x_1 x_2} = \int_{x_1}^{x_2} i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y_2}{\partial t} \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} x \rho \frac{\partial y_2}{\partial t} dx. \quad (3.8)$$

Moment wszystkich sił zewnętrznych względem tego samego bieguna $x=0$

$$\mathcal{M}_{x_1 x_2} = \int_{x_1}^{x_2} m dx + \int_{x_1}^{x_2} qx dx + M(x_2) - M(x_1) + \\ + Q(x_2)x_2 - Q(x_1)x_1 + \sum_i \Delta \mathfrak{M}_i, \quad (3.9)$$

$\Delta \mathfrak{M}_i$ oznaczają zewnętrzne obciążenia skupione momentami, a $-\Delta \mathfrak{M}_i$ skoki nieciągłości momentu gnącego w punktach x_i . Liczba tych punktów jest skończona, gdyż rozpatrujemy zadanie w klasie funkcji przedziałami ciągłych.

Postulując, że wewnątrz przedziału $\langle x_1, x_2 \rangle$ znajduje się punkt nieciągłości $x_0(t)$ pochodnej mieszanej $\frac{\partial^2 y_2}{\partial x \partial t}$ otrzymamy pochodną krętu w postaci

$$\frac{dJ_{x_1 x_2}}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} i \frac{\partial^3 y_2}{\partial x \partial t^2} dx + \int_{x_1}^{x_2} x \rho \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} dx + i \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x \partial t} \Big|_{x_0^-} - \frac{\partial^2 y_2}{\partial x \partial t} \Big|_{x_0^+} \right) \dot{x}_0. \quad (3.10)$$

Moment $M_{x_1 x_2}$ można natomiast zapisać następująco:

$$\mathcal{M}_{x_1 x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (m + Q) dx + M(x_2) - M(x_1) + \sum_i \Delta \mathfrak{M}_i + \int_{x_1}^{x_2} x \left(q + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx, \quad (3.11)$$

Ponieważ równanie ruchu obrotowego w postaci całkowej jest

$$\forall_{x_1, x_2} \frac{dJ_{x_1 x_2}}{dt} = \mathcal{M}_{x_1 x_2} \quad (3.12)$$

i równania ruchu postępowego i obrotowego postaci (2.1) muszą być spełnione (dla $y_1 \equiv 0$), otrzymamy równanie ruchu na nieciągłości

$$\Delta \mathcal{M} = i\dot{x}_0 \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x \partial t} \Big|_{x_0^-} - \frac{\partial^2 y_2}{\partial x \partial t} \Big|_{x_0^+} \right). \quad (3.13)$$

W miejscu x_0 pojawi się zatem skok nieciągłości momentu lub tzw. moment zderzenia o własności

$$M(x_0^+) - M(x_0^-) = i\dot{x}_0 \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x \partial t} \Big|_{x_0^-} - \frac{\partial^2 y_2}{\partial x \partial t} \Big|_{x_0^+} \right). \quad (3.14)$$

Nieciągłość momentu może pojawić się zatem jedynie w tym przypadku gdy $\dot{x}_0 \neq 0$, tzn. gdy nieciągłość porusza się.

Model B. Podobnie jak w poprzednim przypadku zbadamy wpierw ogólne rozwiązanie dla strefy rozwarcia, gdy $Q=0$. Z równania (2.4.1) wyznaczmy y_1 , gdyż sprowadza się ono do postaci

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \delta^2 y_1 = \frac{1}{\rho} (q_0 + kY). \quad (3.15)$$

Całka ogólna tego równania jest

$$y_1(x, t) = A_1(x) \sin \delta t + A_2(x) \cos \delta t + \frac{1}{\delta \rho} \int_0^t (q_0 + kY) \sin \delta(t - \tau) d\tau. \quad (3.16)$$

Moment gnący w strefie rozwarcia wyznaczmy z relacji (2.4.2) otrzymując

$$M(x, t) = - \int_{x_0}^x \left(m_0 + l \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) d\xi + B_1(t), \quad (3.17)$$

$A_1(x)$, $A_2(x)$, $B_1(t)$ są dowolnymi funkcjami miejsca i czasu do wyznaczenia z warunków granicznych.

Dla strefy zwarcia mamy, w przypadku (2.9.1) lub (2.9.2)

$$y_1(x, t) = \pm f x + C_1(t). \quad (3.18)$$

Z równań (2.1) otrzymamy siłę tnącą Q i moment gnący M w postaci

$$Q = - \int_{x_0}^x (q_0 + kY) d\xi + k \left(\pm f \frac{x^2}{2} + C_1(t) x \right) + \rho \ddot{C}_1(t) x + D_1(t), \quad (3.19)$$

$$M = - \int_{x_0}^x (m_0 + lY) d\xi + \int_{x_0}^x d\xi \int_{x_0}^{\xi} (q_0 + kY) d\eta - \\ - k \left(\pm f \frac{x^3}{6} + C_1(t) \frac{x^2}{2} \right) - \rho \ddot{C}_1(t) \frac{x^2}{2} - D_1(t)x + D_2(t), \quad (3.20)$$

$C_1(t)$, $D_1(t)$, $D_2(t)$ są dowolnymi funkcjami czasu.

Warunki graniczne sprowadzają się do ciągłości ugięć na styku stref zwarcia i rozwarcia, ciągłości momentów na styku obydwu stref lub nieciągłości momentu w miejscu przyłożenia obciążenia skupionego momentem.

W tym modelu, wskutek istnienia luzów ścinających, mogą wystąpić nieciągłości pierwszej pochodnej. Równania ruchu tych nieciągłości (frontu strefy zwarcia) są dynamicznymi warunkami granicznymi opisującymi zdarzenia wewnętrzne.

Weźmy dowolny przedział $\langle x_1, x_2 \rangle$. Pęd tego odcinka belki będzie

$$\mathcal{P}_{x_1 x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial y_1}{\partial t} dx. \quad (3.21)$$

Wypadkowa siła od wszystkich obciążeń odcinka odpowiadającego przedziałowi $\langle x_1, x_2 \rangle$ wynosi

$$R_{x_1 x_2} = \int_{x_1}^{x_2} q dx + Q(x_2) - Q(x_1) + \sum_i \Delta P_i, \quad (3.22)$$

ΔP_i oznaczają zewnętrzne obciążenia skupione siłą w wewnętrznych punktach x_i przedziału $\langle x_1, x_2 \rangle$, a $-\Delta P_i$ skoki nieciągłości siły tnącej. Liczba punktów nieciągłości, podobnie jak dla modelu A , jest w przedziale $\langle x_1, x_2 \rangle$ z założenia skończona.

Postulując, że wewnątrz przedziału $\langle x_1, x_2 \rangle$ znajduje się punkt $x_0(t)$, w którym pochodna $\partial y_1 / \partial t$ posiada nieciągłość pierwszego rodzaju, otrzymamy po zróżniczkowaniu pędu

$$\frac{d\mathcal{P}_{x_1 x_2}}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} dx + \rho \dot{x}_0 \left(\left. \frac{\partial y_1}{\partial t} \right|_{x_0^-} - \left. \frac{\partial y_1}{\partial t} \right|_{x_0^+} \right). \quad (3.23)$$

Korzystając z równania ruchu w postaci całkowej

$$\forall_{x_1, x_2} \frac{d\mathcal{P}_{x_1 x_2}}{dt} = R_{x_1 x_2}, \quad (3.24)$$

otrzymamy równanie ruchu na nieciągłości, warunek zderzenia, lub skok siły tnącej na nieciągłości pierwszej pochodnej

$$Q(x_0^+) - Q(x_0^-) = \rho \dot{x}_0 \left(\left. \frac{\partial y_1}{\partial t} \right|_{x_0^-} - \left. \frac{\partial y_1}{\partial t} \right|_{x_0^+} \right). \quad (3.25)$$

I w tym przypadku dynamiczny skok siły tnącej pojawia się jedynie wtedy w miejscu nieciągłości pochodnej $\partial y_1 / \partial t$, gdy $\dot{x}_0 \neq 0$, tzn. gdy nieciągłość porusza się.

