

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPŁYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

73

WARSZAWA—POZNĄ 1976

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

KOMITET REDAKCYJNY - EXECUTIVE EDITORS
KAZIMIERZ STELLER - REDAKTOR - EDITOR
JERZY KOŁODKO · JÓZEF ŚMIGIELSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA - EDITORIAL OFFICE
Instytut Maszyn Przepływowych PAN,
80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, ul. Gen. Józefa Fiszerza 14, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1976
Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład: 350+90 egz. Ark. wyd. 13. Ark. druk. 10. Papier druk. sat. kl. V, 70g, 70×100.
Oddano do składania 9 I 1976. Podpisano do druku 12 XI 1976. Druk ukończono w listopadzie 1976 r. Zam. nr 114/159. H-5/709. Cena zł 40,-

DRUKARNIA UNIWERSYTETU IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

TADEUSZ CZYŻEWSKI

Gdańsk

Wyteżenie materiału w strefie elastohydrodynamicznego styku walców*

W pracy przeanalizowano wpływ zmian obciążenia normalnego i stycznego w styku elastohydrodynamicznym na wyteżenie materiału z uwzględnieniem hipotezy Tresca-Guesta, dotyczącej maksymalnych naprężeń stycznych. Wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono w postaci wykresów.

Oznaczenia i symbole

- | | |
|---|--|
| a – połowa szerokości strefy styku statycznego [m], | η – lepkość dynamiczna [Nsm^{-2}], |
| g – przyspieszenie ziemskie [ms^{-2}], | θ, χ – kąt [rad], |
| h – grubość filmu EHD [m], | κ – współczynnik nachylenia krzywej obciążenia stycznego, |
| k – współczynnik nachylenia krzywej obciążenia normalnego, | $\lambda = h_{\min}/R_a$ współczynnik związany z grubością filmu EHD, |
| p – ciśnienie [Nm^{-2}], | ν – liczba Poissona, |
| r – promień [m], | ξ – współrzędna bezwymiarowa strefy styku w kierunku osi y , |
| s – współrzędna wymiarowa obciążenia [m], | π – stała lub ciśnienie względne (rys. 2), |
| t – poślizg względny, | ρ – gęstość (masa właściwa) [kgm^{-3}], |
| u – składowa prędkości w kierunku osi x [ms^{-1}], | σ – składowa naprężenia [Nm^{-2}], |
| x, y, z – współrzędne wymiarowe [m], | τ – jednostkowa siła tarcia [Nm^{-2}] lub składowa naprężenia, |
| C, D – stałe całkowania, | φ – współrzędna bezwymiarowa strefy styku w kierunku osi x . |
| E – moduł Younga [Nm^{-2}], | |
| F – funkcja Airy'ego, | |
| M – moment siły [Nm], | |
| P – obciążenie jednostkowe styku [Nm^{-1}] lub obciążenie całkowite [N], | |
| R – promień zastępczy [m], | |
| R_a – chropowatość zastępcza współpracujących stykowo powierzchni [m], | |
| T – wypadkowa siła tarcia [Nm^{-1}], | |
| U, M, G – parametry bezwymiarowe, | |
| α – piezowspółczynnik lepkości [m^2N^{-1}] | |
| δ – współrzędna bezwymiarowa obciążenia, | |

Indeksy

- | |
|---|
| H – hertzowski, |
| i – kolejny, |
| k – końcowy, |
| p – poślizgu, |
| t – toczenia, |
| w – związany z wierzchołkiem ciśnienia, |
| φ, ξ – związany z kierunkiem osi, bezwymiarowy, |
| x, y, z – związany z kierunkiem osi, wymiarowy, |
| m – środkowy. |

* Praca wykonana w ramach planu resortowego PAN-19, grupa tematyczna 5.

1. Wstęp

1.1. Wprowadzenie

W rozumieniu niniejszego artykułu termin „elastohydrodynamiczny” (w skrócie EHD) odnosi się do zjawisk fizycznych, opisywanych za pomocą elastohydrodynamicznej teorii smarowania wysoko obciążonych styków typu Hertza. Z kolei termin „styk EHD” oznacza taki układ fizyczny ciał stałych o krzywoliniowym regularnym zarysie powierzchni, w którym ciała – pozostając we wzajemnym kontakcie – przenoszą w ruchu obciążenia zewnętrzne, przy czym ich powierzchnie nośne przemieszczają się ustawicznie i są rozdzielone przez film olejowy. Przy odpowiednio dobranym układzie odniesienia styk taki pozostaje pozornie statyczny, tzn. pole styku nie zmienia swego położenia względem układu odniesienia mimo, że powierzchnie ciał kontaktujących zmieniają swoje położenie. Przykład: styk pary walców toczących się po sobie wzdłuż tworzących pozostaje pozornie statyczny w układzie odniesienia związanym z ich nieruchomymi osiami.

Podstawowe przykłady zastosowań technicznych styku EHD to łożyska toczne, koła zębate, walce hutnicze, mechanizmy krzywkowe. Mimo szerokiego rozpowszechnienia zastosowań styku EHD w technice i wzmoczonego zainteresowania nauki, nie wszystkie zjawiska zachodzące w obrębie styku EHD zostały w pełni wyjaśnione. Osiągnięte dotychczas wyniki badań nad zjawiskiem smarowania styku EHD można uznać za zadowalające w zakresie wyjaśnienia aspektów podstawowych.

1.2. Smarowanie styku EHD

Smarowanie styku tocznego odbywa się na podobnej zasadzie jak styku ślizgowego (np. przy smarowaniu hydrodynamicznym). Smar wprowadzony jest w styk dzięki przyleganiu do ścianek stykających się elementów. Przy ruchu powierzchni w kierunku zwiężającej się szczeliny, siły lepkości smaru generują ciśnienia hydrodynamiczne zdolne do przeniesienia dużych obciążeń zewnętrznych [6, 26, 40]. Jednakże grubość filmu smarnego, obliczona dla styku walców stalowych z równania Reynoldsa, bez uwzględnienia odkształceń sprężystych kanału, jest zbyt mała dla użytecznego rozdzielenia kontaktujących powierzchni. Grubość filmu, jaką można stąd obliczyć, nie przekracza na ogół 0,01 mikrometra. Wartość ta jest mniejsza od wysokości nierówności powierzchni spotykanych w praktyce. Odkształcenia ciał powstające pod wpływem ciśnień hydrodynamicznych cieczy, prowadzą do wytworzenia efektywniejszego klina smarnego w obrębie styku.

Pod wpływem zmiany ciśnienia zmienia się lepkość cieczy. Dla olejów mineralnych zmianę lepkości opisuje prawo Barusa:

$$\eta = \eta_0 e^{\alpha p}. \quad (1)$$

Zgodnie z równaniem Newtona siły lepkości

$$\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial h}, \quad (2)$$

osiągają duże wartości w miejscu, gdzie występują duże ciśnienia i duże gradienty prędkości. Przy styku EHD siły te zapobiegają wyciskaniu smaru ze styku mimo dużych nacisków normalnych i małej wytrzymałości statycznej oleju na ścinanie.

Obliczenie geometrii filmu EHD i rozkładu ciśnień w filmie smarnym [15 - 17] wymaga stosowania metod numerycznych. Teoria smarowania EHD zakłada zgodność w strefie styku obciążeń hydrodynamicznych z obciążeniami wywołującymi odkształcenia sprężyste powierzchni. Jednak przyjęcie modelu matematycznego, opisującego własności płynu w styku EHD, rzutuje w dużym stopniu na wynik rozwiązania [2, 27, 46].

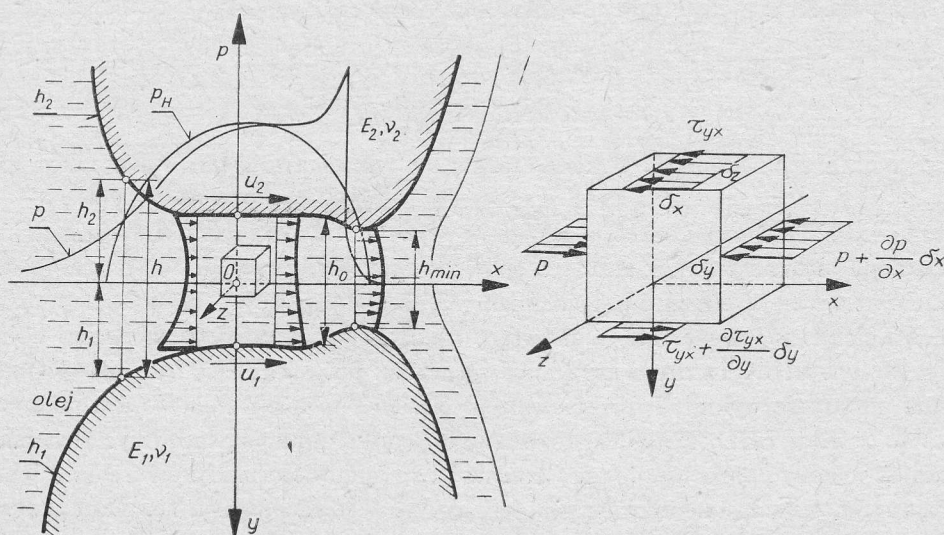
Przy obliczaniu rozkładu ciśnień w filmie EHD zakłada się [34] izotermiczny przebieg zjawiska w układzie dwuwymiarowym oraz ustalone warunki pracy. Rozkład ciśnień liczy się z równania Reynoldsa:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{dp}{dx} \right) = u \frac{d}{dx} (\rho h), \quad (3)$$

a grubość filmu h , z ugięciem sprężystych powierzchni pod wpływem ciśnienia w filmie:

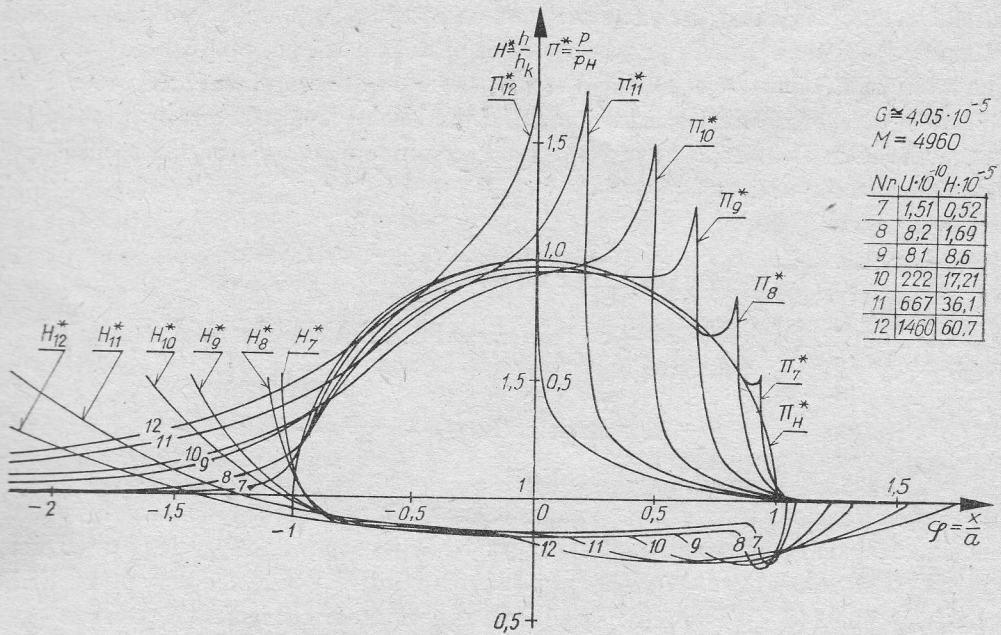
$$h = h_m + \frac{x^2}{2R} - \frac{2}{E'} \int_{-\infty}^{+k} p(s) \ln \left| \frac{x-s}{s} \right| ds. \quad (4)$$

Dokładny opis metody rozwiązania można znaleźć m. in. w pracy [34]. Obliczony rozkład ciśnienia różni się od rozwiązania Hertza (rys. 1 i 2) występowaniem ostrego spiętrzenia ciśnienia po stronie wylotu. W miejscu spiętrzenia ciśnienia występuje przy styku EHD przewężenie filmu ($h_{\min}$). Położenie spiętrzenia φ_w i wartość ciśnienia spiętrzonego oraz położenie przewężenia i grubość filmu w tym miejscu, zależą od parametrów konstrukcyj-



Rys. 1. Styk elastohydrodynamiczny; p – ciśnienie EHD, p_H – ciśnienie statyczne

nych styku, a w szczególności od iloczynu lepkości oleju i prędkości powierzchni, tj. $\eta_0 \cdot u_0$. Ze wzrostem iloczynu $\eta_0 \cdot u_0$ położenie spiętrzenia ciśnienia φ_w i położenie przewężenia w filmie (rys. 2) przesuwają się w kierunku wlotu oleju, tj. przeciwnie do kierunku ruchu powierzchni. Ciśnienie w spiętrzeniu przekracza maksymalne ciśnienie w styku statycznym.



Rys. 2. Rozkład ciśnienia i kształt filmu w styku EHD, według [34]

Według H. Krzemińskiego [34] dla filmu EHD mamy:

$$\varphi_w = 1 - 2,8(\eta_0 u_0)^{0,39} R^{0,53} P^{-0,92} (E')^{0,26} \alpha^{-0,28}, \quad (5)$$

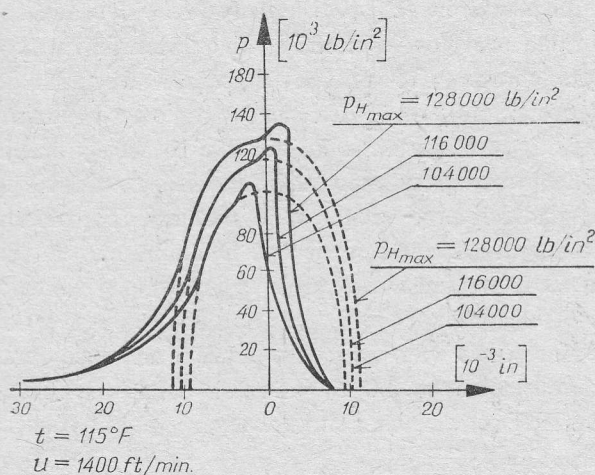
$$h_{\min} = 1,63(\eta_0 u_0)^{0,7} R^{0,42} P^{-0,12} (E')^{0,03} \alpha^{0,61}. \quad (6)$$

Wzory podawane przez innych autorów różnią się tylko wartościami wykładników potęgowych.

Bezpośrednie pomiary rozkładu ciśnień w styku EHD metodami sondowania [38] są obarczone błędami wskutek zakłóceń spowodowanych sondami. Bardziej wiarygodne wyniki uzyskuje się z pomiarów pośrednich [33, 39], polegających na pomiarze zmian oporności cienkiego pasma manganinowego, osadzonego na powierzchni walca wchodzącego w styk EHD. Tą drogą otrzymuje się wyniki potwierdzające istnienie spiętrzeń ciśnienia po stronie wylotu. Jednakże wartość ciśnienia w spiętrzeniu nie jest taka, jak wynika to z teorii EHD. Powodem rozbieżności teorii z praktyką może być zbyt mała dokładność metody pomiaru oraz uproszczenia stosowane w teorii. Uproszczenia w teorii wynikają m. in. z niedostatecznej znajomości rzeczywistego zachowania się smaru podczas przejścia przez styk EHD. Smar, przepływając przez strefę styku EHD, ulega sprężeniu do kilkuset MN/m² w czasie kilkunastu mikrosekund (przy łożyskach tocznych) oraz

gwałtownemu rozprężeniu do ciśnienia atmosferycznego. Te zmiany ciśnienia są tak szybkie jak zmiany występujące podczas eksplozji [46]. Stwierdzono jednak, że smar po przejściu strefy styku zachowuje swoje własności, czyli że procesy zachodzące w smarze są procesami odwracalnymi.

