

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPIYWOVYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPIYWOVYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

74

WARSZAWA—POZNAN 1977
PANSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

KOMITET REDAKCYJNY—EXECUTIVE EDITORS
KAZIMIERZ STELLER — REDAKTOR — EDITOR
WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ · ZENON ZAKRZEWSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA — EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN,
80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, ul. Gen. Józefa Fiszer 14, tel. 41-12-71

Copyright

by Państwowe Wydawnictwo Naukowe

Warszawa 1977

Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 350+90 egz.	Oddano do składania 1 II 1977 r.
Ark. wyd. 13,5. Ark. druk. 10,25.	Podpisano do druku 2 VIII 1977 r.
Pap. druk. sat. kl. V, 70 g.	Druk ukończono w sierpniu 1977 r.
Nr zam. 72/239, 70×100 cm. U-1/466.	Cena zł 42,—

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. A. Mickiewicza w Poznaniu

SŁAWOMIR JANECKI

Gdańsk

Skręcanie wirujących, wstępnie zwiniętych prętów z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznych*

W pracy, w oparciu o jednowymiarowe modele skręcania, przedstawiono równania ruchu wstępnie skręconych prętów znajdujących się w ruchu obrotowym. Wykorzystując je zbadano wpływ parametrów konstrukcyjnych oraz nieliniowości geometrycznych na rozkłady charakterystyk skręcania. Otrzymane wyniki mogą być pomocne do właściwego doboru modelu zastępującego w obliczeniach kinetostatycznych rzeczywiste łopatki wirnikowe maszyn przepływowych.

Spis oznaczeń

A — pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta,	φ, Φ — funkcje skręcania Saint-Venanta i Prandtla,
E, G — moduł sprężystości podłużnej i poprzecznej,	Ω — wektor prędkości kątowej ruchu obrotowego,
Q, M, M_φ, B — wypadkowe sił wewnętrznych w przekroju pręta,	ρ — gęstość materiału pręta,
$\tilde{q}, \tilde{m}, \tilde{b}$ — wypadkowe obciążeń masowych,	ϑ_0 — kąt pierwotnego skręcenia pręta,
L, R — długość i promień zamocowania pręta,	ϑ — kąt skręcenia sprężystego pręta,
u — wektor przemieszczenia,	θ — miara deplanacji w przekroju poprzecznym,
x_i, x_i — współrzędne miejsca cząstki pręta w stanie nieodkształconym i odkształconym,	ζ — przemieszczenie cząstki na osi pręta,
	$\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ — składowe tensora odkształcenia i naprężenia.

Uwaga: stosuje się konwencję sumacyjną.

Wstęp

Łopatki wirnikowe ostatnich stopni turbin parowych posiadają wstępnie skręconą część roboczą. Skręcenie to zmienia się podczas pracy pod wpływem obciążeń zewnętrznych. Aby móc poprawnie zaprojektować układ łopatkowy pod względem cieplno-przepływowym, niezbędna jest znajomość aktualnych rozkładów kątów skręcenia sprężystego.

* Praca wykonana w ramach problemu resortowego PAN-19, grupa tematyczna 2.

Dokładność ich wyznaczenia w porównaniu z rzeczywistością zależy w znacznej mierze od przyjętego modelu skręcania.

Celem niniejszej pracy jest zbadanie rozkładów wielkości charakteryzujących skręcanie w zależności od parametrów konstrukcyjnych oraz nieliniowości geometrycznych przy założonych jednowymiarowych modelach skręcania. Uzyskane rozeznanie może być pomocne do właściwego doboru modelu zastępującego w obliczeniach kinetostatycznych rzeczywistość łopatkę.

Założenia i podstawowe zależności

Równania skręcania wirujących, wstępnie skręconych prętów zostaną podane przy następujących założeniach:

- Pręt jest prosty o stałych, bisymetrycznych przekrojach poprzecznych.
- Ruch obrotowy pręta, o nieziennej w czasie prędkości kątowej, odbywa się wokół osi prostopadłej do osi pręta.
- Pręt wykonany jest z materiału jednorodnego i izotropowego, dla którego ważne jest prawo Hooke'a.

Przyjęto nadto następujące hipotezy kinematyczne:

1. Przekroje poprzeczne pręta nie deformują się w swej płaszczyźnie.
2. Skręcanie traktuje się jako sztywny obrót poszczególnych przekrojów poprzecznych wokół osi pręta nie zmieniającej się w trakcie deformacji.
3. Deplanacja przekrojów poprzecznych w wyniku skręcania określona jest zależnością

$$u_3 = \varphi(x_1, x_2) \theta(x_3), \quad (1)$$

gdzie φ jest funkcją Saint-Venanta charakteryzującą rozkład deplanacji w przekroju, a funkcja θ określa ich miarę.

4. Rozkład przemieszczeń cząstek spowodowanych rozciąganiem jest równomierny w przekroju.

Wykorzystano również następującą hipotezę statyczną:

5. Naprężenia styczne działające w płaszczyźnie przekroju poprzecznego oraz naprężenia normalne działające z tego przekroju uważa się za naprężenia istotne, a pozostałe za drugorzędne. Te ostatnie pominiemy przy ustalaniu związków pomiędzy składowymi tensora odkształcenia i naprężenia.

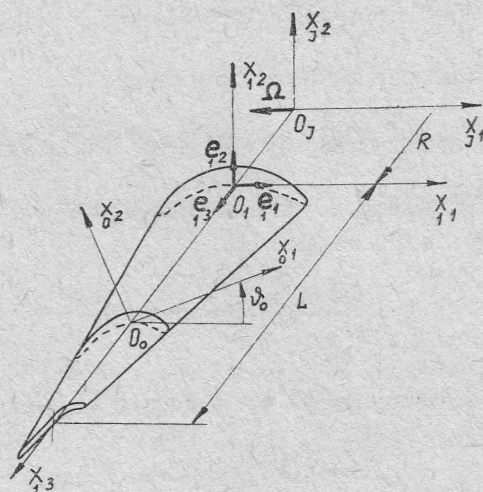
W opisie matematycznym przyjęty model umieszczono w nieinercyjnym, kartezjańskim układzie współrzędnych znajdującym się w ruchu obrotowym względem nieruchomego inercyjnego układu odniesienia (O_I, x_k) . Posłużono się dwoma rodzajami układów nieinercyjnych: integralnym (O_1, X_k) oraz lokalnym (O_0, X_k) , w którym osie X_1, X_2 są głównymi osiami bezwładności każdego przekroju poprzecznego pręta w stanie niezdeformowanym (rys. 1).

