

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

73

WARSZAWA—POZNAN 1976

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

KOMITET REDAKCYJNY - EXECUTIVE EDITORS
KAZIMIERZ STELLER - REDAKTOR - EDITOR
JERZY KOŁODKO · JÓZEF ŚMIGIELSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA - EDITORIAL OFFICE
Instytut Maszyn Przepływowych PAN,
80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, ul. Gen. Józefa Fiszerza 14, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1976
Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład: 350 + 90 egz. Ark. wyd. 13. Ark. druk. 10. Papier druk. sat. kl. V, 70g, 70 × 100.
Oddano do składania 9 I 1976. Podpisano do druku 12 XI 1976. Druk ukończono w listopadzie 1976 r. Zam. nr 114/159. H-5/709. Cena zł 40,-

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. A. Mickiewicza w Poznaniu

ROMUALD PUZYREWSKI

Gdańsk

Wykładnik izentropy pary wodnej w pobliżu linii nasycenia*

W pracy podano wyniki obliczeń wykładnika izentropy pary wodnej w pobliżu linii nasycenia, zdefiniowanego na podstawie relacji pomiędzy ciśnieniem i temperaturą. Otrzymane rezultaty porównano z wynikami obliczeń wykładnika izentropy obliczonego na podstawie innych definicji. Temat pracy wiąże się z badaniem procesów zachodzących w obszarze pary przechłodzonej.

Spis oznaczeń

c – ciepło właściwe wody [kJ/kg°K],	p – ciśnienie [bar],
c_p – ciepło właściwe pary przy stałym ciśnieniu [kJ/kg°K],	R – stała gazowa [kJ/kg°K],
h – ciepło kondensacji [kJ/kg],	R'' – stała gazowa na linii nasycenia [kJ/kg°K],
i – entalpia [kJ/kg],	T_s – temperatura nasycenia [°K],
i'' – entalpia pary na linii nasycenia [kJ/kg],	T_0 – temperatura odniesienia [°K],
k – wykładnik izentropy [–],	v – objętość właściwa [m³/kg],
k_d – wykładnik izentropy gazu doskonałego [–],	ρ – gęstość właściwa [kg/m³].

1. Wstęp

Przybliżona metoda badania zmian parametrów w procesach zachodzących w gazach rzeczywistych i parach polega na stosowaniu zależności, formalnie ważnych jedynie dla gazu doskonałego, w miejsce wykresów typu entalpia-entropia, temperatura-entropia itp.

W przypadku niezbyt wielkich zmian parametrów, w przedziałach zmienności których określić można przeciętne wartości ciepła właściwego i stałej gazowej, otrzymuje się rezultaty o dostatecznym stopniu dokładności w stosunku do wartości wykresowych lub tablicowych.

Są obszary, w których taka przybliżona metoda jest, jak dotychczas, jedyną możliwością. Dotyczy to stanów przechłodzonych, dla których informacje o zmianie parametrów w danym procesie mogą być uzyskane jedynie poprzez ekstrapolację linii reprezentujących

* Praca wykonana w ramach problemu resortowego PAN-19, grupa tematyczna 2.

proces w stanach stabilnych. Wynika to stąd, iż tablice lub wykresy par są budowane na podstawie wyników pomiarów w obszarach stabilnych. Nieliczne są natomiast próby dokonania pomiarów parametrów termodynamicznych w obszarach metastabilnych. Do nich należy np. praca [1], w której podjęto próbę określenia wykładnika izentropy w obszarze pary przechłodzonej w przepływie naddźwiękowym.

Niniejsza praca powstała przy okazji obliczeń procesu kondensacji w przepływie, przy ciśnieniach odpowiadających ciśnieniom w turbinach siłowni jądrowych. Dla określenia przechłodzenia w trakcie ekspansji pary konieczna jest relacja pomiędzy temperaturą a ciśnieniem. Celem uzyskania tej relacji wprowadzony został w pracy [2] „temperaturowy wykładnik izentropy”.