Teorie smarowania styków skoncentrowanych opierają się najczęściej na wykładniczej zależności lepkości od ciśnienia, ustalonej z pomiarów statycznych. Sugerowano wielo-



Rys. 3. Pomierzone rozkłady ciśnień w styku EHD w zależności od obciążenia na tle rozkładów Hertza, według [33]

krotnie [4, 8 i in.], a ostatnio udowodniono [3, 20, 21], że powodem rozbieżności między teorią i doświadczeniem są reologiczne własności olejów mineralnych. Lepkość oleju, obliczona z uwzględnieniem lepkością elastycznego zachowania się oleju w styku, różni się znacznie od lepkości obliczonej bez uwzględnienia własności reologicznych. Szczególne znaczenie własności reologicznych oleju uwiadamia się przy dużych prędkościach powierzchni [11]. Ogólnie należy stwierdzić, że uwzględnienie reologicznych własności smaru [1] prowadzi do rezultatów bliskich wynikom pomiarów. Stwierdzono również nienewtonowskie zachowanie oleju w styku EHD [10, 43].

Pomiary grubości filmu metodami elektrycznymi (pomiar oporności bądź pojemności filmu) potwierdziły w zasadzie przewidywania teoretyczne [17]. Zastosowanie metod optycznych, wykorzystujących zjawisko interferencji [24, 49], pozwoliło obserwować film EHD i dokładnie analizować jego cechy, w tym również takie, których teoria nie przewidywała (np. zanikanie filmu). Między innymi wykazano, że grubość filmu EHD różni się od przewidywanej, oraz że wrażliwość filmu na obciążenie jest znacznie większa, niż wynika to z uproszczonej teorii EHD.

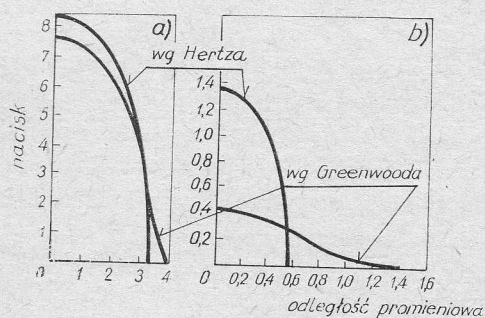
Wyniki obliczeń geometrii filmu EHD i rozkład ciśnień, uwzględniające zjawiska cieplne w filmie [9], różnią się tylko nieznacznie od wyników, które otrzymuje się przy założeniu przemian izotermicznych.

Teoria smarowania styku EHD, zakładająca solidyfikację smaru w strefie wysokich ciśnień [30], podaje rozkłady ciśnień i kształt filmu zbliżone do omówionych. Siły styczne w styku EHD, przy założeniu zestalenia smaru, przybierają mniejsze, a więc bardziej realne wartości (por. [13]) w porównaniu z wartościami obliczonymi przy założeniu prze-

mian izotermicznych. Niemniej, teoria ta opiera się na statycznym opisie własności smaru, a więc nierealnym w warunkach dynamicznej pracy styku [46].

Przyjmowany do obliczeń model powierzchni idealnie gładkiej jest także dużym uproszczeniem. Jest ono tym większe, im mniejszy jest stosunek grubości filmu do zastępczej średniej chropowatości powierzchni. Uwzględnienie chropowatości powierzchni zbliża oczywiście model teoretyczny do rzeczywistości. Przyjmując uproszczony model stochastyczny rozkładu nierówności powierzchni, wyznaczono [23, 44] rozkład nacisków kontaktowych w miejscu styku. Wyniki pomiarów [25] potwierdziły przewidywania dotyczące wpływu chropowatości na rozkład nacisków w strefie styku powierzchni walcowych. Stwierdzono, że przy większych chropowatościach powierzchni w stosunku do wymiarów strefy styku (przy danym obciążeniu), rozkład nacisków stykowych bardziej odbiega od klasycznego rozkładu Hertza; gdy szerokość styku wzrasta, to naciski maleją (rys. 4). Ponieważ klasyczna teoria EHD opiera się na teoretycznym rozkładzie odkształceń pola styku, obliczonym dla idealnie gładkich powierzchni, stąd rozbieżność rozkładu ciśnień w filmie EHD z rozkładem rzeczywistym, wydaje się być nieunikniona. Z tego też względu określanie grubości filmu EHD według wzoru (6) w styku o małej wartości współczynnika λ jest obarczone dużym błędem.

Praktyczne określanie warunków smarowania stało się możliwe dzięki metodzie opracowanej przez T. E. Talliana [47]. Polega ona m. in. na porównywaniu zmian natężenia prądu przechodzącego przez styk EHD powierzchni chropowatych z profilogramem



Rys. 4. Rozkład nacisków w styku statycznym powierzchni rzeczywistych według Greenwooda i Hertza; a) mała, b) duża wysokość chropowatości w stosunku do szerokości strefy styku

nierówności powierzchni. Zakres stosowania tej metody jest ograniczony zdolnością rozdzielczą zapisu zmian natężenia prądu w funkcji czasu. Dla $\lambda \approx 1$ otrzymuje się linię ciągłą oznaczającą, że istnieje przepływ prądu odpowiadający stykowi nierówności.

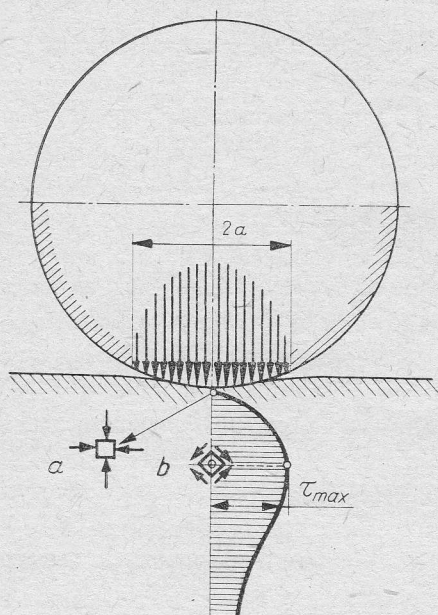
Na uwagę zasługują również próby teoretycznego ujęcia smarowania styków mikro- i nierówności [22] oraz teoria smarowania częściowo-EHD [31]. Ostatnio wysunięto pomysł [2] nowej teorii smarowania w warunkach dużego udziału chropowatości w przenoszeniu obciążenia. Przedmiotem zainteresowania jest również wpływ kierunku chropowatości na nośność hydrodynamiczną filmu olejowego [18, 31].

1.3. Naprężenia w strefie styku EHD

Według hipotezy największych naprężeń stycznych [5] maksymalne wyężenie materiału przy styku walców o liczbie Poissona $\nu = 0,3$ wynosi $0,304 p_{H\max}$ i zachodzi w punkcie leżącym na osi symetrii styku na głębokości $0,78 a$. Według hipotezy energetycznej czy-

stego odkształcenia postaciowego [29] punkt największego wyteżenia materiału leży w tym samym miejscu, a jego wartość wynosi ok. $0,284 p_{H \max}$.

Teoria H. Hertza [28] zakłada, że wymiary styku są małe w porównaniu z promieniami krzywizn elementów, i że największe naciski normalne $p_{H \max}$ występują pośrodku



Rys. 5. Styk statyczny walca z półprzestrzenią sprężystą

a — ciśnienie hydrostatyczne, b — punkt Bielajewa

pola styku (rys. 5). Rozwiązanie zadania kontaktowego na podstawie tych założeń daje zgodność z badaniami doświadczalnymi dla statycznych styków ciał gładkich o zarysie krzywoliniowym. W rzeczywistości powierzchnie ciał kontaktujących się są chropowate, przy czym struktura mikronierówności zależy od procesu technologicznego, zaś rozkład mikronierówności jest stochastyczny [50]. Dlatego też rozwiązanie I. J. Sztajermana [44], dotyczące styku powierzchni chropowatych o regularnym zarysie nierówności, jest bliższe rzeczywistości od rozwiązania H. Hertza [28]. Dla styku, w którym wysokość nierówności w stosunku do szerokości pola styku jest duża, lepszą zgodność z doświadczeniem daje uwzględnienie rozkładu stochastycznego nierówności.

Na ogół styki typu Hertza przenoszą obciążenia w ruchu. Wówczas pojawiają się siły styczne, które zmieniają symetryczne pole naprężeń Hertza. Udział sił stycznych w styku rozpatrzyli m. in. I. J. Sztajerman [44], M. M. Sawierin [42], R. D. Mindlin [37], S. Pytko [41]. Choć ich rozwiązania dają pogląd na wpływ sił stycznych w styku, to jednak nie mają one zastosowania do styku EHD, ze względu na przyjęcie równomiernego rozkładu obciążeń stycznych. Siły styczne w styku EHD rozpatrzono w pracy [14].

Rozkład nacisków w styku EHD [17, 34], różny od hertzowskiego (rys. 2), wpływa na zmianę wyteżenia materiału w strefie zetknięcia [19, 35]. Rozwiązanie tego zagadnienia

zawarte w pracy [35] zawiera błąd modelowy, który wpłynął na otrzymanie zawyżonych wartości $\tau_{\max}$ w strefie do głębokości $0,2 a$. Prawidłowe rozwiązanie tego zagadnienia przedstawiono w dalszej części niniejszej pracy.

2. Założenia

W pracy posłużono się rozkładem ciśnień i geometrią filmu w styku podanymi w [34]. Stosownie do tego przyjęto następujące założenia:

- Para dociskanych wzajemnie i toczących się po sobie nieskończenie długich walców styka się wzdłuż tworzącej.
- Walce są wykonane z materiałów izotropowych i sprężystych. W zakresie rozpatrywanych obciążeń powierzchnie walców są idealnie gładkie.
- Olej podlega prawu Newtona (2) i Barusa (1).
- Przepływ oleju w szczelinie (w strefie styku) jest laminarny, ustalony i izotermiczny, a prędkość przepływu oleju na brzegu kanału jest równa prędkości z jaką przemieszcza się kanał. Składowa pionowa prędkości oleju w szczelinie jest pomijalnie mała.
- Zmiany ciśnienia w filmie, wzdłuż jego grubości, są pomijalnie małe.
- Rozkład ciśnienia i grubości filmu spełniają równania teorii hydrodynamicznej (3) i teorii sprężystości (4).
- Rozkład naprężeń w strefie styku można obliczać jak dla półprzestrzeni sprężystej w płaskim stanie odkształcenia.
- Wyteżenie materiału w strefie styku określa hipoteza maksymalnych naprężeń stycznych podana przez Tresca-Guesta.

3. Obciążenia normalne

Przy przyjętych założeniach rozkład obciążeń normalnych (rys. 2) jest określony rozkładem ciśnienia w filmie. Do obliczeń rozkładu naprężeń w strefie styku przyjęto dane zawarte w pracy [34]. Wyniki przedstawiono na rysunkach 16 - 29 (górne części wykresów).

W jednym przypadku (rys. 23) zmieniono rozkład obciążenia w strefie spiętrzenia w celu określenia wpływu wartości ciśnienia w spiętrzeniu na wyteżenie materiału. Obniżono ciśnienie maksymalne i gradienty ciśnienia — bez zmiany obciążenia wypadkowego styku — w ten sposób, aby rozkład ciśnienia był podobny do rozkładów znalezionych eksperymentalnie przez J. W. Kannela [33] (rys. 3). Jest to próba uzyskania wyników zbliżonych do rzeczywistości.

4. Obciążenia styczne

Obciążeniami stycznymi styku są siły tarcia wewnętrznego w filmie smarnym działające w kierunku osi x .

Wypadkowe siły styczne w styku walców nieodkształcalnych rozpatrzył A. Cameron [7]. Jego interpretacja kierunków działania sił składowych tarcia na powierzchni walców

spotkała się jednak z krytyką [14]. Prawidłowe rozwiązanie tego zagadnienia podał A. W. Crook [12], uwzględniając zjawiska cieplne w styku.

Poniżej obliczono rozkłady sił tarcia τ_{yx} , posługując się założeniami podanymi w punkcie 2 oraz przyjmując, że początek układu odniesienia (rys. 1) znajduje się na linii łączącej środki walców przed odkształceniem, w połowie odległości między powierzchniami rozdzielonymi filmem EHD.

Z warunku równowagi elementu płynu (rys. 1) wynika, że

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (7)$$

Dla przyjętego układu odniesienia równanie Newtona ma postać opisaną wzorem:

$$\tau_{xy} = \eta \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2a)$$

przy czym τ_{yx} będziemy uważali za wielkość dodatnią, gdy kierunek działania momentu liczony względem środka elementu będzie przeciwny do kierunku wskazówek zegara. Zgodnie z przyjętymi założeniami:

$$\eta = \eta(x), \quad u = u(x, y). \quad (8)$$

Na podstawie całkowania równania (7) otrzymujemy kolejno:

$$y \frac{dp}{dx} = \eta \frac{\partial u}{\partial y} + C, \quad (9)$$

a więc

$$\tau_{yx} = y \frac{dp}{dx} - C \quad (9a)$$

oraz

$$u = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + D_1. \quad (10)$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych:

$$\begin{aligned} u &= u_1 & \text{dla } y &= h_1, \\ u &= u_2 & \text{dla } y &= -h_2, \end{aligned} \quad (11)$$

równania (9a) i (10) przyjmują postać następującą:

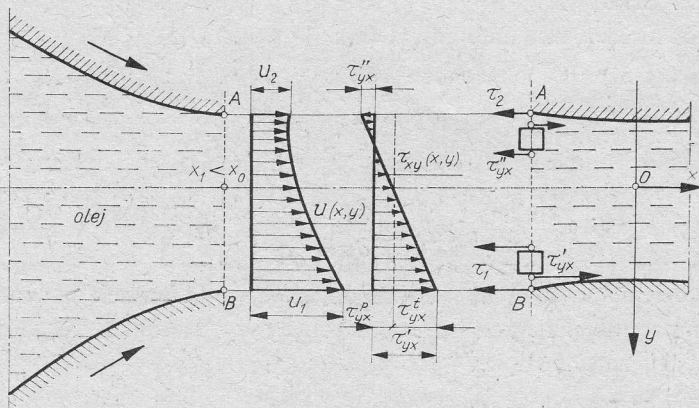
$$\tau_{yx} = \left[y - \frac{1}{2} (h_1 - h_2) \right] \frac{dp}{dx} + \eta \frac{u_1 - u_2}{h_1 + h_2}, \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} y^2 - \left(\frac{u_1 - u_2}{h_1 + h_2} - \frac{h_1 - h_2}{2\eta} \frac{dp}{dx} \right) y + \\ &+ u_2 \frac{h_1}{h_1 + h_2} + u_1 \frac{h_2}{h_1 + h_2} - \frac{h_1 h_2}{2\eta} \frac{dp}{dx}. \end{aligned} \quad (10a)$$

Równanie (10a) przedstawiające rozkład prędkości płynu w szczelinie styku jest parabolą drugiego stopnia (rys. 1). Wypukłość (wkłęsłość) krzywej $u(x, y)$ zależy od znaku gradientu

ciśnienia $p(x)$. Z kolei obrazem graficznym równania (9b) opisującego rozkład sił lepkości $\tau_{yx}(x, y)$ jest linia prosta.

Na rys. 6 pokazano przebieg obu zależności w strefie wlotowej kanału ($x < x_0$, $dp/dx > 0$) przy założeniu, że $u_1 > u_2$. Zaznaczono również kierunki działania sił stycznych oraz oddziaływanie płynu w szczelinie na jej ścianki.



Rys. 6. Rozkład prędkości i sił stycznych płynu w filmie EHD (rys. poglądowy)

Siły na brzegu kanału. Podstawiając kolejno $y = h_1$ i $y = -h_2$ do (9b), otrzymujemy:

$$\tau'_{yx} = \frac{1}{2} (h_1 + h_2) \frac{dp}{dx} + \eta \frac{u_1 - u_2}{h_1 + h_2}, \quad (9c)$$

$$\tau'_{yx} = -\frac{1}{2} (h_1 + h_2) \frac{dp}{dx} + \eta \frac{u_1 - u_2}{h_1 + h_2}.$$

Pierwsze składniki sumy we wzorach (9c) oznaczają elementarne siły styczne podczas toczenia bez poślizgu w styku, a drugie – elementarne siły styczne przy poślizgu.