Model C. W tym przypadku dla strefy rozwarcia siła tnąca $Q \equiv 0$ oraz moment gnący $M \equiv 0$. Całki ogólne dla ugięć otrzymujemy łatwo z równań (2.5.1) w postaci

$$y_2(x, t) = A_1(x) \sin \delta_1 t + A_2(x) \cos \delta_1 t + \\ + B_1(t) + \frac{1}{i\delta_1} \int_{x_0}^x d\xi \int_{t_0}^t \left(m_0 + l \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) \sin \delta_1(t - \tau) d\tau, \quad (3.26.1)$$

$$y_1(x, t) + y_2(x, t) = D_1(x) \sin \delta_2 t + D_2(x) \cos \delta_2 t + \\ + \frac{1}{\rho\delta_2} \int_{t_0}^t (q_0 + kY) \sin \delta_2(t - \tau) d\tau, \quad (3.26.2)$$

$A_1(x)$, $A_2(x)$, $B_1(t)$, $D_1(x)$, $D_2(x)$ są tutaj funkcjami jednej zmiennej, które trzeba wyznaczyć z warunków granicznych, natomiast

$$\delta_1^2 \equiv \frac{l}{i}, \quad \delta_2^2 \equiv \frac{k}{\rho}. \quad (3.26.3)$$

W przypadku strefy zwarcia ograniczymy się jedynie do więzów liniowych (2.15) o współczynnikach A_0 i B_0 stałych oraz przy dodatkowym założeniu, że $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ analogicznie jak w modelu A (patrz (3.1)). Tylko w tym przypadku można bowiem znaleźć całkę ogólną przez kwadratury dla strefy zwarcia.

Równania dla strefy zwarcia otrzymamy z równań (2.1) podstawiając siły wewnętrzne według wzorów (2.16) i dołączając do tak otrzymanego układu równanie więzów liniowych (patrz (2.15)). Układ przyjmuje wtedy postać

$$A_0 \frac{\partial y_1}{\partial x} + B_0 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = 0, \quad (3.27.1)$$

$$A_0 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + q = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (y_1 + y_2), \quad (3.27.2)$$

$$B_0 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + A_0 \lambda + m = i \frac{\partial^3 y_2}{\partial t^2 \partial x}. \quad (3.27.3)$$

Rugujemy $\partial \lambda / \partial x$ z równań (3.27.2) i (3.27.3). Różniczkujemy względem x tak otrzymane równanie i ponownie rugujemy $\partial \lambda / \partial x$ posługując się równaniem (3.27.2). Po prostych przekształceniach otrzymamy

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[A_0 \rho (y_1 + y_2) + \rho B_0 \frac{\partial}{\partial x} (y_1 + y_2) - i A_0 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \right] + \\ + \delta^2 \left[A_0 \rho (y_1 + y_2) + \rho B_0 \frac{\partial}{\partial x} (y_1 + y_2) - i A_0 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \right] = \\ = B_0 \frac{\partial q_0}{\partial x} + B_0 k \frac{\partial Y}{\partial x} + A_0 q_0 + A_0 k Y - A_0 \frac{\partial m_0}{\partial x}. \quad (3.28)$$

Całkując równanie (3.28) względem czasu i dołączając do niego równanie więzów liniowych (3.27.1), otrzymujemy następujący układ równań o współczynnikach stałych, w których czas odgrywa jedynie rolę parametru:

$$A_0 \rho (y_1 + y_2) + B_0 \rho \frac{\partial}{\partial x} (y_1 + y_2) - i A_0 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = E_1(x) \sin \delta t + E_2(x) \cos \delta t + \quad (3.29.1)$$

$$+ \frac{1}{\delta} \int_0^t \left[B_0 \frac{\partial q_0}{\partial x} + B_0 k \frac{\partial Y}{\partial x} + A_0 q_0 + A_0 k Y - A_0 \frac{\partial m_0}{\partial x} \right] \sin \delta(t - \tau) d\tau,$$

$$A_0 \frac{\partial y_1}{\partial x} + B_0 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = 0. \quad (3.29.2)$$

Równań tych ogólnie rozwiązywać nie będziemy ze względu na skomplikowaną postać całki ogólnej. Aby wyznaczyć siły wewnętrzne należy po znalezieniu rozwiązania na y_1 i y_2 wrócić do równań (3.27.2) lub (3.27.3) wyznaczając z nich funkcję $\lambda(x, t)$. Przykładowo z równania (3.27.2) otrzymamy przy $A_0 \neq 0$

$$\lambda = -\frac{1}{A_0} \int_{x_0}^x q(\xi, t) d\xi + \frac{\rho}{A_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{x_0}^x [y_1(\xi, t) + y_2(\xi, t)] d\xi, \quad (3.30)$$

i według relacji (2.16) otrzymamy siły wewnętrzne.

Warunki graniczne na styku stref zvarcia i rozvarcia sprowadzają się do ciągłości ugięć y_1 oraz y_2 , ciągłości kątów ugięcia $\partial y_2 / \partial x$ oraz nieciągłości skoków sił tnących i momentów gnących zgodnie z relacjami (3.25) i (3.14). Rozwiązania uzyskane w niniejszej pracy mają dużą wartość praktyczną, pozwalają bowiem uzyskać przez układy równań różniczkowych zwyczajnych, rozwiązania problemów początkowych dla wszystkich rozpatrywanych modeli lub rozwiązań okresowych w przedziałach przestrzennych skończonych (z warunkami brzegowymi). Problemom początkowym i zadaniom w przedziałach skończonych poświęcimy osobną pracę. Niektóre własności rozpatrywanych w niniejszej pracy modeli A i B zilustrujemy na przykładach zadań opisujących ruch stacjonarny pewnego układu modelującego pociąg poruszający się ze stałą prędkością po belce o zmiennej strukturze i ruch drgający ciężaru nieruchomego na belce.

4. Rozważmy ruch masy rozłożonej w sposób ciągły w przedziale $(-\infty, \check{x}_0)$, gdzie $\check{x}_0$ jest funkcją czasu, po belce według modelu A zajmującej przedział $(-\infty, +\infty)$. Parametrami belki niech będą gęstość liniowa ρ_w , gęstość liniowa momentu bezwładności i_w oraz sztywność podłoża sprężystego Winklera k na przemieszczenia i l na obroty. Nie będziemy uwzględniali w dalszych obliczeniach ciężaru liniowego q_w belki, gdyż jej stan równowagi statycznej może być przyjęty jako układ odniesienia.

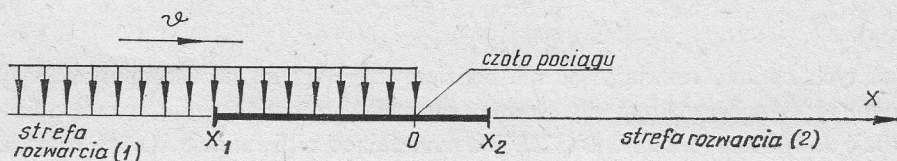
Masa rozłożona w sposób ciągły modeluje np. pociąg poruszający się ze stałą prędkością $\mathcal{Q}$ i posiadający gęstość liniową ρ_p , gęstość liniową momentu bezwładności i_p oraz ciężar liniowy q_p rozłożone w przedziale $\tilde{x} \in (-\infty, \tilde{x}_0)$.

Wprowadźmy układ współrzędnych x związany z poruszającym się pociągiem. Równania dla modelu A w stanie stacjonarnym w przedziale, w którym znajduje się pociąg będą

$$Q' + q_p = (\rho_w + \rho_p) v^2 y_2'' + k y_2, \quad (4.1.1)$$

$$M' + Q - l y_2' - (i_w + i_p) v^2 y_2''' = 0. \quad (4.1.2)$$

Poza przedziałem, w którym znajduje się pociąg są ważne równania postaci (4.1), w których $q_p = \rho_p = i_p = 0$. W celu uzyskania rozwiązania będziemy postulowali strefę zwarcia wokół czoła pociągu zgodnie z rysunkiem 4.1.