W niniejszej pracy wyjaśniono, w jakim sensie właściwości pary wodnej jako gazu rzeczywistego wymagają wprowadzenia takiego wykładnika. W szczególności wyjaśniono, jak właściwości pary wodnej zmieniają strukturę wzoru na wykładnik izentropy w porównaniu z wzorem dla gazu doskonałego. Porównano otrzymane liczbowe wartości wykładnika z wartościami podanymi w pracach [2, 5]. Porównanie dokonano dla krzywej granicznej w zakresie ciśnień do 60 bar. Z punktu widzenia numerycznego podany w pracach sposób obliczenia wartości wykładnika izentropy jest wygodniejszy od dotychczas stosowanych. Z punktu widzenia pojęciowego, praca może stanowić uzupełnienie prac [2 i 5].

2. Określenie wykładnika izentropy

Ogólnie znana jest w termodynamice definicja wykładnika izentropy gazów i par w postaci

$$k_p^{\text{def}} = -\frac{v}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s. \quad (1)$$

Dla gazów doskonałych definicja (1) prowadzi do zależności

$$k_{id} = \frac{c_p}{c_p - R}. \quad (2)$$

Z faktu, że jest to wielkość stała otrzymuje się ogólnie znane relacje pomiędzy parametrami p , T , v . Spośród tych relacji zależność pomiędzy ciśnieniem i temperaturą

$$pT^{\frac{k}{1-k}} = \text{const} \quad (3)$$

jest podstawą definicji „temperaturowego wykładnika izentropy”. Należy podkreślić, iż definicja wykładnika na podstawie innych relacji prowadziłaby do innych wartości tego wykładnika w gazach rzeczywistych. Po zróżniczkowaniu otrzymamy z (3) relację

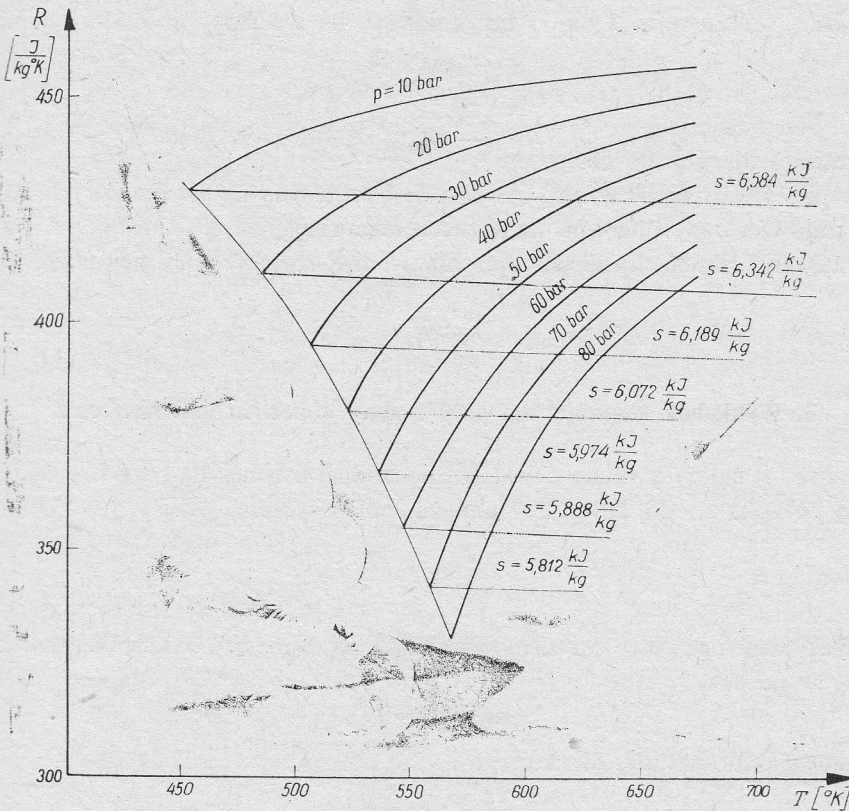
$$k_T^{\text{def}} = \frac{1}{1 - \frac{p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s}. \quad (4)$$

Wykładnik k_T zdefiniowany zależnością (4) wynika z relacji pomiędzy ciśnieniem i temperaturą, a zatem pozwala na znalezienie przybliżonej zależności temperatury do ciśnienia.

