

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPIYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPIYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

69

WARSZAWA-POZNAŃ 1975
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

KOMITET REDAKCYJNY — EXECUTIVE EDITORS
KAZIMIERZ STELLER — REDAKTOR — EDITOR
JERZY KOŁODKO · JÓZEF ŚMIGIELSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA EDITORIAL OFFICE
Instytut Maszyn Przepływowych PAN,
80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, ul. Gen. Józefa Fiszer 14, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1975

Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 380 + 90 egz.	Oddano do składania 7 III 1975 r.
Ark. wyd. 14,75 Ark. druk. 11,5	Podpisano do druku 2 XII 1975 r.
Papier druk sat. kl. V, 62 g 70 × 100 cm.	Druk ukończono w grudniu 1975 r.
Nr zam. 259/91.	R - 15/876. Cena zł 45, —

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

JAN MADEJSKI

Warszawa

Zwarte opromieniowane wymienniki ciepła

Radiacyjna wymiana ciepła w wysokotemperaturowych wymiennikach ciepła ogrzewanych gorącym gazem lub spalinami może być wzmożona przez użycie reflektorów o dużej emisyjności. Wymienniki te można podzielić na dwie grupy. W pierwszej, określonej przez małą gęstość optyczną gazu, jako typowy przykład można rozpatrywać rekuperator płaszczowo-rurowy. Sprawa ta jest dyskutowana w rozdziale 2. Rozdział 3 poświęcony jest analizie wymienników, w których gęstość optyczna gazu jest duża. Należą do nich kanały o dużej średnicy i chłodzonej powierzchni zamykającej.

Oznaczenia

A – pole powierzchni,	α – współczynnik przejmowania (wnikania) ciepła,
c_v – właściwa pojemność cieplna,	ε – emisyjność,
D – wymiar charakterystyczny profilu,	η – sprawność reflektorów,
H – opromieniowanie,	θ – temperatura zredukowana,
J – jasność,	ρ – gęstość,
l – podziałka siatki,	σ – stała promieniowania czarnego,
L – długość pręta,	φ_{i-k} – stosunek konfiguracji,
$N = \alpha / \sigma T_g^3$ – liczba wymiany ciepła,	$\left. \begin{matrix} \varphi_x, \varphi_y \\ \varphi_{xx}, \varphi_{xy} \end{matrix} \right\}$ – momenty stosunków konfiguracji.
q – strumień cieplny,	itd.
Q – prąd cieplny,	
q_v – natężenie wewnętrznych źródeł ciepła,	
R – połowa odległości między płaszczyznami,	
R' – promień walca,	
t – czas,	
T – temperatura bezwzględna,	
U – energia wewnętrzna,	
V – objętość,	
x, y – współrzędne kartezjańskie,	

Wskaźniki

0	– powierzchnia zamykająca,
1	– rura chłodzona,
2	– reflektor,
i	– pręt nr i ,
k	– pręt nr k ,
+	– wielkość zredukowana.

1. Zasada intensyfikacji wymiany ciepła w opromieniowanych wymiennikach ciepła

W ciągu ostatnich 25 lat zrobiono bardzo dużo w dziedzinie intensyfikacji konwektywnej wymiany ciepła i w budowie zwartych (intensywnych) wymienników ciepła dla umiarkowanych temperatur. Daleko mniejsze jest zainteresowanie intensyfikacją wymiany

ciepła w wysokotemperaturowych wymiennikach, w których jednym z czynników są z reguły spaliny, a więc gazy nieprzezroczyste (emitujące i absorbujące). Jednakże, w związku z obecnym rozwojem techniki wysokich temperatur i koniecznością budowy wymienników dla coraz wyższych temperatur, warto się zastanowić nad ewentualnymi możliwościami intensyfikacji wymiany ciepła w wysokotemperaturowych wymiennikach, w których dużą rolę gra radiacyjna wymiana ciepła. Jako punkt wyjścia można przyjąć przykład 55 z dzieła Hoblera [1], w którym rozpatruje się ekran walcowy o promieniu $R'=0,5$ m, emisyjności $\varepsilon_0=0,8$ i temperaturze $T'_0=873^\circ\text{K}$ ogrzewany spalinami o temperaturze $T=1123^\circ\text{K}$. Posiłkując się wykresami Hottela, oblicza się dla danego składu spalin emisyjność dla danych temperatur i stąd wynika strumień ciepły $\dot{Q}_0/A_0=8,96$ kW/m² oraz współczynnik przejmowania ciepła $\alpha=35,8$ W/m² deg. Wyniki te dotyczą również dwóch płaskich ścian o tej samej temperaturze T_0 i odstępzie $2R=R'$.

Powyższy przykład rozszerzono obliczając strumień ciepły i współczynnik przejmowania ciepła dla innych wymiarów ekranu. Wyniki obliczeń zawiera tabela 1.

Ze wzrostem wymiarów bryły gazowej transmisyjność gazu spada, skutkiem czego strumień ciepły do ekranu wzrasta. Spada wobec tego zużycie rur ekranu i ich koszt. W przypadku ekranu cylindrycznego moc cieplna z objętości aparatu wynosi $\dot{Q}_0/V_0=2\dot{Q}_0/A_0R'$ i spada ze wzrostem wymiarów. To powoduje zmniejszenie konwektywnej wymiany ciepła wskutek zmniejszenia prędkości gazów.

Tabela 1

Wymiana ciepła od warstwy gazu o grubości $2R$

R	m	0,0625	0,125	0,25	0,5	1,0
$\dot{Q}_0/A_0$	kW/m ²	5,01	7,23	8,96	11,05	16,89
α	W/m ² deg	20,0	28,8	35,8	44,1	67,6
R'	m	0,125	0,25	0,5	1,0	2,0
$\dot{Q}_0/V_0$	kW/m ³	80,1	57,9	35,9	22,10	16,89

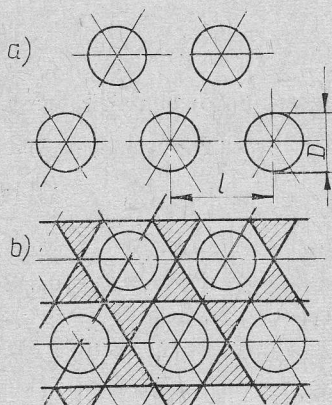
Tak więc przy dużych wymiarach tylko radiacyjna wymiana ciepła odgrywa rolę. A zatem powiększenie wymiarów zmniejsza wymaganą powierzchnię, natomiast zwiększa objętość, co nie jest zjawiskiem korzystnym. Zmniejszenie wymiarów ma to do siebie, że udział konwektywnej wymiany ciepła zaczyna rosnąć. Przy odpowiednio małych wymiarach gaz stanie się prawie przezroczysty, co spowoduje spadek radiacyjnej wymiany ciepła.

Aby wykorzystać radiację, właściwą wysokim temperaturom, można w strumieniu gazu umieścić reflektory, np. ceramiczne, o dużej emisyjności. Reflektory te będą ogrzewane przez gaz konwekcyjnie, skutkiem czego będą promieniowały na ekran. W ten sposób będzie można zintensyfikować wymianę ciepła między gazem a ekranem, wykorzystując wzmożoną konwekcyjną wymianę ciepła między gazem i reflektorami do dodatkowej radiacyjnej wymiany ciepła między reflektorami a ekranem. Sposób ten i korzyści z niego płynące zostanie omówiony poniżej na kilku przykładach.

2. Wysokotemperaturowe wymienniki płaszczowo-rurowe

Rozpatrzmy równoległoprądowy rekuperator z rur o średnicy zewnętrznej D , rozstawionych na siatce trójkątów równobocznych o boku l (rys. 1a). Gaz o wysokiej temperaturze płynie prostopadle do płaszczyzny rysunku w przestrzeni międzyrurowej. Powierzchnie rur w danym przekroju mają z założenia tę samą temperaturę T_1 , skutkiem czego radiacyjna wymiana ciepła netto między nimi nie istnieje. Rys. 1b przedstawia ulepszoną konstrukcję, w której rury otoczone są przez reflektory o przekroju trójkątnym. Reflektory te ogrzewają się przez konwekcję do temperatury T_2 . W przeciwieństwie do rur reflektory nie są chłodzone wewnątrz, więc musi być $T_1 < T_2 < T_g$, gdzie T_g jest temperaturą gazu.

Oznaczmy przez A_2 powierzchnię reflektorów, przypadającą na powierzchnię A_1 rury. W analizowanym przykładzie mamy $A_1/A_2 = \pi D/3l$, przy czym powierzchnia A_2 zamyka powierzchnię A_1 .