Rys. 4.1

W strefie rozwarcia (1) otrzymujemy po wyrugowaniu siły tnącej Q z równań (4.1) i przy $M \equiv 0$ równanie

$$v^2(i_p + i_w) y_2^{IV} + [l - (\rho_p + \rho_w) v^2] y_2'' - k y_2 + q_p = 0. \quad (4.2)$$

Równanie charakterystyczne tego równania posiada jedyny pierwiastek dodatni

$$\alpha_1 = \left[\frac{2k}{l - (\rho_p + \rho_w) v^2 + \sqrt{\Delta}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.3.1)$$

gdzie

$$\Delta = [l - (\rho_p + \rho_w) v^2]^2 + 4k(i_p + i_w) v^2. \quad (4.3.2)$$

Pierwiastkowi temu odpowiada całka szczególna zanikająca do zera gdy $x \rightarrow -\infty$. Poszukiwane rozwiązanie równania (4.2) będzie zatem

$$y_2 = C_1 e^{\alpha_1 x} + \frac{q_p}{k}. \quad (4.4)$$

Podstawiając w równaniu (4.2) $i_p = \rho_p = q_p = 0$, otrzymamy równanie do wyznaczenia ugięć w strefie rozwarcia (2). Poszukując całki zanikającej do zera gdy $x \rightarrow +\infty$ otrzymamy

$$y_2 = C_2 e^{\alpha_2 x}, \quad (4.5)$$

gdzie

$$\alpha_2 = - \left(\frac{2k}{l - \rho_w v^2 + \sqrt{\Delta}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.6.1)$$

$$\Delta = (l - \rho_w v^2)^2 + 4k i_p v^2. \quad (4.6.2)$$

Rozwiązanie dla ugięć w strefie zwarcia $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ sprowadza się do wyznaczenia całki ogólnej równania więzów

$$y_2'' = -B_0, \quad (4.7)$$

a zatem

$$y_2 = -B_0 \frac{x^2}{2} + D_1 x + D_2. \quad (4.8)$$

Po podstawieniu tego rozwiązania do równań (4.1) i uwzględnieniu, że pociąg jest tylko w części strefy zwarcia dla $x \in (x_1, 0)$, otrzymamy rozwiązanie dla sił tnących i momentów w postaci

$$Q = - \int_0^x q_p d\xi - \left(\rho_w + \rho_p \frac{1 - \operatorname{sgn} x}{2} \right) v^2 B_0 x + k \left(-B_0 \frac{x^3}{6} + D_1 \frac{x^2}{2} + D_2 x \right) + E_1, \quad (4.9.1)$$

$$M \equiv \int_0^x d\eta \int_0^\eta q_p d\eta + \left(\rho_w + \rho_p \frac{1 - \operatorname{sgn} x}{2} \right) v^2 B_0 \frac{x^2}{2} - k \left(-B_0 \frac{x^4}{24} + D_1 \frac{x^3}{6} + D_2 \frac{x^2}{2} \right) - l \left(-B_0 \frac{x^2}{2} + D_1 x \right) - E_1 x - E_2. \quad (4.9.2)$$

Warunki graniczne do wyznaczenia stałych $C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$ oraz współrzędnych krańców strefy zwarcia sprowadzają się do ciągłości ugięć y_2 i ich pierwszych pochodnych (warunki geometryczne) oraz ciągłości sił tnących i skoków nieciągłości momentów (zderzenia) na krańcach strefy zwarcia.

Warunki geometryczne przyjmują postać

$$C_1 e^{\alpha_1 x_1} + \frac{q_p}{k} = -B_0 \frac{x_1^2}{2} + D_1 x_1 + D_2, \quad (4.10.1)$$

$$C_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 x_1} = -B_0 x_1 + D_1, \quad (4.10.2)$$

$$C_2 e^{\alpha_2 x_2} = -B_0 \frac{x_2^2}{2} + D_1 x_2 + D_2, \quad (4.10.3)$$

$$C_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 x_2} = -B_0 x_2 + D_1. \quad (4.10.4)$$

Warunki nieciągłości momentów wynikają z relacji (3.14), która zapisana w układzie związanym z pociągiem i dla $x_0 = x_1, x_2$ przyjmuje postać

$$M(x_0^+) - M(x_0^-) = i \vartheta^2 (y_2''|_{x_0^+} - y_2''|_{x_0^-}). \quad (4.11)$$

Dla $x_0 = x_1$ jest $M(x_1^-) = 0$, $i = i_w$ (gdyż pociąg porusza się z prędkością ϑ i jego elementy nie ulegają zderzeniu) oraz $M(x_0^+) = M_{u1}$, gdzie M_{u1} oznacza moment zderzenia w punkcie x_1 . Po podstawieniu rozwiązań dla y_2 otrzymamy

$$M_{u1} = -i_w \vartheta^2 (B_0 + C_1 \alpha_1^2 e^{\alpha_1 x_1}). \quad (4.12.1)$$

Podobnie dla $x_0 = x_2$ otrzymamy

$$M_{n2} = -i_w \vartheta^2 (B_0 + C_2 \alpha_2^2 e^{\alpha_2 x_2}). \quad (4.12.2)$$

Dla zapisania wszystkich warunków granicznych narzuconych na siły wewnętrzne należy wyznaczyć siły tnące w strefach rozwarcia 1 i 2 (patrz (4.1)).

Z równania (4.1.2) otrzymamy siłę tnącą w strefie 1

$$Q = C_1 [l\alpha_1 + (i_p + i_w) \vartheta^2 \alpha_1^3] e^{\alpha_1 x} \quad (4.13.1)$$

i w strefie 2

$$Q = C_2 [l\alpha_2 + i_w \vartheta^2 \alpha_2^3] e^{\alpha_2 x}. \quad (4.13.2)$$

Warunki graniczne w punkcie $x = x_1$ są po rozpisaniu następujące. Ciągłość siły tnącej

$$C_1 [l\alpha_1 + (i_p + i_w) \vartheta^2 \alpha_1^3] e^{\alpha_1 x_1} = -q_p x_1 - (\rho_p + \rho_w) \vartheta^2 B_0 x_1 + \\ + k \left(-B_0 \frac{x_1^3}{6} + D_1 \frac{x_1^2}{2} + D_2 x_1 \right) + E_1. \quad (4.14.1)$$

Zadany skok nieciągłości momentu gnącego

$$-q_p \frac{x_1^2}{2} - (\rho_p + \rho_w) \vartheta^2 B_0 \frac{x_1^2}{2} + k \left(-B_0 \frac{x_1^4}{24} + D_1 \frac{x_1^3}{6} + D_2 \frac{x_1^2}{2} \right) - \\ - l \left(-B_0 \frac{x_1^2}{2} + D_1 x_1 \right) + E_1 x_1 + E_2 = i_w \vartheta^2 (B_0 + C_1 \alpha_1^2 e^{\alpha_1 x_1}). \quad (4.14.2)$$

Warunki graniczne w punkcie $x = x_2$. Ciągłość siły tnącej

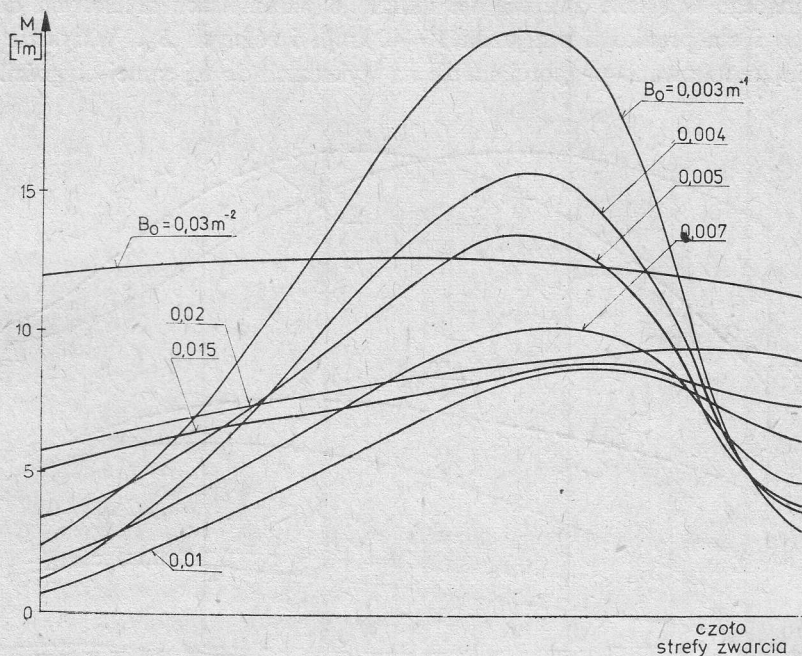
$$C_2 (l\alpha_2 + i_w \vartheta^2 \alpha_2^3) e^{\alpha_2 x_2} = -\rho_w \vartheta^2 B_0 x_2 + k \left(-B_0 \frac{x_2^3}{6} + D_1 \frac{x_2^2}{2} + D_2 x_2 \right) + E_1. \quad (4.14.3)$$