Celowe więc jest wyjaśnienie różnic, jakie mogą mieć miejsce pomiędzy wartościami liczbowymi wykładników (1) i (4).

Jeżeli przyrzeć się wykresowi na rys. 1, to można zauważyć, iż „zastępcza stała gazowa” R jest silnie zmienną funkcją entropii s i słabo zmienną funkcją, np. ciśnienia p . Tak więc równanie stanu może być zapisane jako

$$\frac{pv}{T} = R(s, p). \quad (5)$$



Rys. 1. Wartości „stałej gazowej” dla pary wodnej na izobarach w funkcji temperatury

Para wodna w zakresie parametrów pokazanych na wykresie rys. 1 posiada wzdłuż izentrop mało zmienną wartość R .

Dla $s = \text{const}$ z równania (5) można wyznaczyć

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{T}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s + \frac{v}{R} - \frac{T}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)_s. \quad (6)$$

Po wstawieniu do równania (4), otrzymujemy

$$k_T = -\frac{v}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \frac{1}{1 - \frac{v}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \frac{p}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial p} \right)_s} \quad (7)$$

lub

$$k_T = \frac{k_p}{1 + k_p \frac{p}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial p} \right)_s} \quad (8)$$

Na podstawie wyrażenia (8) i wykresu na rys. 1 można ocenić rząd wielkości poprawki spowodowanej zależnością R od p . Przykładowo dla izentropy $s=6,189$ otrzymujemy

$$k_p \frac{p}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial p} \right)_s \cong -0,01.$$

Można zatem stwierdzić co następuje:

- niestałość wartości R wzdłuż izentrop jest przyczyną różnic liczbowych pomiędzy wykładnikami izentropy opartymi na różnych definicjach,
- w zakresie ciśnień do 60 bar dla pary wodnej różnice te są niewielkie, jednakże takie, że

$$k_T > k_p.$$

3. Wykładnik izentropy dla pary wodnej w pobliżu linii nasycenia

Do wzoru (4) należy podstawić wartość pochodnej liczonej dla pary wodnej. Ograniczymy się początkowo do obszaru w pobliżu linii nasycenia, gdzie

$$\frac{T_s}{T} \cong 1. \quad (9)$$

Warunek izentropowości procesu, wynikający z pierwszej zasady termodynamiki, zapiszemy w postaci

$$di - vdp = 0. \quad (10)$$

Jeżeli mamy gaz doskonały, dla którego

$$i = c_p T + \text{const}, \quad (11)$$

to łącznie z równaniem stanu z warunku (10) otrzymujemy wyrażenie na

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = \frac{R}{c_p} \frac{T}{p}, \quad (12)$$

które po wstawieniu do (4) da wyrażenie (2) na k_{id} .

W przypadku pary wodnej, w miejsce wyrażenia (11) mamy

$$i = i''(p) + \int_{T_s}^T c_p dT, \quad (13)$$

które posłuży do wyznaczenia pochodnej $(\partial i/\partial p)_s$ z (10),

$$\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_s = \frac{RT}{p}. \quad (14)$$