Rys. 1. Podstawowy (a) i ulepszony (b) schemat rekuperatora

Niech α_1 i α_2 oznaczają współczynniki konwekcyjnego przejmowania ciepła od gazu do rur i reflektorów. W ten sposób na drodze konwekcyjnej dochodzi do rury ciepło

$$\dot{Q}_1 = A_1 \alpha_1 (T_g - T_1), \quad (2.1)$$

a do reflektora

$$\dot{Q}_2 = A_2 \alpha_2 (T_g - T_2). \quad (2.2)$$

Ponieważ zaś reflektor nie jest chłodzony, więc w warunkach stacjonarnych prąd $\dot{Q}_2$ musi zostać przekazany powierzchni A_1 drogą radiacji. Stosując obowiązujący w danym przypadku wzór Christiansena mamy

$$\dot{Q}_2 = A_2 \varepsilon_m \sigma (T_2^4 - T_1^4), \quad (2.3)$$

gdzie

$$\frac{1}{\varepsilon_m} = \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 \right), \quad (2.4)$$

zaś ε_1 i ε_2 stanowią emisyjności danych powierzchni, ε_m — emisyjność zastępczą, σ — stałą promieniowania ciała czarnego. Wzór powyższy stosuje się dla gazów przezroczystych,

a więc może być użyty w danym przypadku z uwagi na małe z założenia grubości warstw gazów, a ściślej rzecz biorąc, małe grubości optyczne. Całkowity prąd cieplny na powierzchni A_1 wynosi:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 = A_1 \alpha_1 (T_g - T_1) + A_2 \alpha_2 (T_g - T_2). \quad (2.5)$$

Można wprowadzić teraz efektywny współczynnik przejmowania ciepła

$$\alpha = \frac{\dot{Q}}{A_1 (T_g - T_1)}, \quad (2.6)$$

który można obliczyć ze wzoru

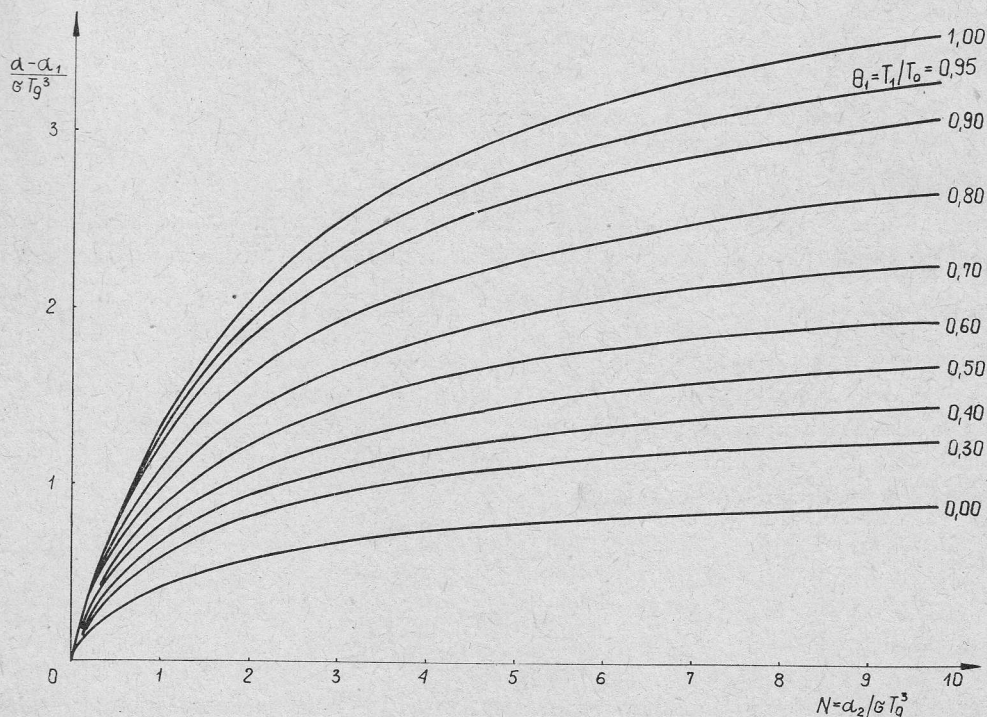
$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\sigma T_g^3} = N \frac{A_2}{A_1} \frac{1 - \Theta_2}{1 - \Theta_1}, \quad (2.7)$$

gdzie $\Theta_2 = T_2/T_g$ spełnia równanie

$$1 - \Theta_2 = \frac{\varepsilon_m}{N} (\Theta_2^4 - \Theta_1^4), \quad (2.8)$$

wynikające z porównania prawych stron równań (2.2) i (2.3). Jako parametry w danym zagadnieniu występują

$$\Theta_1 = \frac{T_1}{T_g}, \quad N = \frac{\alpha_2}{\sigma T_g^3}. \quad (2.9)$$



Rys. 2. Zależność $(\alpha - \alpha_1)/\sigma T_g$ od N i θ dla $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,8$ i $A_2/A_1 = 1,91$

Dla bardzo małych spadków temperatury ($T_g - T_1$) będzie Θ_1 , a zatem i Θ_2 bliskie jedności. W tym przypadku granicznym otrzymujemy zależność

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\sigma T_g^3} = 4\varepsilon_m \frac{A_2}{A_1} \frac{N}{N + 4\varepsilon_m} \quad \text{dla } \Theta_1 = 1. \quad (2.10)$$

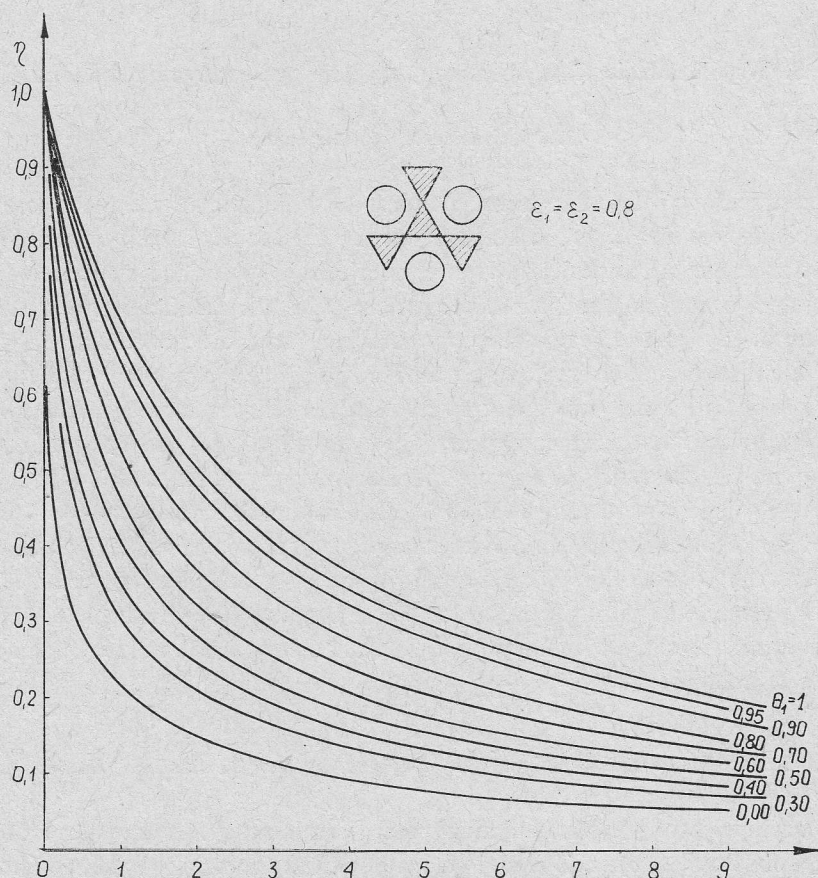
Dla innych wartości Θ_1 zależność $(\alpha - \alpha_1)/\sigma T_g^3$ od N i Θ_1 należy wyznaczyć rachunkowo. Rysunek 2 przedstawia wyniki takich obliczeń dla $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,8$ oraz $A_2/A_1 = 1,91$, co daje $\varepsilon_m = 0,578$.

Dla bardzo dużych wartości liczby N , tj. przy $N \rightarrow \infty$, otrzymujemy graniczną zależność

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\sigma T_g^3} = \varepsilon_m \frac{A_2}{A_1} (1 + \Theta_1)(1 + \Theta_1^2). \quad (2.11)$$

Innym sposobem rachunkowego ujęcia wyników obliczeń jest wprowadzenie, przez analogię do żeber, sprawności reflektorów

$$\eta = \frac{T_g - T_2}{T_g - T_1} = \frac{1 - \Theta_2}{1 - \Theta_1}. \quad (2.12)$$



Rys. 3. Zależność η od N i Θ_1 dla $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,8$ i $A_2/A_1 = 1,91$

W granicznym przypadku $\Theta_1 = 1$, otrzymuje się

$$\eta = \frac{4\varepsilon_m}{N + 4\varepsilon_m}. \quad (2.13)$$

Wykres na rys. 3 przedstawia zależność η od N i Θ_1 . Korzystając ze sprawności otrzymujemy

$$\frac{\alpha - \alpha_1}{\sigma T_g^3} = \frac{A_2}{A_1} N \eta (1 - \Theta_1). \quad (2.14)$$

Rozpatrzmy dwa przykłady liczbowe dla $\alpha_1 = \alpha_2 = 90 \text{ W/m}^2 \text{ deg}$. W pierwszym przykładzie niech będzie duża różnica temperatur, np. $T_g = 1473^\circ\text{K}$, $T_1 = 873^\circ\text{K}$. Mamy tu $\sigma T_g^3 = 185 \text{ W/m}^2 \text{ deg}$, co daje $N = 0,485$ przy $\Theta_1 = 0,591$.

Korzystając z wykresu na rys. 2, otrzymujemy $(\alpha - \alpha_1)/\sigma T_g^3 = 0,54$, tzn. $\alpha = \alpha_1 + 100 = 190 \text{ W/m}^2 \text{ deg}$; mamy wzrost wymiany ciepła o 111%. W drugim przykładzie niech będzie $T_g = 1073^\circ\text{K}$, $T_1 = 1023^\circ\text{K}$, $\Theta_1 = 0,955$. Daje to $\sigma T_g^3 = 71,5 \text{ W/m}^2 \text{ deg}$ oraz $N = 1,26$. Z wykresu otrzymuje się $(\alpha - \alpha_1)/\sigma T_g^3 = 1,50$, wobec czego $\alpha = 197,1$ czyli mamy wzrost o 119%.