Wzory transformacyjne współrzędnych tych układów są

$$\begin{matrix} \mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x}, & \mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}, \\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{matrix} \quad (2)$$

gdzie

$$\mathbf{x} \equiv \text{col}(x_k), \quad R \equiv \begin{bmatrix} \cos \vartheta_0 & -\sin \vartheta_0 & 0 \\ \sin \vartheta_0 & \cos \vartheta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$



Rys. 1

Wykorzystując przyjęte hipotezy kinematyczne można określić składowe przemieszczenia cząstki znajdującej się przed odkształceniem w miejscu $P(x_1, x_2)$ przekroju $x_3 = \text{const}$

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv x_1 - x_1 = -x_1 (1 - \cos \vartheta) - x_2 \sin \vartheta, \\ u_2 &\equiv x_2 - x_2 = -x_2 (1 - \cos \vartheta) + x_1 \sin \vartheta, \\ u_3 &\equiv x_3 - x_3 = \zeta(x_3) + \varphi(x_1, x_2) \theta(x_3) \end{aligned} \quad (4)$$

w zależności od kąta obrotu ϑ i przemieszczenia ζ .

Mając składowe przemieszczenia, można następnie określić składowe tensora odkształcenia Greena-Staint-Venanta odniesione do stanu naturalnego. Wykorzystując wzory transformacyjne (2) będziemy przyjmować

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = 0, \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \theta - \varepsilon_{\alpha\beta} x_\beta \vartheta' \right), \quad \varepsilon_{33} = \zeta' + \vartheta_0' \rho^2 \theta + \varphi \theta' + \frac{1}{2} r^2 \vartheta'^2 \end{aligned} \quad (5)$$

zgodnie z hipotezą o nieodkształcalności konturu przekroju poprzecznego, gdzie

$$\rho^2 = \varepsilon_{\alpha\beta} x_\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}, \quad r^2 = x_\alpha x_\alpha \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad (6)$$

$\epsilon_{\alpha\beta}$ jest symbolem permutacyjnym. „Primem” oznaczono pochodną względem zmiennej x_3 .

Na skutek odkształcania się pręta pod wpływem obciążeń pojawiają się wewnętrzne siły sprężystości. Uwzględniając założenie dotyczące materiału, istotne składowe tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa drugiego rodzaju będą

$$\sigma_{\alpha 3} = 2G \epsilon_{\alpha 3}, \quad \sigma_{33} = E \epsilon_{33} \quad (\alpha = 1, 2). \quad (7)$$

Pozostałe składowe wyznaczmy z równań równowagi.

Równania ruchu, siły wewnętrzne i obciążenia

Ogólne równania ruchu ciał smukłych opisanych dowolnymi modelami jednowymiarowymi ośrodka ciągłego, można napisać [1]

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_3} - \mathbf{Q}^* + \mathbf{h} + \tilde{\mathbf{h}} = 0. \quad (8)$$

Wektory uogólnionych sił wewnętrznych występujących w przekrojach poprzecznych są określone następująco:

$$\mathbf{H} = \int_A (\mathbf{F} \tilde{\mathbf{T}}_1 \mathbf{e}_3) U dA, \quad (9)$$

$$\mathbf{Q}^* = \int_A \text{tr}_{(1,3)} (\tilde{\mathbf{T}}_1 \mathbf{F}^T \text{Grad } \mathbf{U}) dA,$$

natomiast wektory obciążeń powierzchniowych i masowych są zdefiniowane

$$\mathbf{h} = \int_A \text{div}_1 (\tilde{\mathbf{T}}_1 \mathbf{F}^T \mathbf{U}) dA, \quad (10)$$

$$\tilde{\mathbf{h}} = \int_A \rho_1 (\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{u}}) U dA.$$

W powyższych zależnościach $\mathbf{F}$, $\tilde{\mathbf{T}}_1$, ρ_1 i f są kolejno: gradientem deformacji, symetrycznym tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa, gęstością materiału i intensywnością rozkładu obciążeń masowych. Dywergencja występująca w określeniu wektora obciążeń powierzchniowych dana jest w obszarze przekroju poprzecznego ciała. Wskaźnik „1” dotyczy konfiguracji odniesienia (naturalnej) ciała.

Nadto

$$\mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{q}} \quad (11)$$

gdzie

$$\mathbf{U} = \Phi \left[\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q}(x_3, t) \right]. \quad (12)$$

Funkcja wektorowa Φ jest funkcją znaną, $\hat{\mathbf{x}}$ – wektorem pozycyjnym w obszarze przekroju A , $\mathbf{q}$ – wektorem współrzędnych uogólnionych.

W rozważanym przypadku na podstawie (3) składowe tensora $\mathbf{U}$ można napisać

$$U^{rs} = \begin{bmatrix} 0, & -x_2, & 0 \\ 0, & x_1, & 0 \\ 1, & 0, & \varphi \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Przyjmując wektor przemieszczeń uogólnionych następująco:

$$\mathbf{q} = \text{col}(\zeta, \partial, \theta), \quad (14)$$

z ogólnych równań (7) otrzymujemy następujące równania skalarne:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_3} + \tilde{q} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial x_3} + \tilde{m} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial x_3} - M_\varphi + \tilde{b} = 0, \quad (15)$$

przy pominięciu obciążeń powierzchniowych. Uogólnione siły wewnętrzne (9) określone są jak niżej

$$\begin{aligned} Q = H_1 &= \int_A \frac{\partial x_3}{\partial x_j} \sigma_{j3} dA, & M = H_2 &= \int_A \epsilon_{\alpha\beta} x_\alpha \frac{\partial x_\beta}{\partial x_j} \sigma_{j3} dA, \\ B = H_3 &= \int_A \varphi \frac{\partial x_3}{\partial x_j} \sigma_{j3} dA, & M_\varphi = Q_3^* &= \int_A \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial x_3}{\partial x_j} \sigma_{kj} dA, \end{aligned} \quad (16)$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \quad j, k = 1, 2, 3).$$

