

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

66

WARSZAWA—POZNAN 1975

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW
MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

KOMITET REDAKCYJNY - EXECUTIVE EDITORS
KAZIMIERZ STELLER - REDAKTOR - EDITOR
JERZY KOŁODKO · JÓZEF ŚMIGIELSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA - EDITORIAL OFFICE
Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1975

Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 370+90 egz.	Oddano do składania 7 VIII 1974 r.
Ark. wyd. 14,75. Ark. druk. 11,375+1 wkl.	Podpisano do druku 17 II 1975 r.
Papier druk. sat. kl. V, 70 g	Druk ukończono w lutym 1975 r.
Nr zam. 577/43 F-17/1183.	Cena zł 45,-

DRUKARNIA UNIWERSYTETU IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

JERZY SZCZYGIEŁ

Gdańsk

Metoda konstrukcji równania ruchu układu o jednym stopniu swobody z rodziny krzywych pomiarowych*

Praca dotyczy zagadnienia opisu sił tarcia wewnętrznych w materiałach konstrukcyjnych przy jednoosiowych stanach naprężeń.

Traktując typowy układ do badania tarcia wewnętrznych metodą drgań swobodnych jako układ o jednym stopniu swobody, przedstawiono teoretyczne podstawy koncepcji aproksymacji krzywych doświadczalnych dwuparametrową rodziną krzywych całkowych i wyprowadzenia równania różniczkowego tej rodziny. Podano metodę konstrukcji szczególnej postaci takiej rodziny w oparciu o wykres krzywej pomiarowej.

1. Wstęp

Zjawisko tłumienia materiałowego towarzyszące deformacji ciała, którego efektem jest zamiana energii mechanicznej w ciepło, jest związane z różnymi procesami fizycznym zachodzącymi w materiale, jak np. prądy termiczne, prądy wirowe, dyslokacje itp. W związku z tym deformacja ciała nie jest w tych warunkach procesem czysto mechanicznym.

Chcąc opisać deformację ciała z rozpraszaniem energii mechanicznej na gruncie mechaniki należy przyjąć istnienie sił tarcia wewnętrznych, charakteryzujących wewnętrzne procesy dyssypacji.

W ten sposób powstały modele Voigta, Maxwella itp. Oprócz teorii opartej na modelach postulowano też inne hipotezy odnośnie sił wewnętrznych. I tak na przykład, zasada superpozycji Boltzmanna uzależnia stan materiału od poprzedzającej historii obciążenia za pomocą funkcji pełzania lub funkcji relaksacji.

Wszystkie te teorie mają wspólną cechę, mianowicie postulują pewne prawa lub związki fizyczne między naprężeniem, odkształceniem i prędkością odkształcenia, a materiały podlegające tym prawom zalicza się do klasy o określonej nazwie jak np. materiały lepkosprężyste.

Liniowa teoria lepkosprężystości nie opisuje dobrze materiałów konstrukcyjnych (metale i ich stopy), których zachowanie się znacznie odbiega od zachowania materiałów lepkosprężystych.

* Praca wykonana w ramach problemu resortowego PAN-19, grupa tematyczna 2.

Istotną cechą tych materiałów jest zależność dekrementu logarytmicznego od amplitudy drgań. Stąd wynika, że równanie stanu dla tych materiałów ma charakter nieliniowy.

Istnieje wiele koncepcji i metod znajdowania równań stanu materiałów konstrukcyjnych przy jednoosiowych stanach naprężeń. S. Ziembka w pracy [1] proponuje opis tarcia wewnętrznego jako mechanizmu wiskotyczno-ciernego, uwzględniającego mikroplastyczne odkształcenia. Z. Osiński [2] wysunął hipotezę, że opór ciała przeciwko zmianie stanu można traktować jako złożony z trzech składowych: oporu sprężystego, oporu tarcia wewnętrznego i oporu relaksacji. W oparciu o tę hipotezę opracował model, którego własności przy odpowiednim doborze współczynników odpowiadają zarówno statycznym jak i dynamicznym własnościom ciał rzeczywistych.

W pracy [5] zebrano zaproponowane związki między naprężeniem a odkształceniem wyprowadzone w oparciu o wyniki doświadczalne, mianowicie przez aproksymację pętli histerezy otrzymanej przy badaniach tłumienia materiałowego metodą rezonansową. Wtedy uzależnia się naprężenie od odkształcenia, nie biorąc pod uwagę wartości prędkości odkształcenia.

Mimo wielu prac nie jest dotychczas możliwe opisanie procesu rozpraszania energii w sposób wiernie odtwarzający proces rzeczywisty, a jednocześnie przydatny do zastosowań.

Niniejsza praca dotycząc zagadnienia opisu sił tarcia wewnętrznego w materiałach konstrukcyjnych związana jest z prowadzonymi w Instytucie Maszyn Przepływowych PAN eksperymentalnymi badaniami tłumienia materiałowego metodą drgań swobodnych. Badania eksperymentalne opublikowane częściowo w pracy [4] mają na celu wyznaczyć zdolności tłumiące różnych materiałów konstrukcyjnych. Natomiast celem badań teoretycznych jest znalezienie równań stanu dla badanych materiałów przy jednoosiowych stanach naprężeń (drgania wzdłużne i skrętne) i następnie uogólnić je na złożone stany naprężeń.

Badanie tłumienia materiałowego metodą drgań swobodnych polega na wzbudzeniu drgań swobodnych odizolowanego od otoczenia układu złożonego z próbki z zamocowanymi na końcach masami.

Typowy układ do badania tłumienia materiałowego metodą drgań swobodnych przy drganiach skrętnych jest opisany w pracy [3], a przy drganiach wzdłużnych w pracy [4]. Jako model matematyczny układu badanego można przyjąć układ o jednym stopniu swobody, w którym elementem sprężystym jest próbka z badanego materiału.

Punktem wyjścia analizy teoretycznej przedstawionej w niniejszej pracy jest postulat, że oscylogramy drgań swobodnych są rozwiązaniami równania różniczkowego drgań układu badanego dla określonych eksperymentem warunków początkowych. Wobec tego, postawiono zadanie polegające na określeniu sił działających na układ na podstawie znajomości ruchu układu.

W punkcie 2 pracy sformułowano warunki matematyczne, jakie powinny być spełnione aby można było zadanie to rozwiązać.

Ponieważ ilość oscylogramów jest skończona i mają charakter drgań zanikających, w dalszej analizie przyjęto koncepcję aproksymacji krzywych doświadczalnych dwuparametrową rodziną krzywych całkowych. Ograniczono się przy tym do rodziny o szczególnej postaci będącej iloczynem funkcji monotonicznej i funkcji harmoniczej. W punkcie 4 podano metodę konstrukcji takiej rodziny w oparciu o wykres krzywej pomiarowej.

Opracowaną metodę można wykorzystać do konstrukcji równania drgań układu do ba-

dania tarcia wewnętrznego. Równanie to będzie zawierać równanie stanu badanego materiału.

Dalszym zadaniem teoretycznym jest więc opracowanie metody wyznaczania równania stanu badanego materiału z równania różniczkowego drgań układu. Pomyślnie rozwiązanie tego zagadnienia i zebranie wyników doświadczalnych w szerokim zakresie parametrów układu badanego pozwoli na konstrukcję równań stanu materiałów konstrukcyjnych, których drgania swobodne można aproksymować rodziną opisaną w punkcie 4.