Zadany skok nieciągłości momentu gnącego

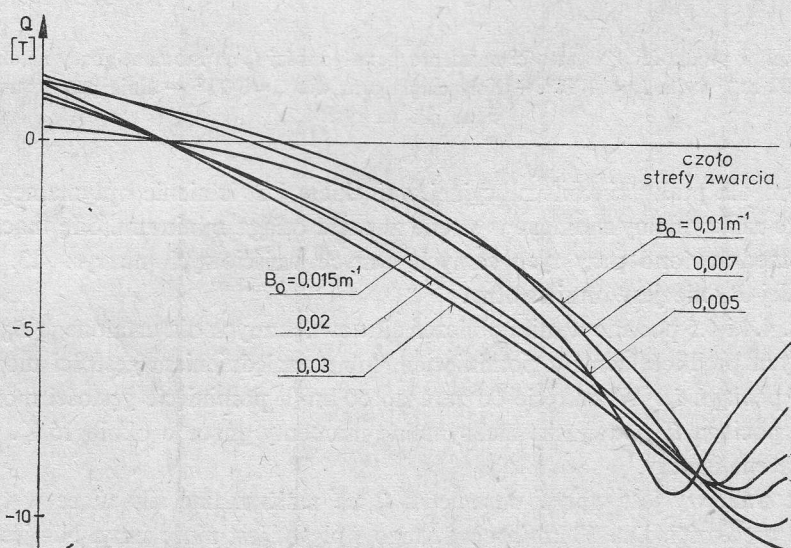
$$-\rho_w \vartheta^2 B_0 \frac{x_2^2}{2} + k \left(-B_0 \frac{x_2^4}{24} + D_1 \frac{x_2^3}{6} + D_2 \frac{x_2^2}{2} \right) - \\ - l \left(-B_0 \frac{x_2^2}{2} + D_2 x_2 \right) + E_1 x_2 + E_2 = i_w \vartheta^2 (B_0 + C_2 \alpha_2^2 e^{\alpha_2 x_2}). \quad (4.14.4)$$

Układ równań (4.10) i (4.14) rozwiązano numerycznie posługując się maszyną cyfrową K-202. Sposób postępowania polegał na wyrugowaniu stałych C_1 i C_2 z równań (4.10) i rozwiązaniu względem x_1 i x_2 przy pozostałych parametrach danych. Przeszukiwano obszar na płaszczyźnie (D_1, D_2) korzystając z tego, że D_2 , tj. ugięcie na czole pociągu musi być dodatnie, a kąt ugięcia D_1 na czole pociągu na skutek asymetrii strefy zvarcia względem czoła pociągu musi być ujemny. (Odciażające działanie pociągu wydłuża strefę zvarcia na obciążonej części belki). Wyznaczając dla każdej pary (D_1, D_2) , x_1 , x_2 , C_1 , C_2 możemy z równań (4.14.1) i (4.14.2) wyznaczyć $(E_1, E_2)_1$ i analogicznie z równań (4.14.3)

i (4.14.4) również wyznaczyć $(E_1, E_2)_2$. Jeżeli różnica tak otrzymanych par jest w sensie najmniejszych kwadratów dostatecznie mała, to można uznać, że znaleźliśmy rozwiązanie układu i wyznaczyć wszystkie interesujące nas parametry w strefie zwarcia. Poza tą strefą



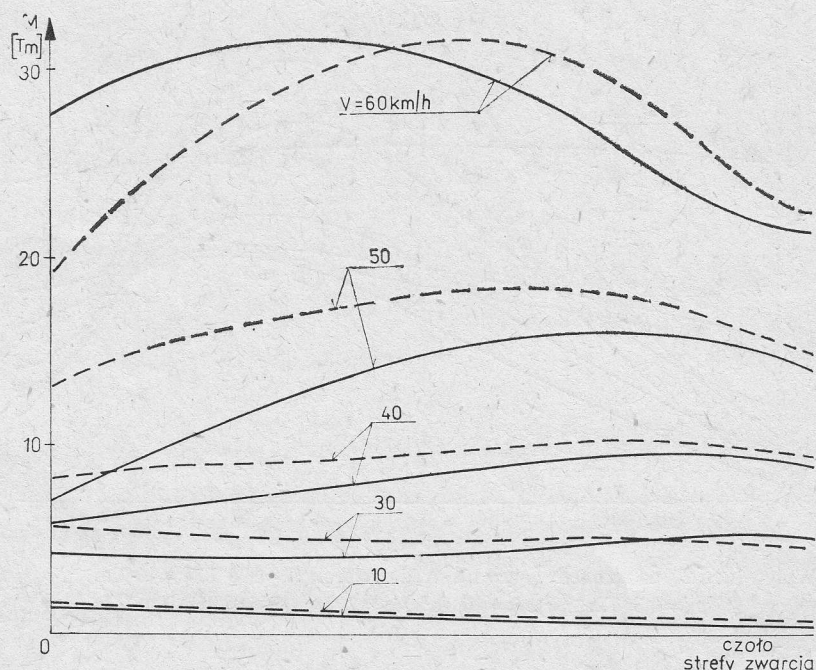
Rys. 4.2. Wpływ luzu B_0 na moment gnący na strefie zwarcia ($l=100$ T, $k=10$ Tm $^{-2}$, $\rho_p=0,5$ Tm $^{-2}$ s $^{2\frac{1}{2}}$, $\rho_w=0,3$ Tm $^{-2}$ s 2 , $i_p=10$ Ts 2 , $i_w=2$ Ts 2 , $q_0=4,905$ Tm $^{-1}$)



Rys. 4.3. Wpływ luzu B_0 na siłę tnącą na strefie zwarcia ($V=40$ km/h, pozostałe dane jak na rys. 4.2)

siły wewnętrzne i ugięcia zmierzają wykładniczo dla $x \rightarrow \pm \infty$ do zera lub liczby stałej i dlatego nie przeprowadzono analizy numerycznej w strefie rozwarcia.

Interesujący jest wpływ stałej B_0 charakteryzującej luzu w rzeczywistym układzie dyskretnym aproksymowanym układem ciągłym [4]. Na rys. 4.2 podano wyniki obliczenia momentu gnącego w strefie zwarcia dla układu o parametrach zbliżonych do układu rzeczywistego i dla prędkości przejazdu $V=40$ km/h i różnych B_0 . Wszystkie długości stref zwarcia zredukowano proporcjonalnie na wykresach do tej samej długości.

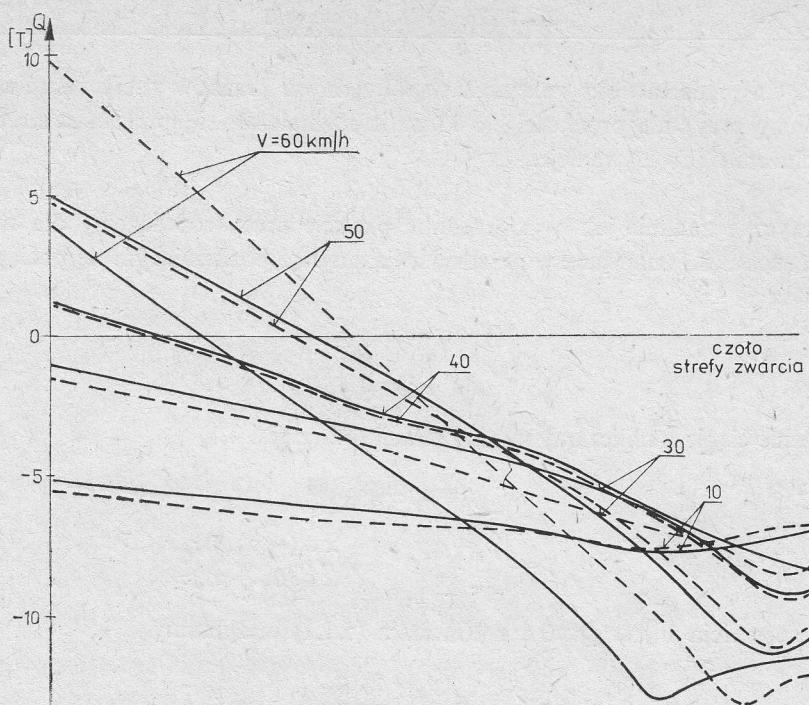


Rys. 4.4. Wpływ prędkości V i gęstości momentu bezwładności i_p na moment gnący na strefie zwarcia (dla $B_0=0,02 \text{ m}^{-1}$ i dla $i_p=10 \text{ Ts}^2$ — linia ciągła oraz dla $i_p=0 \text{ Ts}^2$ — linia przerywana, pozostałe dane jak na rys. 4.2)