Ciepło właściwe c_p jest silnie zmienną funkcją zarówno ciśnienia jak i temperatury, co pokazano na wykresie na rys. 2. Różniczkując wyrażenie (13) względem p , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dp} &= \frac{di''}{dp} + \frac{dT}{dp} c_p - \frac{dT_s}{dp} c_p'' + \int_{T_s}^T \left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T dT = \\ &= \frac{di''}{dp} + \frac{dT}{dp} c_p - \frac{dT_s}{dp} c_p'' - \int_{T_s}^T T \left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p dT = \frac{di''}{dp} + \frac{dT}{dp} c_p - \frac{dT_s}{dp} c_p'' - \bar{T} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \Big|_{T_s}^T = \\ &= \frac{di''}{dp} + \frac{dT}{dp} c_p - \frac{dT_s}{dp} c_p'' - \frac{\bar{T}}{p} \left[R - R'' + T \left(\frac{\partial R}{\partial T}\right)_p - T_s \left(\frac{\partial R}{\partial T}\right)_p'' \right]^{*}). \end{aligned} \quad (15)$$

Zbliżając się do linii nasycenia wyrażenie

$$R - R'' + T \left(\frac{\partial R}{\partial T}\right)_p - T_s \left(\frac{\partial R}{\partial T}\right)_p''$$

zmierza do zera i można je pominąć w porównaniu z pozostałymi członami i wówczas

$$\frac{di}{dp} \cong \frac{di''}{dp} + \frac{dT}{dp} c_p - \frac{dT_s}{dp} c_p''. \quad (16)$$

Łącząc (16) i (14), dla procesu izentropowego można napisać

$$\frac{RT}{p} \cong \frac{di''}{dp} + \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s c_p - \frac{dT_s}{dp} c_p''. \quad (17)$$

Dla wyeliminowania dT_s/dp z (17) wykorzystamy równanie Clausiusa-Clapeyrona, w którym pominięta jest objętość fazy ciekłej w stosunku do gazowej

$$\frac{dT_s}{dp} \cong \frac{R'' T_s^2}{p}. \quad (18)$$

Otrzymamy w ten sposób z równania (17) wyrażenie na $(\partial T/\partial p)_s$

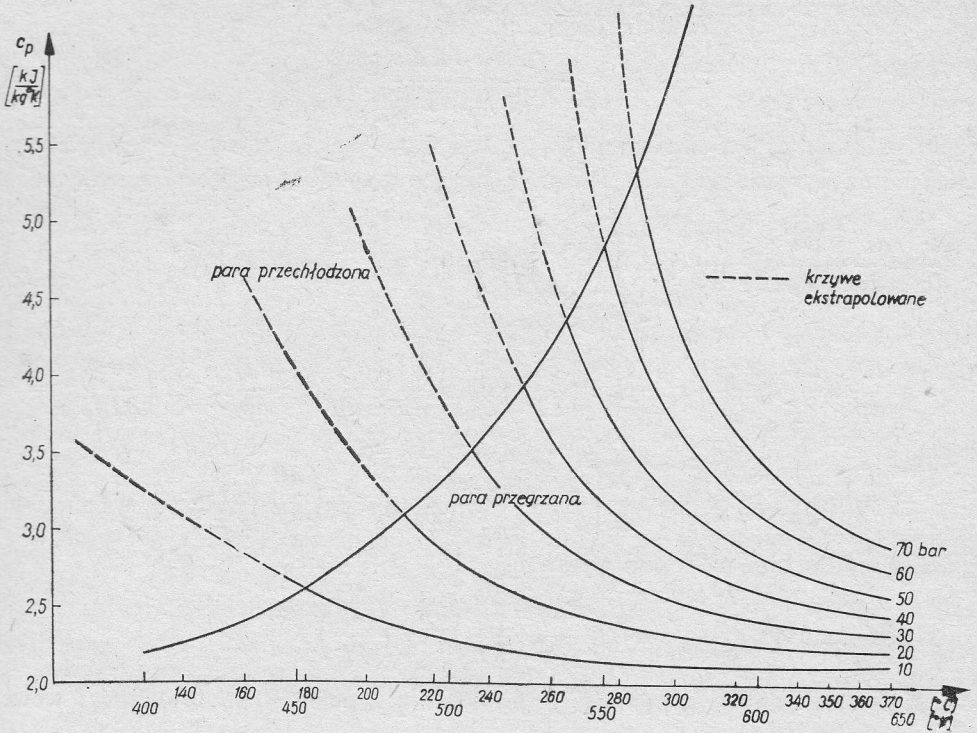
$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{RT}{c_p p} \left(1 + \frac{R''}{R} \frac{T_s}{T} \frac{c_p'' T_s}{h} \right) - \frac{1}{c_p} \frac{di''}{dp}. \quad (19)$$