2. Równanie różniczkowe rodziny krzywych

Mając daną funkcję $\varepsilon = \varphi(t, \xi, \eta)$ oraz jej pochodne $\varepsilon_t = \psi(t, \xi, \eta)$, $\varepsilon_{tt} = \gamma(t, \xi, \eta)$ określone w obszarze $\mathcal{D} = \mathcal{T}_+ \times \mathcal{P}$, gdzie $t \in \tau_+ = \langle 0, +\infty \rangle$, $(\xi, \eta) \in \mathcal{P} \subset \mathcal{E}^2$ i spełniające warunki początkowe

$$\varepsilon|_{t=0} = \varphi(0, \xi, \eta) = \xi,$$

$$\varepsilon_t|_{t=0} = \psi(0, \xi, \eta) = \eta,$$

pytamy się, jakie warunki muszą być spełnione aby można było utworzyć równanie różniczkowe

$$\varepsilon_{tt} = F(\varepsilon, \varepsilon_t),$$

którego rozwiązania o wartościach początkowych ξ, η mają postać $\varepsilon = \varphi(t, \xi, \eta)$.

Zanim podamy twierdzenie, które daje odpowiedź na to pytanie, przedstawimy interpretację geometryczną sformułowanego powyżej zagadnienia.

Traktując ξ i η jako parametry, widzimy że dana jest dwuparametrowa rodzina krzywych $\varepsilon = \varphi(t, \xi, \eta)$, gdzie ξ, η określają krzywą rodziny, a zmienna t punkty krzywej.

Trajektorią fazową przy ustalonych wartościach początkowych nazywamy krzywą na płaszczyźnie $(\varepsilon, \varepsilon_t)$, której opis parametryczny ma postać

$$\varepsilon = \varphi(t, \xi, \eta), \quad \varepsilon_t = \psi(t, \xi, \eta).$$

Przez $\mathcal{R}$ oznaczmy zbiór, w którym leżą wszystkie trajektorie ruchu

$$\mathcal{R} = \{(\varepsilon, \varepsilon_t) : \varepsilon = \varphi(t, \xi, \eta), \varepsilon_t = \psi(t, \xi, \eta); (t, \xi, \eta) \in \mathcal{D}\};$$

$\mathcal{R}$ jest oczywiście podzbiorem $\mathcal{E}^2$. Każdej trajektorii ruchu odpowiada wykres trajektorii ruchu. Zbiór wypełniony wykresami trajektorii ruchu oznaczamy przez $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \{(t, \varepsilon, \varepsilon_t) : \varepsilon = \varphi(t, \xi, \eta), \varepsilon_t = \psi(t, \xi, \eta); (t, \xi, \eta) \in \mathcal{D}\}.$$

W zbiorze $\mathcal{D}$ określimy pole wektorów stycznych do trajektorii ruchu.

Weźmy wektor wodzący punktu na trajektorii

$$\mathbf{R} = \varphi(t, \xi, \eta) \mathbf{e}_1 + \psi(t, \xi, \eta) \mathbf{e}_2,$$

gdzie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — wersory osi współrzędnych.

Wektor styczny do trajektorii jest pochodną wektora wodzącego i ma postać

$$\overset{\circ}{\mathbf{R}} = \psi(t, \xi, \eta) \mathbf{e}_1 + \gamma(t, \xi, \eta) \mathbf{e}_2.$$

Pytamy się, jakie warunki muszą być spełnione aby w każdym punkcie $(\varepsilon, \varepsilon_t) \in \mathcal{R}$ wektor wychodzący z tego punktu i styczny do trajektorii, która przez ten punkt przechodzi, był jednoznacznie wyznaczony przez współrzędne tego punktu.

TWIERDZENIE 1.

Założenie: Dana jest dwuparametrowa rodzina krzywych $\varepsilon = \varphi(t, \xi, \eta)$ i spełnione są warunki:

1° $\mathcal{D}$ – zbiór określony iloczynem kartezjańskim $\mathcal{D} = \mathcal{T}_+ \times \mathcal{P}$, gdzie $t \in \mathcal{T}_+ = \langle 0, +\infty \rangle$, $(\xi, \eta) \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$.

2° Funkcja $\varepsilon = \varphi(t, \xi, \eta)$ i jej pochodne $\varepsilon_t = \psi(t, \xi, \eta)$, $\varepsilon_{tt} = \gamma(t, \xi, \eta)$ są określone i ciągłe wraz z ich pochodnymi cząstkowymi względem wszystkich argumentów w zbiorze $\mathcal{D}$.

3°

$$\varepsilon|_{t=0} = \varphi(0, \xi, \eta) = \xi, \quad \varepsilon_t|_{t=0} = \psi(0, \xi, \eta) = \eta.$$

4° Układ równań

$$\varepsilon = \varphi(t, \xi, \eta), \quad \varepsilon_t = \psi(t, \xi, \eta)$$

jest rozwiązalny względem wartości początkowych i rozwiązanie ma postać

$$\xi = f(t, \varepsilon, \varepsilon_t), \quad \eta = g(t, \varepsilon, \varepsilon_t),$$

gdzie funkcje f i g są określone w zbiorze $\mathcal{H}$ i odwzorowują rodzinę wykresów trajektorii ruchu na zbiór wartości początkowych $\mathcal{P}$.

5° Funkcje $\xi = f(t, \varepsilon, \varepsilon_t)$, $\eta = g(t, \varepsilon, \varepsilon_t)$ są ciągłe wraz z pochodnymi cząstkowymi względem wszystkich argumentów w zbiorze $\mathcal{H}$.

6° Wyznacznik

$$W = \begin{vmatrix} \varepsilon_\xi & \varepsilon_\eta \\ \varepsilon_{t\xi} & \varepsilon_{t\eta} \end{vmatrix}$$

jest różny od zera w $\mathcal{D}$.

7° Wyznacznik

$$\tilde{W} = \begin{vmatrix} \varepsilon_t & \varepsilon_\xi & \varepsilon_\eta \\ \varepsilon_{tt} & \varepsilon_{t\xi} & \varepsilon_{t\eta} \\ \varepsilon_{ttt} & \varepsilon_{tt\xi} & \varepsilon_{tt\eta} \end{vmatrix}$$

jest tożsamościowo równy zeru w $\mathcal{D}$.

Teza:

1° W zbiorze $\mathcal{D}$ funkcje $\varphi(t, \xi, \eta)$, $\psi(t, \xi, \eta)$, $\gamma(t, \xi, \eta)$ są funkcjonalnie zależne. To znaczy w zbiorze $\mathcal{R}$ określona jest funkcja dwóch zmiennych $F(\varepsilon, \varepsilon_t)$ spełniająca tożsamość

$$\gamma(t, \xi, \eta) = F(\varphi(t, \xi, \eta), \psi(t, \xi, \eta))$$

w zbiorze $\mathcal{D}$.

2° Funkcja F jest klasy C^1 we wnętrzu zbioru $\mathcal{R}$.