Są one odpowiednio siłą wzdłużną, całkowitym momentem skręcającym, bimomentem giętno-skrętnym oraz momentem giętno-skrętnym występującym przy skręcaniu skrępowanym. Natomiast odpowiednie obciążenia masowe w przypadku statycznym są

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= \rho_1 \int_A f_3 dA, & \tilde{m} &= \rho_1 \int_A \epsilon_{\alpha\beta} x_\alpha f_\beta dA, & \tilde{b} &= \rho_1 \int_A \varphi f_3 dA \end{aligned} \quad (17)$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2).$$

W przypadku gdy pręt znajduje się w ruchu obrotowym z niezmienną w czasie prędkością $\boldsymbol{\Omega}$ względem inercjalnego układu odniesienia (rys. 1), wtedy wektor intensywności obciążeń masowych wynosi

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}^*), \quad (18)$$

gdzie $\mathbf{R}^*$ jest wektorem pozycyjnym cząstki pręta w stanie odkształconym. Przyjmując $\boldsymbol{\Omega} = -\Omega \mathbf{e}_1$ oraz wykorzystując (3), obciążenia masowe można napisać

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= \rho_1 \Omega^2 [(\zeta + x_3) A + S_\varphi \theta], \\ \tilde{m} &= \rho_1 \Omega^2 [\tfrac{1}{2}(I_2 - I_1) \sin 2\vartheta + I_{12} \cos 2\vartheta], \\ \tilde{b} &= \rho_1 \Omega^2 [(\zeta + x_3) S_\varphi + I_\varphi \theta]. \end{aligned} \quad (19)$$

Wprowadzono tu następujące charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego pręta:

$$\begin{aligned} S_\varphi &= \int_A \varphi dA, & \bar{I}_\varphi &= \int_A \varphi^2 dA \\ I_1 &= \int_A x_1^2 dA, & I_2 &= \int_A x_2^2 dA, & I_{12} &= \int_A x_1 x_2 dA. \end{aligned} \quad (20)$$

Uwzględniając związki

$$x_i = x_i + u_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (21)$$

między współrzędnymi miejsca cząstki pręta w konfiguracji aktualnej i naturalnej, siły wewnętrzne (16) można przedstawić w postaci:

$$Q = \theta + \mathfrak{Q}, \quad M = M + \mathfrak{M}, \quad B = B + \mathfrak{B}, \quad M_\varphi = M_\varphi + \mathfrak{M}_\varphi, \quad (22)$$

gdzie oznaczono

$$\begin{aligned} Q &= \int_A \sigma_{33} dA, & \mathfrak{Q} &= \int_A \frac{\partial u_3}{\partial x_k} \sigma_{k3} dA, \\ M &= \int_A \epsilon_{\alpha\beta} x_\alpha \sigma_{\beta 3} dA, & \mathfrak{M} &= \int_A \epsilon_{\alpha\beta} \left(x_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial x_k} + u_\alpha \delta_{\beta k} \right) \sigma_{k3} dA, \\ B &= \int_A \varphi \sigma_{33} dA, & \mathfrak{B} &= \int_A \varphi \frac{\partial u_3}{\partial x_k} \sigma_{k3} dA, \\ M_\varphi &= \int_A \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \sigma_{k3} dA, & \mathfrak{M}_\varphi &= \int_A \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial u_3}{\partial x_k} \sigma_{jk} dA, \end{aligned} \quad (23)$$

$\delta_{\beta k}$ — symbol Kronekera.

Wykorzystując zależności (3), (5) i (7) dodatkowe składowe sił wewnętrznych zależne od odkształcenia można przedstawić

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q} &= \zeta' Q + \theta M_\varphi + \theta' B, & \mathfrak{M} &= \mathfrak{B}' B_r, \\ \mathfrak{B} &= \int_A \varepsilon \varphi \sigma_{33} dA + G I_{\rho\varphi} \theta (\theta - \mathfrak{B}'), & M_\varphi &= M_\varphi - M + \mathfrak{B}'_0 B_r \\ \mathfrak{M}_\varphi &= \mathfrak{B}'_0 \int_A \varepsilon \rho^2 \sigma_{33} dA + G [I_\rho \zeta' + 2 \mathfrak{B}'_0 I_{\rho\rho} \theta + I_{\rho\varphi} \theta'] (\theta - \mathfrak{B}') - 2 \mathfrak{B}'_0 G I_{\rho\varphi\varphi} \theta^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Wprowadzono tu następujące oznaczenia:

$$\varepsilon = \zeta' + \vartheta'_0 \rho^2 \theta + \varphi \theta',$$

$$M_v = \int_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} - \varepsilon_{\alpha\beta} x_\beta \right) \sigma_{\alpha 3} dA = G I \vartheta', \quad (25)$$

$$B_r = \int_A (x_1^2 + x_2^2) \sigma_{33} dA, \quad B_\rho = \int_A \rho^2 \sigma_{33} dA$$

oraz dalsze charakterystyki geometryczne przekroju pręta

$$I = \int_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} - \varepsilon_{\alpha\beta} x_\beta \right)^2 dA, \quad I_\rho = \int_A \rho^2 dA,$$

$$I_{\rho\rho} = \int_A \rho^4 dA, \quad I_{\rho\varphi} = \int_A \rho^2 \varphi dA, \quad (26)$$

$$I_{\rho\varphi\varphi} = \int_A \rho^2 \varepsilon_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} dA,$$

M_v jest momentem Saint-Venanta występującym przy skręcaniu swobodnym.