Oznaczając $h = h_1 + h_2$, gdzie h jest grubością filmu, równania (9c) przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned} \tau'_{yx} &= \frac{1}{2} h \frac{dp}{dx} + (u_1 - u_2) \frac{\eta}{h}, \\ \tau''_{yx} &= -\frac{1}{2} h \frac{dp}{dx} + (u_1 - u_2) \frac{\eta}{h}. \end{aligned} \quad (9d)$$

Elementarne siły styczne na brzegu kanału wynoszą:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -\tau'_{yx} = -\frac{1}{2} h \frac{dp}{dx} - (u_1 - u_2) \frac{\eta}{h}, \\ \tau_2 &= \tau''_{yx} = -\frac{1}{2} h \frac{dp}{dx} + (u_1 - u_2) \frac{\eta}{h}, \end{aligned} \quad (9e)$$

natomiast siły styczne, przypadające na jednostkę szerokości każdej bieźni, są następujące:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \int_{x_1}^{x_2} \tau_1 dx = -\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} h dp - (u_1 - u_2) \int_{x_1}^{x_2} \frac{\eta}{h} dx, \\
 T_2 &= \int_{x_1}^{x_2} \tau_2 dx = -\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} h dp + (u_1 - u_2) \int_{x_1}^{x_2} \frac{\eta}{h} dx.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Wielkości x_1 , x_2 oznaczają granice strefy styku.

Dla obliczenia rozkładu sił stycznych wprowadzono podział dyskretny strefy styku (rys. 7), przyjmując granice przedziałów jak w [34] i liniowy przebieg funkcji $p(x)$ i $h(x)$ wewnątrz przedziału. Ponadto wprowadzono współrzędne bezwymiarowe:

$$\varphi = \frac{x}{a}, \quad \xi = \frac{y}{a} \tag{13}$$

oraz pojęcie poślizgu zdefiniowanego w sposób następujący:

$$t = \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}. \tag{14}$$

Założono, że lepkość zmienia się z ciśnieniem (wzór (1)) oraz, że średnia prędkość strugi oleju w szczelinie wynosi:

$$u_0 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2). \tag{15}$$

Siły styczne liczono z następujących wzorów:

$$\begin{aligned}
 \tau_{i,t} &= -\frac{1}{2} h_i \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{a(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})}, \\
 \tau_i &= \tau_{i,t} \pm 2t\eta_0 u_0 \frac{e^{\alpha p_i}}{h_i},
 \end{aligned}
 \tag{9f}$$

$$\left. \begin{aligned}
 T_i &= \frac{a}{2} \sum_{i=1}^k (\tau_{i+1,t} + \tau_{i,t})(\varphi_{i+1} - \varphi_i), \\
 T &= \frac{a}{2} \sum_{i=1}^k (\tau_{i+1} + \tau_i)(\varphi_{i+1} - \varphi_i), \\
 a &= 2\sqrt{\frac{RP}{E'}}, \\
 P &= \frac{1}{2} a \sum_{i=1}^k (p_{i+1} + p_i)(\varphi_{i+1} - \varphi_i), \\
 \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \\
 \frac{1}{E'} &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right).
 \end{aligned} \right\} \tag{12a}$$

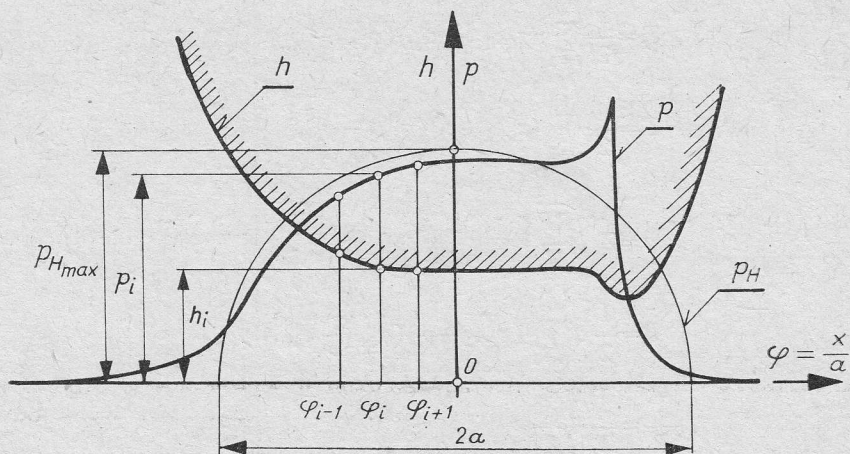
Tabela 1

Charakterystyki wybranych wariantów styku EHD

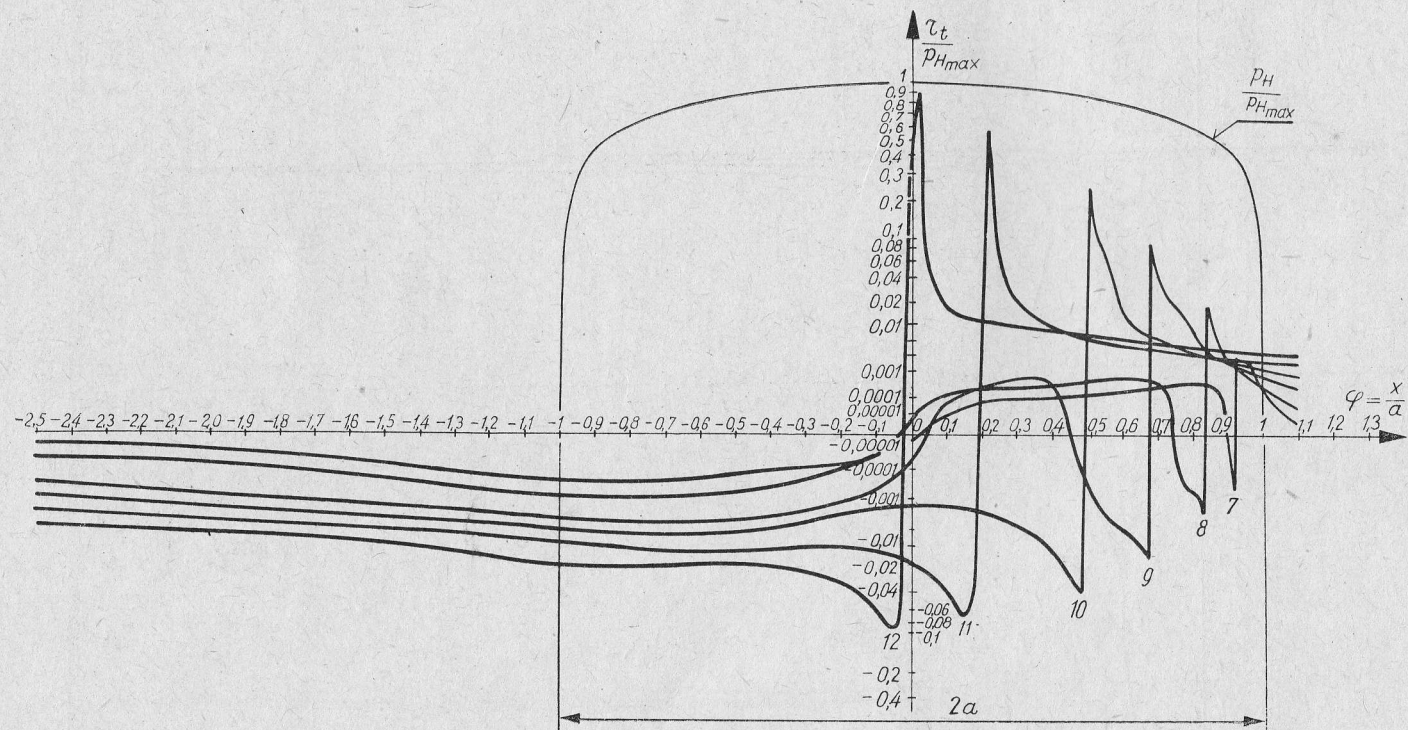
Wielkość	Nr*	5	7	8	9	10	11	12
	jednostka							
$U \cdot 10^{12}$	—	62,7	1,48	8,14	81,3	224	660	1418
M	—	7060			4960			
$G \cdot 10^5$	—	4,150	3,603	3,915	4,178	4,320	4,260	4,890
π_w	—	2,740	1,048	1,020	2,612	3,200	3,630	3,830
$H \cdot 10^5$	—	8,67	0,52	1,69	8,60	17,24	36,10	60,70
h_m	m	5	0,3	1	5	10	20,4	33
h_{min}	m	4,355	0,260	0,845	4,30	8,62	18,05	30,38
$p_H \max$	MN/m ²	725			510			
$p_w/p_H \max$	—	1,35	0,53	0,81	1,29	1,55	1,78	1,74
P	kN/m	732			535			
φ_w	—	0,70	0,92	0,84	0,68	0,50	0,20	0
a		645			640			
Materialy		stal – stal	stal – brąz					
Stale materiałowe		$\nu = 0,29$ $E' = 353 \cdot 10^3$ MN/m ²	$\nu_1 = 0,29$ $\nu_2 = 0,34$ $E' = 248 \cdot 10^3$ MN/m ²					
Pozostałe parametry		$\alpha = 0,02$ m ² /MN, $\eta_0 = 0,4$ Ns/m ² , $R = 0,05$ m						
Znaczenie parametrów bezwymiarowych		$U = \frac{\eta_0 u_0}{E'R}$, $G = \frac{P}{E'R}$, $M = \alpha E'$						

* Numeracja zgodna z numeracją przyjętą w pracy [34].

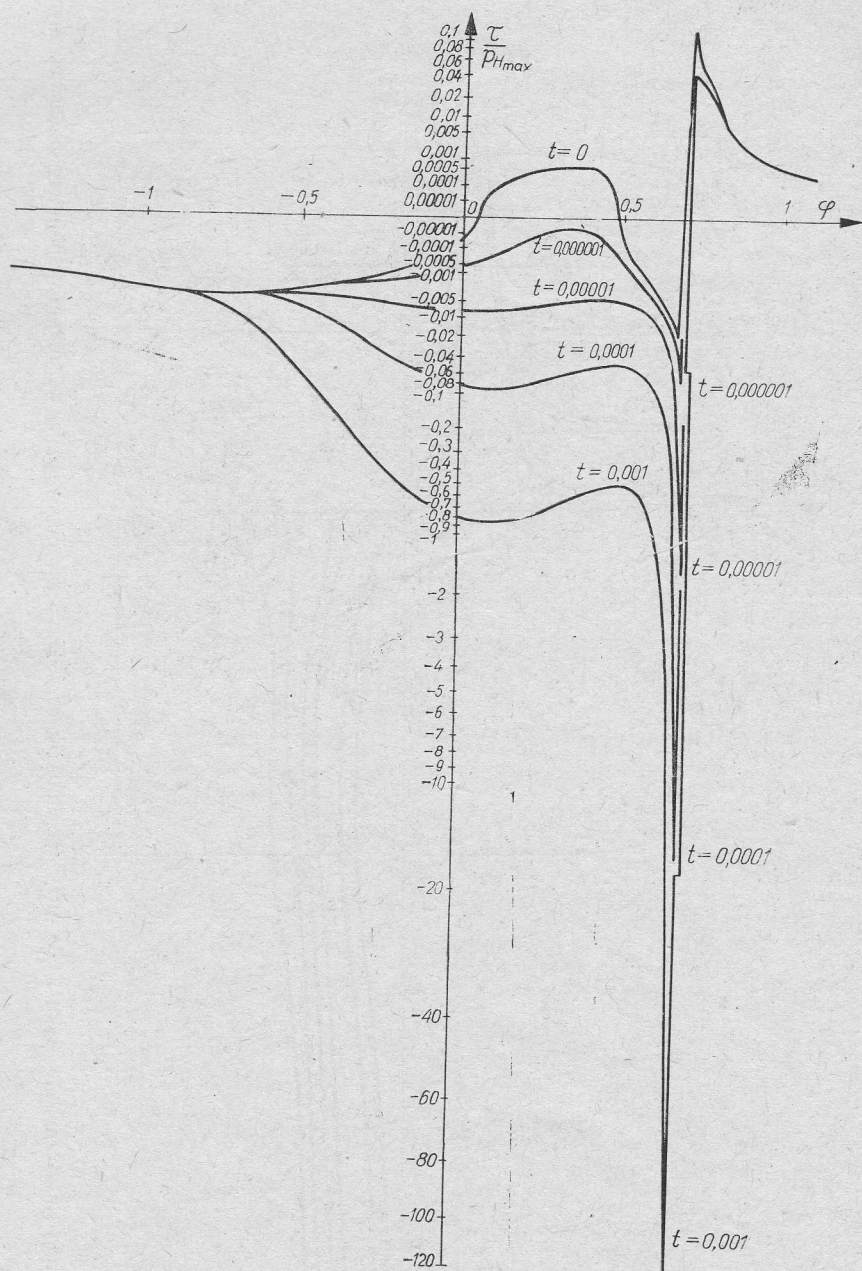
Do obliczeń przyjęto wartości ciśnień i wymiary filmu (tabela 1) zamieszczone w pracy [34]. Rozkłady ciśnień $p_i(\varphi_i)$ i kształty filmu $h_i(\varphi_i)$ przedstawiono na rysunkach 2 oraz 16 - 29. Rozkład i wypadkowe sił tarcia w funkcji iloczynu $\eta_0 u_0$ oraz wpływ poślizgu



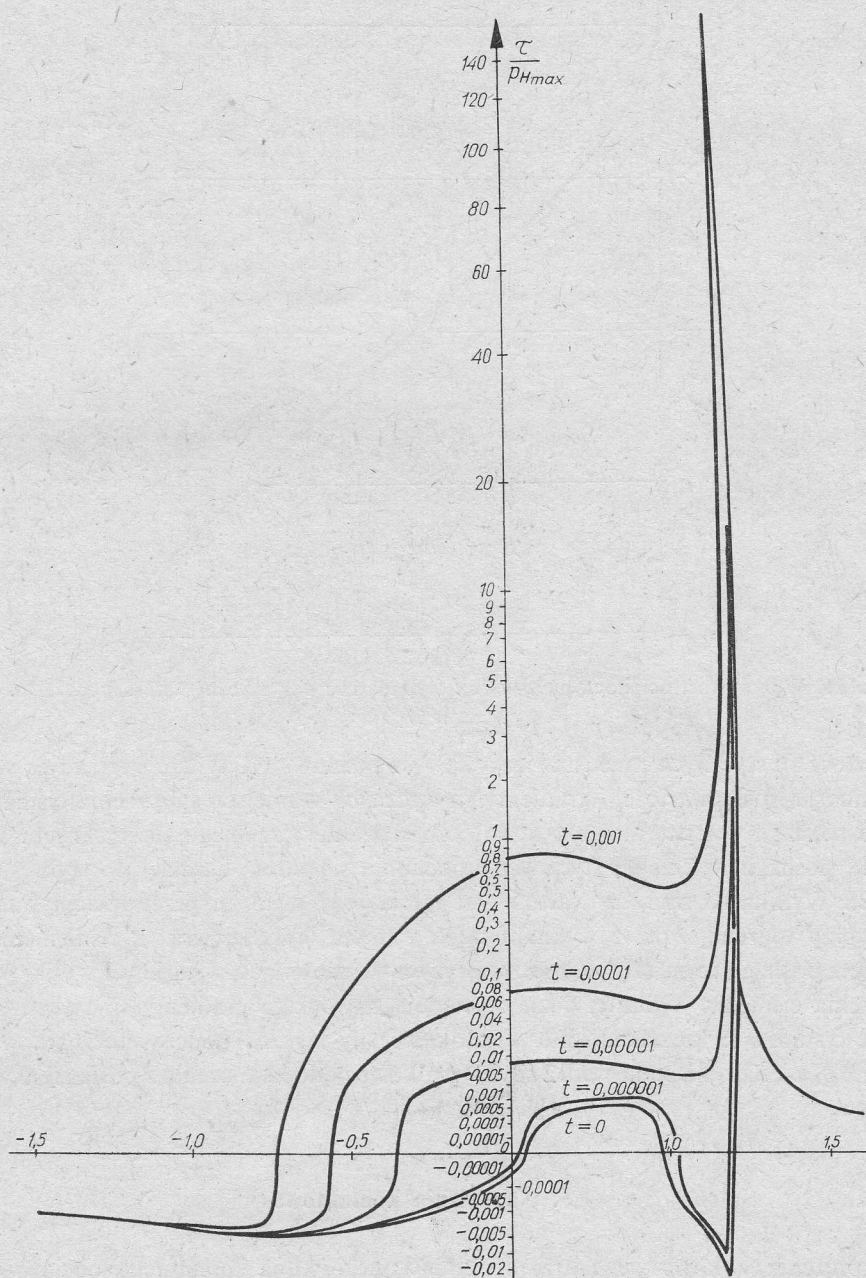
Rys. 7. Oznaczenia wielkości obliczeniowych