Dostatecznie blisko linii nasycenia

$$\frac{R''}{R} \frac{T_s}{T} \cong 1$$

*) Przy przekształcaniu wyrażeń pod całką posłużono się zależnością termodynamiczną

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -T \left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p.$$



Rys. 2. Wartości ciepła właściwego c_p dla pary wodnej na izobarach w funkcji temperatury

i wówczas podstawiając (19) do wzoru definicyjnego (4), otrzymamy

$$k_T = \frac{1}{1 - \frac{k_{id} - 1}{k_{id}} \left(1 + \frac{c_p'' T_s}{h} \right) + \frac{p}{c_p T} \frac{di''}{dp}} \quad (20)$$

Jeżeli przyjąć, że

$$i'' = c(T_s - T_0) + h + i_0'$$

oraz, że c , T_0 , a także i_0 są stałe, to

$$\frac{di''}{dp} \cong \left(c + \frac{dh}{dT_s} \right) \frac{dT_s}{dp} \quad (21)$$

Po wykorzystaniu (18) i podstawieniu do (20), otrzymujemy następującą relację pomiędzy wykładnikiem izentropy, liczonym z wartości R i c_p jak dla gazu idealnego według relacji (2), a wykładnikiem izentropy w pobliżu linii nasycenia

$$\frac{k_T - 1}{k_T} = \frac{k_{id} - 1}{k_{id}} \left[\left(1 + \frac{c_p'' T_s}{h} \right) - \frac{T_s}{h} \left(c + \frac{dh}{dT_s} \right) \right] \quad (22)$$

Największy wpływ w tym wzorze transformującym k_{id} w k_T wywiera parametr $c_p'' T_s / h$. Parametr ten osiąga wartość równą 1 dla ciśnienia 30 bar dla pary wodnej [3], jest natomiast mniejszy od jedności poniżej 30 bar i większy od jedności powyżej 30 bar.

Należy podkreślić, iż w pobliżu linii nasycenia, na skutek faktu, że $(\partial R / \partial p)_s < 0$ zachodzi relacja

$$k_T \gtrsim k_p > k_{id}, \quad (23)$$

a jedynie w przypadku niskich ciśnień, kiedy ciepło parowania jest dostatecznie duże można przyjąć, że

$$k_T \cong k_p \cong k_{id}. \quad (24)$$

W parze przegrzanej w miejsce relacji (22), otrzymamy

$$\frac{k_T - 1}{k_T} = \frac{k_{id} - 1}{k_{id}} \left[\left(1 + \frac{R''}{R} \frac{T_s}{T} \frac{c_p'' T_s}{h} \right) - \frac{1}{v} \frac{di''}{dp} + \frac{\bar{T}}{pv} \left(R - R'' + T \left(\frac{\partial R}{\partial T} \right)_p - T_s \left(\frac{\partial R}{\partial T} \right)_p'' \right) \right]. \quad (25)$$

Wzór (25) posiada pewną niedogodność w postaci konieczności określenia średniej temperatury $\bar{T}$, która zawiera się w przedziale

$$T_s < \bar{T} < T.$$

Jednakże różnice liczbowe dla różnych średnich nie wpływają znacznie na wartość k_T . W obszarze pary przegrzanej będziemy więc mieli

$$k_T > k_p \geq k_{id}. \quad (26)$$

Jeżeli wartość wykładnika izentropy zmienia się w obszarze ekspansji, to powstaje problem określenia średniego wykładnika izentropy pomiędzy dwoma punktami. Z definicji (4), przy jednoznacznej zależności ciśnienia od temperatury wzdłuż izentropy, wynika następująca relacja