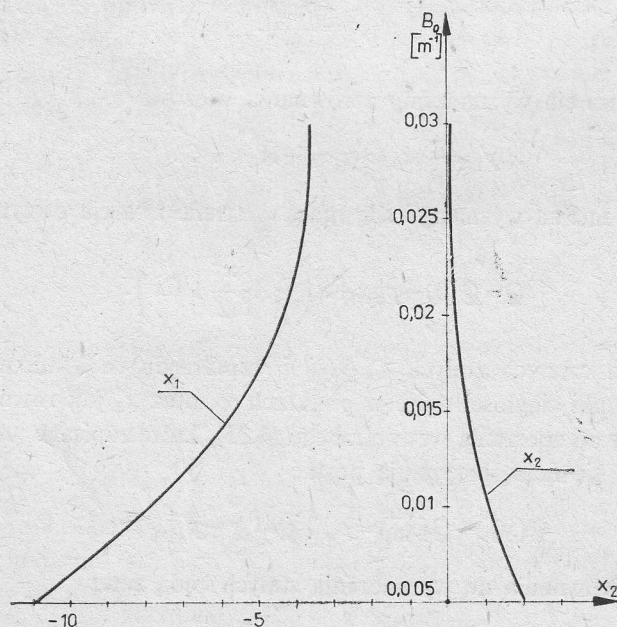
Istotnym dla praktyki konstrukcyjnej wnioskiem jest istnienie optymalnego luzu B_0 , dla którego maksymalny moment w strefie zwarcia osiąga minimum. Siłę tnącą na strefie zwarcia przedstawiono przy tych samych danych wejściowych na rys. 4.3. Jak widać wpływ stałej B_0 nie jest tutaj istotny.

Na rys. 4.4 i 4.5 podano wyniki obliczeń sił wewnętrznych dla ustalonego $B_0=0,02 \text{ m}^{-1}$ przy różnych prędkościach i z pominięciem lub uwzględnieniem gęstości momentu bezwładności pociągu i_p . W zakresie od zera do 50 km/h pominięcie gęstości momentu bezwładności pociągu i_p podwyższa maksymalne momenty gnące o około 15%. Wpływ ten nie jest zatem istotny.

Jeszcze mniejszy jest wpływ parametru i_p na maksymalne siły tnące w tym samym przedziale prędkości. Dla 60 km/h obraz tego wpływu jest nieco inny. Nie jest to jednak prędkość osiągalna w praktyce.



Rys. 4.5. Wpływ prędkości V i gęstości momentu bezwładności i_p na siłę tnącą na strefie zwarcia (dla $B_0=0,02 \text{ m}^{-1}$ i dla $i_p=0 \text{ Ts}^2$ – linia przerywana oraz dla $i_p=10 \text{ Ts}^2$ – linia ciągła, pozostałe dane jak na rys. 4.2)



Rys. 4.6. Krańce strefy zwarcia x_1 [m] oraz x_2 [m] w funkcji luzu B_0 ($V=40 \text{ km/h}$, pozostałe dane jak na rys. 4.2)

Na rys. 4.6 przedstawiono zależność współrzędnych krańców strefy zvarcia od parametru B_0 (luzy) przy stałej prędkości $V = 40$ km/h. Jak należało się spodziewać strefa zvarcia ulega wydłużeniu gdy B_0 maleje.

5. Identyczne zadanie jak w poprzednim punkcie pracy rozwiążemy dla modelu B. Równania ruchu (2.1) napisane w układzie związanym z poruszającym się pociągami i dla modelu B są

$$Q' + q = \rho g^2 y_1'', \quad (5.1.1)$$

$$M' + Q = 0. \quad (5.1.2)$$

Obciążenie ciągłe q obliczamy według relacji (patrz rys. 4.1)

$$q = \rho g - k y_1, \quad (5.2.1)$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_p + \rho_w & x \in (-\infty, 0), \\ \rho_w & x \in (0, +\infty). \end{cases} \quad (5.2.2)$$

W strefie rozvarcia 1 jest $Q \equiv 0$ i z równania (5.1.1) otrzymamy

$$y_1 = \frac{(\rho_p + \rho_w) g}{k}. \quad (5.3)$$

W całkach szczególnych równania jednorodnego przyjęto stałe dowolne równe zero, gdyż żadna z tych całek nie znika przy $x \rightarrow -\infty$. Z tych samych powodów rozwiązanie w strefie rozvarcia 2 jest

$$y_1 = \frac{\rho_w g}{k}. \quad (5.4)$$

Ugięcie w strefie zvarcia wyznaczmy z równania więzów

$$y_1' = -A_0 \Rightarrow y_1 = -A_0 x + C. \quad (5.5)$$

Z równania (5.1.1) można wyznaczyć siłę tnącą w strefie zvarcia otrzymując

$$Q = Q(0) - \rho g x + k \left(-A_0 \frac{x^2}{2} + Cx \right). \quad (5.6)$$

Do wyznaczenia czterech stałych C , $Q(0)$ i współrzędnych krańców strefy zvarcia x_1 i x_2 mamy warunki ciągłości ugięć w punktach x_1 oraz x_2 jak również warunki nieciągłości sił tnących od zderzenia wewnętrznego (3.25), które zapisane w układzie związanym z poruszającą się masą przyjmują postać

$$Q(x_0^+) - Q(x_0^-) = \rho_w g^2 (y_1'|_{x_0^+} - y_1'|_{x_0^-}), \quad (5.7)$$

gdzie $x_0 = x_1, x_2$. Równania do wyznaczenia stałych będą zatem

$$\frac{(\rho_p + \rho_w)}{k} g = -A_0 x_1 + C, \quad (5.8.1)$$

$$\frac{\rho_w g}{k} = -A_0 x_2 + C, \quad (5.8.2)$$

$$Q(0) - (\rho_p + \rho_w) g x_1 + k C x_1 - k A_0 \frac{x_1^2}{2} = -\rho_w g^2 A_0, \quad (5.8.3)$$

$$-Q(0) + \rho_w g x_2 - k C x_2 + k A_0 \frac{x_2^2}{2} = \rho_w g^2 A_0. \quad (5.8.4)$$

Rozwiązaniem układu (5.8) są

$$x_2 = -x_1 = \frac{\rho_p g}{2kA_0}, \quad (5.9.1)$$

$$C = \frac{(\rho_p + 2\rho_w)}{2k} g, \quad (5.9.2)$$

$$Q(0) = -kA_0 \left(\frac{x_2^2}{2} + \frac{\rho_w g^2}{2} \right). \quad (5.9.3)$$

Na to aby rozwiązania miały sens należy sprawdzić czy w strefie zwarcia jest $Q(x) < 0$. Podstawiając rozwiązania (5.9) do (5.6) otrzymamy

$$Q(x) = -\frac{(\rho_p g)^2}{8kA_0} - \rho_w g^2 A_0 + \frac{\rho_p g}{2} |x| - kA_0 \frac{x^2}{2}. \quad (5.9.4)$$

Jest sprawą oczywistą, że niezależnie od znaku x otrzymamy trójmian kwadratowy na $Q(x)$ z wyróżnikiem ujemnym, a to dowodzi, że $Q(x) < 0$ w strefie zwarcia.

Aby wyznaczyć momenty gnące rozwiążemy równanie (5.1.2) z warunkiem granicznym $M(x_2) = 0$, a to znaczy, że siły wewnętrzne na części niezaburzonej obecnością pociągu są zerem. Obliczenia prowadzą do wyniku

$$M(x) = -\frac{\rho_p g}{2} \left[\frac{\rho_w g^2}{k} + \frac{1}{24} \left(\frac{\rho_p g}{kA_0} \right)^2 \right] + \left[\frac{(\rho_p g)^2}{8kA_0} + \rho_w g^2 A_0 \right] x + \\ -\frac{\rho_p g}{4} x^2 \operatorname{sgn} x + \frac{1}{6} kA_0 x^3. \quad (5.10)$$

Moment gnący jest na całej strefie zwarcia i w strefie rozwarcia ujemny. Jego najmniejsza wartość w punkcie $x = x_1$ oraz na całej strefie rozwarcia (1) wynosi

$$M(x_1) = -\frac{\rho_p g}{2} \left[\frac{\rho_w g^2}{k} + \frac{1}{6} \left(\frac{\rho_p g}{kA_0} \right)^2 \right]. \quad (5.11)$$

Jak widać z porównania otrzymanych rezultatów z wynikami punktu 4 pracy wpływ luzów obrotowych i ścinających jest zupełnie odmienny. Przejdziemy do rozwiązania przykładu zagadnienia początkowego.