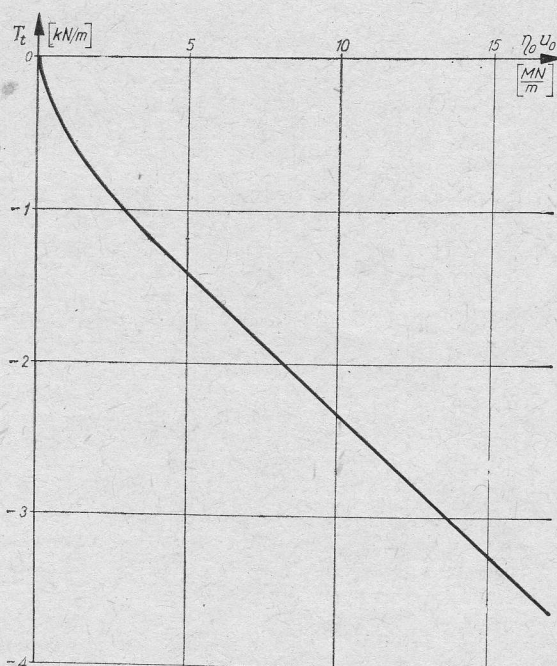
Rys. 8. Rozkład sił stycznych w styku EHD przy toczeniu (numery krzywych odpowiadają warunkom współpracy przedstawionym w tab. 1)



Rys. 9. Rozkłady sił stycznych w styku EHD przy toczeniu z poślizgiem na powierzchni walca o większej prędkości ($u_1 > u_2$)



Rys. 10. Rozkłady sił stycznych w styku EHD przy toczeniu z poślizgiem na powierzchni walca o mniejszej prędkości ($u_2 < u_1$)



Rys. 11. Wpływ wartości iloczynu $\eta_0 u_0$ na wypadkowe siły styczne tarcia podczas toczenia

na wartość sił stycznych przedstawiono na rysunkach 8 - 10. Widać stąd, że ze wzrostem iloczynu $\eta_0 u_0$ rosną wartości i gradienty sił stycznych w miejscu spiętrzenia ciśnienia (φ_w). Udział poślizgu w styku zmienia zasadniczo charakter przebiegu sił stycznych. W miarę wzrostu poślizgu wykres sił stycznych upodabnia się coraz bardziej do wykresu ciśnień (rys. 2). Wynika to stąd, że wartości sił tarcia przy poślizgu przewyższają wartości sił tarcia przy toczeniu oraz z wykładniczego wzrostu lepkości wraz z ciśnieniem (1). Ze wzrostem poślizgu rosną siły styczne, przy czym wzrost ten jest wyjątkowo szybki w miejscu spiętrzenia ciśnienia w filmie, gdzie występują największe gradienty sił stycznych.

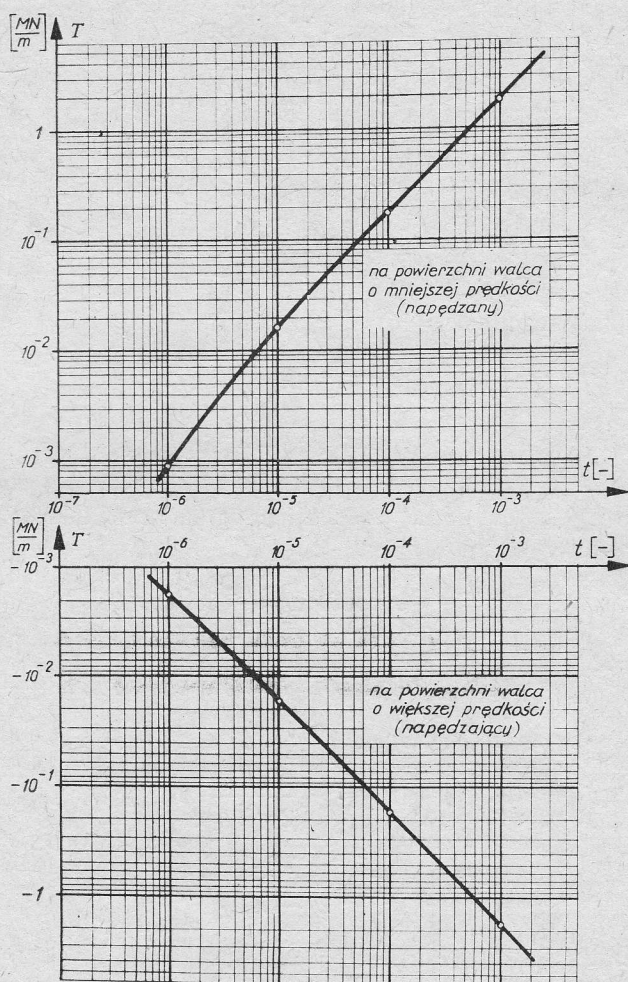
Na rysunku 11 przedstawiono wypadkowe siły styczne podczas toczenia w funkcji iloczynu $\eta_0 u_0$, natomiast na rys. 12 siły wypadkowe podczas toczenia z poślizgiem w funkcji poślizgu.

5. Naprężenia kontaktowe

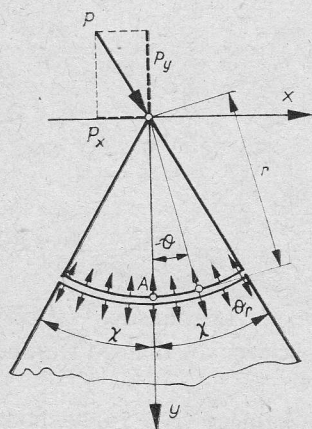
Naprężenia stykowe wewnątrz nieograniczonego klina sprężystego obciążonego siłą skupioną (rys. 13) można wyliczyć stosując funkcję Airy'ego [36]:

$$F(r, \theta) = r\theta \left(\frac{C_1}{2} \sin \theta + \frac{C_2}{2} \cos \theta \right). \quad (16)$$

Równania naprężeń spełniające warunki ciągłości i warunki równowagi są następujące:



Rys. 12. Siły wypadkowe tarcia wywołanego lepkością w styku EHD w funkcji poślizgu



Rys. 13. Nieograniczony klin sprężysty obciążony siłą skupioną

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Podstawiając $F(r, \theta)$, zgodnie z (16) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = \tau_{r\theta} &= 0, \\ \sigma_r &= \frac{C_1}{r} \cos \theta - \frac{C_2}{r} \sin \theta. \end{aligned} \quad (17a)$$

Z warunków równowagi dla górnej części klina, ograniczonej łukiem koła o promieniu r , wynika:

$$\begin{aligned} P_y &= - \int_{-\chi}^{\chi} \sigma_r \cos \theta r d\theta = -C_1 \int_{-\chi}^{\chi} \cos^2 \theta d\theta, \\ P_x r &= - \int_{-\chi}^{\chi} \sigma_r \cos \theta r^2 d\theta = C_2 r \int_{-\chi}^{\chi} \sin^2 \theta d\theta. \end{aligned} \quad (18)$$

Stąd

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{2P_y}{2\chi + \sin 2\chi}, \\ C_2 &= \frac{2P_x}{2\chi - \sin 2\chi}, \end{aligned} \quad (18a)$$

a po podstawieniu (18a) do (17a)

$$r = -\frac{2P_y \cos \theta}{r(2\chi + \sin 2\chi)} - \frac{2P_x \sin \theta}{r(2\chi - \sin 2\chi)}. \quad (17b)$$

Dla $\chi = \pi/2$ otrzymujemy następujące wzory dla półpłaszczyzny:

$$\sigma_r = -\frac{2P_y \cos \theta}{\pi r} - \frac{2P_x \sin \theta}{\pi r}, \quad (19)$$

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0,$$

$$C_1 = -\frac{2P_y}{\pi}, \quad C_2 = \frac{2P_x}{\pi}. \quad (18b)$$

Rozwiązanie (19) nie spełnia warunków równowagi w punkcie przyłożenia siły. W rzeczywistości jednak nigdy nie zachodzi przypadek punktowego obciążenia i dlatego warunek ten można uważać za formalny.

Między współrzędnymi układów — biegunowego i prostokątnego (rys. 14) zachodzą zależności następujące:

$$\theta = \arctg \frac{x}{y},$$

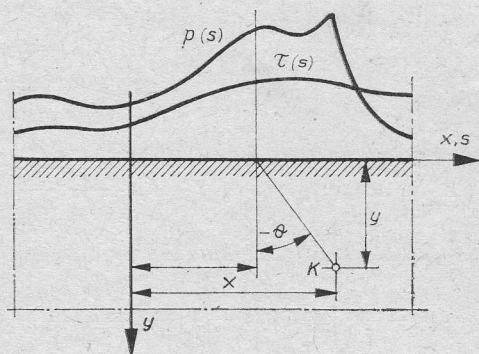
$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}.$$
(20)

Po uwzględnieniu (20) składowe stanu naprężeń w dowolnym punkcie $k(x, y)$ półpłaszczyzny sprężystej mają postać następującą:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P_y}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2P_x}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_y &= -\frac{2P_y}{\pi} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2P_x}{\pi} \frac{y^2 x}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P_y}{\pi} \frac{y^2 x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2P_x}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17c)$$

Pierwsze składniki sumy po prawej stronie zależą tylko od obciążenia pionowego, drugie – tylko od poziomego (siła skupiona P umieszczona jest w początku układu współrzędnych).

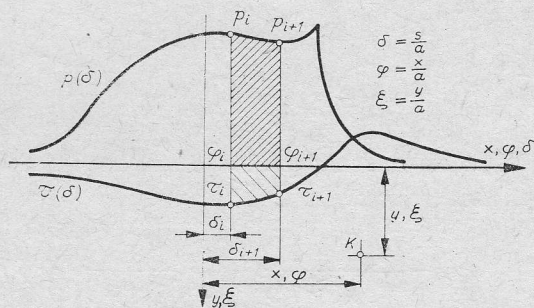
Ustalając punkt k i zmieniając położenie siły P na brzegu półprzestrzeni – w kierunku osi x , wtedy wzory (17c) określają linie wpływowe naprężeń. Zatem, jeśli wzdłuż linii



Rys. 14. Półprzestrzeń sprężysta pod obciążeniem ciągłym

$y=0$ działa ciągle obciążenie normalne $p(s)$ i styczne $\tau=0$, gdzie s jest współrzędną obciążenia mierzoną wzdłuż osi x , to naprężenia w półpłaszczyźnie (rys. 14) wyrażają wzory:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(s)(x-s)^2}{[y^2 + (x-s)^2]^2} ds - \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(s)(x-s)^3}{[y^2 + (x-s)^2]^2} ds, \\ \sigma_y &= -\frac{2y^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(s)}{[y^2 + (x-s)^2]^2} ds - \frac{2y^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(s)(x-s)}{[y^2 + (x-s)^2]^2} ds, \\ \tau_{xy} &= -\frac{2y^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(s)(x-s)}{[y^2 + (x-s)^2]^2} ds - \frac{2y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(s)(x-s)^2}{[y^2 + (x-s)^2]^2} ds. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$



Rys. 15. Półprzestrzeń sprężysta pod obciążeniem EHD

Stąd, znając funkcję obciążeń (pionowego $p(s)$ i poziomego $\tau(s)$), można wyznaczyć składowe stanu naprężenia w dowolnym punkcie półprzestrzeni.

Ponieważ funkcje obciążeń $p(s)$ i $\tau(s)$ są dane w postaci wyników rozwiązania numerycznego, dlatego wzory (21) należy dostosować do tej postaci. W tym celu wprowadzono podział dyskretny strefy styku na około $42 \div 46$ przedziałów (zależnie od wariantu obciążeń), przy czym punkty podziału (współrzędne φ) odpowiadają punktom przyjętym w pracy [34]. Założono, że rozkład obciążenia w przedziale dyskretnym (rys. 15) jest liniowy. Obciążenie w przedziale $s \in (s_i, s_{i+1})$ można więc zapisać w sposób następujący:

$$\begin{aligned} p(s) &= p_i + k_i(s - s_i), \\ \tau(s) &= \tau_i + \kappa_i(s - s_i), \end{aligned} \quad (22)$$

gdzie

$$\begin{aligned} p_i &\equiv p(s_i), \quad \tau_i \equiv \tau(s_i), \\ k_i &= \frac{p_{i+1} - p_i}{s_{i+1} - s_i}, \quad \kappa_i = \frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{s_{i+1} - s_i}. \end{aligned} \quad (23)$$

Po podstawieniu (22) do (21) i obliczeniu całek otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sigma_{xi} &= -\frac{1}{\pi} \left\{ [p_i + k_i(s - s_i)] \frac{(x - s)y}{y^2 + (x - s)^2} + [p_i + k_i(x - s_i) + 3\kappa_i y] \arctg \frac{x - s}{y} + \right. \\ &\quad \left. - [\tau_i + \kappa_i(x - s_i) - k_i y] \ln [y^2 + (x - s)^2] + 2\kappa_i(x - s) - \frac{\tau_i + (s - s_i)\kappa_i}{y^2 + (x - s)^2} y^2 \right\} \Big|_{s_i}^{s_{i+1}}, \\ \sigma_{yi} &= -\frac{1}{\pi} \left\{ -[p_i - (x - s_i)k_i] \frac{(x - s)y}{y^2 + (x - s)^2} + [p_i + (x - s_i)k_i - \kappa_i y] \arctg \frac{x - s}{y} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\tau_i + \kappa_i(s - s_i) - k_i y}{y^2 + (x - s)^2} \right] y^2 \right\} \Big|_{s_i}^{s_{i+1}}, \\ \tau_{xyi} &= -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{p_i + k_i(s - s_i)}{y^2 + (x - s)^2} y^2 + \frac{[\tau_i + (s - s_i)\kappa_i](x - s)}{y^2 + (x - s)^2} y + \right. \\ &\quad \left. + [k_i y - \tau_i - \kappa_i(x - s)] \arctg \frac{x - s}{y} + \kappa_i y \ln [y^2 + (x - s)^2] \right\} \Big|_{s_i}^{s_{i+1}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Podstawiając granice całkowania $s \in (-a, a)$ i przyjmując, że $\tau_i = \tau_{i+1} = 0$ oraz $p_i = p_{i+1} = p$, otrzymujemy wzory identyczne z wzorami (34.8.5), (34.8.6) i (34.8.7) wyprowadzonymi dla naprężeń od równomiernego obciążenia ciągłego p w przedziale od $-a$ do a w pracy [36].