Dowód:

Weźmy funkcję $\varepsilon_{tt} = \gamma(t, \xi, \eta)$ określoną i ciągłą wraz z pochodnymi cząstkowymi w zbiorze $\mathcal{D}$, oraz funkcje $\xi = f(t, \varepsilon, \varepsilon_t)$, $\eta = g(t, \varepsilon, \varepsilon_t)$ określone i ciągłe wraz z pochodnymi cząstkowymi w zbiorze $\mathcal{H}$. Wprowadzamy odwzorowanie pomocnicze $\Psi: \mathcal{H} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{D}$ zdefiniowane następująco: $\Psi(t, \varepsilon, \varepsilon_t) = (t, f(t, \varepsilon, \varepsilon_t), g(t, \varepsilon, \varepsilon_t))$. Superpozycja $\varepsilon_{tt} = \gamma \circ \Psi(t, \varepsilon, \varepsilon_t)$ jest funkcją określoną w zbiorze $\mathcal{H}$ i wykazemy, że nie zależy od zmiennej t . Należy więc pokazać, że $\partial \varepsilon_{tt} / \partial t \equiv 0$ w zbiorze $\mathcal{H}$. Pochodna względem t funkcji

$$\varepsilon_{tt} = \gamma(t, f(t, \varepsilon, \varepsilon_t), g(t, \varepsilon, \varepsilon_t))$$

ma postać

$$\frac{\partial \varepsilon_{tt}}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (2.1)$$

Wyrazimy $\partial f / \partial t$ i $\partial g / \partial t$ przez pochodne cząstkowe funkcji φ i ψ .

Zauważmy, że superpozycje $\varepsilon = \varphi \circ \Psi(t, \varepsilon, \varepsilon_t)$, $\varepsilon_t = \psi \circ \Psi(t, \varepsilon, \varepsilon_t)$ są tożsamościami w zbiorze $\mathcal{H}$. Różniczkując je obustronnie względem t otrzymujemy układ równań

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

liniowy względem $\partial f / \partial t$ i $\partial g / \partial t$. Stąd mamy

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{vmatrix}}, \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{vmatrix}}. \quad (2.2b)$$

Podstawiając z kolei (2.2a) i (2.2b) do (2.1) otrzymujemy:

$$\frac{\partial \varepsilon_{tt}}{\partial t} = \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial t} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{vmatrix} - \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{vmatrix} + \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi} & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{vmatrix}}.$$

Stąd widać, że przy założeniach 6°, 7°, $\partial \varepsilon_{tt}/\partial t \equiv 0$ w zbiorze $\mathcal{H}$.

Udowodniliśmy zatem, że $\varepsilon_{tt} = \gamma \circ \Psi(t, \varepsilon, \varepsilon_t) = F(\varepsilon, \varepsilon_t)$ w zbiorze $\mathcal{H}$, a więc i w zbiorze $\mathcal{R}$, który jest rzutem zbioru $\mathcal{H}$ na płaszczyznę zmiennych ε i ε_t . Teza 2° wynika z faktu, że funkcja γ jest klasy C^1 w zbiorze $\mathcal{D}$ i Ψ jest odwzorowaniem klasy C^1 zbioru $\mathcal{H}$ na zbiór $\mathcal{D}$, więc ich superpozycja $F = \gamma \circ \Psi$ jest funkcją klasy C^1 we wnętrzu zbioru $\mathcal{H}$.

Na zakończenie zauważmy, że funkcja $F(\varepsilon, \varepsilon_t)$ spełnia założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności dla równań różniczkowych.

Ponadto, ponieważ funkcja ta nie zależy od czasu t ważny jest następujący:

WNIOSEK 1.

Równanie

$$\varepsilon_{tt} = F(\varepsilon, \varepsilon_t)$$

jest stacjonarnym równaniem różniczkowym rzędu drugiego określonym we wnętrzu zbioru $\mathcal{R}$.

3. Rodzina drgań okresowo-zanikających

DEFINICJA 1.

Drgania o postaci

$$\varepsilon = f^T(t, \xi, \eta) \cos(\omega t - \alpha(\xi, \eta)) \quad (3.1)$$

nazywamy okresowo-zanikającymi, jeżeli są spełnione warunki:

1° $\mathcal{D}$ — zbiór określony iloczynem kartezjańskim $\mathcal{D} = \mathcal{T}_+ \times \mathcal{P}$, gdzie $t \in \mathcal{T}_+ = \langle 0, +\infty \rangle$, $(\xi, \eta) \in \mathcal{P} \subset \mathcal{E}^2$.

2° Funkcja f^T i jej pochodne f_t^T, f_{tt}^T są określone i ciągłe wraz z ich pochodnymi cząstkowymi względem wszystkich argumentów w zbiorze $\mathcal{D}$.

3° f^T jest oznaczona dodatnio lub ujemnie względem t dla ustalonych wartości ξ i η .

4° f^T jest monotoniczna względem t , przy czym monotonicznie malejąca gdy jest oznaczona dodatnio, a monotonicznie rosnąca gdy jest oznaczona ujemnie.

5° Funkcja α jest określona i ciągła wraz z jej pochodnymi cząstkowymi w zbiorze $\mathcal{P}$.

6° Obrazem $\alpha(\mathcal{P})$ zbioru $\mathcal{P}$ jest zbiór $\alpha(\mathcal{P}) = \langle 0, 2\pi \rangle$.

7°

$$\varepsilon|_{t=0} = f^T(0, \xi, \eta) \cos(-\alpha(\xi, \eta)) = \xi,$$

$$\varepsilon_t|_{t=0} = f_t^T(0, \xi, \eta) \cos(-\alpha(\xi, \eta)) - \omega f^T(0, \xi, \eta) \sin(-\alpha(\xi, \eta)) = \eta.$$

8° Układ równań

$$\varepsilon = f^T(t, \xi, \eta) \cos(\omega t - \alpha(\xi, \eta)),$$

$$\varepsilon_t = f_t^T(t, \xi, \eta) \cos(\omega t - \alpha(\xi, \eta)) - \omega f^T(t, \xi, \eta) \sin(\omega t - \alpha(\xi, \eta))$$

jest rozwiązalny względem wartości początkowych i rozwiązanie ma postać

$$\xi = f(t, \varepsilon, \varepsilon_t), \quad \eta = g(t, \varepsilon, \varepsilon_t),$$

gdzie funkcje f i g są określone w zbiorze $\mathcal{H}$ i odwzorowują rodzinę wykresów trajektorii ruchu na zbiór wartości początkowych $\mathcal{P}$.

9° Funkcje $\xi = f(t, \varepsilon, \varepsilon_t)$, $\eta = g(t, \varepsilon, \varepsilon_t)$ są ciągłe wraz z pochodnymi cząstkowymi względem wszystkich argumentów w zbiorze $\mathcal{H}$.

10° Wyznacznik

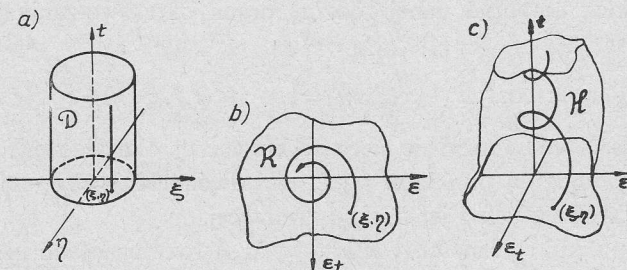
$$W = \begin{vmatrix} \varepsilon_\xi & \varepsilon_\eta \\ \varepsilon_{t\xi} & \varepsilon_{t\eta} \end{vmatrix}$$

jest różny od zera w $\mathcal{D}$.