Przypadki szczególne

Zależnie od dodatkowych przyjęć dotyczących deplanacji przekrojów poprzecznych pręta przy skręcaniu, w dalszym ciągu rozróżniać będziemy następujące modele skręcania:

1. Model Saint-Venanta [2] — deplanację traktuje się jako swobodną, a jej miarę za równą przyrostowi kąta skręcania, tzn. $\theta = \vartheta'$.
2. Model Dżanelidze [3] — deplanacja jest skrepowana i przyjmuje się $\theta = \vartheta'$.
3. Model Własowa [4] — deplanacja jest skrepowana i miarą deplanacji θ jest funkcja niezależna od kąta skręcania.

W przypadku sztywnego utwierdzenia pręta jednym końcem przyjmuje się, że przekrój zamocowany nie deplanuje się dla przypadku deplanacji skrepowanej. Oznacza to, że w każdym punkcie przekroju $x_3 = 0$ jest $u_3 = 0$.

Dla modelu Dżanelidze mamy więc $\vartheta'(0) = 0$, skąd na podstawie (7) jest $\sigma_{\alpha 3}(0) = 0$.

Powyższy wniosek jest w sprzeczności z doświadczeniem. Przy stosowaniu modelu Własowa powyższa niezgodność nie występuje.

Dla modelu skręcania Saint-Venanta, z warunku swobodnego paczenia się przekrojów, wynika, że w ogólnych równaniach ruchu (15) należy przyjąć $B \equiv \tilde{b} = 0$. Z równania dla bimomentu giętno-skrętnego jest $M_\varphi = 0$, skąd na podstawie (22)₂ - (22)₄ i (24)₄ otrzymujemy następujący związek pomiędzy siłami wewnętrznymi:

$$M = M_v + \vartheta'_0 B_\rho + \mathfrak{M} + \mathfrak{M}_\varphi. \quad (27)$$

Wprowadzając zmienne i parametry bezwymiarowe

$$\begin{aligned} z &= \frac{x_3}{L}, & \bar{\zeta} &= \frac{\zeta}{L}, & \bar{Q} &= \frac{Q}{EA}, & \bar{M} &= \frac{M}{GI/L}, \\ \tau_0 &= L\vartheta'_0, & \bar{R} &= \frac{R}{L}, & \bar{q} &= \frac{q}{EA/L}, & \bar{m} &= \frac{m}{GI/L^2}, \\ \mu &= \frac{C}{\Omega L}, & C^2 &= \frac{E}{\rho}, \end{aligned} \quad (28)$$

równania ruchu i obciążenia w rozważanym przypadku można przepisać

$$\begin{aligned} \dot{\bar{Q}} + \bar{q} &= 0, & \dot{\bar{M}} + \bar{m} &= 0, \\ \bar{M} &= \bar{M}_1 + \tau_0 \bar{B}_\rho + \bar{\mathfrak{M}} + \bar{\mathfrak{M}}_\varphi, \\ \bar{q} &= \frac{\bar{\zeta} + Z + \bar{R}}{\mu^2}, & \bar{m} &= \frac{j_2^* - j_1^*}{2\mu^2} \sin 2(\vartheta_0 + \vartheta). \end{aligned} \quad (29)$$

Kropką oznaczono pochodną względem bezwymiarowej zmiennej niezależnej Z .

Natomiast związki pomiędzy siłami wewnętrznymi i odkształceniami dalej wykorzystywanymi można przedstawić

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \bar{Q}_1 + \bar{\mathfrak{Q}}, & \bar{M}_3 &= \dot{\bar{\mathfrak{Q}}}, \\ \bar{Q}_1 &= \dot{\bar{\zeta}} + \frac{\tau_0^2}{\lambda_\rho^2} \dot{\bar{\mathfrak{Q}}} + \frac{1}{2\lambda_r^2} \dot{\bar{\mathfrak{Q}}}^2, & \bar{\mathfrak{Q}} &= \dot{\bar{\zeta}} \bar{Q}_1, \\ \bar{\mathfrak{M}} &= \dot{\bar{\mathfrak{B}}}_r, & \bar{\mathfrak{M}}_\varphi &= \tau_0 (\dot{\bar{\zeta}} \bar{B}_\rho + \tau_0 \dot{\bar{\mathfrak{B}}}_{\rho\rho}), \end{aligned} \quad (30)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{B}_r &= (j_1^* + j_2^*) \dot{\bar{\zeta}} + \tau_0 j_{r\rho} \dot{\bar{\mathfrak{Q}}} + \frac{1}{2} j_{rr} \dot{\bar{\mathfrak{Q}}}^2, \\ \bar{B}_\rho &= j_\rho \dot{\bar{\zeta}} + \tau_0 j_{\rho\rho} \dot{\bar{\mathfrak{Q}}} + \frac{1}{2} j_{r\rho} \dot{\bar{\mathfrak{Q}}}^2, \\ \bar{B}_{\rho\rho} &= j_{\rho\rho} \dot{\bar{\zeta}} + \tau_0 j_{\rho\rho\rho} \dot{\bar{\mathfrak{Q}}} + \frac{1}{2} j_{r\rho\rho} \dot{\bar{\mathfrak{Q}}}^2. \end{aligned} \quad (31)$$

W powyższych zależnościach wprowadzono następujące bezwymiarowe charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego pręta:

$$\begin{aligned} \lambda_\mu^2 &= \frac{L^2}{I_\mu A}, & j_\alpha^* &= \frac{GI_\alpha^*}{EI}, & j_\rho &= \frac{EJ_\rho}{GI}, \\ j_{\mu\nu} &= \frac{EI_{\mu\nu}}{GIL^2}, & j_{\mu\rho\rho} &= \frac{EI_{\mu\rho\rho}}{GIL^4}, \\ (\alpha &= 1, 2, \quad \mu, \nu = r, \rho), \end{aligned} \quad (32)$$

gdzie

$$I_{\mu\nu} = \int_1 \mu^2 v^2 dA, \quad I_{\mu\rho\rho} = \int_1 \mu^2 \rho^4 dA, \quad (33)$$

I_z^* są głównymi, centralnymi momentami bezwładności przekroju przy zgięciu pręta.