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p^{\frac{k_T - 1}{k_T}}}{p_0^{\frac{k_{0T} - 1}{k_{0T}}}} \exp \int_{p_0}^p \ln p \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{k_T} \right) dp. \quad (27)$$

Oszacujmy czynnik zawierający e w potęgę

$$\exp \int_{k_{0T}}^{k_T} \ln p d \left(\frac{1}{k_T} \right) = \exp \bar{\ln p} \int_{k_{0T}}^{k_T} d \left(\frac{1}{k} \right) \cong \bar{p}^{\left(\frac{1}{k_T} - \frac{1}{k_{0T}} \right)}, \quad (28)$$

stąd otrzymamy

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p^{\frac{k_T - 1}{k_T}}}{p_0^{\frac{k_{0T} - 1}{k_{0T}}}} \bar{p}^{\left(\frac{1}{k_T} - \frac{1}{k_{0T}} \right)}. \quad (29)$$

Przyjmując średnią wartość $\bar{p}$ jako średnią geometryczną

$$\bar{p} = \sqrt{pp_0}, \quad (30)$$

prawą stronę równania (29) postaramy się przedstawić w postaci

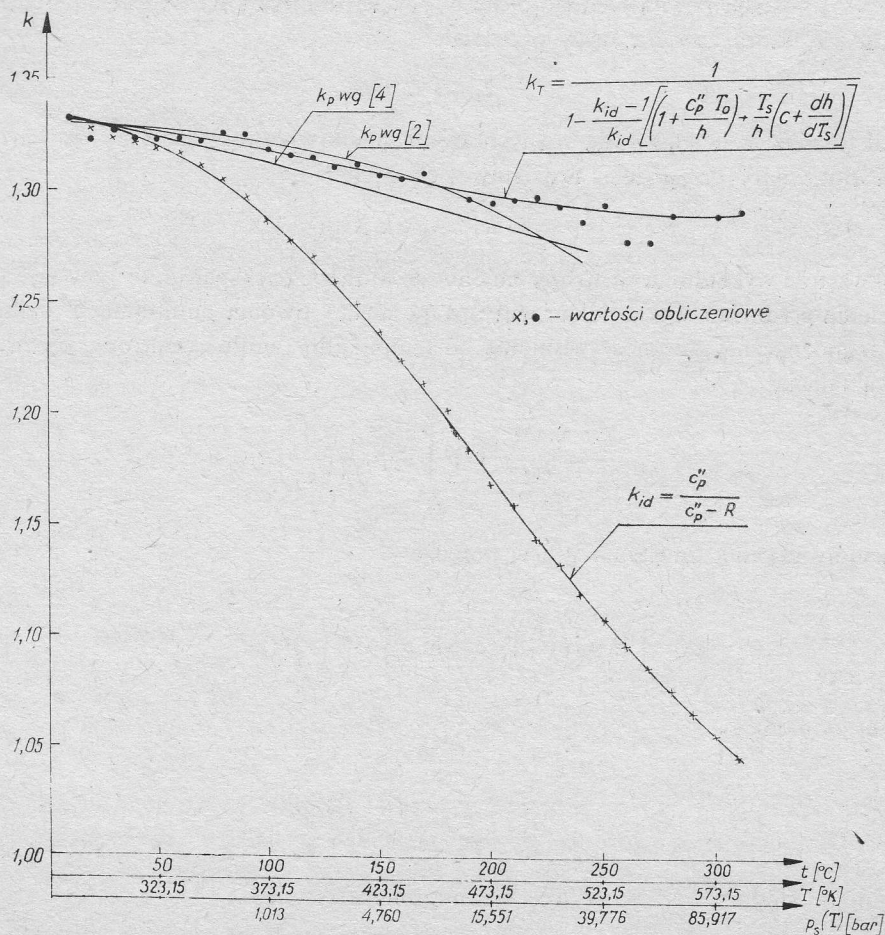
$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\bar{k}_T - 1}{\bar{k}_T}} \quad (31)$$