11° Wyznacznik

$$\tilde{W} = \begin{vmatrix} \varepsilon_t & \varepsilon_\xi & \varepsilon_\eta \\ \varepsilon_{tt} & \varepsilon_{t\xi} & \varepsilon_{t\eta} \\ \varepsilon_{ttt} & \varepsilon_{tt\xi} & \varepsilon_{tt\eta} \end{vmatrix}$$

jest tożsamościowo równy zeru w $\mathcal{D}$.



Rys. 1. Interpretacja geometryczna wprowadzonych do zagadnienia wyznaczenia równania różniczkowego rodziny krzywych $\varepsilon = \varphi(t, \xi, \eta)$: a) dziedziny $\mathcal{D}$ funkcji φ , b) trajektorii ruchu, c) wykresu trajektorii ruchu

Jak widać z definicji, drgania okresowo-zanikające tworzy iloczyn funkcji $f^T(t, \xi, \eta)$ i funkcji harmonicznej $\cos(\omega t - \alpha(\xi, \eta))$. W interpretacji geometrycznej drgania te są dwuparametrową rodziną krzywych o strukturze widocznej na rysunku 2.

Z uwagi na charakter, funkcję $f^T(t, \xi, \eta)$ będziemy nazywać funkcją tworzącą drgania zanikające (albo funkcją zanikania drgań), a funkcję $\alpha(\xi, \eta)$ — kątem przesunięcia fazowego (albo fazą początkową drgań).

Łatwo sprawdzić, że jeżeli dwuparametrowa rodzina krzywych $\varepsilon = f^T(t, \xi, \eta) \cos(\omega t - \alpha(\xi, \eta))$ spełnia warunki definicji drgań okresowo-zanikających, to spełnia także warunki twierdzenia 1.

Wobec tego możemy sformułować wniosek:

WNIOSEK 2.

Dla danej rodziny drgań okresowo-zanikających istnieje równanie różniczkowe stacjonarne rzędu drugiego

$$\varepsilon_{tt} = F(\varepsilon, \varepsilon_t),$$

którego rozwiązanie o wartościach początkowych ξ, η jest krzywą rodziny określoną tymi wartościami początkowymi.

Interesuje nas charakter zanikania drgań. W związku z tym wprowadzimy pojęcie amplitudy drgań i w zbiorze amplitud drgań zbadamy związki między kolejnymi amplitudami drgań.

DEFINICJA 2.

Amplitudą drgań przy ustalonych warunkach początkowych ξ i η nazywamy parę liczb $(t_{\mathcal{A}}, \varepsilon_{\mathcal{A}})$ spełniającą układ równań

$$\begin{aligned} f^T(t_{\mathcal{A}}, \xi, \eta) &= \varepsilon_{\mathcal{A}}, \\ \cos(\omega t_{\mathcal{A}} - \alpha(\xi, \eta)) &= 1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Jeżeli para $(t_{\mathcal{A}}, \varepsilon_{\mathcal{A}})$ jest amplitudą drgań, to mówimy że $t_{\mathcal{A}}$ jest argumentem amplitudy, zaś $\varepsilon_{\mathcal{A}}$ jest wartością amplitudy.

Zbiór wszystkich amplitud danej rodziny drgań okresowo-zanikających oznaczamy przez $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \{(t_{\mathcal{A}}, \varepsilon_{\mathcal{A}}) : \cos(\omega t_{\mathcal{A}} - \alpha(\xi, \eta)) = 1, \quad f^T(t_{\mathcal{A}}, \xi, \eta) = \varepsilon_{\mathcal{A}}, (\xi, \eta) \in \mathcal{P}\}.$$

Tak wprowadzona definicja różni się nieco od klasycznej, okazała się jednak wygodniejsza w tej pracy. Amplitudy są punktami styczności dwóch krzywych, mianowicie wykresu drgań okresowo-zanikających i jej funkcji tworzącej.

Współrzędne punktu styczności tych krzywych są rozwiązaniami układu (3.2).

W związku z definicją amplitudy drgań pojawia się problem wyznaczenia zbioru amplitud $\mathcal{A}$.

Rozwiązuje ten problem następujący

LEMAT 1.

Założenie:

1. Dana jest rodzina drgań okresowo-zanikających

$$\varepsilon = f^T(t, \xi, \eta) \cos(\omega t - \alpha(\xi, \eta)).$$

2. Obraz $\alpha(\mathcal{P})$ zbioru $\mathcal{P}$ ma postać:

$$\alpha(\mathcal{P}) = \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Teza:

Zbiór amplitud drgań $\mathcal{A}$ jest sumą zbiorów $\mathcal{A}^{(i)}$, $i \in \mathcal{Z}_+$ gdzie $\mathcal{Z}_+$ – zbiór liczb całkowitych nieujemnych. Każdy zbiór $\mathcal{A}^{(i)}$ jest obrazem zbioru warunków początkowych $\mathcal{P}$ przez odwzorowanie Λ_i określone następująco

$$\begin{aligned} t_{\mathcal{A}}^{(i)} &= \frac{1}{\omega} [2\pi i + \alpha(\xi, \eta)], \\ \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i)} &= f^T \left(\frac{1}{\omega} [2\pi i + \alpha(\xi, \eta)], \xi, \eta \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Zbiory $\mathcal{A}^{(i)}$, $i \in \mathcal{Z}_+$ są rozłączone.

Dowód:

Rozważmy oddzielnie każde równanie układu (3.2). Weźmy najpierw równanie $\cos(\omega t - \alpha(\xi, \eta)) = 1$. Dla każdego $(\xi, \eta) \in \mathcal{P}$ równanie to jest spełnione wtedy i tylko wtedy gdy

$$t^{(i)} = \frac{1}{\omega} [2\pi i + \alpha(\xi, \eta)] \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.4)$$

Dla ustalonego wskaźnika i , każdej parze $(\xi, \eta) \in \mathcal{P}$ przyporządkowana jest jedna wartość $t^{(i)}$, czyli wzór (3.4) określa w zbiorze $\mathcal{P}$ rodzinę funkcji $\Phi_i: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T} = (-\infty, +\infty)$ $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Oznaczając przez $\tilde{\mathcal{D}}_i$ wykres funkcji Φ_i

$$\tilde{\mathcal{D}}_i = \left\{ (t^{(i)}, \xi, \eta) : t^{(i)} = \frac{1}{\omega} [2\pi i + \alpha(\xi, \eta)], (\xi, \eta) \in \mathcal{P} \right\}$$

otrzymujemy zbiór $\tilde{\mathcal{D}}$ wszystkich układów wartości t, ξ, η spełniających równanie $\cos(\omega t - \alpha(\xi, \eta)) = 1$ jako sumę

$$\tilde{\mathcal{D}} = \bigcup_{i \in \mathcal{Z}} \tilde{\mathcal{D}}_i$$

$\mathcal{Z}$ – zbiór liczb całkowitych.