Aby otrzymać jednoznaczne rozwiązanie równań ruchu niezbędne są jeszcze odpowiednie warunki brzegowe. W przypadku pręta wolnonośnego dla modelu Saint-Venanta mamy:

$$\vartheta(0) = \bar{\zeta}(0) = 0, \quad \bar{Q}(1) = \bar{M}(1) = 0, \quad (34)$$

odpowiednio na brzegu utwierdzonym ($Z=0$) i brzegu swobodnym ($Z=1$).

Równania (29), zależności (30) i (31) oraz warunki brzegowe (34) tworzą zagadnienie brzegowe do wyznaczenia wielkości charakteryzujących skrećanie swobodne w zależności od promienia zamocowania $\bar{R}$, pierwotnego skrećania τ_0 , parametru kinematycznego μ i geometrii przekrojów poprzecznych pręta. Obliczenia numeryczne zostaną przedstawione w następnym punkcie pracy.

Dla modelu skrećania Własowa ($\theta \neq \vartheta'$) po wprowadzeniu bezwymiarowych wielkości

$$\bar{B} = \frac{B}{GI}, \quad \bar{b} = \frac{b}{GI/L}, \quad \tau = L\theta \quad (35)$$

oraz (28), równania ruchu i obciążenia można przedstawić

$$\begin{aligned} \dot{\bar{Q}} + \bar{q} &= 0, & \dot{\bar{M}} + \bar{m} &= 0, & \dot{\bar{B}} - \bar{M} + \bar{b} &= 0, \\ \bar{q} &= \frac{\bar{\zeta} + Z + \bar{R}}{\mu^2}, & \bar{m} &= \frac{j_2^* + j_1^*}{2\mu^2} \sin 2(\vartheta_0 + \vartheta), & \bar{b} &= \frac{j_\varphi}{\mu^2} \tau. \end{aligned} \quad (36)$$

Związki pomiędzy siłami wewnętrznymi i odkształceniami przyjmują postać

$$\bar{Q} = \bar{Q}_1 + \bar{\mathfrak{Q}}, \quad \bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{\mathfrak{M}}, \quad \bar{B} = \bar{B}_1 + \bar{\mathfrak{B}}, \quad \bar{M}_\varphi = \bar{M}_{\varphi 1} + \bar{\mathfrak{M}}_\varphi, \quad (37)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1 &= \dot{\bar{\zeta}} + \frac{\tau_0}{\lambda_\rho^2} \tau + \frac{\dot{\vartheta}^2}{2\lambda_r^2}, & \bar{\mathfrak{Q}} &= \dot{\bar{\zeta}} \bar{Q}_1 + \tau \frac{\bar{M}_\varphi}{\lambda_0^2} + \dot{\tau} \frac{\bar{B}}{\lambda_0^2}, \\ \bar{M}_1 &= j_r \dot{\vartheta} - (j_r - 1) \tau, & \bar{\mathfrak{M}} &= \dot{\vartheta} \bar{B}_r, \\ \bar{B}_1 &= \tau_0 j_{\rho\varphi} \tau + j_\varphi \dot{\tau} + \frac{1}{2} j_{r\varphi} \dot{\vartheta}^2, & \bar{\mathfrak{B}} &= \dot{\bar{\zeta}} \bar{B}_1 + \tau_0 \tau \bar{B}_{\rho\varphi} + \dot{\tau} \bar{B}_{\varphi\varphi} + \frac{G}{E} j_{\rho\varphi} (\tau - \dot{\vartheta}) \tau, \\ \bar{M}_{\varphi 1} &= \dot{\vartheta} - \bar{M}_1 + \tau_0 \bar{B}_\rho, & \bar{\mathfrak{M}}_\varphi &= \tau_0 (\dot{\bar{\zeta}} \bar{B}_\rho + \tau_0 \tau \bar{B}_{\rho\rho} + \dot{\tau} \bar{B}_{\rho\varphi}) - \\ & & & - 2\tau_0 \frac{G}{E} j_{\rho\varphi\varphi} \tau^2 + \frac{G}{E} (j_\rho \dot{\zeta} + 2\tau_0 j_{\rho\rho} \tau + j_{\rho\varphi} \dot{\tau}) (\tau - \dot{\vartheta}), \end{aligned} \quad (38)$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \bar{B}_r &= (j_1^* + j_2^*) \dot{\bar{\zeta}} + \tau_0 j_{r\rho} \tau + j_{r\varphi} \dot{\tau} + \frac{1}{2} j_{rr} \dot{\vartheta}^2, \\
 \bar{B}_\rho &= j_\rho \dot{\bar{\zeta}} + \tau_0 j_{\rho\rho} \tau + j_{\rho\varphi} \dot{\tau} + \frac{1}{2} j_{r\rho} \dot{\vartheta}^2, \\
 \bar{B}_{\rho\rho} &= j_{\rho\rho} \dot{\bar{\zeta}} + \tau_0 j_{\rho\rho\rho} \tau + j_{\rho\rho\varphi} \dot{\tau} + \frac{1}{2} j_{r\rho\rho} \dot{\vartheta}^2, \\
 \bar{B}_{\rho\varphi} &= j_{\rho\varphi} \dot{\bar{\zeta}} + \tau_0 j_{\rho\varphi\rho} \tau + j_{\rho\varphi\varphi} \dot{\tau} + \frac{1}{2} j_{r\rho\varphi} \dot{\vartheta}^2, \\
 \bar{B}_{\varphi\varphi} &= j_\varphi \dot{\bar{\zeta}} + \tau_0 j_{\varphi\varphi\rho} \tau + j_{\varphi\varphi\varphi} \dot{\tau} + \frac{1}{2} j_{r\varphi\varphi} \dot{\vartheta}^2.
 \end{aligned} \tag{39}$$

