

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPŁYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

75

WARSZAWA—POZNAN 1978

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPIYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

KOMITET REDAKCYJNY — EXECUTIVE EDITORS

KAZIMIERZ STELLER — REDAKTOR — EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA — EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright

by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1978

Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 370+90 egz.	Oddano do składania 13 VII 1977 r.
Ark. wyd. 14. Ark. druk. 11,25	Podpisano do druku 22 maja 1978 r.
Papier druk. mat. kl. V, 70 g	Druk ukończono w maju 1978 r.
Nr zam. 761/58	Cena zł 45,— J-7/292

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. A. Mickiewicza w Poznaniu

JAROSŁAW MIKIELEWICZ

Gdańsk

Uproszczona analiza wpływu sił Magnusa na separację małych kropeł z przepływu dwufazowego*

Rozpatrzono tor kropelki pod wpływem siły Magnusa w warstwie przyściennej. Określono warunki, w których kropelka wyseparuje się z przepływu pary mokrej.

Spis oznaczeń

A – przekrój kropli,	V – obwód kanału,
C – współczynnik oporu,	y – współrzędna,
D – średnica kropli,	x_0 – wymiar na rys. 1,
F_M – siła Magnusa,	α – kąt pomiędzy kierunkiem działania siły
K – parametr (2.17)	Magnusa a poziomem,
L – długość, na której następuje wyseparowa-	δ – grubość warstwy przyściennej,
nie się kropli,	μ – lepkość dynamiczna,
m – masa kropli,	ν – lepkość kinematyczna,
$\dot{m}$ – natężenie przepływu pary mokrej,	ω – prędkość kątowna,
t – czas	ρ – gęstość,
u – prędkość,	Re – liczba Reynoldsa,

Indeksy dotyczą

' – cieczy,	+ – wielkości bezwymiarowej,
" – pary,	∞ – granicy warstwy przyściennej,
h – kierunku poziomego,	δ – warstwy przyściennej,
v – kierunku pionowego,	s – separacji.
i – kolejnej wartości,	

1. Wstęp

Aby przeprowadzić jakościową i ilościową analizę wyseparowywania się kropeł z przepływu dwufazowego, został rozpatrzony ruch małych kropeł w polu sił Magnusa. Separacja kropeł pod wpływem sił Magnusa występuje w wielu zagadnieniach technicznych, takich jak np. przepływ pary mokrej w kanałach turbin parowych, w przepływach dwufazowych

* Praca badawcza była finansowana z Funduszu im. Marii Skłodowskiej-Curie, utworzonego z wkładów wniesionych przez rząd PRL i USA.

kości w warstwie) zawirowaniu, które z kolei wywołuje różnicę ciśnień na ich powierzchni i powstawanie siły działającej prostopadle do wektora rotacji i wektora prędkości względnej. Siła ta znana jest w literaturze jako siła Magnusa [4].

Przeanalizujemy ruch pojedynczej kropki. Ogólne równania dwuwymiarowego ruchu kropki w obecności sił Magnusa są następujące:

$$\begin{aligned} m \frac{du_h}{dt} &= +F \cos \alpha, \\ m \frac{du_v}{dt} &= -F \sin \alpha + F_M, \end{aligned} \quad (2.1)$$

gdzie m jest masą kropelki, u_h i u_v – poziomą i pionową składową prędkości kropki, F – siłą oporu ośrodka, α – kątem pomiędzy siłą F_M , a u_h – składową poziomą prędkości.

Następujące relacje są oczywiste:

$$\cos \alpha = u_h/u, \quad \sin \alpha = u_v/u, \quad u^2 = u_h^2 + u_v^2.$$

Siła oporu może być wyrażona jako:

$$F = CA \frac{\rho''(u' - u'' \cos \alpha)^2}{2}, \quad (2.2)$$

gdzie u'' jest prędkością pary o gęstości ρ'' , A – przekrojem kropki, C – współczynnikiem oporu zależnym od liczby Re , zdefiniowanej jako

$$Re = \frac{D\rho''}{\mu''} (u' - u'' \cos \alpha), \quad (2.3)$$

w której D jest średnicą kropki, a μ'' – lepkością pary. Zależność C od Re po raz pierwszy zaproponowana przez Lorda Rayleigha została określona dla kul, dysków, cylindrów i podobnych brył przez licznych eksperymentatorów. W przypadku kuli (sfery) dość dobre przybliżenie wartości eksperymentalnych [5] daje następująca zależność algebraiczna:

$$C = (0,63 + 4,8/\sqrt{Re})^2. \quad (2.4)$$

Z praktycznego punktu widzenia wygodniej jest operować trzema zależnościami, obejmującymi trzy podstawowe charaktery przepływu [5]:

a) w przypadku ruchu laminarnego ($0,001 < Re < 2,0$) prawem Stokesa

$$C = 24/Re, \quad (2.5)$$

b) w przypadku ruchu przejściowego

$$C = 0,4 + 40/Re \quad (2.6)$$

lub

$$C = 18,5 Re^{-0,6}, \quad (2.7)$$

c) w przypadku ruchu turbulentnego prawem Newtona

$$C = 0,44. \quad (2.8)$$

W przypadku, gdy mamy do czynienia z kroplą sferyczną obowiązują zależności

$$A = \pi D^2/4 \text{ i } m = \rho' \pi D^3/6. \quad (2.9)$$

Aby określić siłę Magnusa F_M przyjmujemy, że opływ wokół kuli odbywa się bez oderwań. Wówczas ciśnienie Magnusa, odniesione do przekroju $A = \pi D^2/4$, za Lambem [4], będzie przedstawiało się następująco:

$$P = \Gamma \rho' (u'' - u_h)/D, \quad (2.10)$$

gdzie cyrkulacja $\Gamma = \pi \omega D^2/2$. Wówczas siła

$$F_M = \frac{\pi^2}{8} \rho' (u'' - u_h) D^3 \omega.$$

Prędkość kątową ω , z którą obraca się w warstwie przyściennej kropelka, można oszacować następująco (pomijając moment bezwładności kropki):

$$\omega = \frac{\frac{\Delta u''}{D}}{\frac{D}{2}} \cong \frac{\frac{d(u'' - u_h)}{dy} D}{\frac{D}{2}} = 2 \frac{d(u'' - u_h)}{dy}, \quad (2.11)$$

gdzie y — współrzędna prostopadła do ścianki kanału.

Po podstawieniu powyższych zależności otrzymuje się siłę F_M :

$$F_M = \frac{\pi^2}{4} \rho' D^3 (u'' - u_h) \frac{d(u'' - u_h)}{dy}. \quad (2.12)$$

Podstawiając do (2.1) zależności (2.9) i (2.12) otrzymuje się dwuwymiarowe równania ruchu kropki sferycznej:

$$\begin{aligned} \frac{du_h}{dt} &= \frac{3}{4} \frac{\rho''}{\rho'} \frac{C}{D} (u' - u'' \cos \alpha)^2 \frac{u'_h}{u'}, \\ \frac{du_v}{dt} &= -\frac{3}{4} \frac{\rho''}{\rho'} \frac{C}{D} (u' - u'' \cos \alpha)^2 \frac{u_v}{u'} + \frac{3}{2} \pi (u'' - u_h) \frac{d(u'' - u_h)}{dy}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Zastosujmy powyższe równania do ruchu małych kropli. Z uwagi na mały wymiar kropeł można przyjąć, że opływ kropeł odbywa się laminarnie. Stąd w (2.13) przyjęto, że $C = 24/Re$. Wówczas otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{du_h}{dt} &= \frac{18\mu''}{\rho' D^2} \left(1 - \frac{u''}{u'} \cos \alpha\right) u'_h, \\ \frac{du'_v}{dt} &= \frac{18\mu''}{\rho' D^2} \left(1 - \frac{u''}{u'} \cos \alpha\right) u'_v + \frac{3}{2} \pi (u'' - u_h) \frac{d(u'' - u_h)}{dy}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Przyjmując, że tor kropeł będzie stosunkowo płaski, tzn. $\alpha \cong 0$, $\cos \alpha \cong 1$, $u_h \cong u'$, uzyskuje się uproszczony układ równań opisujący ruch małych kropeł:

$$\begin{aligned}\frac{du'_h}{dt} &= -\frac{18\mu''}{\rho'D^2}(u'' - u'_h), \\ \frac{du'_v}{dt} &= -\frac{18\mu''}{\rho'D^2}u'_v + \frac{3}{2}\pi(u'' - u_h)\frac{d(u'' - u_h)}{dy}.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Wprowadźmy do powyższych równań zmienne bezwymiarowe:

$$y^+ = \frac{y}{\delta}, \quad u_h^+ = \frac{u'_h}{u''_\infty}, \quad u_v^+ = \frac{u'_v}{u''_\infty}, \quad u''^+ = \frac{u''}{u''_\infty}$$

oraz relację

$$dy = u_v dt. \quad (2.16)$$

Otrzymuje się wówczas równania (2.15) w postaci:

$$\begin{aligned}u_v^+ \frac{du_h^+}{dy^+} &= -18K(u^{+''} - u_h^+), \\ u_v^+ \frac{du_v^+}{dy^+} &= -18Ku_v^+ + \frac{3}{2}\pi(u^{+''} - u_h^+)\left(\frac{du^{+''}}{dy^+} - \frac{du_h^+}{dy^+}\right),\end{aligned}\quad (2.17)$$

$$\text{gdzie } K = \frac{\mu''\delta}{\rho'D^2u''_\infty}.$$

Przyjęto, że grubość warstwy przyściennej może być w przybliżeniu określona tak jak grubość warstwy przyściennej w przepływie jednofazowym, np. z zależności Prandtla $u^{+''} = y^{+1/7}$, a warunki brzegowe jako $y=0$, $u_h^+ = 1$, $u_v^+ = 0$. Z takimi założeniami układ równań różniczkowych nieliniowych (2.17) jest możliwy do rozwiązania. Rozwiązania układu (2.17) poszukiwano metodą numeryczną.

Podstawiając równanie pierwsze z układu równań (2.17) do równania drugiego, uzyskuje się nieco prostszy układ równań:

$$\begin{aligned}u_v^+ \frac{du_h^+}{dy^+} &= -18K(u^{+''} - u_h^+), \\ \frac{du_v^+}{dy^+} &= -18K - \frac{\pi}{12K} \frac{du_h^+}{dy^+} \left(\frac{du^{+''}}{dy^+} - \frac{du_h^+}{dy^+} \right),\end{aligned}\quad (2.18)$$

z którego następnie, przyjmując że

$$p_i = \left(\frac{du_h^+}{dy^+} \right)_i = \frac{u_i^+ - u_{i-1}^+}{h}, \quad \left(\frac{du_v^+}{dy^+} \right)_i = \frac{u_{vi}^+ - u_{vi-1}^+}{h}, \quad (2.19)$$

uzyskuje się układ równań rekurencyjnych:

$$\begin{aligned}u_{vi}^+ - u_{vi-1}^+ &= -18Kh - \frac{\pi}{12K} p_i \left(\frac{du^{+''}}{dy^+} - p_i \right) h, \\ u_{vi}^+ p_i &= -18K(u_i^{+''} - p_i h - u_{hi-1}^+).\end{aligned}\quad (2.20)$$

Układ ten pozwala na wyznaczenie kolejnych wartości

$$p_i = \frac{\left(p_i - \frac{u_i^+ - u_{hi-1}^+}{h}\right) 18K}{\frac{u_{vi-1}^+}{h} + 18K + \frac{\pi}{12K} p_i \left(\frac{du^{+''}}{dy^+} - p_i\right)}. \quad (2.21)$$

Równanie (2.21) może być rozwiązane np. metodą kolejnych przybliżeń. Znając p_i można obliczyć kolejne wartości składowych prędkości u_v i u_h , z zależności wynikających z (2.19) i (2.20):

$$u_{vi}^+ = u_{vi-1}^+ + 18Kh \left[1 + \frac{\pi}{12 \cdot 18K^2} p_i \left(\frac{du^{+''}}{dy} - p_i \right) \right], \quad (2.22)$$

$$u_{hi}^+ = u_{hi-1}^+ + p_i h. \quad (2.23)$$

Podaną metodę zastosowano do obliczenia składowych prędkości u_v i u_h , dla wartości parametru $K=0,01$, $K=0,001$ i $K=0,0001$, przy kroku $h=0,1$. Wyniki obliczeń przedstawia tabela 1.