Z kolei weźmy wykres funkcji $\varepsilon = f^T(t, \xi, \eta)$, czyli zbiór

$$\mathcal{O} = \{(\varepsilon, t, \xi, \eta) : \varepsilon = f^T(t, \xi, \eta), (t, \xi, \eta) \in \mathcal{D}\}.$$

Widzimy że układ liczb $\varepsilon, t, \xi, \eta$ spełnia oba równania jednocześnie wtedy i tylko wtedy gdy $(\varepsilon, t, \xi, \eta) \in \mathcal{O}$ i $(t, \xi, \eta) \in \tilde{\mathcal{D}}$.

Stąd wnioskujemy, że zbiór $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ wszystkich rozwiązań $\varepsilon_{\mathcal{A}}, t_{\mathcal{A}}, \xi, \eta$ układu (3.2) ma postać

$$\mathcal{O}_{\mathcal{A}} = \{(\varepsilon_{\mathcal{A}}, t_{\mathcal{A}}, \xi, \eta) : \varepsilon_{\mathcal{A}} = f^T(t_{\mathcal{A}}, \xi, \eta), (t_{\mathcal{A}}, \xi, \eta) \in (\mathcal{D} \cap \tilde{\mathcal{D}})\}.$$

Zauważmy, że

$$\mathcal{D} \cap \tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cap \left(\bigcup_{i \in \mathcal{Z}} \tilde{\mathcal{D}}_i \right) = \bigcup_{i \in \mathcal{Z}} (\mathcal{D} \cap \tilde{\mathcal{D}}_i)$$

więc możemy zbiór $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ przedstawić w postaci sumy zbiorów. Ponadto wykazemy, że

$$\mathcal{D} \cap \tilde{\mathcal{D}}_i = \begin{cases} \emptyset & \text{dla } i = -1, -2, \dots \\ \tilde{\mathcal{D}}_i & \text{dla } i = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Łącząc własności zbioru $\mathcal{D}$ i $\tilde{\mathcal{D}}_i$ mamy

$$\mathcal{D} \cap \tilde{\mathcal{D}}_i = \{(t^{(i)}, \xi, \eta) \in \tilde{\mathcal{D}}_i : t^{(i)} \geq 0\}.$$

Należy więc wykazać, że dla każdego $i \in \mathcal{Z}$, jeżeli $i \geq 0$, to dla każdej pary $(\xi, \eta) \in \mathcal{P}$ zachodzi $t^{(i)} = \frac{1}{\omega} [2\pi i + \alpha(\xi, \eta)] \geq 0$, natomiast jeżeli $i < 0$, to dla każdej pary $(\xi, \eta) \in \mathcal{P}$

jest: $t^{(i)} = \frac{1}{\omega} [2\pi i + \alpha(\xi, \eta)] < 0$.

Wykorzystamy tutaj założenie 2° , że $\alpha(\mathcal{P}) = \langle 0, 2\pi \rangle$, które pociąga za sobą: $\Phi_i(\mathcal{P}) = \left\langle \frac{2\pi}{\omega} i, \frac{2\pi}{\omega} (i+1) \right\rangle$. Widzimy, że kres dolny i górny zbioru wartości funkcji Φ_i wyznaczają kolejne liczby całkowite $i, i+1$.

Jeżeli więc $i=0$, to kres dolny jest równy zeru, jeżeli $i>0$, to kres dolny jest liczbą dodatnią. Zatem dla $i \geq 0$ prawdą jest, że $\bigwedge_{(\xi, \eta) \in \mathcal{P}} t^{(i)} = \frac{1}{\omega} [2\pi i + \alpha(\xi, \eta)] \geq 0$, czyli $\mathcal{D} \cap \tilde{\mathcal{D}}_i = \tilde{\mathcal{D}}_i$.

Z kolei, jeżeli $i < 0$, to kres górny zbioru wartości funkcji Φ_i jest liczbą ujemną lub równą zeru gdy $i = -1$.

Z uwagi na to, że kres górny nie należy do zbioru wartości funkcji, prawdą jest że jeżeli $i < 0$, to $\bigwedge_{(\xi, \eta) \in \mathcal{P}} t^{(i)} = \frac{1}{\omega} [2\pi i + \alpha(\xi, \eta)] < 0$, czyli $\mathcal{D} \cap \tilde{\mathcal{D}}_i = \emptyset$. Stąd wynika, że

$$\mathcal{O}_{\mathcal{A}} = \bigcup_{i \in \mathcal{Z}_+} \mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{(i)}$$

gdzie $\mathcal{Z}_+$ – zbiór liczb całkowitych nieujemnych,

$$\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{(i)} = \left\{ (\varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i)}, t_{\mathcal{A}}^{(i)}, \xi, \eta) : \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i)} = f^T \left(\frac{1}{\omega} [2\pi i + \alpha(\xi, \eta)], \xi, \eta \right), t_{\mathcal{A}}^{(i)} = \frac{1}{\omega} [2\pi i + \alpha(\xi, \eta)], \right. \\ \left. (\xi, \eta) \in \mathcal{P} \right\}.$$

Widać wyraźnie, że zbiór $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{(i)}$ jest wykresem odwzorowania $A_i: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}^2$ reprezentowanego przez układ funkcji

$$t_{\mathcal{A}}^{(i)} = \frac{1}{\omega} [2\pi i + \alpha(\xi, \eta)],$$

$$\varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i)} = f^T \left(\frac{1}{\omega} [2\pi i + \alpha(\xi, \eta)], \xi, \eta \right).$$

Mamy więc rozwiązanie układu (3.2) jako rodzinę odwzorowań $A_i: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{E}^2$, $i \in \mathcal{Z}_+$.

Jeżeli obraz zbioru $\mathcal{P}$ przez odwzorowanie A_i oznaczymy przez $\mathcal{A}^{(i)}$, to zbiór amplitud drgań $\mathcal{A}$ jest sumą zbiorów $\mathcal{A}^{(i)}$, $i \in \mathcal{Z}_+$. Zbiór $\mathcal{A}^{(i)}$ będziemy nazywać zbiorem i -tych amplitud.

Weźmy $(t_{\mathcal{A}}^{(i)}, \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i)}) \in \mathcal{A}^{(i)}$ i $(t_{\mathcal{A}}^{(k)}, \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(k)}) \in \mathcal{A}^{(k)}$. Ponieważ $t_{\mathcal{A}}^{(i)} \in \left(\frac{2\pi}{\omega} i, \frac{2\pi}{\omega} (i+1) \right)$ a $t_{\mathcal{A}}^{(k)} \in \left(\frac{2\pi}{\omega} k, \frac{2\pi}{\omega} (k+1) \right)$, więc $t_{\mathcal{A}}^{(i)} \neq t_{\mathcal{A}}^{(k)}$ dla $i \neq k$, czyli $\mathcal{A}^{(i)} \cap \mathcal{A}^{(k)} = \emptyset$. Dowiedliśmy więc tezę lematu 1.

Przejdźmy teraz do badania związków między kolejnymi amplitudami drgań.

LEMAT 2.