6. Rozważmy belkę nieograniczoną według modelu A, która w chwili $t=0$ jest nieruchoma i nieobciążona. W miejscu $x=0$ przykładamy siłę skupioną P stałą w czasie.

Wyznaczyć ruch belki. Postulujemy, że powierzchnia swobodna podłoża sprężystego nie porusza się, nie ma obciążeń ciągłych siłami q_0 i momentami m_0 . Ponieważ ugięcia $y_2(x, t)$ oraz momenty gnące $M(x, t)$ będą parzystymi funkcjami x dla każdego t , natomiast Q będzie funkcją nieparzystą, rozpatrzmy jedynie przedział $x \in (0, +\infty)$.

Zgodnie z powyższymi założeniami całka (3.3) dla ugięć winna w strefie rozwarcia zawierać jedynie składniki zmierzające do zera gdy $x \rightarrow +\infty$, zatem

$$y_2(x, t) = \frac{1}{\delta} e^{-\alpha x} \int_0^t C_2(\tau) \sin \delta(t-\tau) d\tau, \quad (6.1)$$

gdzie $C_2(\tau)$ – nieznana funkcja czasu. Podstawiając prawą stronę relacji (6.1) do równań (3.5) otrzymamy siły wewnętrzne w strefie rozwarcia. Siłę tnącą

$$Q = -i\alpha C_2(t) e^{-\alpha x} \quad (6.2.1)$$

oraz moment gnący

$$M \equiv 0. \quad (6.2.2)$$

Postulując również parzystość rozwiązań dla ugięć w strefie zwarcia mamy w relacji (3.6) $E_1 = 0$, a zatem ugięcia y_2 w postaci

$$y_2(x, t) = -B_0 \frac{x^2}{2} + E_2(t). \quad (6.3)$$

Z warunku zadanego skoku nieciągłości siły tnącej w punkcie $x=0$ dla każdego t oraz nieparzystości $Q(x, t)$ względem x otrzymamy $H_1 = P/2$ i siłę tnącą Q w strefie zwarcia

$$Q = k \left(E_2(t) x - B_0 \frac{x^3}{6} \right) + \rho x \ddot{E}_2 - \frac{P}{2}, \quad (6.4)$$

a podstawiając w relacji (3.7.1) $q_0 = m_0 = Y = E_1 = 0$ oraz $H_1 = P/2$, moment gnący M

$$M = H_2(t) + \frac{P}{2} x - k \left[E_2(t) \frac{x^2}{2} - B_0 \frac{x^4}{24} \right] - \rho \ddot{E}_2(t) \frac{x^2}{2} - l B_0 \frac{x^2}{2}. \quad (6.5)$$

Niech ξ oznacza współrzędną krańca strefy zwarcia. Warunki graniczne w $x = \xi(t)$ sprowadzają się do warunków ciągłości ugięć i kątów ugięcia, tzn.

$$-\frac{B_0}{2} \xi^2 + E_2(t) = \frac{1}{\delta} e^{-\alpha \xi} \int_0^t C_2(\tau) \sin \delta(t-\tau) d\tau, \quad (6.6.1)$$

$$-B_0 \xi = -\alpha e^{-\alpha \xi} \frac{1}{\delta} \int_0^t C_2(\tau) \sin \delta(t-\tau) d\tau, \quad (6.6.2)$$

ciągłości siły tnącej

$$-i\alpha C_2(t) e^{-\alpha \xi} = k \left(-B_0 \frac{\xi^3}{6} + E_2(t) \xi \right) + \rho \xi \ddot{E}_2(t) - \frac{P}{2} \quad (6.6.3)$$

i warunku nieciągłości momentu gnącego zgodnie z (3.10)

$$k \left(-B_0 \frac{\xi^4}{24} + E_2(t) \frac{\xi^2}{2} \right) + \rho \ddot{E}_2(t) \frac{\xi^2}{2} + l B_0 \frac{\xi^2}{2} - \frac{P}{2} \xi - H_2 = \\ = i \dot{\xi} \alpha e^{-\alpha \xi} \int_0^t C_2(\tau) \cos \delta(t-\tau) d\tau. \quad (6.6.4)$$

Rugując z równań (6.6.1) i (6.6.2) funkcję $C_2(t)$ otrzymamy relację algebraiczną między ugięciem E_2 belki w punkcie $x=0$ i połową długości strefy zvarcia ξ .

$$E_2 = B_0 \xi \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\xi}{2} \right). \quad (6.7.1)$$

Wygodnie jest również wprowadzić oznaczenie

$$Y \equiv \int_0^t C_2(\tau) \sin \delta(t-\tau) d\tau. \quad (6.8.1)$$

Wtedy równanie (6.6.3) zapisuje się w postaci

$$(\ddot{Y} + \delta^2 Y) \frac{\alpha}{\delta} = \frac{1}{i} e^{\alpha \xi} \left[\frac{P}{2} - \rho \xi \ddot{E}_2 - k \left(\frac{1}{3} B_0 \xi^3 + \frac{B_0 \xi^2}{\alpha} \right) \right]. \quad (6.9)$$

Z równania (6.6.2) mamy relację między Y i ξ

$$Y = \frac{\delta B_0}{\alpha} \xi e^{\alpha \xi} \quad (6.10)$$

i rugując w równaniu (6.9) E oraz Y relacjami (6.7) i (6.10) otrzymujemy równanie różniczkowe do wyznaczenia połowy długości strefy zvarcia ξ w funkcji czasu

$$\ddot{\xi} = \frac{\frac{P}{2iB_0} - 2\alpha \xi^2(1 + \alpha \xi) - \delta^2 \xi \left(1 + \frac{\alpha^2 \xi^2}{3} + \frac{\alpha \xi}{2} \right)}{(1 + \alpha \xi)^2}. \quad (6.11)$$

Po rozwiązaniu tego równania potrafimy wyznaczyć dla każdej chwili t przyspieszenie ruchu punktu $x=0$ na belce

$$\ddot{E}_2 = B_0 \left(\frac{\ddot{\xi}}{\alpha} + \xi \ddot{\xi} + \xi^2 \right) \quad (6.12)$$

oraz funkcję $H_2(t)$ w równaniu (6.6.4), wykorzystując określenie funkcji Y (6.8) i jej związek z funkcją ξ (6.10). Po prostych rachunkach otrzymamy

$$H_2(t) = k \left(-B_0 \frac{\xi^4}{24} + E_2(t) \frac{\xi^2}{2} \right) + \rho \ddot{E}_2 \frac{\xi^2}{2} + l B_0 \frac{\xi^2}{2} - i \dot{\xi}^2 B_0 (1 + \alpha \xi) - \frac{P}{2} \xi. \quad (6.13)$$

Przypadek drgań masy skupionej o ciężarze P na belce wymaga jedynie drobnych modyfikacji. Z równania ruchu masy skupionej można wyznaczyć reakcję R na belce otrzymując

$$R = P \left(1 - \frac{\ddot{E}_2(t)}{g} \right), \quad (6.14)$$

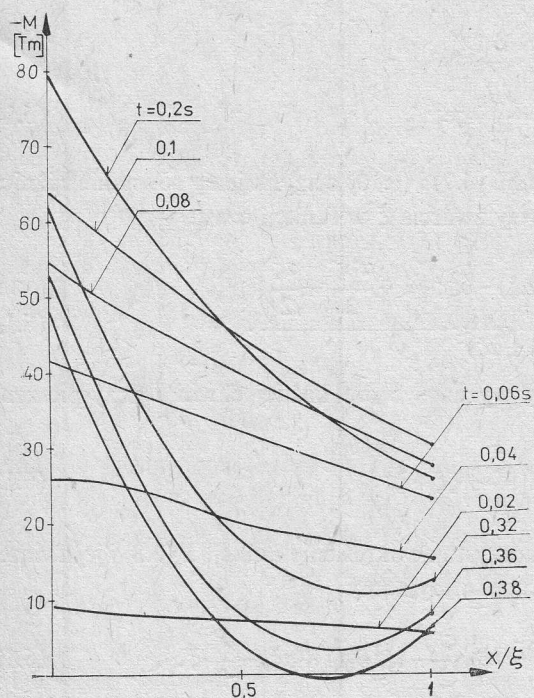
a równanie różniczkowe do wyznaczenia współrzędnej ξ przyjmuje postać

$$\ddot{\xi} = \frac{\frac{P}{2iB_0} - \frac{P}{2gi} \dot{\xi} \left(\frac{1}{\alpha} + \dot{\xi} \right) - 2\alpha\dot{\xi}^2(1 + \alpha\dot{\xi}) - \delta^2\dot{\xi} \left(1 + \frac{\alpha^2\dot{\xi}^2}{3} + \frac{\alpha\dot{\xi}}{2} \right)}{(1 + \alpha\dot{\xi})^2 + \frac{P\dot{\xi}}{2gi}} \quad (6.15)$$

Wyznaczając funkcję $H_2(t)$ według relacji (6.13) oraz siłę tnącą Q i moment gnący M według (6.3) i (6.4), należy zamiast stałej siły P podstawić zmienną w czasie reakcję R według relacji (6.14). Pozostałe związki nie ulegają zmianie.