W napisanych wyżej podanych zależnościach wprowadzono następujące dodatkowe, bezwymiarowe charakterystyki geometryczne przekroju:

$$\begin{aligned}
 \lambda_0^2 &= \frac{L^2}{GI/EA}, \quad j_\varphi = \frac{EI_\varphi}{GIL^2}, \quad j_{\mu\varphi} = \frac{EI_{\mu\varphi}}{GIL^2}, \\
 j_{\rho\varphi\varphi} &= \frac{EI_{\rho\varphi\varphi}}{GIL^2}, \quad j_{\mu\nu\varphi} = \frac{EI_{\mu\nu\varphi}}{GIL^4}, \\
 (\mu, \nu &= r, \rho, \varphi),
 \end{aligned} \tag{40}$$

gdzie

$$I_\varphi = \int_1^A \varphi^2 dA, \quad j_{\mu\varphi} = \int_1^A \mu^2 \varphi dA, \quad I_{\mu\nu\varphi} = \int_1^A \mu^2 \nu^2 \varphi dA. \tag{41}$$

Warunki brzegowe dla pręta wolnonośnego są

$$\vartheta(0) = \bar{\zeta}(0) = \tau(0) = 0, \quad \bar{Q}(1) = \bar{M}(1) = \bar{B}(1) = 0, \tag{42}$$

odpowiednio na brzegu utwierdzonym ($z=0$) i swobodnym ($z=1$).

Przyjmując $\tau = \dot{\vartheta}$ otrzymamy z napisanych wyżej równań (37), z zależności (38) i (39) oraz warunków (42) układ tworzący zagadnienia brzegowe dla modelu skręcania Dżanelidze.

Wyniki obliczeń*

Opierając się na sformułowanych zagadnieniach brzegowych, przeprowadzono obliczenia numeryczne dla równomiernie zwitych prętów posiadających stałe, eliptyczne przekroje poprzeczne. Przeprowadzono je na elektronicznej maszynie cyfrowej Odra 1204 stosując standardową metodę Runge-Kutta przybliżonego rozwiązywania zagadnień początkowych dla zwyczajnych równań różniczkowych. Spełnienie warunków brzegowych na swobodnym końcu pręta ($z=1$) zrealizowano poprzez iteracyjny dobór nieznanymi warunków początkowych ($z=0$).

Obliczenia skręcania prętów według modelu Saint-Venanta wykonano dla następują-

* Programy oraz obliczenia wykonał mgr M. Lidke.

ych wartości parametrów:

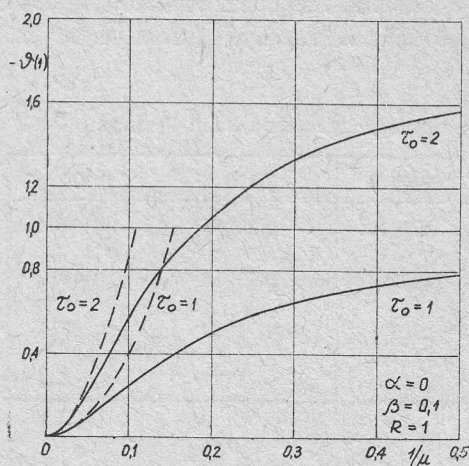
$$\frac{1}{\mu} = 0,025, 0,05, 0,1, 0,15, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5,$$

$$\tau_0 = 1, 2, \bar{R} = 1, \alpha = 0, 0,1, 0,2, 0,4, \beta = 0,1, 0,2, 0,5,$$

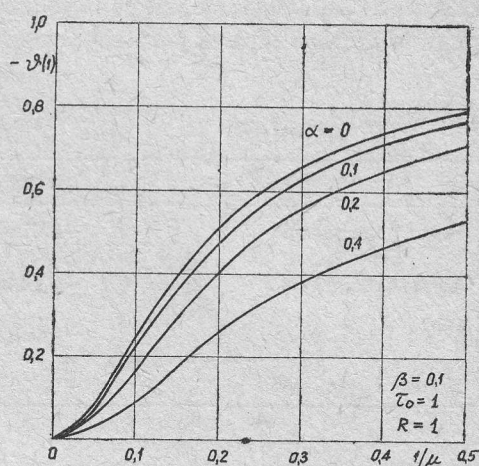
gdzie

$$\alpha = \frac{a}{L}, \quad \beta = \frac{b}{a},$$

(a, b — duża i mała półoś elipsy).



Rys. 2



Rys. 3

Wyniki obliczeń kąta obrotu przekroju wierzchołkowego pręta przedstawiono na rys. 2 i 3 oraz w tabeli 1. Liniami przerywanymi zaznaczono wyniki obliczeń wykonanych przy zastosowaniu równań zlinearyzowanych. Na ich podstawie można wysnuć następujące stwierdzenia:

1. Pod wpływem sił masowych spowodowanych ruchem obrotowym następuje odwi-

Tabela 1

Kąt $\vartheta(1)$ odwrócenia pręta według nieliniowego modelu Saint-Venanta

$1/\mu$		0,025	0,05	0,075	0,10
$\beta = 0,2$	$\alpha = 0$	-0,0055	-0,0215	-0,0460	-0,0769
	$\alpha = 0,1$	-0,0054	-0,0210	-0,0452	-0,0764
	$\alpha = 0,2$	-0,0049	-0,0193	-0,0430	-0,0752
$\beta = 0,5$	$\alpha = 0$	-0,00043	-0,00171	-0,00381	-0,00667
	$\alpha = 0,1$	-0,00043	-0,00170	-0,00379	-0,00665
	$\alpha = 0,2$	-0,00042	-0,00169	-0,00375	-0,00658

$\tau_0 = 1, \quad R = 1$

janie się prętów pierwotnie skręconych. Odwinięcie — $\vartheta(1)$ przekroju wierzchołkowego pręta jest tym większe, im większe wartości przyjmuje parametr kinematyczny $1/\mu$.

2. Dla $1/\mu > 0,05$ wyniki obliczeń kątów sprężystego odwinięcia pręta, otrzymanych przy użyciu równań zlinearyzowanych, różnią się istotnie od wyników otrzymanych na podstawie równań nieliniowych.

3. Wpływ parametrów geometrycznych na kąt ϑ odwinięcia się prętów jest następujący: zwiększenie kąta τ_0 pierwotnego skręcenia, wzrost smukłości pręta (α maleje) oraz zmniejszenie się grubości profilu (β maleje) powodują wzrost kątów odwinięcia się wstępnie skręconego pręta.