Po uwzględnieniu granic całkowania, wprowadzeniu współrzędnych bezwymiarowych (13), zsumowaniu naprężeń (na zasadzie superpozycji) i odniesieniu wartości naprężeń do wartości największego nacisku statycznego w styku $p_{H \max}$, otrzymujemy ostatecznie:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\varphi = & -\frac{1}{\pi p_{H \max}} \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{p_i(\delta_i - \varphi)\xi + \tau_i \xi^2}{\xi^2 + (\delta_i - \varphi)^2} - \frac{p_{i+1}(\delta_{i+1} - \varphi)\xi + \tau_{i+1} \xi^2}{\xi^2 + (\delta_{i+1} - \varphi)^2} + \right. \\ & - [p_i - k_i(\delta_i - \varphi) + 3\kappa_i \xi] \left(\operatorname{arctg} \frac{\delta_{i+1} - \varphi}{\xi} - \operatorname{arctg} \frac{\delta_i - \varphi}{\xi} \right) + \\ & - [k_i \xi - \tau_i + \kappa_i(\delta_i - \varphi)] \ln \frac{\xi^2 + (\delta_{i+1} - \varphi)^2}{\xi^2 + (\delta_i - \varphi)^2} - 2(\tau_{i+1} - \tau_i) \quad , \\ \sigma_\xi = & -\frac{1}{\pi p_{H \max}} \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{[p_i - k_i(\delta_i - \varphi)](\delta_{i+1} - \varphi)\xi + \tau_{i+1} \xi^2 - k_i \xi^3}{\xi^2 + (\delta_i - \varphi)^2} + \right. \\ & + \frac{[p_i - k_i(\delta_i - \varphi)](\delta_i - \varphi)\xi + \tau_i \xi^2 - k_i \xi^3}{\xi^2 + (\delta_i - \varphi)^2} + \\ & + [p_i - k_i(\delta_i - \varphi) - \kappa_i \xi] \left(\operatorname{arctg} \frac{\delta_{i+1} - \varphi}{\xi} - \operatorname{arctg} \frac{\delta_i - \varphi}{\xi} \right) \left. \right\} \quad , \\ \tau_{\varphi \xi} = & -\frac{1}{\pi p_{H \max}} \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \left[\frac{p_{i+1} \xi - \tau_{i+1}(\delta_{i+1} - \varphi)}{\xi^2 + (\delta_{i+1} - \varphi)^2} - \frac{p_i \xi - \tau_i(\delta_i - \varphi)}{\xi^2 + (\delta_i - \varphi)^2} \right] \xi + \right. \\ & - [k_i \xi - \tau_i + \kappa_i(\delta_i - \varphi)] \left(\operatorname{arctg} \frac{\delta_{i+1} - \varphi}{\xi} - \operatorname{arctg} \frac{\delta_i - \varphi}{\xi} \right) + \\ & + \kappa_i \xi \ln \frac{\xi^2 + (\delta_{i+1} - \varphi)^2}{\xi^2 + (\delta_i - \varphi)^2} \left. \right\} \quad , \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

gdzie

$$p_{H \max} = \frac{2P}{\pi a} \quad , \quad \delta = \frac{s}{a} \quad .$$

Wobec przyjętych założeń w punkcie 2, składową $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ nie wpływającą na wyteżenie materiału pominięto.

6. Wyteżenie materiału w strefie styku

Wyteżenie materiału w strefie styku obliczono na podstawie hipotezy maksymalnych naprężeń stycznych, która w odniesieniu do materiałów plastycznych znajduje najlepsze potwierdzenie doświadczalne (por. np. [48]). Według tej hipotezy naprężenia główne

wynoszą:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_\varphi + \sigma_\xi}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\varphi - \sigma_\xi}{2}\right)^2 + \tau_{\varphi\xi}^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_\varphi + \sigma_\xi}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_\varphi - \sigma_\xi}{2}\right)^2 + \tau_{\varphi\xi}^2},\end{aligned}\quad (26)$$

a największe naprężenie tnące jest równe

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\varphi - \sigma_\xi}{2}\right)^2 + \tau_{\varphi\xi}^2}. \quad (27)$$

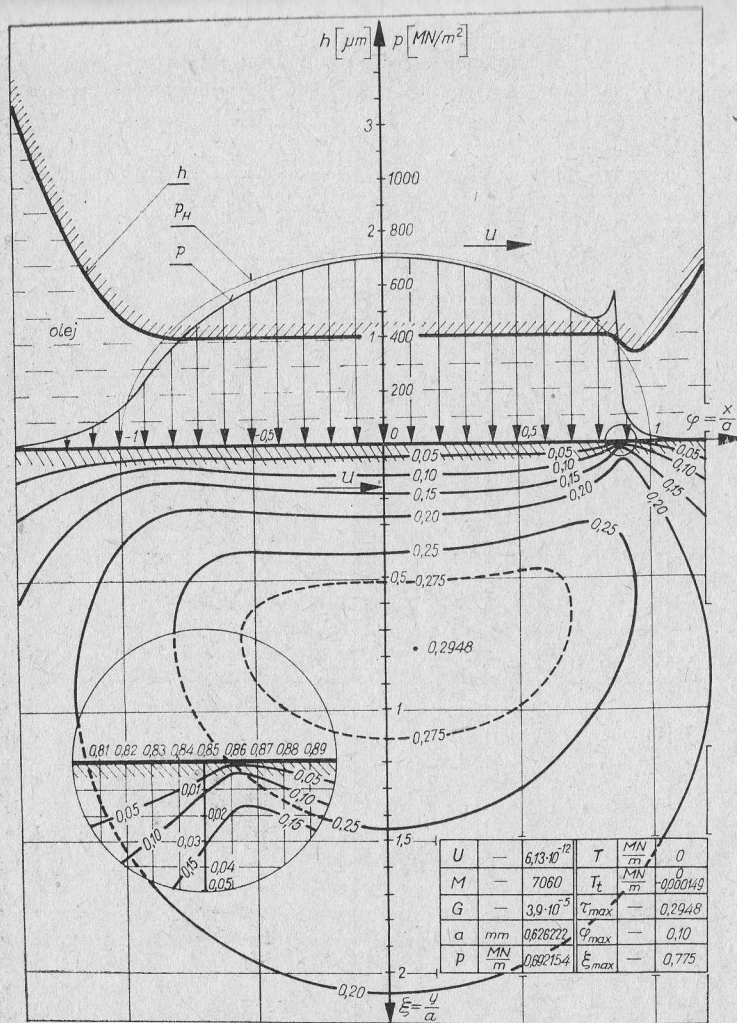
Na podstawie (27) obliczono $\tau_{\max}$ w obszarze strefy styku, podstawiając w miejsce $\sigma_\varphi, \sigma_\xi, \tau_{\varphi\xi}$ naprężenia składowe określone wzorami (25). Dla każdego wariantu obliczeń

Tabela 2

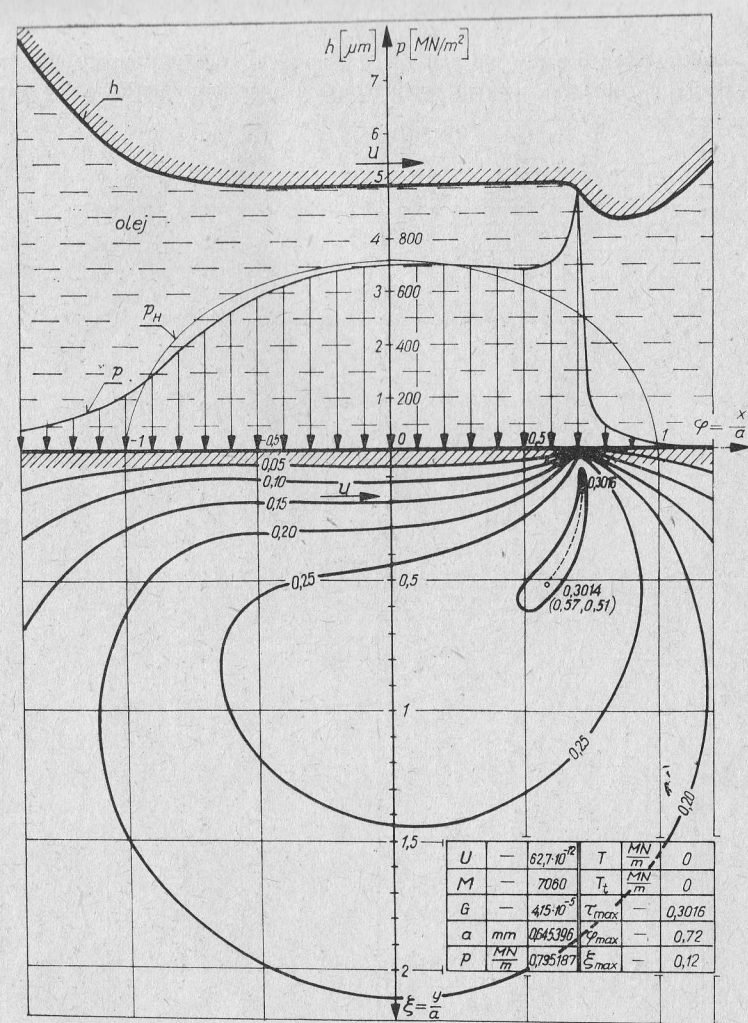
Zestawienie obliczonych parametrów wyężenia materiału w strefie styku EHD dla różnych wariantów

Wariant*		4/1	4/2	5/1	5/2	5/3	5/3'	6/1	6/2	6a/2	7/1	7/2
Parametry zadane	$U \cdot 10^{12}$	6,13		62,7				169,1			1,48	
	M			7070								
	$G \cdot 10^5$	3,9		4,15				4,21			3,603	
	$P \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$	692,154		735,187				747,573		752,216	490,428	
	$a \text{ [mm]}$	0,62622		0,64540				0,65081		0,65283	0,62889	
Parametry obliczone	$T_t \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$	0	-0,149	0	-0,542	0		0	-1,218	-1,303	0	-0,026
	$T \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$	0				-1,975	0,891					
	$\tau_{\max}$	0,2948	0,2948	0,3016	0,3018	0,3017	0,3041	0,3631	0,3930	0,3219	0,2979	0,2979
	$\varphi_{\max}$	0,10	0,10	0,72	0,72	0,65	0,72	0,57	0,57	0,56	0,04	0,40
	$\xi_{\max}$	0,775	0,775	0,12	0,10	0,40	0,08	0,035	0,01	0,25	0,78	0,78
Wariant*		8/1	8/2	9/1	9/2	10/1	10/2	11/1	11/2	12/1	12/2	
Parametry zadane	$U \cdot 10^{12}$	8,14		81,3		223,8		660		1418		
	M			4960								
	$G \cdot 10^5$	3,915		4,178		4,32		4,26		4,89		
	$P \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$	487,432		513,941		537,253		514,366		623,222		
	$a \text{ [mm]}$	0,62697		0,64379		0,65823		0,64406		0,70894		
Parametry obliczone	$T_t \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$	0	-0,116	0	-0,391	0	-1087	0	-1,564	0	-3,871	
	$T \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$	0										
	$\tau_{\max}$	0,2945	0,2945	0,3017	0,3017	0,3369	0,3387	0,3833	0,4990	0,3791	0,8338	
	$\varphi_{\max}$	0,12	0,13	0,62	0,61	0,50	0,51	0,21	0,22	0,003	0,02	
	$\xi_{\max}$	0,77	0,77	0,42	0,43	0,13	0,085	0,055	0	0,049	0	

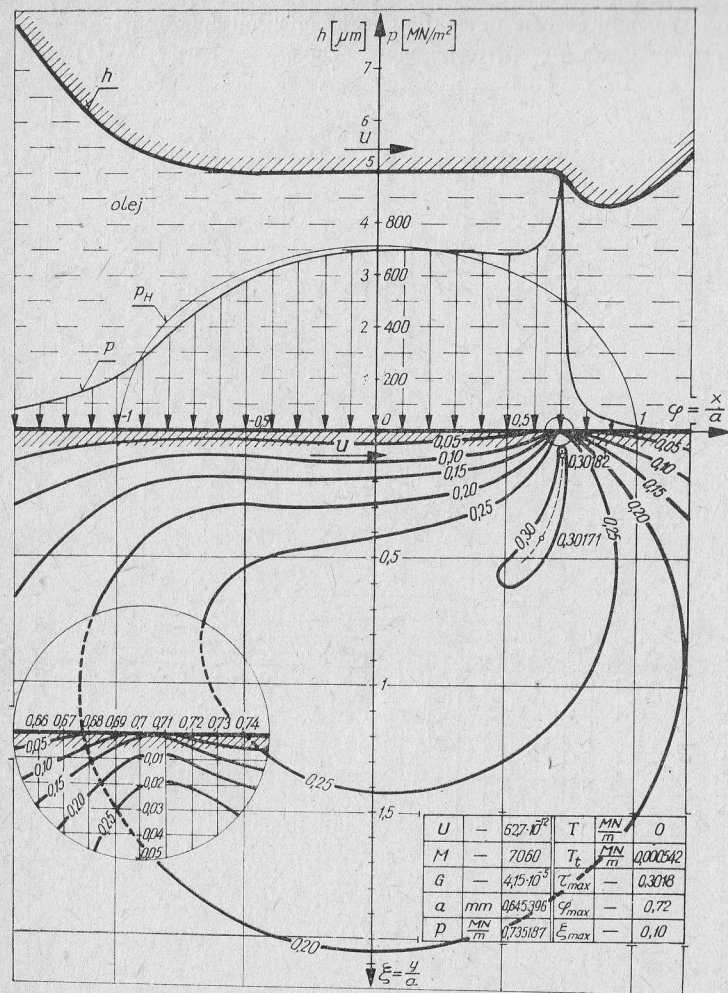
* Numeracja wariantów zgodna z numeracją przyjętą w pracy [34].



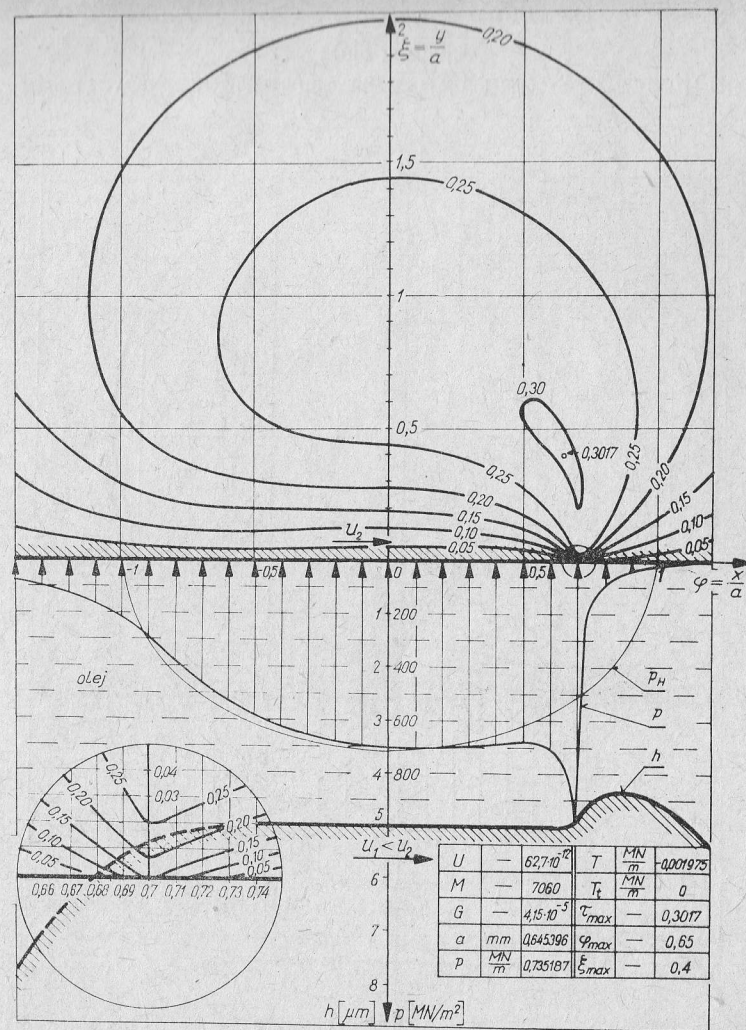
Rys. 16. Wyteżenie materiału w strefie styku EHD — wariant 4/1 $\equiv$ 4/2. Obciążenie normalne oraz normalne i styczne toczenia