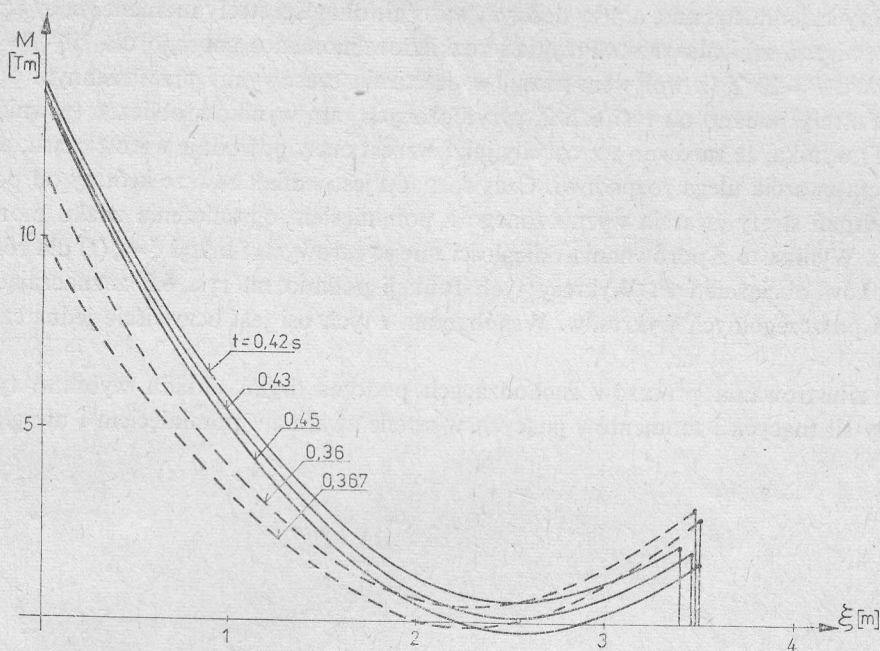
Obliczenia numeryczne wykonano na maszynie cyfrowej K-202. Całkując równania (6.11) i (6.15) najprostszą metodą Eulera, przyjęto zerowe warunki początkowe i zmieniano krok całkowania od 10^{-3} do 10^{-6} uzyskując pomijalne różnice w wartościach ξ i $\dot{\xi}$ dla obydwu równań.

Wybrane rezultaty obliczeń zestawiono na wykresach 6.1 ÷ 6.6 przyjmując parametry belki i podłoża te same co w punkcie 4 pracy. Do interesującego wyniku w opisie mechanizmu zjawiska należy zaliczyć to, że w miarę rozwoju strefy zwarcia wokół punktu przyłożenia siły lub punktu oddziaływania masy o zadanym ciężarze, pojawia się na wykresie

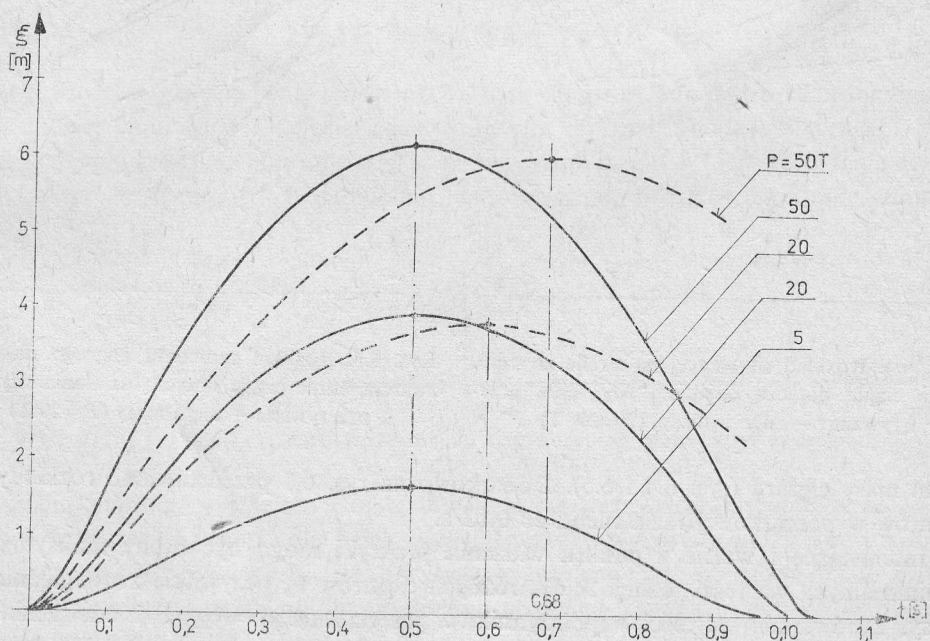


Rys. 6.1. Momenty gnące w strefie zwarcia $P=50T$ (bez masy)

bezwzględnej wartości momentu gnącego w strefie zwarcia minimum, malejące z czasem do zera. Ilustruje to dla szczególnego przypadku rys. 6.1. Moment osiąga wartość zero w wewnętrznym punkcie strefy zwarcia przed osiągnięciem przez tę strefę maksymalnej długości. Punkt wewnętrzny na strefie, w którym $M=0$ staje się punktem rozpadu strefy,



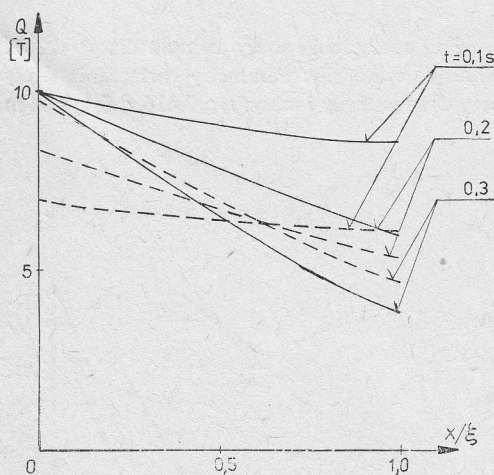
Rys. 6.2. Rozkłady momentów giących w otoczeniu czasu rozłączenia strefy zwarcia dla $P=20$ T. Linie ciągłe dotyczą działania siły i masy, linie przerywane tylko siły. Parametry rozłączenia strefy zwarcia przy działaniu siły: $t_1 \approx 0,366$ s, $\xi_1 \approx 2,47$ m, przy działaniu siły i masy: $t_2 \approx 0,436$ s, $\xi_2 \approx 2,44$ m