3. Współdziałanie ekranów z konwekcyjnie ogrzewanymi reflektorami

3.1. Opis modelu geometrycznego

W przestrzeni wypełnionej gazem i otoczonej chłodzonym ekranem konwekcyjna wymiana ciepła jest słaba, wskutek małych prędkości gazu i dużych wymiarów kanału. Natomiast znacznie intensywniejsza będzie konwekcyjna wymiana ciepła między gazem a przedmiotem o małych wymiarach, np. prętem o średnicy D . Taki pręt może spełniać rolę reflektora, gdy jest termicznie obojętny. Jeśli przestrzeń otoczoną ekranem wypełnimy regularnym układem takich prętów, to moc cieplna dochodząca od gazu do prętów, wskutek konwekcji, może być znaczna. W ustalonych warunkach układ reflektorów będzie promieniował na ekran intensyfikując w ten sposób wymianę ciepła.

Z uwagi na zastosowania praktyczne rozpatrzmy przypadek płaski, w którym ekran jest walcowy, a jego obwód określa linia w płaskim układzie współrzędnych. Przestrzeń wewnątrz tego konturu wypełnia układ pryzmatycznych prętów równoległych do tworzącej ekranu, dających w przekroju układ profilów o średnicy zastępczej D , rozmieszczonych na siatce regularnej, tak jak np. na rys. 1a. Wymiar gabarytowy układu, R , będzie z założenia znacznie większy od średnicy pręta D , $R \gg D$, co pozwoli na uczynienie pewnych uproszczeń w analizie.

3.2. Równanie radiacyjnej wymiany ciepła w regularnych układach płaskich

Rozpatrzmy dowolny element układu (pręt) o powierzchni A_i i objętości V oraz o charakterystyce fizycznej ρ , c_v , ε . Z uwagi na małe wymiary można przyjąć, że temperatura T_i i jasność J_i na obwodzie jest stała. Przyrost energii wewnętrznej pręta (na jednostkę

jego długości) wynoszący

$$\dot{U}_i = c_v \rho V \partial T_i / \partial t \quad (3.1)$$

pochodzi od działania zewnętrznych strumieni cieplnych oraz od wewnętrznych źródeł ciepła o natężeniu $q_{v,i}$. Mamy więc

$$\dot{U}_i = A_i q_{\text{rad},i} + A_i q_{c,i} + V q_{v,i}, \quad (3.2)$$

przy czym $q_{\text{rad},i}$ jest radiacyjnym, a $q_{c,i}$ konwekcyjnym strumieniem cieplnym.

Wprowadzając skrót

$$q_i = q_{c,i} + \frac{V}{A_i} q_{v,i} \quad (3.3)$$

mamy równanie

$$c_v \rho \frac{V}{A_i} \frac{\partial T_i}{\partial t} = q_{\text{rad},i} + q_i. \quad (3.4)$$

Radiacyjny strumień cieplny określić można dwójako: z bilansu radiacyjnego dla danego elementu o jasności J_i i opromienianiu H_i

$$q_{\text{rad},i} = H_i - J_i, \quad (3.5)$$

w którym jasność spełnia równanie

$$J_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) H_i, \quad (3.6)$$

oraz z bilansu elementów sąsiednich w liczbie $\sum_k$, dla których znane być muszą stosunki konfiguracji φ_{i-k} elementu A_i względem każdego elementu A_k :

$$q_{\text{rad},i} = \sum_k \varphi_{i-k} (J_k - J_i). \quad (3.7)$$

Jeśli założymy, że liczba $\sum_k$ jest ograniczona, to z uwagi na założoną symetrię tego zbioru względem elementu położonego wewnątrz układu, istnieje wokół tego elementu A_i strefa współdziałania o promieniu r_i , zamykająca $\sum_k$ elementów A_k o współrzędnych x_k, y_k (rys. 4).

Biorąc za początek układu współrzędne elementu A_i , tj. x_i, y_i , mamy określone położenie elementów A_k przez współrzędne względne $x_{i-k} = x_k - x_i$ oraz $y_{i-k} = y_k - y_i$. Odległości te z założenia mają być małe, tzn. znacznie mniejsze od wymiaru gabarytowego R . To samo dotyczy promienia r_i . Przy takim założeniu, jasności J_k można przedstawić szeregiem Taylora

$$J_k = J_i + \frac{\partial J}{\partial x} x_{i-k} + \frac{\partial J}{\partial y} y_{i-k} + \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \frac{x_{i-k}^2}{2} + \frac{\partial^2 J}{\partial x \partial y} x_{i-k} y_{i-k} + \frac{\partial^2 J}{\partial y^2} \frac{y_{i-k}^2}{2} + \dots, \quad (3.8)$$

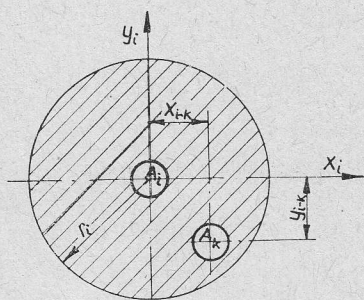
przy czym pochodne obliczone są dla $x = x_i, y = y_i$, tj. dla elementu A_i . Podstawienie (3.8) do (3.7) daje

$$q_{\text{rad},i} = \varphi_x \frac{\partial J}{\partial x} + \varphi_y \frac{\partial J}{\partial y} + \varphi_{xx} \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + \varphi_{xy} \frac{\partial^2 J}{\partial x \partial y} + \varphi_{yy} \frac{\partial^2 J}{\partial y^2} + \dots, \quad (3.9)$$

przy czym

$$\begin{aligned}\varphi_x &= \sum_k \varphi_{i-k} x_{i-k}, & \varphi_y &= \sum_k \varphi_{i-k} y_{i-k}, & \varphi_{xx} &= \sum_k \varphi_{i-k} \frac{x_{i-k}^2}{2}, \\ \varphi_{xy} &= \sum_k \varphi_{i-k} x_{i-k} y_{i-k}, & \varphi_{yy} &= \sum_k \varphi_{i-k} \frac{y_{i-k}^2}{2} \quad \text{itd.}\end{aligned}\quad (3.10)$$

Wielkości te można określić jako kolejne „momenty” stosunków konfiguracji, przy czym w układach symetrycznych (regularnych) zerują się wszystkie momenty o nieparzystej liczbie wskaźników x lub y . Wynika to stąd, że każdy element o współrzędnych x_{i-k}, y_{i-k} ma swój symetryczny odpowiednik o współrzędnych $x_{i-k}' = -x_{i-k}, y_{i-k}' = -y_{i-k}$.



Rys. 4. Strefa współdziałania wewnątrz systemu

Dlatego $\varphi_x = 0 = \varphi_y = \varphi_{xy} = \varphi_{xxx} = \dots$. Podobną własnością wynikłą z symetrii jest równość momentów drugiego rzędu $\varphi_{xx} = \varphi_{yy}$, posiadających wymiar kwadratu długości. Oznaczmy przez l wymiar charakterystyczny siatki układu, np. bok trójkątów równobocznych. Wtedy mamy $\varphi_{xx} \sim l^2$, $\varphi_{xxxx} \sim l^4$ itd. Jeśli wymiar l jest rzędu D (średnicy zastępczej profilu) i jest znacznie mniejszy od gabarytowego wymiaru układu R , to w rozwinięciu (3.8) można pominąć czwarte i wyższe parzyste pochodne. Ponieważ zaś wszystkie współczynniki przy pochodnych rzędów nieparzystych zerują się dla układów regularnych, więc z racji $\varphi_{xx} = \varphi_{yy}$ równanie (3.9) przybiera prostą postać

$$q_{\text{rad}, i} = \varphi_{xx} \left(\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial y^2} \right) = \varphi_{xx} \nabla^2 J. \quad (3.11)$$

W ten sposób radiacyjny strumień cieplny wyraża się przez laplasjan jasności, co jest także słuszne dla przestrzennych układów regularnych.

Eliminując z równań (3.5) i (3.6) opromieniowanie H_i otrzymujemy

$$q_{\text{rad}, i} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} (J_i - \sigma T_i^4). \quad (3.12)$$

Wprowadzwszy w (3.11) ciągłe pole jasności możemy opuścić indeksy i . Z porównania prawych stron (3.11) i (3.12) i z podstawienia (3.12) do (3.4) otrzymujemy dwa równania

$$c_v \rho \frac{V}{A} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} (J - \sigma T^4) + q, \quad (3.13)$$

$$\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} (J - \sigma T^4) = \varphi_{xx} \nabla^2 J, \quad (3.14)$$

w których występują dwie zmienne: temperatura T i jasność J . W dalszym ciągu rozważań będą nas interesowały tylko zagadnienia stacjonarne, skąd $\partial T/\partial t = 0$ oraz

$$J = \sigma T^4 - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} q. \quad (3.15)$$

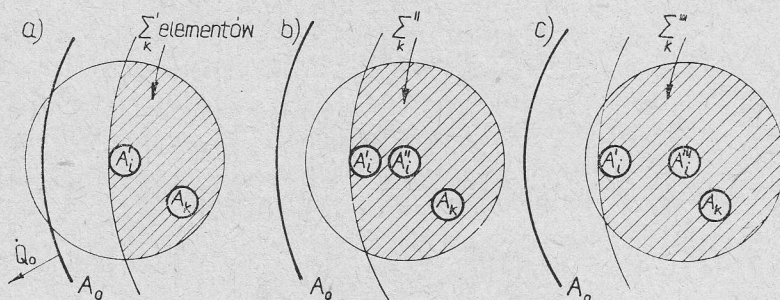
Dla tych przypadków (3.14) przybiera postać alternatywną

$$\varphi_{xx} \nabla^2 J = -q. \quad (3.16)$$

Gdy strumień q nie zależy od temperatury, to równanie (3.16) rozwiązuje się bardzo prosto. Taki przypadek występuje w reaktorach bez chłodzenia konwekcyjnego. Natomiast gdy jest chłodzenie konwekcyjne, to q zależy od T , powodując pewne komplikacje w sposobie rozwiązania.