Założenie:

1° Dana jest rodzina odwzorowań $A_i: \mathcal{P} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{A}^{(i)}$, $i \in \mathcal{Z}_+$, określona przez układ funkcji

$$t_{\mathcal{A}}^{(i)} = \frac{1}{\omega} [2\pi i + \alpha(\xi, \eta)],$$

$$\varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i)} = f^T \left(\frac{1}{\omega} [2\pi i + \alpha(\xi, \eta)], \xi, \eta \right).$$

2° Wykresy funkcji tworzącej drgania okresowo-zanikające dla różnych wartości początkowych są rozłączone

$$\bigwedge_{i \in \mathcal{Z}_+} [(\xi_1, \eta_1) \neq (\xi_2, \eta_2)] \Rightarrow [f^T(t, \xi_1, \eta_1) \neq f^T(t, \xi_2, \eta_2)].$$

Teza:

Dla każdego odwzorowania $A_i: \mathcal{P} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{A}^{(i)}$, istnieje odwzorowanie odwrotne $A_i^{-1}: \mathcal{A}^{(i)} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{P}$.

Dowód:

Dowód oprzemy na twierdzeniu, że jeżeli odwzorowanie $A_i: \mathcal{P} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{A}^{(i)}$ jest różnowartościowe, to istnieje odwzorowanie odwrotne $A_i^{-1}: \mathcal{A}^{(i)} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{P}$.

Jeżeli więc wykazemy, że każde odwzorowanie rodziny $A_i: \mathcal{P} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{A}^{(i)}$, $i \in \mathcal{Z}_+$ jest różnowartościowe, to prawdziwa jest teza lematu.

Zauważmy, że jeżeli $\alpha = \alpha(\xi, \eta)$ jest funkcją różnowartościową, to każde odwzorowanie rodziny A_i , $i \in \mathcal{Z}_+$ jest różnowartościowe.

Przyjmijmy, że $\alpha = \alpha(\xi, \eta)$ nie jest funkcją różnowartościową. Weźmy ze zbioru $\mathcal{P}$ dowolne dwie pary wartości początkowych $(\xi_1, \eta_1) \neq (\xi_2, \eta_2)$. Jeżeli $\alpha(\xi_1, \eta_1) \neq \alpha(\xi_2, \eta_2)$, to dla każdego $i \in \mathcal{Z}_+$ zachodzi $A_i(\xi_1, \eta_1) \neq A_i(\xi_2, \eta_2)$.

Wykażemy, że jeżeli $\alpha(\xi_1, \eta_1) = \alpha(\xi_2, \eta_2)$, to także $A_i(\xi_1, \eta_1) \neq A_i(\xi_2, \eta_2)$, $i \in \mathcal{Z}_+$. Wynika to natychmiast z faktu, że argumenty amplitud są równe i z założenia 2°, że dla różnych wartości początkowych w tym samym czasie t wartości funkcji tworzącej są różne, a więc i różne są wartości amplitud $\varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i)}$, $i \in \mathcal{Z}_+$.

Pokazaliśmy więc, że dla rodziny odwzorowań $A_i: \mathcal{P} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{A}^{(i)}$, $i \in \mathcal{Z}_+$ istnieje rodzina odwzorowań odwrotnych $A_i^{-1}: \mathcal{A}^{(i)} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{P}$, $i \in \mathcal{Z}_+$ określona następująco

$$\xi = \tilde{f}_i(t_{\mathcal{A}}^{(i)}, \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i)}), \quad \eta = \tilde{g}_i(t_{\mathcal{A}}^{(i)}, \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i)}) \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Możemy teraz określić związek między kolejnymi amplitudami drgań.

Jeżeli bowiem weźmiemy dwa kolejne odwzorowania $A_i: \mathcal{P} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{A}^{(i)}$ $A_{i+1}: \mathcal{P} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{A}^{(i+1)}$, to ponieważ istnieje odwzorowanie odwrotne $A_i^{-1}: \mathcal{A}^{(i)} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{P}$, więc określone jest odwzorowanie zbioru $\mathcal{A}^{(i)}$ na zbiór $\mathcal{A}^{(i+1)}$, czyli odwzorowanie przejścia A_i^{i+1} , jako superpozycja $A_i^{i+1} = A_{i+1} \circ A_i^{-1}$

Ważny jest więc następujący:

WNIOSEK 3.

Dla rodziny odwzorowań $A_i: \mathcal{P} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{A}^{(i)}$, $i \in \mathcal{Z}_+$ istnieje rodzina odwzorowań przejścia $A_i^{i+1}: \mathcal{A}^{(i)} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{A}^{(i+1)}$, $i \in \mathcal{Z}_+$

$$\mathcal{P} \xrightarrow{A_0} \mathcal{A}^{(0)} \xrightarrow{A_0^1} \mathcal{A}^{(1)} \xrightarrow{A_1^2} \mathcal{A}^{(2)} \longrightarrow \dots \xrightarrow{A_{i-1}^i} \mathcal{A}^{(i)} \longrightarrow$$

Odwzorowanie przejścia A_i^{i+1} jest superpozycją $A_i^{i+1} = A_{i+1} \circ A_i^{-1}$ więc dane jest przez układ funkcji

$$\begin{aligned} t_{\mathcal{A}}^{(i+1)} &= t_{\mathcal{A}}^{(i)} + T_0, \\ \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i+1)} &= f^T(t_{\mathcal{A}}^{(i)} + T_0, \tilde{f}_i(t_{\mathcal{A}}^{(i)}, \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i)}), \tilde{g}_i(t_{\mathcal{A}}^{(i)}, \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i)})), \end{aligned} \quad (3.6)$$

gdzie $T_0 = 2\pi/\omega$ — okres drgań.

Badanie związku między wartościami kolejnych amplitud drgań jest podstawą eksperymentalnych badań tłumienia materiałowego.

Aby przenieść pewne terminy i fakty doświadczalne do przedstawionej tutaj metody opisu drgań, przyporządkowujemy rodzinie odwzorowań A_i^{i+1} , $i \in \mathcal{Z}_+$ takie odwzorowanie Δ , że

$$\bigwedge_{i \in \mathcal{Z}_+} \Delta|_{\mathcal{A}^{(i)}} = A_i^{i+1}, \quad (3.7)$$

to znaczy, każde odwzorowanie A_i^{i+1} , jest odwzorowaniem Δ obciętym do zbioru $\mathcal{A}^{(i)}$.

Jest oczywiste, że Δ odwzorowuje zbiór $\mathcal{A}$ w $\mathcal{A}$. Każdej amplitudzie $(t_{\mathcal{A}}, \varepsilon_{\mathcal{A}}) \in \mathcal{A}$ jest przyporządkowana jednoznacznie amplituda $(\tilde{t}_{\mathcal{A}}, \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{A}}) \in \mathcal{A}$, która jest jej obrazem po jednym cyklu drgań, przy ustalonych warunkach początkowych.

Ubytek wartości amplitud jest miarą tłumienia materiałowego.

W doświadczeniach przyjętą miarą tłumienia materiałowego jest logarytmiczny ubytek wartości amplitud

$$\delta = \ln \varepsilon_{\mathcal{A}} - \ln \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{A}}, \quad (3.8)$$

tak zwany dekrement logarytmiczny.