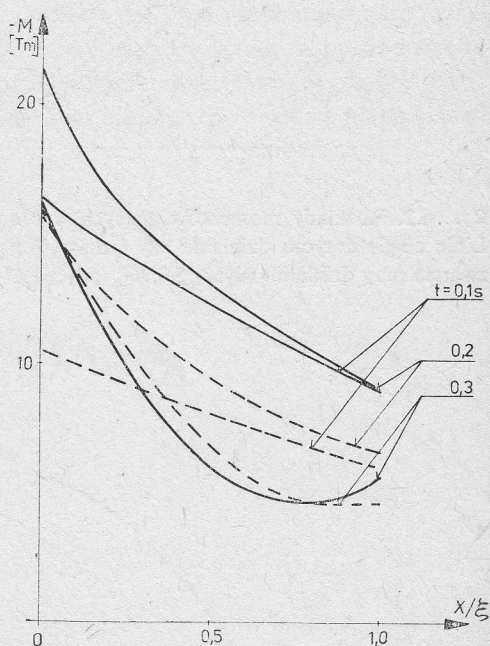
Rys. 6.3. Połowa długości strefy zwarcia w funkcji czasu. Linie ciągłe dotyczą działania siły, linie przerywane — siły i masy

gdyż więzy są jednostronne, a przy dalszym wzroście długości strefy moment gnący uzyskanych rozwiązań zmienia znak. Przykład rozkładów momentu gnącego dla siły $P=20$ T lub ciężaru $P=20$ T (z wpływem masy) w otoczeniu czasowym i przestrzennym punktu rozpadu strefy podano na rys. 6.2. Z przytoczonych tam wyników obliczeń (również dla $P=50$ T) wynika, że zarówno wzrost siły jak i wzrost masy powoduje wzrost czasu, w którym strefa zwania ulega rozpadowi. Czas rozpadu jest jednak zawsze krótszy od połowy okresu drgań strefy zwania wyznaczonego z pominięciem ograniczenia znaku momentu gnącego. Wynika to z porównania odległości miejsc zerowych funkcji $\xi=\xi(t)$ dla różnych przypadków obciążenia P . Wykresy tych funkcji podano na rys. 6.3 zaznaczając osie symetrii poszczególnych wykresów. Współrzędna t tych osi jest oczywiście jedną czwartą okresu.

Dla zilustrowania procesów zachodzących podczas drgań układu wybrano typowe rozkłady sił tnących i momentów gnących w strefie zwania z pominięciem i uwzględnie-



Rys. 6.4. Rozkład siły tnącej na strefie zwania. Linie ciągłe dotyczą działania siły, linie przerywane — siły i masy ($P=20$ T)

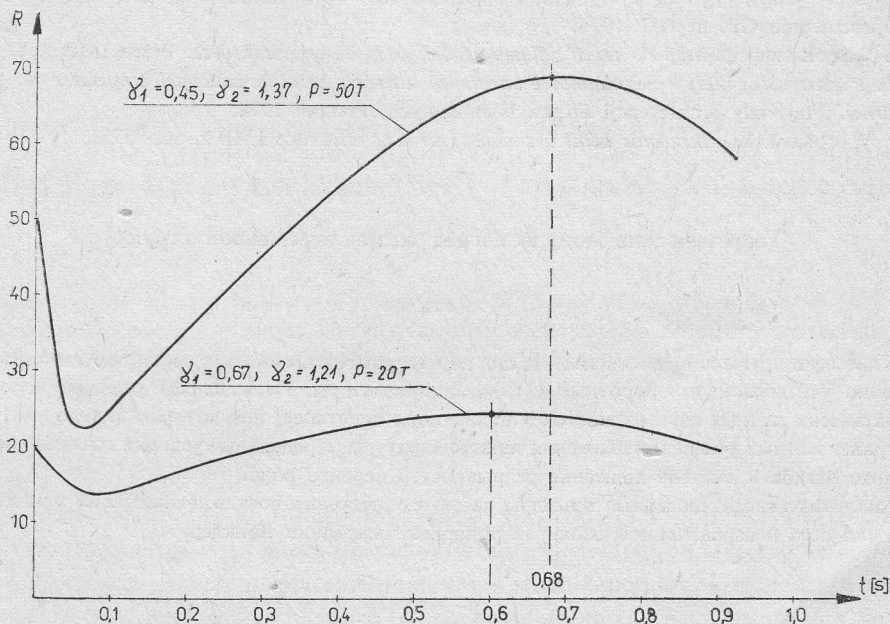


Rys. 6.5. Rozkład momentu gnącego na strefie zwania. Linie ciągłe dotyczą działania siły, linie przerywane — siły i masy ($P=20$ T)

niem masy ciężaru (rys. 6.4 i 6.5). Dodatkowo na rys. 6.1 przedstawiono rozkłady momentów w początkowej fazie ruchu co 0,02 s.

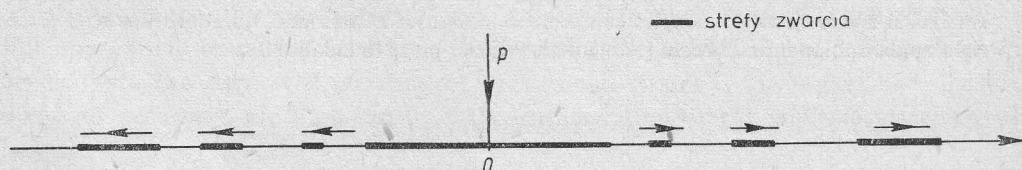
Interesujące i ważne z punktu widzenia praktyki mogą być oceny maksymalnych i minimalnych wartości reakcji R dla różnych ciężarów P , oczywiście z uwzględnieniem masy. Porównanie wartości współczynników przeciążenia $\gamma_2=R_{\max}/P$ i odciążenia $\gamma_1=R_{\min}/P$ podczas drgań układu dla $P=20$ T, i 50 T wskazuje, że γ_1 maleje a γ_2 rośnie ze wzrostem obciążenia. Wykresy $R=f(t)$ podano na rys. 6.6.

Powstaje pytanie jak opisać ruch układu dla czasu t większego od czasu rozpadu strefy zwania. Oczywiście stan układu w momencie rozpadu będzie warunkiem początkowym dla zadania (symetrycznego względem punktu $x=0$) z trzema strefami zwania, z których dwie będą oddalać się do nieskończoności, a środkowa drgając, wypromieniując



Rys. 6.6. Reakcja pomiędzy masą i belką

po pewnym czasie ponownie strefy tak, że ruch całego układu będzie dla otoczenia strefy środkowej zanikający i ugięcia będą zmierzały do rozwiązań statycznego. Schemat mechanizmu wypromieniowywania stref zwania podano na rys. 6.7. Uwagi te mają oczywiście charakter heurystyczny. Przedmiotem dalszych prac będzie rozwiązanie numeryczne



Rys. 6.7. Schemat mechanizmu wypromieniowywania stref zwania

i analityczne tego problemu, a także innych zadań ważnych praktycznie, w szczególności zadań startowych, zadań dla belek ograniczonych z wpływem oddziaływań hydrodynamicznych i siły podłużnej. Będzie to wymagało zarówno dalszych badań nad uogólnieniem modelu, ogólnymi metodami analitycznymi uzyskania rozwiązań jak również prac eksperymentalnych.

Literatura

- [1] Z. Bursztynowski, J. Marszałek, *Wpływ luzów międzyogniowych na skręcanie mostu pływającego typu „Wstęga”*. Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej, V (285), 1976.
- [2] W. Kurski, R. Piskorski, J. Więckowski, K. Wituszyński, *Dynamika i wytrzymałość układu ciągłego składającego się z segmentów barek BP-150*. Politechnika Gdańska, Instytut Okrętowy. Opracowanie GP, nr 607, 1976.
- [3] J. Więckowski, *Wstęp do teorii zginania belek o zmiennej strukturze*. Prace IMP z. 65, 1974.
- [4] R. Piskorski, *Wpływ bezwładności obrotowej na ruch belki o zmiennej strukturze na fali regularnej*. Materiały Konferencji Drgań Nieliniowych, Poznań 1974.
- [5] J. Więckowski, *Skręcanie belki o zmiennej strukturze*. Prace IMP z. 66, 1975.

Теоретические модели изгиба балок переменной структуры

Резюме

Классифицируются применяемые до сих пор теоретические модели вводя новую модель, одновременно учитывающую обратные и сдвигающие зазоры. Перечислены условия, исполняемые в практически важных случаях мостов и плавающих пристаней, при которых можно найти общие интегралы частных уравнений движения через квадратуры. Предельные условия вытекают из теории плоского изгиба и законов движения разрывностей первого рода.

Аналитические и численные примеры касаются движения поезда и колебаний под действием силы или веса неограниченной балки на полярном основании Винклера.

Theoretical Models of Variable Structure Beam Bending

Summary

Theoretical models used up to now have been classified and a new model allowing simultaneously for rotary and shear clearances has been proposed. Conditions under which a general solution of partial equations of motion can be found by the method of quadratures have been specified. These conditions are satisfied in the practically important case of bridges and floating terminals. The boundary conditions result from the flat bending theory and the laws of motion of a first kind discontinuity.

Analytical and numerical examples concern the motion of a train and vibrations due to a force or weight applied to an infinite beam resting on a Winkler polar foundation.