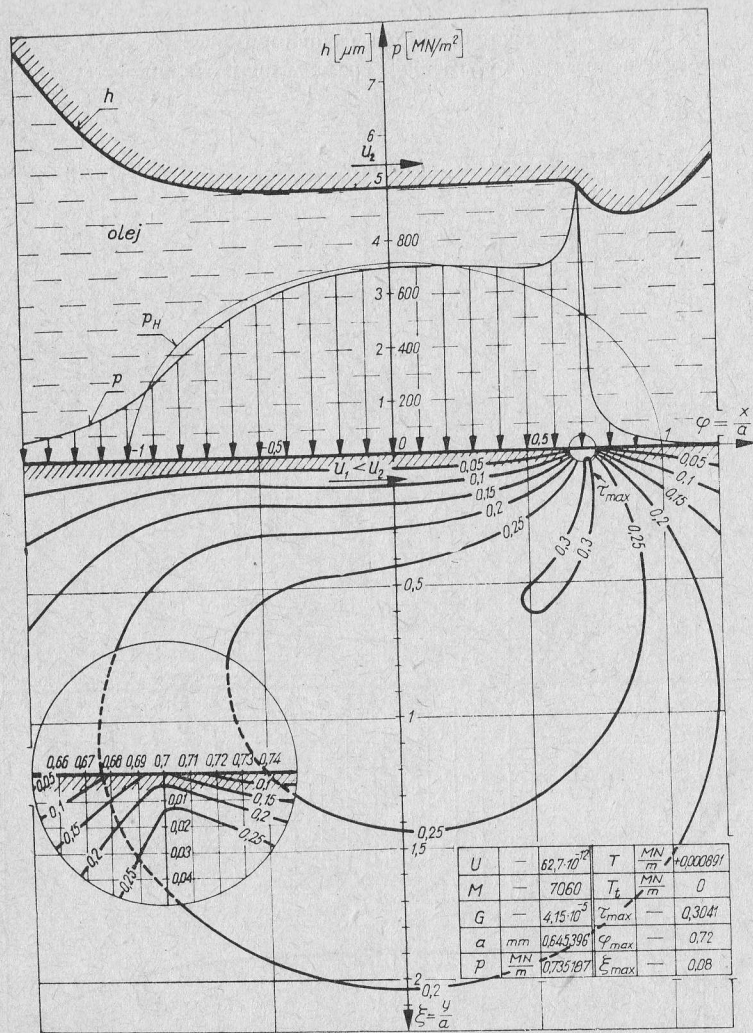
Rys. 17. Wyteżenie materiału w strefie styku EHD — wariant 5/1. Obciążenie normalne



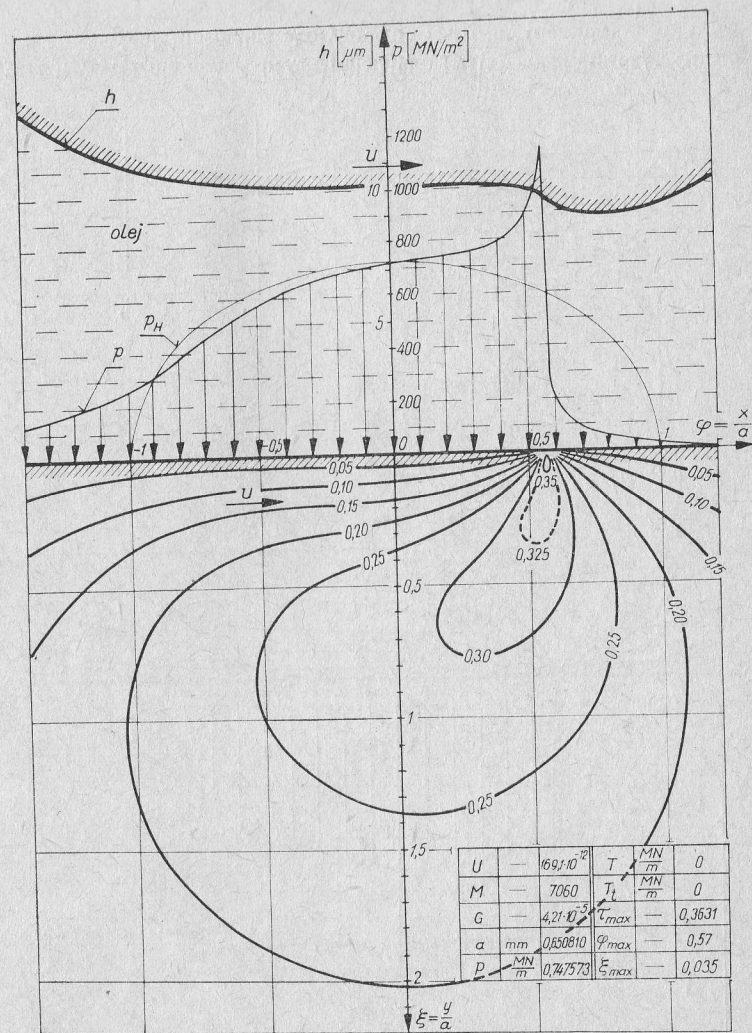
Rys. 18. Wytężenie materiału w strefie styku EHD – wariant 5/2. Obciążenie normalne i styczne toczenia



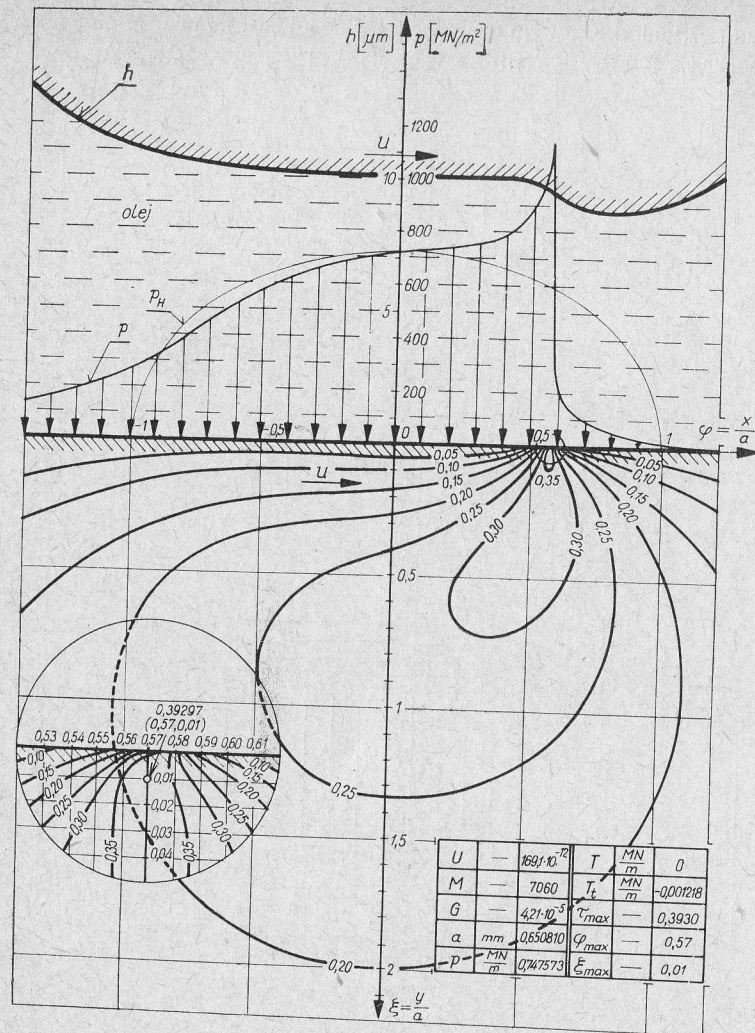
Rys. 19. Wyłączenie materiału w strefie styku EHD – wariant 5/3. Obciążenie normalne i styczne toczenia z poślizgiem dla walca o większej prędkości ($u_2 > u_1$)



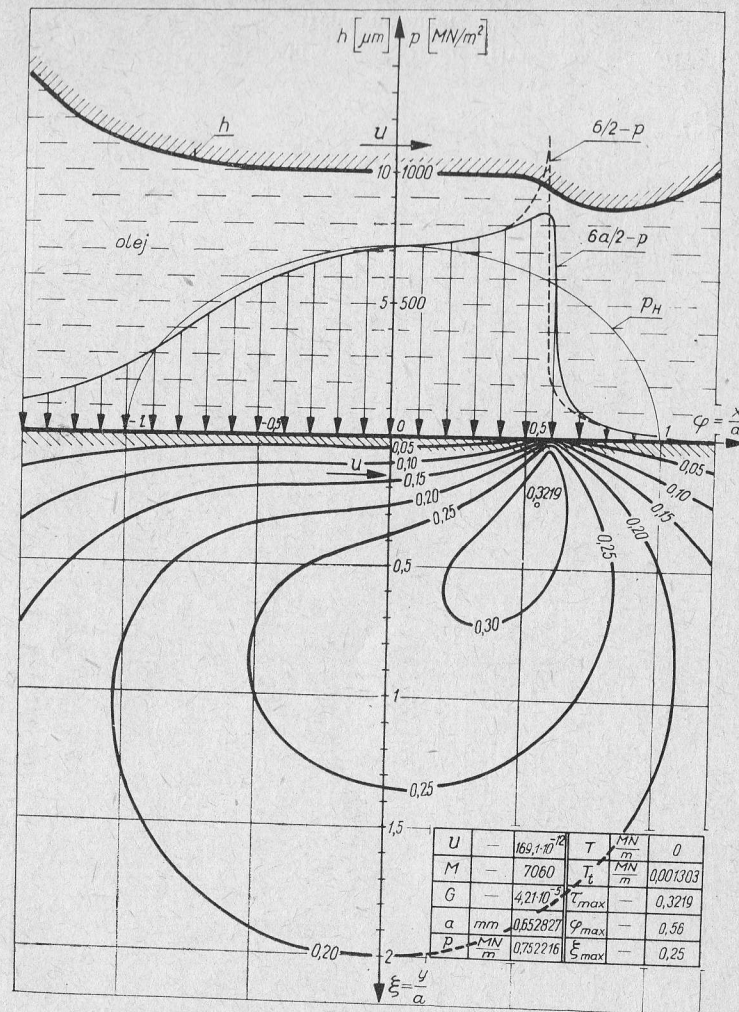
Rys. 20. Wyteżenie materiału w strefie styku EHD — wariant 5/3'. Obciążenie normalne i styczne toczenia z poślizgiem dla walca o mniejszej prędkości ($u_1 < u_2$)



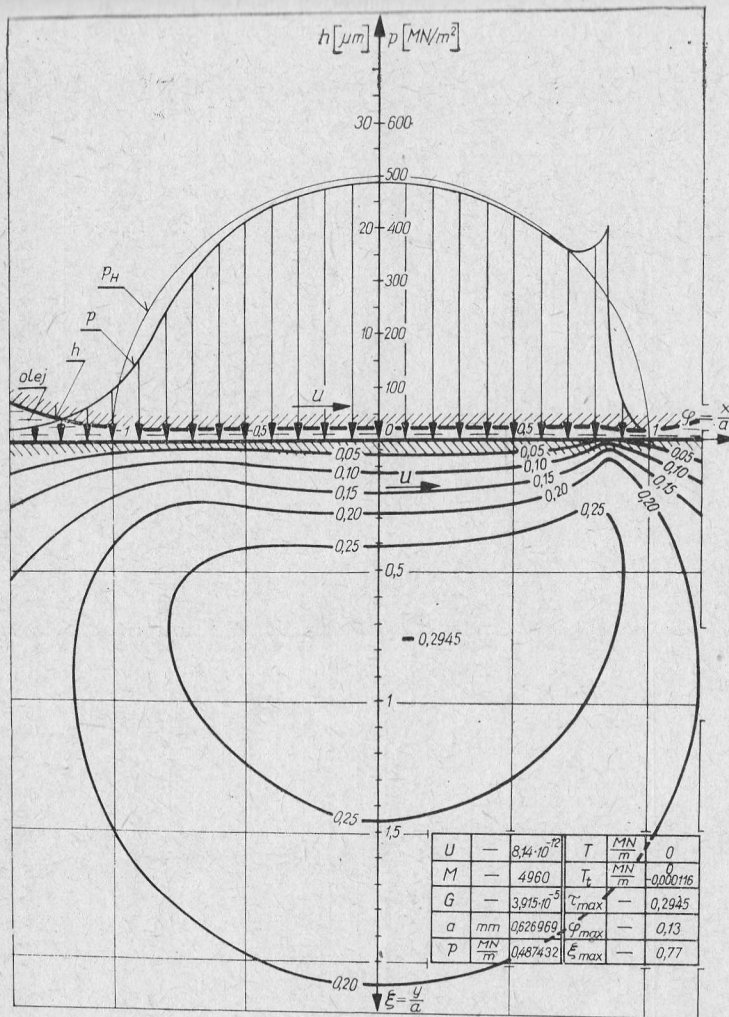
Rys. 21. Wyteżenie materiału w strefie styku EHD — wariant 6/1. Obciążenie normalne



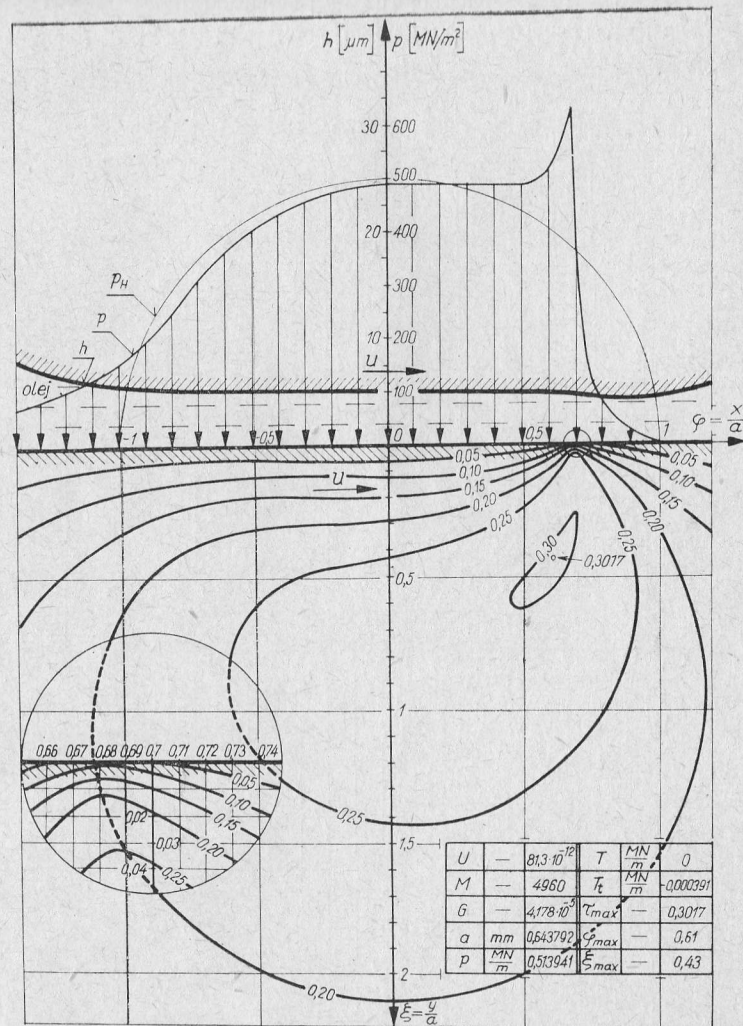
Rys. 22. Wytężenie materiału w strefie styku EHD — wariant 6/2. Obciążenie normalne i styczne toczenia