Przy badaniach tarcia wewnętrznego w materiałach konstrukcyjnych (metale i ich stopy) stwierdzono, że dla różnych amplitud drgań $(t_{\mathcal{A}}^{(i)}, \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i)}) \neq (t_{\mathcal{A}}^{(k)}, \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(k)})$ ale takich, że $\varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i)} = \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(k)}$ zachodzi

$$\delta = \ln \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i)} - \ln \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i+1)} = \ln \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(k)} - \ln \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(k+1)}.$$

Na tej podstawie logarytmiczny ubytek wartości amplitud przedstawia się w formie wykresu

$$\delta = \delta(\varepsilon_{\mathcal{A}}),$$

skąd można wyprowadzić związek

$$\tilde{\varepsilon}_{\mathcal{A}} = \varepsilon_{\mathcal{A}} e^{-\delta(\varepsilon_{\mathcal{A}})}.$$

Z uwagi na ten fakt doświadczalny będziemy się zajmować drganiami okresowo-zanikającymi szczególnej postaci, mianowicie dla których ważny jest następujący postulat zanikania drgań.

Postulat zanikania drgań

Każda amplituda $(t_{\mathcal{A}}, \varepsilon_{\mathcal{A}})$ i jej obraz $(\tilde{t}_{\mathcal{A}}, \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{A}})$ po jednym cyklu drgań są powiązane transformacją przez przesunięcie na osi czasu

$$\tilde{t}_{\mathcal{A}} = t_{\mathcal{A}} + T_0$$

i ubytkiem wartości amplitudy w czasie przesunięcia niezależnym od czasu $t_{\mathcal{A}}$, a jednoznacznie określonym wartością amplitudy $\varepsilon_{\mathcal{A}}$.

Postulat ten żąda specjalnej postaci odwzorowania Δ , mianowicie

$$\tilde{t}_{\mathcal{A}} = t_{\mathcal{A}} + T_0, \quad \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{A}} = H(\varepsilon_{\mathcal{A}}),$$

które obcięte do zbiorów $\mathcal{A}^{(i)}$, $i \in \mathcal{Z}_+$ daje rodzinę odwzorowań przejścia w postaci

$$t_{\mathcal{A}}^{(i+1)} = t_{\mathcal{A}}^{(i)} + T_0, \quad \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i+1)} = H(\varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i)}) \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Jeżeli dana rodzina drgań okresowo-zanikających spełnia postulat zanikania drgań, to dekrement logarytmiczny jako funkcja wartości amplitud jest określony następująco

$$\delta = \ln \varepsilon_{\mathcal{A}} - \ln \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{A}} = \ln \frac{\varepsilon_{\mathcal{A}}}{H(\varepsilon_{\mathcal{A}})}. \quad (3.9)$$

4. Sposoby aproksymacji rodziną drgań okresowo-zanikających

W punkcie 3 zdefiniowaliśmy drgania okresowo-zanikające jako funkcję

$$\varepsilon = f^T(t, \xi, \eta) \cos(\omega t - \alpha(\xi, \eta)) \quad (4.1)$$

spełniającą warunki $1^\circ - 11^\circ$ w pewnym zbiorze $\mathcal{D}$. Oznaczmy symbolem Ξ zbiór wszystkich funkcji spełniających warunki definicji drgań okresowo-zanikających. Nasuwa się pytanie, jak postulować funkcje należące do zbioru Ξ , jeżeli nie wszystkie, to przynajmniej te, które charakteryzuje pewna wspólna własność. Taką własność można sformułować jak następuje:

Dla dowolnych wartości początkowych $(\xi_1, \eta_1) \neq (\xi_2, \eta_2)$ wykresy funkcji tworzących są przesunięte wzdłuż osi czasu.

Powyższa własność oznacza, że wykres funkcji tworzącej przy warunkach początkowych (ξ_2, η_2) można otrzymać z wykresu funkcji tworzącej przy warunkach początkowych (ξ_1, η_1) przesuwając go równolegle wzdłuż osi czasu.

Zagadnienie wyznaczenia dowolnej rodziny drgań okresowo-zanikających, którą cechuje sformułowana powyżej własność posiada pozytywne rozwiązanie. Podamy praktyczną metodę wyznaczenia takiej rodziny na podstawie danego wykresu jej funkcji tworzącej przy pewnych wartościach początkowych, czyli wychodząc z danej funkcji zmiennej t . Możemy więc powiedzieć, że istnieje podzbiór $\Sigma \subset \Xi$ wszystkich funkcji spełniających warunki definicji drgań okresowo-zanikających i charakteryzujący się tym, że funkcje tworzące te drgania dla różnych wartości początkowych są przesunięte wzdłuż osi czasu, taki, że każdą funkcję należącą do zbioru Σ można wyznaczyć, jeżeli dany jest wykres jej funkcji tworzącej.

Przystąpimy do opisu sposobu aproksymacji rodziną drgań okresowo-zanikających. Kolejne kroki postępowania oraz warunki jakie muszą być spełnione ujęto w następujących podpunktach.

A. Dana jest funkcja $y=f(t)$, klasy C^3 w przedziale $0 \leq t < +\infty$ i spełnione są warunki:

1° f jest oznaczona dodatnio lub ujemnie względem t .

2° f jest monotoniczna względem t , przy czym monotonicznie malejąca gdy jest oznaczona dodatnio, a monotonicznie rosnąca gdy jest oznaczona ujemnie.

3° Oznaczmy przez $\mathcal{W}_0$ zbiór:

$$\mathcal{W}_0 = \{(u, v) : u \in \langle 0, +\infty \rangle, v \in \langle -2\pi, 0 \rangle\},$$

a jego obraz przez odwzorowanie Π zdefiniowane jak następuje

$$\varepsilon = f(u) \cos v \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_t = f_t(u) \cos v - \omega f(u) \sin v$$

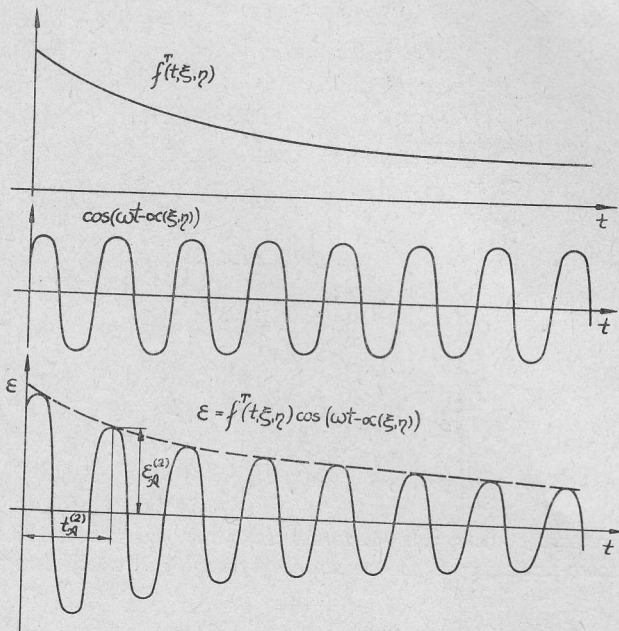
oznaczymy przez $\mathcal{R}$.

Do odwzorowania $\pi : \mathcal{W}_0 \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{R}$ istnieje odwzorowanie odwrotne $\Pi^{-1} : \mathcal{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{W}_0$, klasy C^1 , reprezentowane przez układ funkcji, który będziemy oznaczać następująco:

$$u = K(\varepsilon, \varepsilon_t), \quad (4.3)$$

$$v = L(\varepsilon, \varepsilon_t).$$

B. Zauważmy, że jeżeli funkcja $y=f(t)$ spełnia warunki podpunktu A, to dla każdego $C \in \langle 0, +\infty \rangle$ funkcja $y=\tilde{f}(t)=f(t+C)$ jest klasy C^3 w przedziale $0 \leq t < +\infty$ i spełnia warunki 1°, 2° podpunktu A.