3.3. Ustalenie warunków brzegowych

Przyjmujemy, że układ prętów współpracuje z powierzchnią A_0 o charakterystyce T_0, J_0, ε_0 . Powierzchnia A_0 , będąca odbiornikiem energii radiacyjnej, zamyka dany układ. Bezpośrednio współpracują z nią te elementy układu, których strefa współdziałania w samym układzie jest niekompletna, gdyż jest ucięta przez granicę układu.



Rys. 5. Niekompletne strefy współdziałania

W zależności od rozmiarów strefy, można te elementy podzielić na kilka grup. W pierwszej grupie (skrajnej) będą elementy A_i' o strefach współdziałania przedstawionych na rys. 5a, zawierających liczbę $\sum_k'$ elementów A_k . W kolejnej grupie będą elementy A_i'' o strefach współdziałania przedstawionych na rys. 5b, zawierających liczbę $\sum_k''$ elementów A_k , przy czym $\sum_k' < \sum_k'' < \sum_k$.

Ewentualnie mogą wystąpić również inne grupy elementów A_i''' itd., przy czym $\sum_k''' > \sum_k''$. Strumień ciepły doprowadzany drogą radiacyjną do powierzchni A_0 wynosi

$$\frac{\dot{Q}_0}{A_0} = q_{\text{rad}, 0} = H_0 - J_0 = \left(\sum_i' + \sum_i'' + \dots \right) \varphi_{0-i} (J_i - J_0), \quad (3.17)$$

przy czym J_i oznacza J'_i lub J''_i itd. w zależności od przepisu sumowania. Ponieważ

$$(\sum'_i + \sum''_i + \dots) \varphi_{0-i} + \varphi_{0-0} = 1, \quad (3.18)$$

co wynika z prawa zamkniętości, zaś przy styku powierzchni A_0 z układem prętów mamy $\varphi_{0-0} = 0$, więc

$$\frac{\dot{Q}_0}{A_0} = H_0 - J_0 = (\sum'_i + \sum''_i + \dots) \varphi_{0-i} J_i - J_0. \quad (3.19)$$

Korzystając z relacji

$$J_0 = \varepsilon_0 \sigma T_0^4 + (1 - \varepsilon_0) H_0 \quad (3.20)$$

otrzymujemy

$$\frac{\dot{Q}_0}{A_0} = \frac{\varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} (J_0 - \sigma T_0^4). \quad (3.21)$$

Stąd

$$J_0 = \varepsilon_0 \sigma T_0^4 + (1 - \varepsilon_0) (\sum'_i + \sum''_i + \dots) \varphi_{0-i} J_i. \quad (3.22)$$

Korzystając z praw zamkniętości i wzajemności mamy ogólnie

$$\varphi_{0-i} A_0 = \varphi_{i-0} A_i, \quad \varphi_{i-0} = 1 - \sum_k \varphi_{i-k} - \varphi_{i-i}, \quad (3.23)$$

a dla kolejnych grup

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_{i-0} &= 1 - \sum_k \varphi_{i-k} - \varphi_{i-i}, \\ \varphi''_{i-0} &= 1 - \sum_k \varphi_{i-k} - \varphi_{i-i}, \quad \text{itd.} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Korzystając z tych oznaczeń otrzymujemy ze wzoru (3.22)

$$J_0 = \varepsilon_0 \sigma T_0^4 + (1 - \varepsilon_0) \left(\sum'_i \frac{A'_i}{A_0} \varphi'_{i-0} J'_i + \sum''_i \frac{A''_i}{A_0} \varphi''_{i-0} J''_i + \dots \right). \quad (3.25)$$

Jasności J''_i itd. wyeliminujemy korzystając z rozwinięcia

$$J''_i = J'_i + \frac{\partial J}{\partial x} x'_{i-i} + \frac{\partial J}{\partial y} y'_{i-i} + \dots, \quad (3.26)$$

w którym x'_{i-i} i y'_{i-i} określają położenie elementu A''_i względem elementu A'_i . Przy tym pochodne $\partial J / \partial x$, $\partial J / \partial y$ są obliczone dla miejsca, gdzie $J = J'_i$. Przyjmujemy przy tym, że jasności J'_i nie zależą od położenia elementu A'_i , w związku z czym wielkość J'_i oznaczoną po prostu przez J i będącą wartością jasności na granicy układu, można wynieść przed znak sumy w (3.25). Po uwzględnieniu (3.26) otrzymujemy z (3.25):

$$J_0 = \varepsilon_0 \sigma T_0^4 + (1 - \varepsilon_0) \left[J + \frac{\partial J}{\partial x} \sum''_i \frac{A''_i}{A_0} \varphi''_{i-0} x'_{i-i} + \frac{\partial J}{\partial y} \sum''_i \frac{A''_i}{A_0} \varphi''_{i-0} y'_{i-i} + \dots \right]. \quad (3.27)$$

Rozpatrzmy teraz pręty z grupy skrajnej A'_i w liczbie $\sum'_i$. Ich jasność wynosi $J'_i = J$.

Mamy

$$q_{\text{rad},i} = \varphi'_{i-0}(J_0 - J'_i) + \sum_k' \varphi_{i-k}(J_k - J'_i) = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(J'_i - \sigma T_i^4) = -q'_i. \quad (3.28)$$

Sumę występującą powyżej, rozwija się na szereg

$$\sum_k' \varphi_{i-k}(J_k - J'_i) = \varphi'_x \frac{\partial J}{\partial x} + \varphi'_y \frac{\partial J}{\partial y} + \dots, \quad (3.29)$$

przy czym oznaczono

$$\varphi'_x = \sum_k' \varphi_{i-k} x_{i-k}, \quad \varphi'_y = \sum_k' \varphi_{i-k} y_{i-k}. \quad (3.30)$$

Po podstawieniu (3.29) do (3.28) otrzymujemy

$$-q'_i = \varphi'_{i-0}(J_0 - J'_i) + \varphi'_x \frac{\partial J}{\partial x} + \varphi'_y \frac{\partial J}{\partial y}, \quad (3.31)$$

przy czym wyższe pochodne pomijamy. W tym wzorze piszemy $q'_i = q$, $J'_i = J$ zgodnie z poprzednią umową i podstawiamy J_0 ze wzoru (3.31). Otrzymujemy w rezultacie

$$\begin{aligned} -q = \varphi'_{i-0} \varepsilon_0 (\sigma T_0^4 - J) + \frac{\partial J}{\partial x} \left[\varphi'_x + \varphi'_{i-0} (1 - \varepsilon_0) \sum_i'' \frac{A_i''}{A_0} \varphi'_{i-0} x'_{i-i} + \dots \right] + \\ + \frac{\partial J}{\partial y} \left[\varphi'_y + \varphi'_{i-0} (1 - \varepsilon_0) \sum_i'' \frac{A_i''}{A_0} \varphi'_{i-0} y'_{i-i} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Można wprowadzić wektor β o składowych

$$\left. \begin{aligned} \beta_x &= \varphi'_x - \varphi'_{i-0} (1 - \varepsilon_0) \sum_i'' \frac{A_i''}{A_0} \varphi'_{i-0} x'_{i-i} + \dots, \\ \beta_y &= \varphi'_y + \varphi'_{i-0} (1 - \varepsilon_0) \sum_i'' \frac{A_i''}{A_0} \varphi'_{i-0} y'_{i-i} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

za pomocą którego warunek brzegowy (3.32) przyjmuje ogólniejszą postać

$$q + \varphi'_{i-0} \varepsilon_0 (\sigma T_0^4 - J) + \beta \nabla J = 0, \quad (3.34)$$

obowiązującą dla brzegu układu prętów, a praktycznie dla powierzchni A_0 , która z założenia $\varphi_{0-0} = 0$ styka się z układem.

3.4. Radiacyjny strumień ciepły

Strumień ciepły skierowany do powierzchni A_0 zamykającej układ prętów określony jest wzorem (3.21)

$$\frac{\dot{Q}_0}{A_0} = \frac{\varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} (J_0 - \sigma T_0^4). \quad (3.35)$$

Do wzoru tego można podstawić jasność J_0 ze wzoru (3.27). Otrzymamy wtedy wzór

$$\frac{\dot{Q}_0}{A_0} = \varepsilon_0(J - \sigma T_0^4) + \frac{\varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} \frac{1}{\varphi'_{i-0}} \left[(\beta_x - \varphi'_x) \frac{\partial J}{\partial x} + (\beta_y - \varphi'_y) \frac{\partial J}{\partial y} \right], \quad (3.36)$$

lub

$$\frac{\dot{Q}_0}{A_0} = \varepsilon_0(J - \sigma T_0^4) + \frac{\varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} \frac{\beta - \varphi'}{\varphi'_{i-0}} \nabla J, \quad (3.37)$$

gdzie φ' jest wektorem o składowych φ'_x, φ'_y . Do tego wzoru możemy podstawić

$$\nabla J = \frac{\beta}{\beta^2} [\varphi'_{i-0} \varepsilon_0(J - \sigma T_0^4) - q] \quad (3.38)$$

ze wzoru (3.34). Otrzymujemy wtedy alternatywne wyrażenie

$$\frac{\dot{Q}_0}{A_0} = \varepsilon_0(J - \sigma T_0^4) \left[1 + \frac{\varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} \left(1 - \frac{\beta \varphi'}{\beta^2} \right) \right] - \frac{q}{\varphi'_{i-0}} \frac{\varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} \left(1 - \frac{\beta \varphi'}{\beta^2} \right). \quad (3.39)$$

Wzór ten jest poprawny, gdy wymiary l i D są znacznie mniejsze od wymiaru gabarytowego układu R . Ta sama uwaga dotyczy warunku brzegowego (3.34) i równania różniczkowego (3.14).