Tabela 1

Składowe prędkości kropli w obszarze warstwy przyściennej

y^+		1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
K	U_h^+	1	1	0,9998	0,9996	0,9995	0,9995	0,9994	0,9993	0,9992	0,9991
	U_v^+	0	0,0271	0,0491	0,0649	0,1226	0,1838	0,2487	0,3377	0,460	0,6623
10^{-3}	U_h^+	1	0,999	0,999	0,998	0,997	0,997	0,996	0,995	0,994	0,994
	U_v^+	0	0,020	0,0555	0,0979	0,1469	0,2012	0,2643	0,3479	0,4672	0,6691
10^{-2}	U_h^+	1	0,995	0,990	0,980	0,970	0,960	0,950	0,940	0,930	0,920
	U_v^+	0	0,01	0,040	0,070	0,110	0,150	0,200	0,230	0,340	0,520

Następnie można obliczyć zasięg s kropelki:

$$s^+ = \frac{s}{\delta} = \int_1^0 \frac{u_h^+(y^+)}{u_v^+(y^+)} dy^+. \quad (2.24)$$

W wyniku całkowania numerycznego uzyskano następujące wartości zasięgu:

$$\text{dla } K=0,01 \quad \frac{s}{\delta} = 61,5,$$

$$\text{dla } K=0,001 \quad \frac{s}{\delta} = 36,2,$$

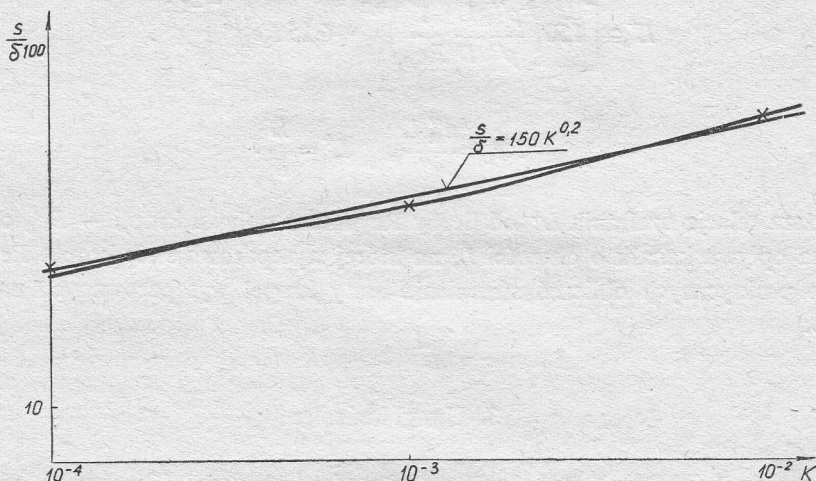
$$\text{dla } K=0,0001 \quad \frac{s}{\delta} = 24,5.$$

Na podstawie powyższych wartości można znaleźć przybliżony wzór interpolacyjny na zasięg s w postaci:

$$\frac{s}{\delta} = 150 K^{0,2}. \quad (2.25)$$

Rozbieżności między obliczonymi poprzednio wartościami a wartościami wynikającymi z (2.25) ilustruje rys. 2.

Z kolei można znaleźć relację pomiędzy długością, na której wyseparowuje się kropelka o średnicy D , liczoną od początku rozbiegu, a odległością kropelki od ścianki kanału na



Rys. 2. Zależność zasięgu kropli δ od liczby $K = \frac{\rho'' L}{\rho' D} \frac{1}{Re_D} \frac{\delta}{L}$, $\times$ – wartości obliczone na podstawie (2.24)

początku rozbiegu. Przyjmując, że grubość warstwy przyściennej zależy od odległości od początku rozbiegu, według relacji [6],

$$\delta = 0,211 \left(\frac{v}{u''_{\infty}} \right)^{1/7} x^{6/7},$$

a stąd

$$x = \left(\frac{\delta}{0,211} \right)^{7/6} \left(\frac{u''_{\infty}}{v} \right)^{1/6}, \quad (2.26)$$

można znaleźć długość, na której wyseparowuje się kropelka o średnicy D (rys. 1):

$$L = s + x_0 = 150 K^{0,2} \delta + \left(\frac{\delta}{0,211} \right)^{7/6} \left(\frac{u''_{\infty}}{v} \right)^{1/6} \quad (2.27)$$

lub w postaci bezwymiarowej:

$$L^+ = \frac{L}{\delta} = 150 K^{0,2} + \left(\frac{1}{0,211} \right)^{7/6} Re_{\delta}^{1/6}, \quad (2.28)$$

gdzie $Re_{\delta} = \frac{u''_{\infty} \delta}{v''}$.

Parametr K można przekształcić do postaci

$$K = \frac{\rho''}{\rho'} \frac{L}{D} \frac{1}{Re_D} \frac{\delta}{L}, \quad (2.29)$$

gdzie $Re_D = \frac{Du''_{\infty}}{\nu''}$.