Ze stwierdzenia 2 wynika, że dla rzeczywistych łopatek maszyn przepływowych, dla których $\mu < 20$, konieczne jest posługiwanie się w obliczeniach modelem nieliniowym. Dotyczy to głównie łopatek wirnikowych ostatnich stopni nowoczesnych turbin parowych.

Tabela 2

Wpływ nieliniowości na kąt $\vartheta(1)$ odwinięcia pręta według modelu Saint-Venanta

$1/\mu$	0,025	0,050	0,075	0,100
Pełna linearyzacja	-0,02442	-0,09831	-0,22366	-0,40404
$\Omega = \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\varphi = \dot{\vartheta}^2 = 0$	-0,02443	-0,09884	-0,23014	-0,44619
$\mathfrak{M} \neq 0 \quad \Omega = \mathfrak{M}_\varphi = \dot{\vartheta}^2 = 0$	-0,02335	-0,08391	-0,16004	-0,24330
Model w pełni nieliniowy	-0,02339	-0,08395	-0,16277	-0,24541

$$\tau_0 = 1, \quad R = 1, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0,1.$$

Zbadano również wpływ poszczególnych nieliniowości na wyniki obliczeń kątów odwinięcia się prętów. Na podstawie wyników obliczeń zestawionych w tabeli 2 można wnieść, że w rozważanym zakresie zmienności parametru $1/\mu$, decydujące znaczenie mają nieliniowości związane z dodatkowym momentem skręcającym $\mathfrak{M}$, zależnym od odkształcenia.

Obliczenia skręcania prętów według modelu Dżanelidze przeprowadzono dla następujących wartości parametrów:

$$\mu = 10, 20, \quad \tau_0 = 1, \quad \bar{R} = 1,$$

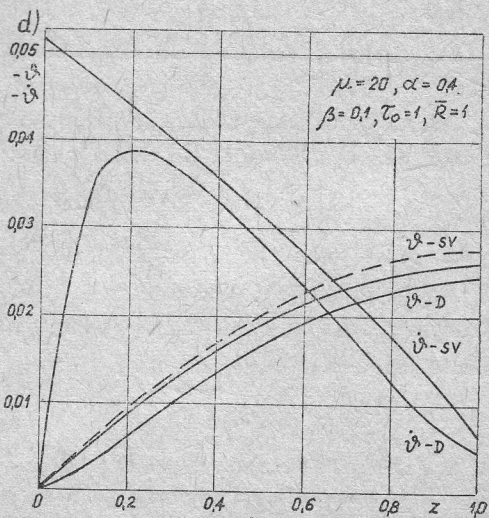
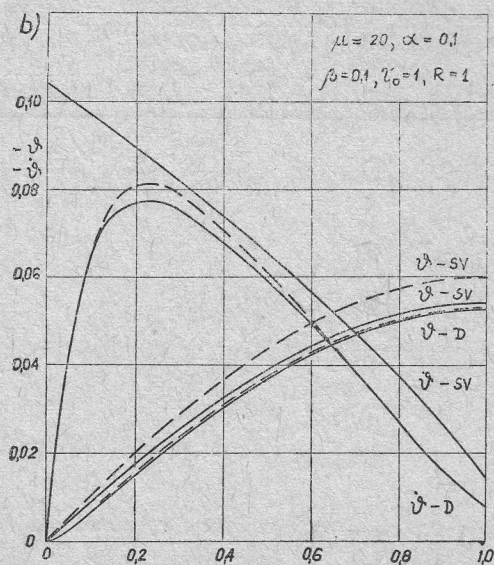
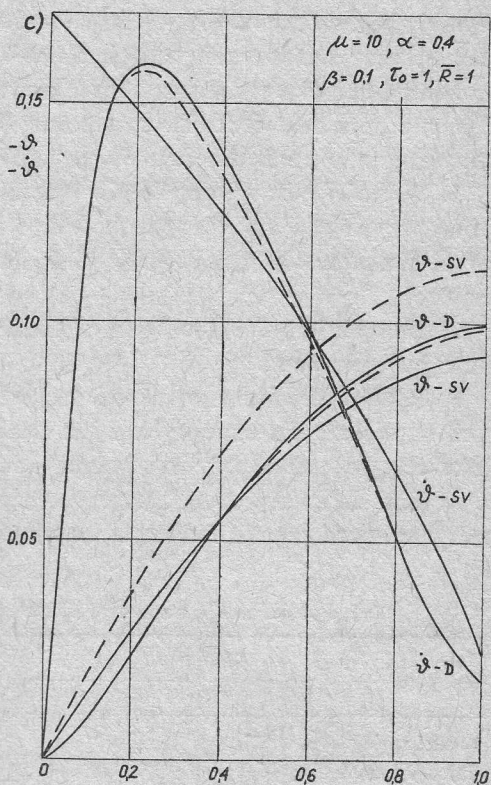
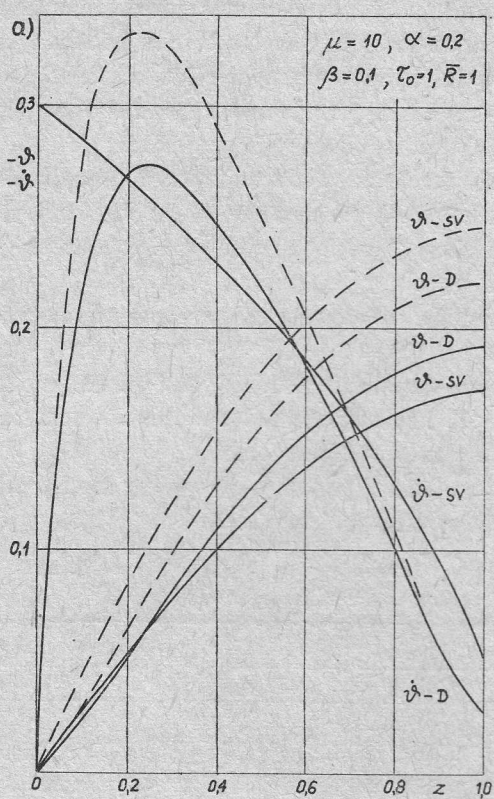
$$\alpha = 0,2, 0,4, \quad \beta = 0,1, 0,5.$$