3.5. Zakres poprawności teorii

W celu zbadania zakresu poprawności, zbadamy najprostszy przypadek jednowymiarowy dla układu prętów ze stałymi wewnętrznymi źródłami ciepła, tj. dla $q = \text{const}$. Obowiązuje wtedy równanie (3.16) w postaci

$$\varphi_{xx} \frac{d^2 J}{dx^2} = -q \quad (3.40)$$

z warunkami brzegowymi

$$dJ(0)/dx = 0, \quad (3.41)$$

w płaszczyźnie symetrii $x=0$ układu dwóch płaszczyzn-ekranów o rozstawie $2R$, oraz

$$q + \varphi'_{i-0} \varepsilon_0 [\sigma T_0^4 - J(R)] + \beta_x dJ(R)/dx = 0, \quad (3.42)$$

na brzegu układu $x=R$. Rozwiązanie brzmi

$$J = C - \frac{qx^2}{2\varphi_{xx}^2}, \quad (3.43)$$

przy czym z (3.42) wynika

$$C = \sigma T_0^4 + \frac{qR^2}{2\varphi_{xx}} + \frac{q}{\varphi'_{i-0} \varepsilon_0} \left(1 - \frac{\beta_x R}{\varphi_{xx}} \right). \quad (3.44)$$

Stąd

$$J(R) = \sigma T_0^4 + \frac{q}{\varphi'_{i-0} \varepsilon_0} \left(1 - \frac{\beta_x R}{\varphi_{xx}} \right), \quad (3.45)$$

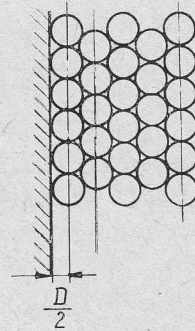
co podstawione do wzoru (3.39) daje

$$\frac{\dot{Q}_0}{A_0} = \frac{q}{\varphi'_{i-0}} \left\{ 1 - \frac{\beta_x R}{\varphi_{xx}} \left[1 + \frac{\varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} \left(1 - \frac{\varphi'_x}{\beta_x} \right) \right] \right\}. \quad (3.46)$$

Rozpatrzmy dla przykładu układ stykających się prętów okrągłych o średnicy D , rozmieszczonych na siatce trójkątnej o boku $l = D$. Dla tej geometrii mamy strefę współdziałania wewnątrz układu ograniczoną do sześciu sąsiednich prętów zasłaniających całkowicie dany pręt, dla którego $\varphi_{i-i} = 0$. Ponieważ zaś te sześć prętów jest równouprawnionych, więc dla każdego z nich $\varphi_{i-k} = 1/6$, co daje $\varphi_{xx} = D^2/4$. W grę wchodzi tylko jedna grupa skrajna, zawierająca według rys. 6 tylko cztery pręty obok danego, w związku z czym mamy $\varphi'_{i-0} = 1 - 4(1/6) = 1/3$, oraz $\beta_x = \varphi'_x = -(\sqrt{3}/6)D$ przy $\varphi''_{i-0} = 0$. Wobec tego mamy w tym przypadku

$$\frac{\dot{Q}_0}{A_0} = q \left(3 + 2\sqrt{3} \frac{R}{D} \right). \quad (3.47)$$

Jednakże w ustalonej wymianie ciepła ten strumień można obliczyć z wydajności wewnętrznych źródeł ciepła. Jeśli między płaszczyznami znajduje się n warstw prętów (patrz rys. 6),



Rys. 6. Układ prętów ściśle upakowanych

to na pasek jednego z ekranów o szerokości D przypada prąd cieplny $n\pi Dq/2$, przy czym mamy $2R = [(n-1)\sqrt{3}/2 + 1]D$, zaś strumień cieplny do jednej z płaszczyzn wynosi $n\pi q/2$. Ponieważ zaś

$$n = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(2 \frac{R}{D} - 1 \right), \quad (3.48)$$

więc stąd wynika

$$\frac{\dot{Q}_0}{A_0} = q \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{R}{D} \right], \quad (3.49)$$

lub

$$\frac{\dot{Q}_0}{A_0} = q \left(-0,228 + 1,044 \cdot 2\sqrt{3} \frac{R}{D} \right). \quad (3.50)$$

Porównując ten wzór ze wzorem (3.47) możemy stwierdzić, że przy $R/D=10$ błąd wynosi $+4,2\%$, przy $R/D=20$ wyjątkowo $0,04\%$, a przy $R/D=50$ i $R/D=100$ odpowiednio $-2,6\%$ oraz $-3,5\%$. Dla $R/D=\infty$ mamy błąd $-4,4\%$. Zerowy błąd wypada dla $R/D=20,2$.

3.6. Geometria układu prętów

Podana wyżej teoria dotyczy takich układów płaskich profilów, w których można wskazać ograniczoną strefę współdziałania radiacyjnego, obejmującą $\sum_k$ sąsiednich profili. Do tego typu należy np. układ z rys. 6, złożony z prętów okrągłych o średnicy D , rozmieszczonych na siatce trójkątów równobocznych o boku $l=D$. W tym przypadku $\sum_k=6$. Gdy $l>D>l\sqrt{3}/2$, to przez prześwity w najbardziej zbliżonej grupie sześciu sąsiadów element opromieniowuje następną grupę sześciu sąsiadów zamykających strefę współdziałania. Mamy więc $\sum_k=12$, przy czym dla bliższej szóstki stosunek konfiguracji można obliczyć ze wzoru

$$\varphi_{i-k} = \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \frac{D}{l} + \sqrt{\left(\frac{l}{D}\right)^2 - 1} - \frac{l}{D} \right) = \varphi_1, \quad (3.51)$$

a dla dalszej szóstki z prawa zamkniętości, dającego

$$\sum_k \varphi_{i-k} = 1. \quad (3.52)$$

Niezależnie od wyboru kartezjańskiego układu współrzędnych mamy w tym przypadku

$$\varphi_{xx} = \frac{3}{2}(\varphi_1 l_1^2 + \varphi_2 l_2^2), \quad (3.53)$$

przy czym φ_1 oznacza stosunek konfiguracji pierwszej szóstki według wzoru (3.51), zaś $l_1=l$ odległość środka elementu A_k od elementu A_i ; podobnie φ_2 oznacza stosunek konfiguracji dla drugiej szóstki, przy czym na mocy (3.53) mamy

$$\varphi_2 = \frac{1}{6} - \varphi_1, \quad (3.54)$$

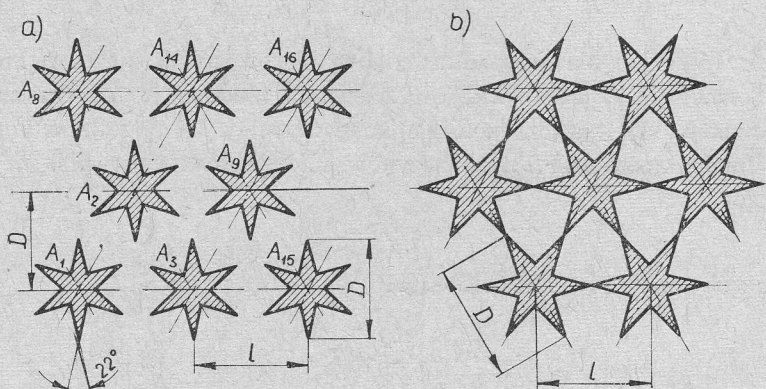
zaś l_2 jest odległością, $l_2=\sqrt{3}l$. A zatem

$$\varphi_{xx} = \frac{3}{2}l^2\left(\frac{1}{2} - 2\varphi_1\right). \quad (3.55)$$

Zależności te obowiązują przy $D>l\sqrt{3}/2$ nie tylko dla pełnych prętów, lecz również dla rur o średnicy zewnętrznej D .

Użycie rur jest celowe, gdy układ jest ogrzewany konwekcyjnie (bez wewnętrznych źródeł ciepła), a substancja ogrzewająca płynie od wewnątrz i od zewnątrz rur. Ma to taki efekt jak gdyby konwekcyjny współczynnik przejmowania ciepła wzrósł w stosunku sumy powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej do powierzchni zewnętrznej. W związku z tym, przy profilach kołowych lepiej dać mniejszą podziałkę przy użyciu rur, niż większą podziałkę przy użyciu pełnych prętów. Nadto, gdy $D<l\sqrt{3}/2$, to nie można określić wartości promienia strefy współdziałania wewnątrz nieograniczonego układu profili okrągłych.

Podobne ograniczenia istnieją dla innych profili (pełnych albo rurowych). W wielu przypadkach korzystne jest użycie układów, dla których współczynnik φ_{xx} jest mały, a ściślej mała jest wielkość bezwymiarowa φ_{xx}/l^2 . Jeśli układ prętów ma na celu wyłącznie intensyfikację wymiany ciepła, to najbardziej celowe jest użycie profili cienkościennych o jak najcieńszych ściankach. Grubość ścianek wynika wyłącznie ze względów technologicznych, gdyż poza własnym ciężarem pręty te nie są w ogóle obciążone mechanicznie.