Podstawiając do (2.28) wyrażenie na K , po prostych przekształceniach algebraicznych, otrzymuje się zależność:

$$L^+ \cong \left[150 \left(\frac{\rho''}{\rho'} \frac{L}{D} \frac{1}{Re_D} \right)^{0,2} + 6,15 Re_L^{1/6} \right]^{-1,2},$$

gdzie

$$Re_L = \frac{u''_{\infty} L}{\nu''}, \quad L^+ = \frac{L}{\delta}.$$

Powyższa relacja uzależnia L^+ od liczby Reynoldsa opływu kropli — Re_D oraz liczby Reynoldsa opływu kanału o długości L , na której wyseparowuje się kropła Re_L , i może służyć do praktycznych obliczeń strumienia masy kropeł wyseparowanych na długości kanału L .

3. Uwagi końcowe

Dla danej średnicy kropli D w określonym kanale można znaleźć maksymalną odległość kropli od ściany, która wyseparowuje się na długości L kanału. Dalej leżące krople nie trafiają już na odległość L kanału. Bliżej leżące krople będą się na pewno wyseparowywały i dawały strumień masy na ścianie. Znając rozkład kropelek na wlocie do kanału oraz ich wymiary, można znaleźć ilość masy cieczy wyseparowanej na ścianie. Zwykle rozkład ten oraz wielkość kropeł nie są dokładnie znane. Stąd też można do obliczeń szacunkowych przyjąć równomierny rozkład kropelek na wlocie oraz stałą ich średnicę jako średnią statystyczną z pomiarów. Wówczas ilość wyseparowanej masy można obliczyć w przybliżeniu jako:

$$\dot{m}_s \cong \dot{m} (1-x) \frac{U\delta}{A},$$

gdzie $\dot{m}$ — natężenie przepływu, x — stopień suchości pary, U — obwód kanału, A — przekrój kanału.

W przypadku kanału ogrzewanego, kropelki wędrując przez warstwę przyścienną odparowują, pomniejszając tym samym swoją średnicę. Stąd też, jak się wydaje, w tym przypadku do analizy separacji kropelek lepiej przyjąć średnią wartość średnicy kropli, a nie jej wartość początkową. Jeżeli powierzchnia, na której separują się kropelki jest wystarczająco gorąca, kropelki osiadając na niej odparowują, nie tworząc filmu ciekowego. Możliwy jest również przypadek, że kropelki nie uderzą o powierzchnię, gdyż wcześniej podczas swej drogi przez kanał odparują.

Literatura

- [1] P. G. Saffman, *The lift of a small sphere in a slow shear flow*. J. Fluid Mech., Vol. 22, 385, 1965.
- [2] S. I. Rubinow, J. B. Keller, *The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid*. J. Fluid Mech., Vol. 11, 447, 1961.
- [3] S. L. Soo, C. L. Tien, *Effect of the Wall on Two-phase Turbulent Motion*. J. of Applied Mech. No. 27, 1960.
- [4] H. Lamb, *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1945.
- [5] G. C. K. Yeh, N. Zuber, *On the Problem of Liquid Entrainment*. Argon National Lab., 1974.
- [6] J. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*. Pergamon Press, New York 1955.

**Упрощенный анализ влияния сил Магнуса на сепарацию
мелких капель из двухфазного течения**

Резюме

В работе рассматривается траектория мелких капель передвигающихся под влиянием силы Магнуса. Предположены ламинарное обтекание капель и относительно плоская их траектория в пограничном слое. Угловая скорость вращения капельки определена с пренебрежением момента инерции капельки. Полученная нелинейная система дифференциальных уравнений решена численным методом. Определены составляемые скорости капли, затем дальность полета капельки в горизонтальном направлении и условия сепарации капелек из течения по конечной длине канала.

**A Simplified Analysis of the Effect of Magnus Forces on the Separation of Small Droplets
from a Two-Phase Flow**

Summary

The trajectory of small droplets moving due to the Magnus force has been analyzed. A laminar flow round the droplets and a relative flatness of the trajectory within the boundary layer have been assumed. The angular velocity of droplet rotation has been determined with the droplet moment of inertia neglected. The system of nonlinear differential equations obtained has been solved numerically, giving the droplet velocity components. Afterwards the range of droplets in the horizontal direction has been calculated and conditions for the separation of droplets from the flow along a finite length of channel have been defined.