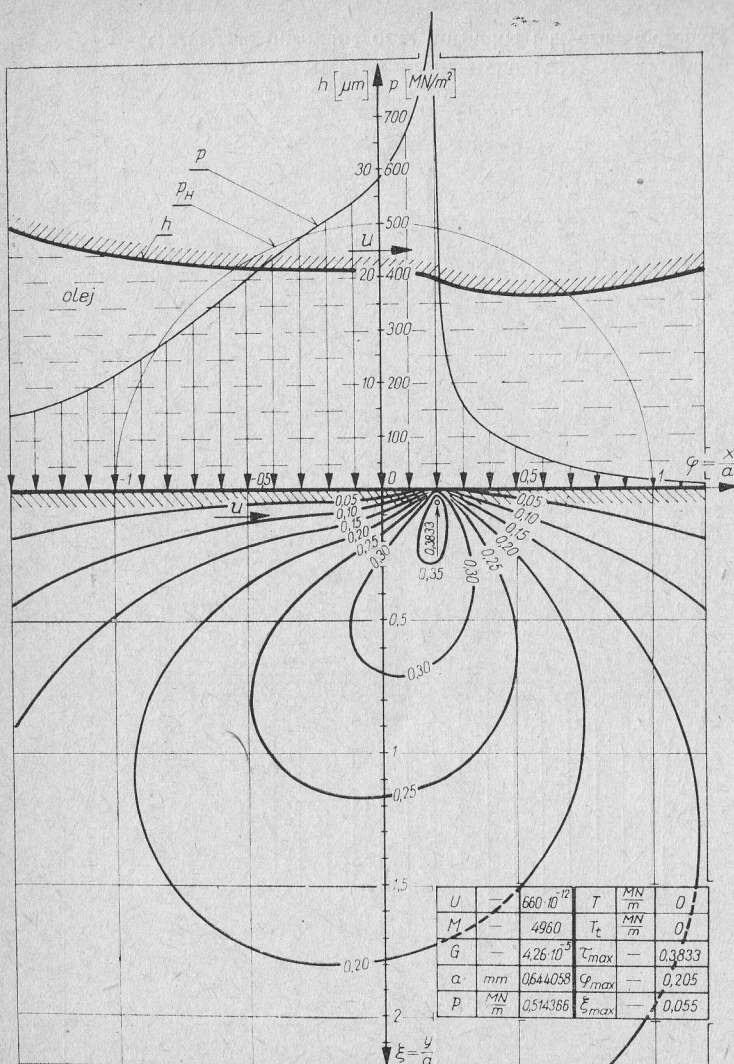
Rys. 23. Wytężenie materiału w strefie styku EHD — wariant 6a/2. Obciążenie normalne skorygowane i styczne toczenia



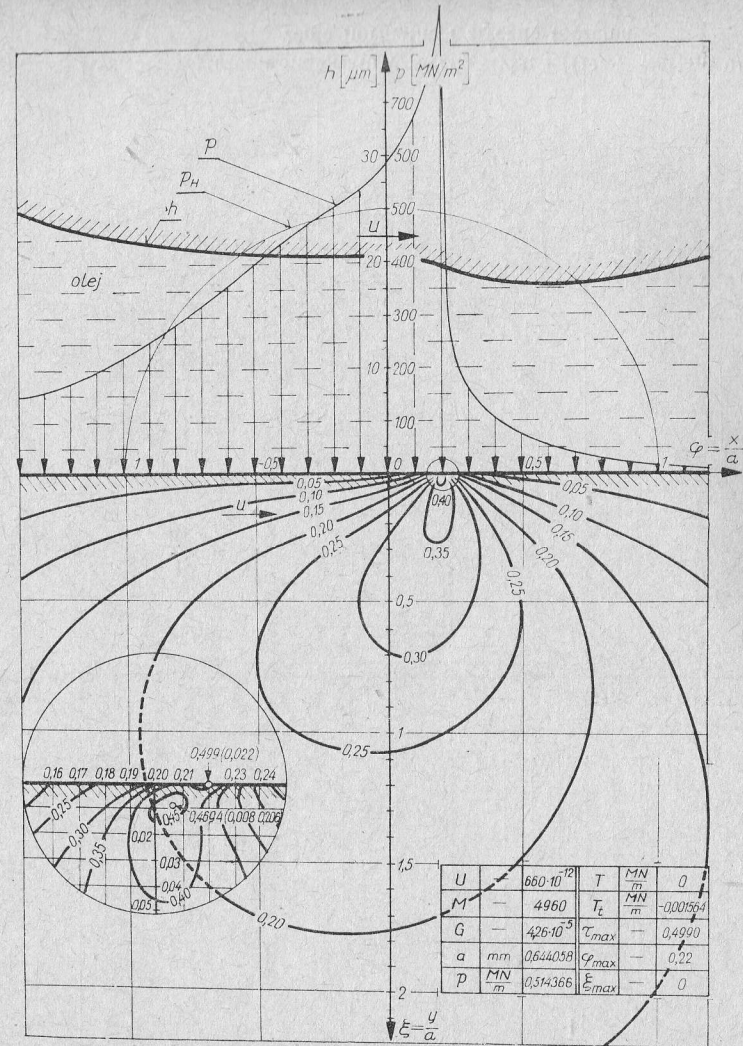
Rys. 24. Wyteżenie materiału w strefie styku EHD — wariant 8/1 $\equiv$ 8/2. Obciążenie normalne oraz normalne i styczne toczenia



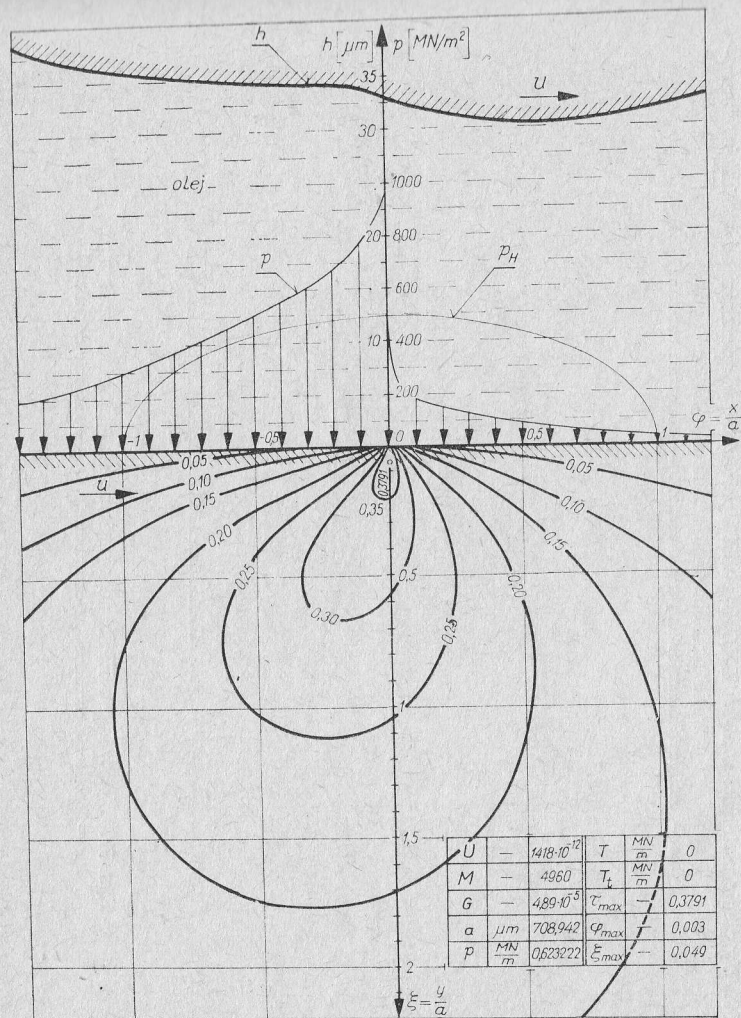
Rys. 25. Wyteżenie materiału w strefie styku EHD — wariant 9/2. Obciążenie normalne i styczne toczenia



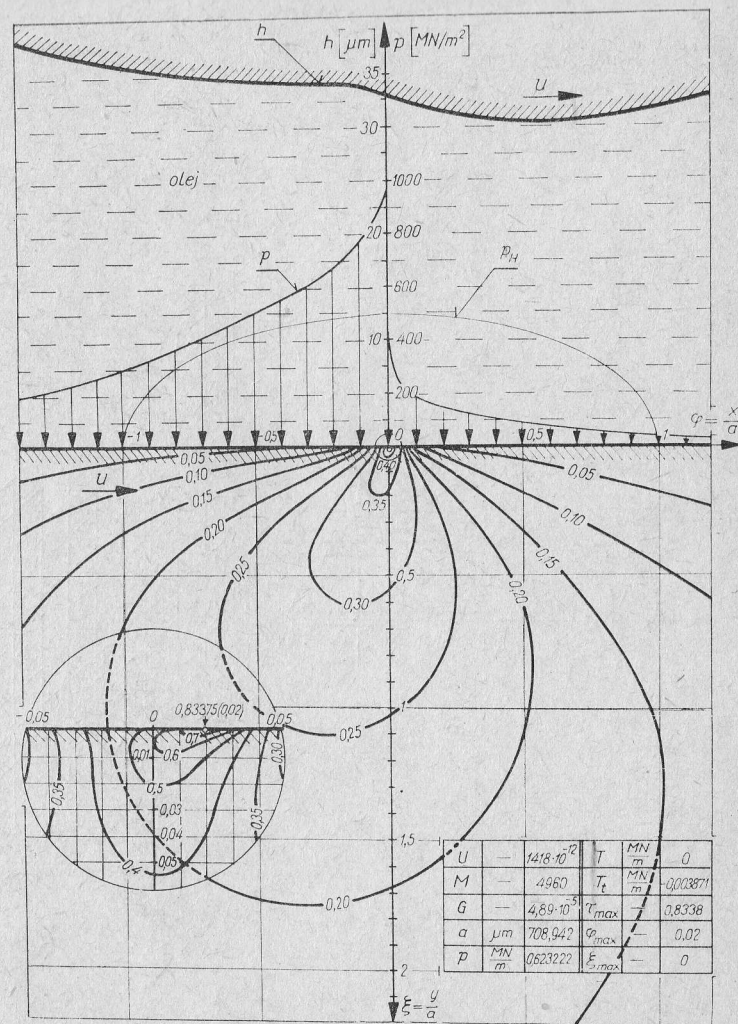
Rys. 26. Wyteżnienie materiału w strefie styku EHD — wariant 11/1. Obciążenie normalne



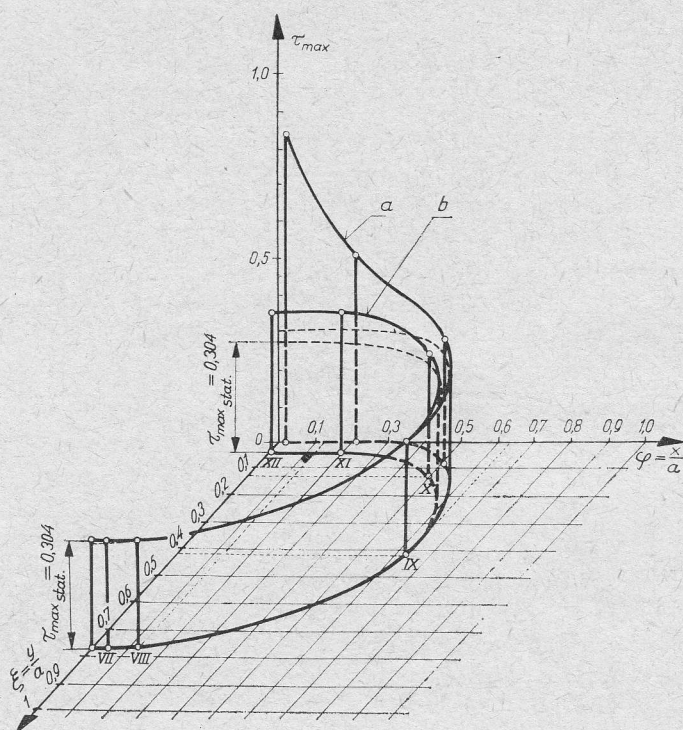
Rys. 27. Wyteżnienie materiału w strefie styku EHD — wariant 11/2. Obciążenie normalne i styczne toczenia



Rys. 28. Wyłączenie materiału w strefie styku EHD — wariant 12/1. Obciążenie normalne

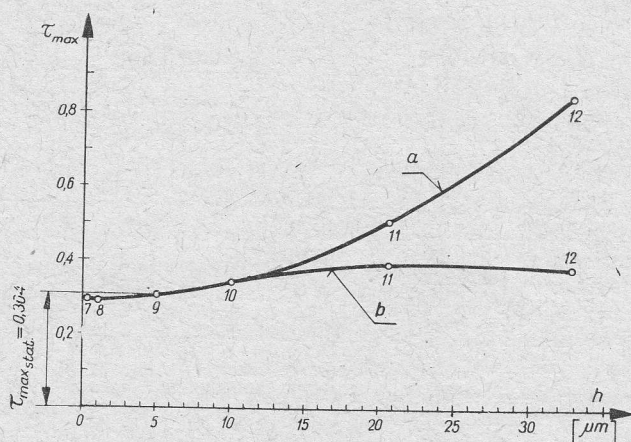


Rys. 29. Wyłączenie materiału w strefie styku EHD — wariant 12/2. Obciążenie normalne i styczne toczenia



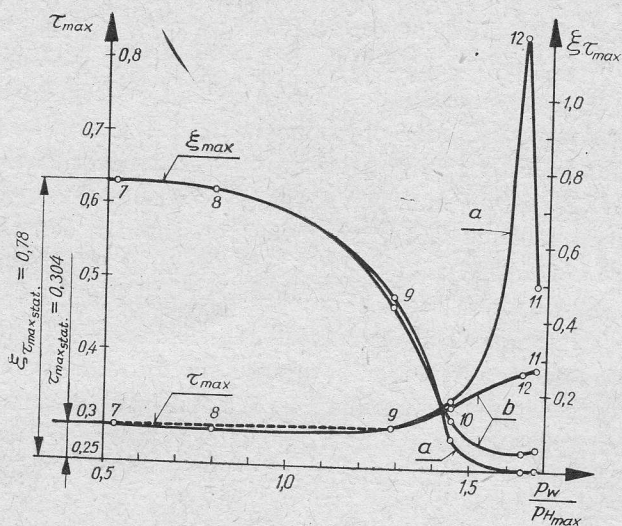
Rys. 30. Wytyżenie materiału w styku EHD (wartość i położenie) w zależności od warunków smarowania określonych iloczynem $\eta_0 u_0$

a — obciążenie normalne i styczne toczenia, *b* — obciążenie normalne

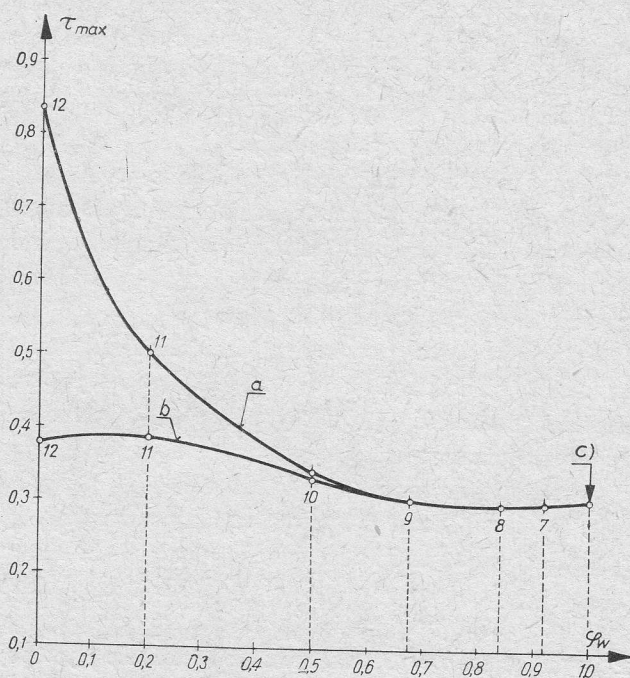


Rys. 31. Wpływ filmu EHD na wytyżenie materiału w strefie styku

a — obciążenie normalne i styczne toczenia, *b* — obciążenie normalne



Rys. 32. Wpływ ciśnienia w spiętrzeniu na wyężenie materiału w strefie styku i jego położenie pod powierzchnią
a – obciążenie normalne i styczne toczenia, *b* – obciążenie normalne



Rys. 33. Maksymalne napężenie styczne w funkcji położenia wierzchołka spiętrzenia w filmie EHD
a – obciążenie normalne i styczne toczenia, *b* – obciążenie normalne, *c* – statyczne według Bielajewa

wartość $\tau_{\max}$ wyznaczano z dokładnością do 0,0001, a miejsce występowania $\tau_{\max}$ z dokładnością od 0,01 do 0,001 szerokości strefy styku (w zależności od wariantu obliczeń). Warianty konstrukcyjne przyjmowane do obliczeń podano w tabeli 2, natomiast znaczenie parametrów bezwymiarowych U , M , G objaśniono w tabeli 1. W wyniku obliczeń ustalono wpływ rozkładu obciążenia normalnego (warianty 4/1 ÷ 12/1), normalnego i stycznego toczenia (warianty 4/2 ÷ 12/2) oraz normalnego i stycznego toczenia z poślizgiem (warianty 5/3 i 5/3') na wyężenie materiału. Obliczenia przeprowadzono na elektronicznej maszynie cyfrowej ZAM-2 GAMMA. Wyniki obliczeń przedstawiono graficznie na rys. 16 - 33.