Rys. 7. Przykłady układów profili otwartych

Profile zamknięte, o czym wspomniano, są korzystne z uwagi na wzrost konwekcyjnej wymiany ciepła. Natomiast chcąc zmniejszyć wielkość φ_{xx}/l^2 należy stosować profile otwarte. Przy tym im większy jest własny stosunek konfiguracji φ_{i-i} , tym mniejsze będą stosunki φ_{i-k} , których suma plus φ_{i-i} daje jedność, i tym mniejszy będzie wyraz φ_{xx}/l^2 . Krótko mówiąc, opłaca się aby profil stanowił zbiór wnęk. Wprawdzie szare wnęki nie stanowią powierzchni o stałej jasności, jak założono, lecz przy pewnych ograniczeniach podana teoria jest i w tym przypadku dość dobrym przybliżeniem. Przykład takiego układu profili podany jest na rys. 7a. Profile rozstawione są na siatce trójkątów równobocznych o boku l . Przy $D=l\sqrt{3}/2$ dany profil wraz z dwunastoma sąsiednimi stanowią system zamknięty. Ponieważ każdy profil składa się z sześciu wnęk, więc $\varphi_{i-i} > 0$. W danym przypadku jest $\varphi_{i-i} = 0,367$. Profil A_1 jest otoczony przez sześć profili A_2, A_3 i jeszcze czterech, leżących w odległości l . Stosunek konfiguracji dla profili tej grupy jest $\varphi_{i-k} = 0,0782 = \varphi_1$. Ponadto profil A_1 współdziała radiacyjnie z następną grupą profili leżącą w odległości $l\sqrt{3}$. Są to profile A_8, A_9 i jeszcze cztery. Tu $\varphi_{i-k} = 0,0275 = \varphi_2$. Wszystkie profile leżące na osi $A_1 - A_2$, np. A_{14} , są zasłaniane przez profil A_2 . Podobnie profil A_{15} i następne profile na osi $A_1 - A_3$ jest zasłaniany przez A_3 . Wynika to z przyjęcia siatki trójkątów równobocznych. Natomiast profil A_{16} jest zasłaniany przez A_2 i A_9 , i to wynika z wielkości profili. W rezultacie otrzymuje się następujące współczynniki dla układu z rys. 7a: $\varphi_{xx} = 0,243 l^2$, $\varphi'_{i-0} = 0,239$, $\varphi''_{i-0} = 0,0275$, $\varphi'_x = -0,231 l$, a przy $\varepsilon = 0,8$ mamy $\beta_x = -0,236 l$. Ponadto $\sum_i A_i''/A_0 = 4,110$. Gdy profile z rys. 7a przekreśli się o 30° , to układ stanie się otwarty. Aby go zamknąć należy zbliżyć profile tak, aby było $D=l$ (rys. 7b). W tym przypadku profil dany wraz z sześcioma sąsiednimi stanowi układ zamknięty,

przy czym wobec $\varphi_{i-i}=0,367$ mamy dla każdego z tych sześciu sąsiadów: $\varphi_{i-k}=0,1055$. Daje to $\varphi_{xx}=0,158 l^2$, $\varphi'_{i-0}=0,211$, $\varphi''_{i-0}=0$, $\varphi'_x=-0,183 l=\beta_x$ oraz $\sum_i A'_i/A_0=4,740$.

W obu przypadkach zakłada się, że ślad powierzchni A_0 jest poziomy.

4. Przykład dla warstwy płaskiej z układem prętów ogrzewanych konwekcyjnie i chłodzonych radiacyjnie

Rozpatrzmy przykład dla przypadku jednowymiarowego płaskiego, w którym dwie płaszczyzny równoległe, odległe o $2R$, są przedzielone układem prętów o znanej charakterystyce geometrycznej i fizycznej. Zakładamy, że pręty są ogrzewane konwekcyjnie przez gaz o stałej temperaturze T_g , przy czym współczynnik przejmowania ciepła wynosi α . Mamy więc

$$q = \alpha(T_g - T). \quad (4.1)$$

W ten sposób układ równań (3.15) - (3.16) przybiera postać

$$J = \sigma T^4 - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \alpha(T_g - T), \quad (4.2)$$

$$\alpha(T_g - T) + \varphi_{xx} d^2 J / dx^2 = 0, \quad (4.3)$$

zaś warunki brzegowe są następujące. W płaszczyźnie centralnej układu, przy $x=0$, mamy z racji symetrii

$$dJ(0)/dx = 0. \quad (4.4)$$

Na brzegu układu, przy $x=R$, obowiązuje warunek (3.34) w postaci

$$\alpha[T_g - T(R)] + \varphi'_{i-0} \varepsilon_0 [\sigma T_0^4 - J(R)] + \beta_x dJ(R)/dx = 0. \quad (4.5)$$

Wprowadzimy zmienne bezwymiarowe

$$T^+ = T/T_g, \quad J^+ = J/\sigma T_g^4, \quad x^+ = x/R \quad (4.6)$$

oraz liczby

$$N = \alpha/\sigma T_g^3, \quad T_0^+ = T_0/T_g. \quad (4.7)$$

Otrzymujemy wtedy układ

$$J^+ = T^{+4} - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} N(1 - T^+), \quad (4.8)$$

$$N(1 - T^+) + \frac{\varphi_{xx}}{R^2} d^2 J^+ / dx^{+2} = 0, \quad (4.9)$$

$$dJ^+(0)/dx^+ = 0, \quad (4.10)$$

$$N[1 + T^+(1)] + \varphi'_{i-0} \varepsilon_0 [T_0^{+4} - J^+(1)] + \frac{\beta_{xx}}{R} dJ^+(1)/dx^+ = 0. \quad (4.11)$$

Przyjmujemy, że powierzchnie prętów mają duży stopień czarności, np. $\varepsilon=0,8$. Wtedy, zwłaszcza przy mniejszych wartościach liczby N , wystarczające jest przybliżenie

$$J^+ \approx T^{+4}, \quad T^+ \simeq J^{+1/4}. \quad (4.12)$$

Pozwala to na wyeliminowanie temperatury z równań (4.9 - 4.11). Otrzymujemy mianowicie

$$N(1 - J^{+1/4}) + \frac{\varphi_{xx}}{R^2} d^2 J^+ / dx^{+2} = 0, \quad (4.13)$$

co daje się łatwo całkować. Mnożąc obie strony tego równania przez $2dJ^+/dx^+$ i wykonując całkowanie, otrzymujemy

$$\frac{2NR^2}{\varphi_{xx}} \int_{J^+(0)}^{J^+} (1 - J^{+1/4}) dJ^+ + \left(\frac{dJ^+}{dx^+} \right)^2 = 0, \quad (4.14)$$

przy czym prawa strona zeruje się, aby zadość uczynić warunkowi symetrii (4.10). W związku z tym

$$\frac{dJ^+}{dx^+} = -R \left(\frac{2N}{\varphi_{xx}} \right)^{1/2} \{ J^+(0) - J^+ - \frac{4}{5} [J^{+5/4}(0) - J^{+5/4}] \}^{1/2}; \quad (4.15)$$

znak minus wynika z malenia jasności w miarę zbliżania się do brzegu układu.

Kolejne całkowanie daje

$$x^+ = \int_{J^+(0)}^{J^+} \frac{dJ^+}{dJ^+/dx^+} = f(J^+), \quad (4.16)$$

a w szczególności na brzegu układu przy $x^+=1$, mamy

$$1 = \frac{1}{R} \left(\frac{\varphi_{xx}}{2N} \right)^{1/2} \int_{J^+(1)}^{J^+(0)} \frac{dJ^+}{\{ J^+(0) - J^+ - \frac{4}{5} [J^{+5/4}(0) - J^{+5/4}] \}^{1/2}}. \quad (4.17)$$

Występują tu dwie stałe $J^+(0)$ i $J^+(1)$, które muszą ponadto sprawdzić warunek (4.11), przybierający postać:

$$N[1 - J^{+1/4}(1)] + \varphi'_{i-0} \varepsilon_0 [T_0^{+4} - J^+(1)] - \beta_x \left(\frac{2N}{\varphi_{xx}} \right)^{1/2} \{ J^+(0) - J^+(1) + \\ - \frac{4}{5} [J^{+5/4}(0) - J^{+5/4}(1)] \}^{1/2} = 0. \quad (4.18)$$

Rozwiązanie tego układu równań można otrzymać metodą numeryczną lub wykreślną. Analityczna metoda przybliżona jest możliwa w tych przypadkach, gdy zredukowana jasność jest bliska jedności, tzn.

$$u = 1 - J^+ \ll 1 \quad (4.19)$$

oraz

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 1 - J^+(1) \ll 1, \\ u_0 &= 1 - J^+(0) \ll 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

W tych przypadkach mamy

$$J^{+5/4} = (1-u)^{5/4} \simeq 1 - \frac{5}{4}u + \frac{5}{32}u^2, \quad (4.21)$$

w związku z czym

$$\frac{dJ^+}{dx^+} = -\frac{du}{dx^+} \simeq -R \left(\frac{2N}{\varphi_{xx}} \right)^{1/2} \left(\frac{u^2 - u_0^2}{8} \right)^{1/2}, \quad (4.22)$$

co daje po całkowaniu

$$\frac{R}{2} \left(\frac{N}{\varphi_{xx}} \right)^{1/2} x^+ = \int_{u_0}^u \frac{du}{(u^2 - u_0^2)^{1/2}} = \ln \left[\frac{u}{u_0} + \sqrt{\left(\frac{u}{u_0} \right)^2 - 1} \right], \quad (4.23)$$

a dla $x^+ = 1$

$$\ln \left[\frac{u_1}{u_0} + \sqrt{\left(\frac{u_1}{u_0} \right)^2 - 1} \right] = \frac{R}{2} \left(\frac{N}{\varphi_{xx}} \right)^{1/2}, \quad (4.24)$$

lub

$$\sqrt{1 - \left(\frac{u_0}{u_1} \right)^2} = \tanh \left[\frac{R}{2} \left(\frac{N}{\varphi_{xx}} \right)^{1/2} \right]. \quad (4.25)$$