Otrzymamy stąd wyrażenie na średnią wartość wykładnika izentropy dla dwóch stanów

$$\bar{k}_T = \frac{2k_{0T}k_T}{k_{0T} + k_T} \quad (32)$$

4. Wyniki obliczeń

Poniżej przedstawiono wyniki obliczeń wykładnika izentropy dla pary wodnej na linii nasycenia. Wartości poszczególnych parametrów wchodzących w wyrażenie (22) zostały zaczerpnięte z tablic parowych [5].



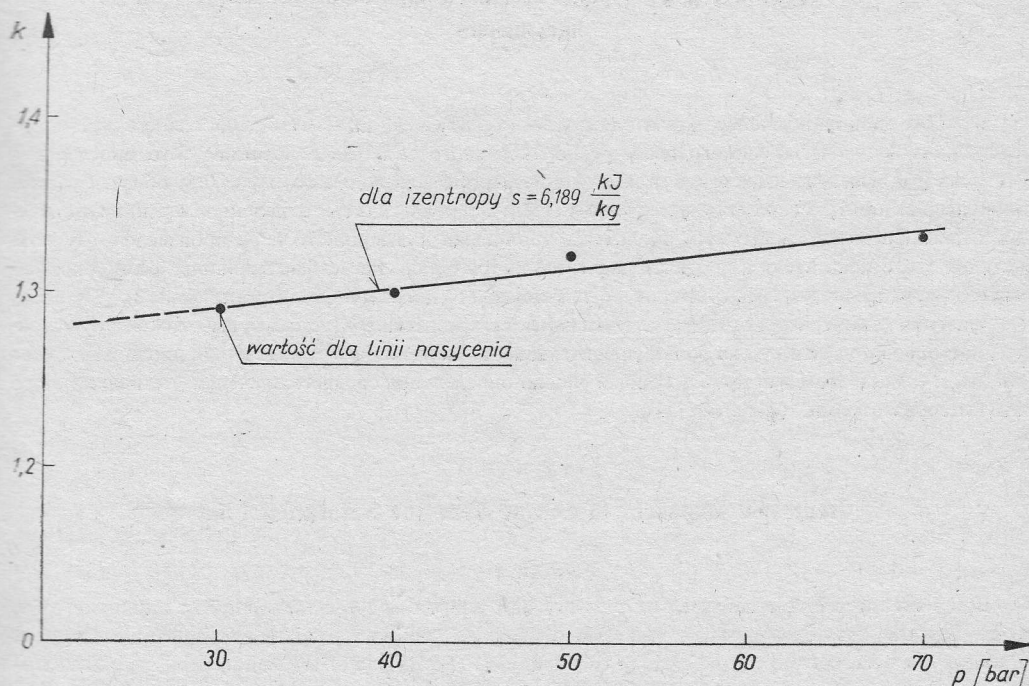
Rys. 3. Porównanie wykładników izentropy wzdłuż krzywej nasycenia

Na wykresie na rys. 3 naniesione zostały wyniki obliczeń zaczerpnięte z prac [4, 2], a dotyczące wykładnika izentropy definiowanego na podstawie zależności (1). Zwracają uwagę następujące fakty. W zakresie niskich ciśnień, poniżej 0,1 bar, wszystkie trzy definicje wykładnika izentropy dają w przybliżeniu te same wartości liczbowe

$$k_{id} = k_T = k_p = 1,33.$$

Istotnie różnią się od siebie wartości k_{id} od $k_T \cong k_p$ w zakresie wyższych ciśnień.