Tabela 3

Porównanie kątów $\vartheta(1)$ odwinięcia według nieliniowych modeli Saint-Venanta i Dżanelidze

α	β	Model Saint-Venanta		Model Dżanelidze	
		$\mu = 10$	$\mu = 20$	$\mu = 10$	$\mu = 20$
0,2	0,1	-0,17194	-0,05403	-0,19238	-0,05272
	0,5	-0,00656	-0,00168	-0,00611	-0,00155
0,4	0,1	-0,09198	-0,02617	-0,09978	-0,02438
	0,5	-0,00629	-0,00161	-0,00539	-0,00137

$$\tau_0 = 1, \quad \bar{R} = 1.$$



Rys. 4

Wyniki obliczeń kąta odwinięcia przedstawiono w tabeli 3 i porównano je z wynikami otrzymanymi przy zastosowaniu modelu Saint-Venanta. Rozkłady kątów ϑ i ich pochodnych $\dot{\vartheta}$ wzdłuż długości pręta, wyznaczonych przy użyciu nieliniowych modeli Dżanelidze i Saint-Venanta, przedstawiono na rysunkach 4a - d. Linia przerywaną zaznaczono wyniki otrzymane z równań zlinearyzowanych. Na ich podstawie można wnosić, że:

1. Wartości bezwzględne kątów odwinięcia przekroju wierzchołkowego pręta, wyliczone przy użyciu omawianych modeli, dla ustalonych parametrów α , β i μ , różnią się więcej dla prętów o mniejszej smukłości (α większe) i posiadających przekroje krępe (β większe).

2. Na ogół jest $|\vartheta(1)|_{sv} > |\vartheta(1)|_D$; jednakże dla μ i β dostatecznie małych nierówność może być przeciwna.

3. Różnice pomiędzy wynikami otrzymanymi z równań nieliniowych i zlinearyzowanych są większe dla mniejszych μ i α . Dla $\mu < 20$ konieczne jest stosowanie równań nieliniowych, zwłaszcza przy stosowaniu modelu skręcania Saint-Venanta.

Wyniki obliczeń według zlinearyzowanego modelu Własowa oraz według modeli zlinearyzowanych poprzednio omawianych zostały zestawione w tabeli 4.

Tabela 4

Porównanie parametrów skręcania według modeli zlinearyzowanych

α		0,2			0,4		
β		0,1	0,2	0,5	0,1	0,2	0,5
Model Saint-Venanta	$\vartheta(1)$	-0,05998	-0,01957	-0,00170	-0,02765	-0,01411	-0,00163
	$M(0)$	0,05565	0,01418	0,00215	0,05656	0,01421	0,00215
Model Dżanelidze	$\vartheta(1)$	-0,05449	-0,01756	-0,00156	-0,02439	-0,01176	-0,00139
	$M(0)$	0,05602	0,01421	0,00215	0,05678	0,01425	0,00215
	$B(0)$	-0,00889	-0,00230	-0,00014	-0,01182	-0,00376	-0,00026
Model Własowa	$\vartheta(1)$	-0,052296	-0,01674	-0,00132	-0,02254	-0,01027	-0,00088
	$M(0)$	0,05607	0,01422	0,00215	0,05682	0,01426	0,00215
	$B(0)$	-0,00909	-0,00259	-0,00032	-0,01203	-0,00414	-0,00057

$$\mu=20, \tau_0=1, R=1.$$

Na ich podstawie widać, że przy ustalonych parametrach: $\mu=20$, $\tau_0=1$ i $R=1$ dla $\alpha=0,2$, $0,4$ oraz $\beta=0,1$, $0,2$, $0,5$, mamy:

$$|\vartheta(1)|_{sv} > |\vartheta(1)|_D > |\vartheta(1)|_w,$$

$$|M(0)|_{sv} < |M(0)|_D < |M(0)|_w, \quad |B(0)|_D < |B(0)|_w.$$

Nadto dla modelu Własowa jest $\dot{\vartheta}(0) \neq 0$. Zatem w tym przypadku naprężenia w utwierdzonym przekroju pręta nie są równe tożsamościowo zeru.

Praca wpłynęła do Redakcji w styczniu 1976 r.

Literatura

- [1] S. Janecki, *Równania ruchu jednowymiarowych modeli ośrodka ciągłego* (w przygotowaniu).
- [2] W. Nowacki, *Teoria sprężystości*. PWN, Warszawa 1970.
- [3] Г. Ю. Джanelidze, *К теории тонких и тонкостенных стержней*. ПММ, Т. XIII, В. 6, 1949.
- [4] В. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*. Москва 1959.

Кручение вращающихся предварительно свитых стержней с учетом геометрических нелинейностей

Резюме

На основе общих уравнений движения (8), для произвольных одномерных моделей сплошной среды, определяются нелинейные уравнения кручения (15) свитых вращающихся стержней.

Используя эти уравнения исследовано влияние кинематического параметра μ , конструктивных параметров τ_0 , $\bar{R}$, α и β , а также геометрических нелинейностей на значения распределения крутильных характеристик. Констатируется, что под влиянием центробежных сил происходит раскрутка первоначально свитых стержней (рис. 2 и 3). Констатируется также, что для $\mu < 20$ необходимо пользоваться нелинейными моделями. Это в основном касается рабочих лопаток последних ступеней паровых турбин.

Twisting of Rotating Pre-Twisted Rods with Geometrical Nonlinearities Taken into Account

Summary

Nonlinear equations of twisting (15) of twisted rotating rods have been derived from general equations of motion (8) for any one-dimensional model of continuous medium. The equations have been used to investigate the effect of the kinematic parameter μ , constructional parameters τ_0 , $\bar{R}$, α and β , and nonlinear inequalities on the twisting characteristics distribution values. It has been shown that centrifugal forces cause untwisting of pre-twisted rods (Figs. 2 and 3). It has also been shown that nonlinear models should be adopted for $\mu < 20$. This refers mainly to rotor blades of final stages of steam turbines.