Podobnie można przyjąć

$$J^{+1/4} = (1-u)^{1/4} \approx 1 - \frac{u}{4} \quad (4.26)$$

i podstawić to wraz z (4.21) do (4.18) otrzymując

$$u_1 \left[\frac{N}{4} + \varphi'_{i-0} \varepsilon_0 - \frac{\beta_x}{2} \left(\frac{N}{\varphi_{xx}} \right)^{1/2} \sqrt{1 - \left(\frac{u_0}{u_1} \right)^2} \right] = \varphi'_{i-0} \varepsilon_0 (1 - T_0^{+4}), \quad (4.27)$$

skąd po uwzględnieniu (4.25) otrzymujemy

$$u_1 = 1 - J^+(1) = \frac{\varphi'_{i-0} \varepsilon_0 (1 - T_0^{+4})}{\frac{N}{4} + \varphi'_{i-0} \varepsilon_0 - \frac{\beta_x}{2} \left(\frac{N}{\varphi_{xx}} \right)^{1/2} \tanh \left[\frac{R}{2} \left(\frac{N}{\varphi_{xx}} \right)^{1/2} \right]} \quad (4.28)$$

oraz

$$u_0 = 1 - J^+(0) = u_1 \sqrt{1 - \tanh^2 \left[\frac{R}{2} \left(\frac{N}{\varphi_{xx}} \right)^{1/2} \right]} = \frac{u_1}{\cosh \left[\frac{R}{2} \left(\frac{N}{\varphi_{xx}} \right)^{1/2} \right]}. \quad (4.29)$$

Wyprowadzimy teraz wzór na strumień ciepły skierowany do płaszczyzn zamykających układ. Korzystając ze wzoru (3.37) mamy po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych

$$\frac{\dot{Q}_0/A_0}{\varepsilon_0 \sigma T_g^4} = J^+(1) - T_0^{+4} + \frac{\beta_x - \varphi'_x}{(1 - \varepsilon_0) \varphi'_{i-0} R} \frac{dJ^+(1)}{dx^+}. \quad (4.30)$$

Gdy $J^+(1)$ jest bliskie jedności, to wzór ten można zapisać w następujący sposób:

$$\frac{\dot{Q}_0/A_0}{\varepsilon_0 \sigma T_g^4} = 1 - T_0^{+4} - u_1 - \frac{\beta_x - \varphi'_x}{2\varphi'_{i-0}(1-\varepsilon_0)} \left(\frac{N}{\varphi_{xx}}\right)^{1/2} u_1 \sqrt{1 - \left(\frac{u_0}{u_1}\right)^2}, \quad (4.31)$$

albo, po uwzględnieniu (4.25) i (4.29),

$$\frac{\dot{Q}_0/A_0}{\varepsilon_0 \sigma (T_g^4 - T_0^4)} = \frac{N - \frac{2}{1-\varepsilon_0} (\beta_x - \varepsilon_0 \varphi'_x) \left(\frac{N}{\varphi_{xx}}\right)^{1/2} \operatorname{tgh} \left[\frac{R}{2} \left(\frac{N}{\varphi_{xx}}\right)^{1/2} \right]}{N + 4\varphi'_{i-0} \varepsilon_0 - 2\beta_x \left(\frac{N}{\varphi_{xx}}\right)^{1/2} \operatorname{tgh} \left[\frac{R}{2} \left(\frac{N}{\varphi_{xx}}\right)^{1/2} \right]}. \quad (4.32)$$

Ze wzorów (4.28) i (4.32) jest widoczne, że wpływ wymiaru prętów lub podziałki siatki l jest mały, gdyż stosunek R/l , wynikający z proporcji $\varphi_{xx} \sim l^2$, występuje pod tangensem hiperbolicznym. Stosunek ten musi być jednak duży, aby było możliwe zastąpienie układu równań algebraicznych (a nawet całkowych) przez jedno równanie różniczkowe. Przyjmując np., że mamy do czynienia z układem prętów z rys. 7a, dla którego $\varphi_{xx} = 0,243l^2$, mamy

$$\frac{R}{2} \left(\frac{N}{\varphi_{xx}}\right)^{1/2} = 1,012 N^{1/2} R/l.$$

Gdy np. $R/l = 25$, to już dla $N > 0,072$ można z powodzeniem przyjąć $\operatorname{tgh} (1,012 N^{1/2} R/l) \approx 1$ tak, że wymiary wtedy nie odgrywają roli, a zarówno jasność jak i strumień ciepły zależą tylko od liczby N .

Dla tych warunków wykonano obliczenia dla układu z rys. 7a. Wyniki zawiera tabela 2. Przyjęto $T_0 = 873^\circ\text{K}$, $T_g = 1123^\circ\text{K}$, tj. $T_0^+ = 0,778$ oraz $\varepsilon_0 = 0,8 = \varepsilon$.

Wzory (4.28) i (4.32) mają tu następującą postać:

$$u_1 = 1 - J^+(1) = \frac{0,485}{N + 0,766 + 0,958 N^{1/2} \operatorname{tgh} (1,012 N^{1/2} R/l)}, \quad (4.33)$$

$$\frac{\dot{Q}_0/A_0}{\varepsilon_0 \sigma (T_g^4 - T_0^4)} = \frac{N + 1,032 N^{1/2} \operatorname{tgh} (1,012 N^{1/2} R/l)}{N + 0,766 + 0,958 N^{1/2} \operatorname{tgh} (1,012 N^{1/2} R/l)}, \quad (4.34)$$

przy czym mamy $\varepsilon_0 \sigma (T_g^4 - T_0^4) = 46,9 \text{ kW/m}^2$.

Wyniki z tabeli 2 są poprawne pod warunkiem skuteczności przybliżenia (4.26) i in. Dlatego w tabeli podano dokładne wartości $J^{+1/4}(1)$ oraz przybliżone według (4.26).

Tabela 2

Wpływ liczby N na jasność i strumień ciepły

N	0,1	0,25	0,5	1	2	5	10
$J^+(1)$	0,585	0,676	0,751	0,822	0,883	0,939	0,965
$J^{+1/4}(1)$	0,875	0,909	0,932	0,951	0,970	0,985	0,991
$1 - (u_1/4)$	0,894	0,919	0,938	0,952	0,971	0,985	0,991
$\dot{Q}_0/A_0 \text{ [kW/m}^2\text{]}$	17,1	24,0	29,7	34,8	39,4	43,3	45,1
$\Delta(\dot{Q}_0/A_0) \text{ [\%]}$	91	168	231	288	340	383	404

Tabela 2 zawiera również dane procentowego przyrostu strumienia ciepłego w porównaniu z przypadkiem z tabeli 1, przy $R=0,25$ m, gdy było $\dot{Q}_0/A_0=8,96$ kW/m². Obserwuje się znaczny wzrost strumienia ciepłego, szczególnie przy większych wartościach liczby N , co wymaga dość dużych konwekcyjnych współczynników przejmowania ciepła na prętach. W danych warunkach jest $\alpha=N\sigma T_g^3=82,0N$ W/m²deg. A więc np. przy $N=1$ (co daje wzrost strumienia ciepłego o 288 %) mamy $\alpha=82$ W/m²deg. Wartości tego rzędu są możliwe do zrealizowania w przypadku gazów przy prędkościach rzędu kilkudziesięciu m/s. Za intensyfikację wymiany ciepła płaci się — podobnie jak w nisko-temperaturowych rekuperatorach — spadkiem ciśnienia gazu, omywającego układ prętów.

5. Reaktory chłodzone radiacyjnie

Jeśli w układzie prętów działają wewnętrzne źródła ciepła, a nie ma konwekcyjnej wymiany ciepła, to wyraz q we wzorze (3.3) wynika tylko z tych wewnętrznych źródeł ciepła, a mianowicie:

$$q = \frac{V}{A} q_v. \quad (5.1)$$

Rozpatrzmy najprostszy przypadek $q=\text{const}$ dla symetrii osiowej. Równanie (3.16) przybiera postać równania Poissona

$$\frac{\varphi_{xx}}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dJ}{dx} \right) = -q = \text{const}. \quad (5.2)$$

Jeden warunek brzegowy wynika z symetrii dla $x=0$

$$dJ(0)/dx = 0. \quad (5.3)$$

Natomiast dla brzegu (chłodzonej powierzchni walcowej) mamy przy $x=R$ według (3.34)

$$q + \varphi'_{i-0} \varepsilon_0 [\sigma T_0^4 - J(R)] + \beta_x dJ(R)/dx = 0. \quad (5.4)$$

W tym stacjonarnym przypadku temperatura w ogóle nie występuje w równaniach rządzących, a można ją później obliczyć z równania (3.15)

$$T = \left[\frac{1}{\sigma} \left(J + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} q \right) \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (5.5)$$