Do około 16 bar wykładniki k_T i k_p różnią się od siebie w granicach od 0,015. Powyżej 16 bar różnice wydają się być większe, co może wynikać zarówno z niedokładności obliczeń, o czym świadczy rozrzut punktów obliczeniowych, jak i różnic w definicji wykładników. W stosunku do prac [2, 4] podana tu formuła (22) jest wygodniejsza do obliczeń. Wyniki obliczeń dla obszaru pary przegrzanej, według wzoru (25) pokazano na wykresie



Rys. 4. Zmiana temperaturowego wykładnika izentropy wzdłuż izentropy

rys. 4. Liniami kreskowanymi zaznaczono wartości wykładnika w obszarze pary przechłodzonej. Dopuszczalność stosowania przybliżonego opisu tabelarycznych wielkości zależna jest od wymaganej dokładności obliczeń i winna być przedmiotem dyskusji w każdym szczególnym przypadku.

Literatura

- [1] A. Gardzilewicz, *Wykładnik izentropy pary wodnej w pobliżu linii nasycenia*. Prace IMP, z. 57, 1971.
- [2] M. P. Wukałowicz, W. N. Zabariew, L. W. Siergiejewa, *Pokazatel adiabaty dla pieriegrietogo wodianogo para*. Tieploenergietyka, nr 10, 1968.
- [3] R. Puzyrewski, *Anomalia gazodynamiczna w kondensującej się parze wodnej przy wysokich ciśnieniach*. Prace IMP, z. 65, 1974.
- [4] W. W. Syczew, *Nowoje urawnienie dla pokazatiela adiabaty wodianogo para*. Tieploenergietyka, nr 3, 1961.
- [5] M. P. Wukałowicz, St. Riwkin, A. A. Aleksandrow, *Tablicy tieplofizycznych swajstw wody i wodianogo para*. Moskwa 1969.
- [6] D. P. Kołodnyj, *Tablica pokazatiela adiabaty pieriegrietogo wodianogo para*. Tieploenergietyka, nr 5, 1970.
- [7] W. Endres, E. Somm, *Thermodynamische differential Quotienten von trockenem Wasserdampf berechnet nach den VDI Wasserdampfafeln*. BWK, Nr 9, 1963.

Показатель изэнтропы водяного пара вблизи линии насыщения

Резюме

В работе дано определение показателя изэнтропы на основании соотношения температуры и давления, важное для изэнтропного расширения идеального газа. На основании этого определения (формула (4)) выведено выражение показателя изэнтропы для водяного пара. Для области вблизи линии насыщения это выражение имеет форму (15), а для области более отдаленной от линии насыщения выражение имеет форму (16). Пользуясь таблицами для водяного пара произведено расчеты значения этого показателя в пределах давления до 100 баров. Расчетные величины были сопоставлены со значениями данными в литературе для „звукового показателя изэнтропы” (рис. 3).

Значения „температурного показателя изэнтропы” для температур более высоких, чем температура насыщения, указывают на большую изменчивость значения этого показателя вдоль изэнтропы (рис. 4). В связи с этим дан приближенный способ определения среднего значения „температурного показателя изэнтропы” (формула (24)).

Isentropic Exponent of Steam Near the Saturation Line

Summary

Based on the relation between the pressure and temperature for the isentropic expansion of a perfect gas the isentropic exponent has been defined. A formula expressing the isentropic exponent for steam has been derived on the basis of this definition (Eq. (4)). For the region being near the saturation line it has been expressed by formula (15) whereas for regions lying far off this line the formula (16) is valid. Calculations of the isentropic component within the range of up to 100 bars have been compared with the available values of the „acoustic isentropic exponent” (Fig. 3).

Values of the „temperature isentropic exponent” for temperatures exceeding the saturation temperature show that the exponent largely varies along the isentropes (Fig. 4). A simplified method for determining an average „temperature isentropic exponent” has therefore been presented (formula (24)).