Dla zbadania stopnia zgodności obliczonych rozkładów $\tau_{\max}$ z rozkładem rzeczywistym, przeliczono (wariant 6a/2) wyężenia materiału dla nacisków rozłożonych podobnie do rozkładu doświadczalnego (rys. 3). W tym celu odwzorowano w programie warunki współpracy pary tocznej stal-stal (warianty 4 ÷ 6) i stal-brąz (warianty 7 ÷ 12).

Dla uwypuklenia wpływu poszczególnych czynników na wyężenie materiału, zasadnicze cechy styku EHD naniesiono w tabeli 2 oraz sporządzono wykresy zbiorcze (rys. 30 ÷ 33).

7. Wnioski

Badania własne i analiza wyników badań obcych prowadzą do następujących wniosków na temat sił tarcia w styku EHD oraz wyężenia materiału w strefie styku:

1. Rozkład sił stycznych przy toczeniu bez poślizgu zależy od wartości iloczynu $\eta_0 u_0$; ze wzrostem wartości tego iloczynu rosną siły tarcia oraz ich gradienty (por. rys. 8).

2. Poślizg w styku (rys. 9 i 10) wpływa na zmianę sił stycznych. Przy poślizgu przekraczającym $t=0,00001$ udział sił stycznych, wywołanych tarcie podczas toczenia, w siłach stycznych całkowitych bardzo szybko maleje.

3. Obliczone siły tarcia przy toczeniu z poślizgiem (dla $t > 0,001$) są wielokrotnie większe od wartości pomierzonych [13]. Powodem tej rozbieżności jest nieznanie rzeczywistego zachowania się smaru w styku oraz pominięcie wytwarzania ciepła w filmie (prowadzącego do spadku lepkości efektywnej), lepkością właściwą smaru [4] i zmian lepkości oleju z prędkością ścinania [32, 43].

4. Wyężenie materiału w styku (przy stałym obciążeniu) zmienia się z wartością iloczynu $\eta_0 u_0$, a więc także z grubością filmu (rys. 30 i 31), przy czym zmiany te są tym wyraźniejsze, im większa jest wartość tego iloczynu względnie grubość filmu.

5. Maksymalne naprężenia tnące $\tau_{\max}$ ze wzrostem iloczynu $\eta_0 u_0$ początkowo maleją, a następnie rosną, przekraczając znacznie wartość obliczoną przez Bielajewa dla styku statycznego. Uwzględnienie sił tarcia powoduje szybszy wzrost $\tau_{\max}$.

6. Położenie $\tau_{\max}$ zależy od wartości iloczynu $\eta_0 u_0$ (rys. 16 - 29). Przy większej wartości iloczynu, punkt $\tau_{\max}$ przesuwa się ku powierzchni, w kierunku miejsca spiętrzenia ciśnienia w filmie. Poczynając od $\varphi \approx 0,6$, spiętrzenie ciśnienia φ_w występuje w miejscu maksymalnego wyężenia. Poczynając od $\varphi \approx 0,3$, maksymalne wyężenie występuje na powierzchni.

7. Ze wzrostem wartości iloczynu $\eta_0 u_0$ rosną gradienty izolinii $\tau_{\max}$ w pobliżu powierzchni.

8. Siły styczne wywołane tarcie powodują wzrost wyężenia materiału, szczególnie w pobliżu powierzchni.

9. W przypadku niewielkiego poślizgu w styku, wyteżenie jest nieco większe pod powierzchnią ciała o mniejszej prędkości powierzchniowej (por. rys. 19 i 20).

10. Opierając się na porównaniu rozkładu naprężeń stycznych obliczonych dla obciążenia wzorowanego na pomierzonym rozkładzie nacisków w styku (wariant 6a/2) z typowym rozkładem teoretycznym (wariant 6/2) przypuszcza się, iż rzeczywisty wpływ wartości iloczynu $\eta_0 u_0$ na wyteżenie materiału w strefie styku EHD jest znacznie mniejszy, niż przewidywany.

11. Film elastohydrodynamiczny wpływa na wyteżenie materiału w strefie styku i należy oczekiwać, że film ten wpływa na przebieg zużycia zmęczeniowego powierzchni.

Opracowane rozkłady wyteżenia materiału w strefie styku EHD pod obciążeniem normalnym są podobne do analogicznych rozkładów opracowanych przez Dowsona i współprac. [19].

Porównanie wyników własnych z wynikami innych autorów nie jest możliwe ze względu na brak danych w dostępnej literaturze przedmiotu. Przedstawione rozwiązania traktuje się jako stadium wstępne badań; uwzględnienie zjawisk cieplnych i reologicznych w filmie smarnym będzie następnym etapem badań.

Praca wpłynęła do Redakcji w grudniu 1973 r.

Literatura

- [1] D. R. Adams, W. Hirst, *Frictional traction in elastohydrodynamic lubrication*. Proc. of the Royal Society of London, ser. A, vol. 332, London 1973.
- [2] J. F. Archard, *Elastohydrodynamic lubrication of real surfaces*. Tribology, vol. 6, No. 1, Lausanne 1973.
- [3] A. J. Barlow i in., *The effect of pressure on the viscoelastic properties of liquids*. Proc. of the Royal Society of London, ser. A, vol. 327, London 1972.
- [4] J. C. Bell, J. W. Kannel, C. M. Allen, *The rheological behaviour of the lubricant in the contact zone of a rolling contact system*. Trans. of the ASME, ser. D, vol. 86, No. 3, 1964.
- [5] N. M. Bielajew, *Wyzieslenije najbolszich rasczetnych napriazhenij pri szatii sopriskasajuszczichsia tiel*. Sbornik Leningradskowo Instituta Inż. Putiej, Soob. Wyp. 99, Leningrad 1929.
- [6] H. Blok, *Fundamental mechanical aspects of thin film lubrication*. Ann. N. Y. Acad. Sci., No. 53, New York 1950.
- [7] A. Cameron, *Principles of lubrication*. Longmans Green and Co. Ltd., London 1966.
- [8] J. Charron, *Viscosite sous pression rapidement variable*. Inst. Franc. du Petrole Revue, t. 4, Paryż 1949.
- [9] H. S. Cheng, *A refined solution to the thermal-elastohydrodynamic lubrication of rolling and sliding cylinders*. Trans. of the ASLE, vol. 8, p. 397 - 410, New York 1965.
- [10] H. S. Cheng, F. K. Orcutt, *A correlations between the theoretical and experimental results on the elastohydrodynamic lubrication of rolling and sliding cylinders*. Proc. Inst. Mech. Engrs., vol. 180, No. 13, London 1965/66.
- [11] T. S. Chow, E. Saibel, *The elastohydrodynamic problem with a viscoelastic fluid*. Trans. of the ASME, ser. F., vol. 93, No. 1, New York 1971.
- [12] A. W. Crook, *A theoretical discussion of friction and the temperatures in the oil film*, III. Phil. Trans. of the Royal Society of London, A 254, London 1961.
- [13] A. W. Crook, *Measurements of friction and effective viscosity*. Phil. Trans. of the Royal Society of London, A 255, London 1961.
- [14] T. Czyżewski, W. Kaniewski, *Sily lepkości w izotermicznym styku elastohydrodynamicznym*. (Praca złożona do druku w Zeszytach Naukowych Politechniki Łódzkiej)
- [15] D. Dowson, G. R. Higginson, *A numerical solution to the elastohydrodynamic problem*. Journal of Mech. Eng. Sci., vol. 1, No. 1, London 1959.

- [16] D. Dowson, G. R. Higginson, *The fundamentals of roller and gear lubrication*. Pergamon Press, London 1966.
- [17] D. Dowson and others, *Elastohydrodynamic lubrication — a survey of isothermal solutions*. Journal of Mech. Eng. Sci., vol. 4, No. 2, London 1962.
- [18] D. Dowson, T. L. Whomes, *The effect of surface roughness upon the lubrication of rigid cylindrical rollers*. Wear, vol. 18, No. 3, Lausanne 1971.
- [19] D. Dowson and others, *Stress distribution in lubricated rolling contact*. Inst. Mech. Engrs., Symposium on fatigue in rolling contact, Pap. 6, 1963.
- [20] A. Dyson, *Flow properties of mineral oils in elastohydrodynamic lubrication*. Phil. Trans. of the Royal Soc. of London, ser. A, vol. 258, London 1965.
- [21] R. S. Fein, *Possible role of compressional viscoelasticity in concentrated contact lubrication*. Trans. of the ASME, ser. F, vol. 89, No. 1, New York 1967.
- [22] P. E. Fowles, *The application of elastohydrodynamic lubrication theory to individual asperity — asperity contacts*. Trans. of the ASME, ser. F, vol. 91, New York 1969.
- [23] J. A. Greenwood, J. M. Tripp, *The elastic contact of rough spheres*. Trans. of the ASME, ser. D, vol. 87, New York 1966.
- [24] R. Gohar, A. Cameron, *The mapping of elastohydrodynamic contacts*. Trans. of the ASLE, vol. 10, No. 3, New York 1967.
- [25] R. A. Goodelle and other, *A practical method for determining contact stresses in elastically loaded line contacts*. Trans. of the ASLE, vol. 13, No. 2, New York 1970.
- [26] A. G. Grubin, *Osnovy gidrodinamicheskoy teorii smazki tiaželo nagružennykh cilindriczeskich poverchnostiej*. Maszgiz, Moskwa 1949.
- [27] G. Harrison, E. G. Trachman, *The role of compressional viscoelasticity in the lubrication of rolling contacts*. Trans. of the ASME, ser. F, vol. 94, No. 4, New York 1972.
- [28] H. Hertz, *Über die Berührung elastischer Körper*. Gesammelte Werke, Band 1, Leipzig 1895.
- [29] M. T. Huber, *Teoria sprężystości*. PWN, Warszawa 1954.
- [30] B. Jacobson, *On the lubrication of heavily loaded cylindrical surfaces considering surfaces deformations and solidification of the lubricant*. Trans. of the ASME, ser. F, vol. 95, No. 3, New York 1973.
- [31] K. L. Johnson, J. A. Greenwood, *A simple theory of asperity contact in elastohydrodynamic lubrication*. Wear, vol. 19, No. 1, Lausanne 1972.
- [32] K. L. Johnson, A. Cameron, *Shear behaviour of elastohydrodynamic oil films at high rolling contact pressures*. Proc. Inst. Mech. Eng., vol. 182, London 1967/68.
- [33] J. W. Kannel, *Measurements of pressures in rolling contact*. Proc. Inst. Mech. Eng., vol. 180, Pt 3b, p. 135 - 142, London 1965/66.
- [34] H. Krzemiński-Freda, *Rozkład ciśnienia i kształt filmu olejowego przy współpracy elementów tocznych smarowanych elastohydrodynamicznie* (praca doktorska). Politechnika Łódzka, Łódź 1969.
- [35] H. Krzemiński-Freda, T. Czyżewski, *Wpływ elastohydrodynamicznego filmu olejowego na wyteżenie materiału*. Technika Smarownicza, Nr 2, Katowice 1972.
- [36] W. Krzyś, M. Życzkowski, *Sprężystość i plastyczność*. PWN, Warszawa 1962.
- [37] R. D. Mindlin, *Compliance of elastic bodies in contact*. Trans. of the ASME, Journal of App. Mech. vol. 16, p. 259, New York 1949.
- [38] G. Niemann, F. Gartner, *Distribution of hydrodynamic pressure on counterformel line contact*. Trans. of the ASLE, vol. 8, New York 1965.
- [39] F. C. Orcutt, *Experimental study of elastohydrodynamic lubrication*. Trans. of the ASLE, vol. 8, New York 1965.
- [40] A. I. Pietruszewicz, *Osnownyje wywody iz kontaktno-gidrodinamicheskoy teorii smazki*. Izvestia AN SSSR, OTN Nr. 2, Moskwa 1951.
- [41] S. Pytko, *Wpływ sił stycznych na zmęzeniowe wykruszanie (pitting) walcowych powierzchni elementów tocznych* (praca doktorska). AGH, Kraków 1963.
- [42] M. M. Sawierin, *Kontaktная прочность материала*. Cinnmasz, kniga 2, Moskwa 1946.

- [43] L. B. Sibley, Y. P. Chiu, *Contact shape and non-Newtonian effects in elastohydrodynamic point contact*. Trans. of the ASLE, Nr 71 — AM — 2C-3, New York 1971.
- [44] I. J. Sztajerman, *Kontaktnaja zadacza teorii uprugosti*. Moskwa 1949.
- [45] J. Stupnicki, *Wplyw warstwy oleju na kinetostatyczne naprężenia kontaktowe* (praca doktorska). Politechnika Warszawska, Warszawa 1964.
- [46] T. E. Tallian, *Elastohydrodynamic Hertzian contacts*. Mechanical Eng., Part I Nov., Part II Dec., New York 1971.
- [47] T. E. Tallian and others, *Lubricant films in rolling contact of rough surfaces*. Trans. of the ASLE, vol. 7, No. 2, New York 1964.
- [48] S. Timoshenko, J. N. Goodier, *Teoria sprężystości*. Warszawa 1962.
- [49] L. D. Wedeven and other, *Optical analysis of ball bearing starvation*. Trans. of the ASME, ser. F, vol. 93, No. 2, New York 1971.
- [50] D. J. Whitehouse, J. F. Archard, *The properties of random surfaces of significance in their contact*. Proc. Royal. Soc. of London, ser. A, vol. 316, London 1970.

Натяжение материалов в зоне контактно-гидродинамического стыка цилиндров

Резюме

В работе исследовано влияние условий смазки, описанных произведением вязкости смазки на скорости поверхностей в зоне контакта, на распределение максимальных касательных напряжений по гипотезе Тресчи-Геста.

Принятая модель отображает условия существующие между элементами подшипников качения или в зацеплении зубчатой передачи.

Задача решена как изотермическая при установившемся режиме работы, масло соответствует формуле Ньютона, материалы упругие и изотропные.

Распределение давления и форму масляной плёнки, принявши согласными контактно-гидродинамической теории смазки распределения сил вискозического трения, решено в случае качения и качения с проскальзыванием.

Выведены формулы для распределения напряжений в зоне контакта упругой полуплоскости в случае одновременного действия нормальной и касательной нагрузки линейно-случайных в замкнутом интервале.

Результаты исследований широкого объёма параметров представлено в форме диаграмм.

Material Stressing in the Elastohydrodynamic Contact Zone of Cylinders

Summary

The paper deals with the problem of conditions of lubrication as influenced by the maximum shear stress distribution and described by the product of the oil viscosity and velocity of the mating surfaces of contacting bodies according to the Tresca-Guest's hypothesis of material strength.

The analytical model used imitates the operating conditions of rolling bearing elements and gear teeth.

The problem has been solved on the assumption of isothermal and invariable operating conditions, Newtonian fluid and elastoisotropical materials. Assumed the pressure distribution and the film shape — both having been determined by elastohydrodynamic theory of lubrication, the distribution of viscosity tractions in the contact region has been found in the case of pure rolling and rolling with sliding.

Analytical formulas have been given for contact stresses acting in the elastic half-plane under normal and tangential forces linearly variable within a given interval.

The results of computation have been presented in the form of plots and graphs for a wide range of parameters.