Po całkowaniu (5.2) otrzymujemy:

$$dJ/dx = -qx/2\varphi_{xx}, \quad (5.6)$$

$$J = C - qx^2/4\varphi_{xx}, \quad (5.7)$$

przy czym uwzględniono warunek (5.3). Podstawienie (5.6) i (5.7) do (5.4) umożliwia obliczenie stałej całkowania C . Wynosi ona

$$C = \sigma T_0^4 + \frac{qR^2}{4\varphi_{xx}} + \frac{q}{\varphi'_{i-0} \varepsilon_0} \left(1 - \frac{\beta_x R}{2\varphi_{xx}} \right) \quad (5.8)$$

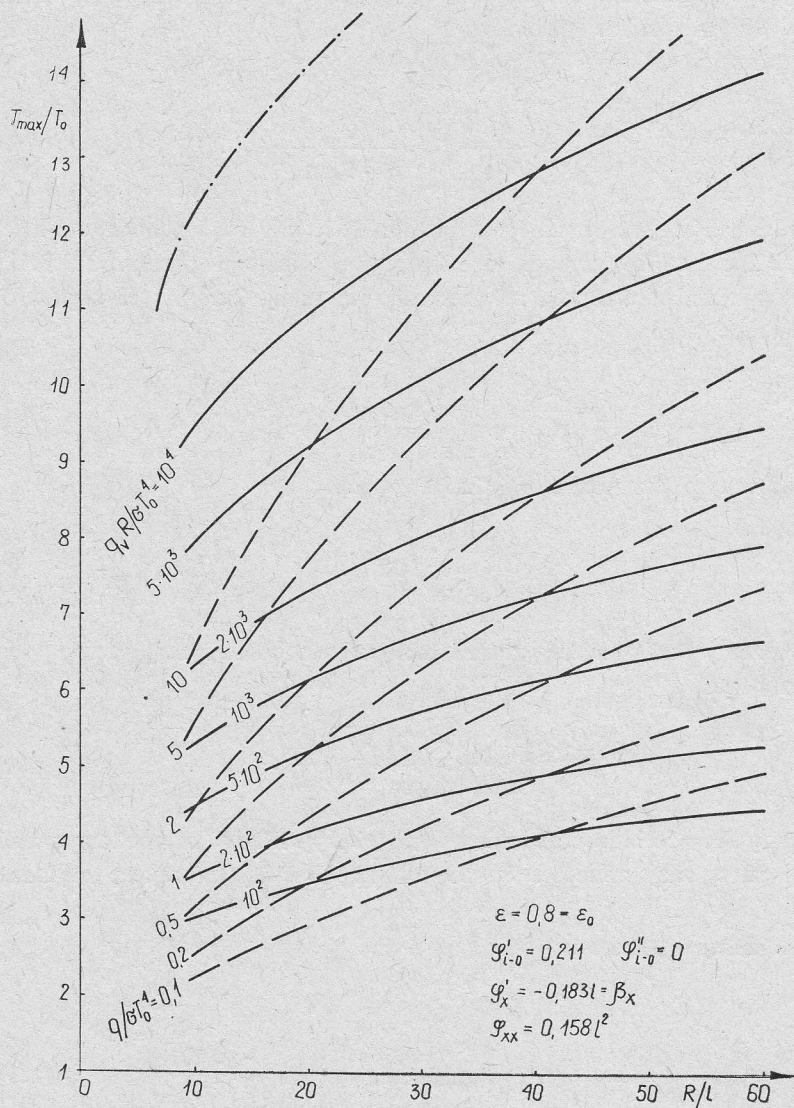
w związku z czym

$$J = \sigma T_0^4 + \frac{qR^2}{4\varphi_{xx}} \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) + \frac{q}{\varphi'_{i-0}\varepsilon_0} \left(1 - \frac{\beta_x R}{2\varphi_{xx}}\right). \quad (5.9)$$

Korzystając ze wzoru (5.5) otrzymujemy:

$$\frac{T}{T_0} = \left\{ 1 + \frac{q}{\sigma T_0^4} \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{\varphi'_{i-0}\varepsilon_0} \left(1 - \frac{\beta_x R}{2\varphi_{xx}}\right) + \frac{R^2}{4\varphi_{xx}} \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right) \right] \right\}^{\frac{1}{4}}. \quad (5.10)$$

Najwyższa temperatura $T_{\max}$ panuje oczywiście w środku ($x=0$) przy $q>0$. Zależność



Rys. 8. Maksymalna temperatura reaktora

$T_{\max}/T_0$ od R/l dla geometrii z rys. 7b jest przedstawiona na rys. 8. Dla tej geometrii profilów otwartych mamy $V/A=0,0404l$, więc $q=0,0404/q_v$.

W związku z tym, wykres na rys. 8 zawiera dwie rodziny linii — jedna (linie kreskowane) dla $q/\sigma T_0^4 = \text{const}$, a druga (linie ciągłe) dla $q_v R/\sigma T_0^4 = \text{const}$. Nadto, dla porównania, podano linię kreska-kropka dla $q_v R/\sigma T_0^4 = 10^4$, tyczącą się układu prętów okrągłych na siatce trójkątów równobocznych przy $D/l = \sqrt{3}/2$. W tym przypadku mamy przy $\varepsilon_0 = 0,8$: $\varphi_{xx} = 0,302l^2$, $\varphi'_{i-0} = 0,350$, $\varphi''_{i-0} = 0,0172$, $\sum_i A'_i/A_0 = 2,750$, $\varphi'_x = -0,322l$, $\beta_x = -0,325l$ oraz $V/A = 0,219l$.

W związku z tym, np. dla $R/l = 60$, otrzymuje się dla okrągłych prętów $T_{\max}/T_0 = 18,34$, podczas gdy dla poprzednio analizowanych profilów jest tylko $T_{\max}/T_0 = 14,12$. Widać tu wyraźnie wpływ geometrii profilów.

Dla dość dużych wartości R/l poprawny jest przybliżony wzór

$$T_{\max} \approx \left(\frac{qR^2}{4\sigma\varphi_{xx}} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{V}{4A\varphi_{xx}} \frac{q_v R^2}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (5.11)$$

W tych warunkach można określić przybliżoną ilość prętów, wychodząc z założenia, że na pole $l^2\sqrt{3}/2$ z rys. 7b przypada jeden pręt o powierzchni przekroju $0,191l^2$. Wobec tego w przekroju reaktora o polu πR^2 znajduje się liczba $2\pi R^2/L^2\sqrt{3}$ prętów o długości L . Dają one moc cieplną

$$\dot{Q} = \frac{2\pi R^2}{l^2\sqrt{3}} 0,191l^2 q_v L = 0,694R^2 L q_v. \quad (5.12)$$

Ponieważ zaś w tym przypadku $A_0 = 2\pi RL$, więc

$$\frac{\dot{Q}_0}{A_0} = 0,110R q_v. \quad (5.13)$$

Wynik ten możemy porównać ze wzorem (3.39), z którego otrzymuje się po podstawieniu wartości liczbowych

$$\frac{\dot{Q}_0}{A_0} = \left(0,110 + 0,191 \frac{l}{R} \right) R q_v. \quad (5.14)$$

A więc np. przy $R/l = 50$ błąd popełniany wynosi 3,5%. Błąd w ocenie temperatury będzie mniej więcej cztery razy mniejszy, co stanowi zupełnie wystarczającą dokładność.

Praca wpłynęła do Redakcji w grudniu 1973 r.

Literatura

- [1] Hobler T., *Ruch ciepła i wymienniki*. Wyd. 2. PWT, Warszawa 1959.

Компактные излучаемые теплообменники

Резюме

Радиационный теплообмен в высокотемпературных теплообменниках, обогреваемых горячим газом или газообразными продуктами сгорания, может быть усилен путем применения рефлекторов большой эмиссионности. Эти обменники можно разделить на две группы. В первой группе, определяемой малой оптической плотностью газа, типичным примером можно считать покровно-трубчатый рекуператор. Путем помещения конвекционно обогреваемых и радиационно охлаждаемых вкладышей в междутрубном пространстве можно двухкратно увеличить теплообмен. Этот вопрос обсуждается в разд. 2.

Раздел 3 посвящен анализу теплообменников, в которых большая оптическая плотность газа. К ним принадлежат каналы большого диаметра с охлаждаемой замыкающей поверхностью (экран). С ростом диаметра растет оптическая плотность эмитирующе-абсорбирующего газа, а в связи с этим увеличивается тепловой поток. Если в канале поместить систему рефлекторов, то оптическая плотность газа уменьшится. Эти рефлекторы будут конвекционно обогреваться газом, а сами будут радиационно охлаждаться. Радиационный тепловой поток от системы стержней (вкладышей) до замыкающей поверхности может оказаться на несколько сот процентов больше, чем в случае без вкладышей.

Раздел 5 посвящается обсуждению простого случая радиационного охлаждения регулярной системы стержней с внутренними источниками тепла.

Compact Radiation Heat Exchangers

Summary

Radiation heat transfer in high-temperature heat exchangers heated with hot gas or combustion gases can be augmented by using reflectors with high emissivity. These exchangers may be divided into two groups. In the first group, defined by a low optical gas density, the typical example is the shell-and-tube recuperator. By installing the reflectors, heated by convection and cooled by radiation in the intertubular space, heat transfer may be doubled. This problem is discussed in Sect. 2. In Sect. 3 the analysis of heat exchangers with high optical gas density is presented. This is the case of ducts with sufficiently great dimensions and cooled closing surface. The greater the diameter of the duct, the greater the optical density of the emitting – absorbing gas and the greater the heat flux. The installation of a reflector system in the duct causes a decrease of the optical thickness. The reflectors are gas heated by convection and cooled by radiation. The radiation heat flux from the reflector system to the closing surface may be several times greater than that without reflectors. A simple case of the radiation cooling of a regular rod system with internal heat sources is analyzed in Sect. 5.