Rys. 2. Drgania okresowo-zanikające jako iloczyn funkcji harmonicznej i funkcji tworzącej drgania zanikające

C. Utwórzmy funkcję, która jest iloczynem funkcji $f(t+c)$ i funkcji harmonicznej $\cos(\omega t - \alpha)$

$$\varepsilon = f(t+c) \cos(\omega t - \alpha), \quad (4.4)$$

gdzie c i α parametry.

Oznaczmy przez $\mathcal{O}$ zbiór

$$\mathcal{O} = \{(t, c, \alpha) : t \in \langle 0, +\infty \rangle, c \in \langle 0, +\infty \rangle, \alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle\},$$

który będzie dziedziną utworzonej funkcji

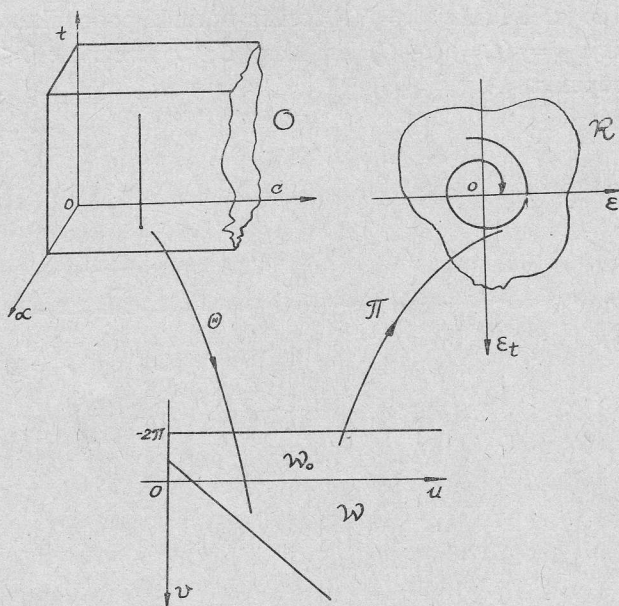
D. Dla dwuparametrowej rodziny krzywych z podpunktu C wyznaczamy równanie różniczkowe, którego całkami są krzywe tej rodziny.

Wprowadzamy nowe zmienne

$$u = t + c, \quad v = \omega t - \alpha. \quad (4.5)$$

Funkcja $\varepsilon = f(u) \cos v$ jest teraz określona w pewnym podzbiore przestrzeni euklidesowej dwuwymiarowej, który oznaczamy przez $\mathcal{W}$.

Zbiór $\mathcal{W}$ jest obrazem zbioru $\mathcal{O}$ przez odwzorowanie, które reprezentuje powyższy układ funkcji liniowych. Odwzorowanie to oznaczamy symbolem Θ .



Rys. 3. Interpretacja geometryczna odwzorowań przy metodzie konstrukcji rodziny drgań okresowo-zanikających na podstawie wykresu jej funkcji tworzącej

Zbiór $\mathcal{W}$ ma postać

$$\mathcal{W} = \{(u, v) : u \in \langle 0, +\infty \rangle, v \in \langle -2\pi, +\infty \rangle\}.$$

Trajektorie fazowe

$$\varepsilon = f(t+c) \cos(\omega t - \alpha), \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_t = f_t(t+c) \cos(\omega t - \alpha) - \omega f(t+c) \sin(\omega t - \alpha)$$

można, przez zamianę zmiennych, napisać w postaci

$$\varepsilon = f(u) \cos v, \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_t = f_t(u) \cos v - \omega f(u) \sin v.$$

Na podstawie warunku 3° podpunktu A, powyższy układ funkcji reprezentuje odwzorowanie Π zbioru $\mathcal{W}$ na zbiór $\mathcal{R}$ i do tego odwzorowania istnieje odwzorowanie odwrotne $\Pi^{-1}: \mathcal{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{W}_0$, klasy C^1 . Zauważmy, że dziedziną funkcji (4.7) jest zbiór $\mathcal{W}$, którego podzbiorem jest zbiór $\mathcal{W}_0$ i interesuje nas przedłużenie odwzorowania Π na zbiór $\mathcal{W}$. Odwzorowanie to jest okresowe względem zmiennej v o okresie 2π i odwzorowuje zbiór $\mathcal{W}$ na zbiór $\mathcal{R}$. Jeżeli podzielimy zbiór $\mathcal{W}$ na pasy o szerokości 2π , to przy spełnionym warunku 3° podpunktu A, w każdym pasie określone jest odwzorowanie odwrotne.

Obliczamy drugą pochodną funkcji ε . Po wprowadzeniu zmiennych u i v druga pochodna ma postać

$$\varepsilon_{tt} = f_{tt}(u) \cos v - 2\omega f_t(u) \sin v - \omega^2 f(u) \cos v \quad (4.8)$$

i jak widać $\varepsilon_{tt} = \gamma(u, v)$, określona w $\mathcal{W}$, jest funkcją okresową względem zmiennej v o okresie 2π . Stąd wynika, że superpozycja $\varepsilon_{tt} = \gamma \circ \Pi^{-1}(\varepsilon, \varepsilon_t)$ jest równaniem określonym w zbiorze $\mathcal{R}$, które po podstawieniu funkcji ε , staje się tożsamością w zbiorze $\mathcal{O}$.

Ponieważ funkcja γ jest klasy C^1 i Π^{-1} jest odwzorowaniem klasy C^1 , więc ich superpozycja jest funkcją klasy C^1 we wnętrzu zbioru $\mathcal{R}$, a więc równanie $\varepsilon_{tt} = \gamma \circ \Pi^{-1}(\varepsilon, \varepsilon_t)$ jest stacjonarnym równaniem różniczkowym rzędu drugiego określonym we wnętrzu zbioru $\mathcal{R}$.

E. Krzywe rodziny (4.4) są rozwiązaniami równania różniczkowego rzędu drugiego i rozwiązania te są określone w przedziale $0 \leq t < +\infty$.

Przyjmując jako wartości początkowe $\varepsilon|_{t=0}, \varepsilon_t|_{t=0}$ i oznaczając je przez ξ, η należy wyznaczyć zależność rozwiązań od tych wartości początkowych. Rozwiązanie tego zadania polega na przeprowadzeniu wartości początkowych ξ, η w parametry c, α . Należy więc rozwiązać względem c i α układ równań

$$\begin{aligned}\xi &= f(c) \cos(-\alpha), \\ \eta &= f_t(c) \cos(-\alpha) - \omega f(c) \sin(-\alpha).\end{aligned}$$

Zauważmy, że zbiór wartości początkowych pokrywa się ze zbiorem $\mathcal{R}$, a rozwiązanie powyższego układu równań ma postać

$$c = K(\xi, \eta), \quad \alpha = -L(\xi, \eta). \quad (4.9)$$

Podstawiając (4.9) do (4.4) otrzymujemy

$$\varepsilon = f(t + K(\xi, \eta)) \cos(\omega t + L(\xi, \eta)). \quad (4.10)$$

Tak więc skonstruowaliśmy dwuparametrową rodzinę krzywych i należy sprawdzić czy jest rodziną drgań okresowo-zanikających.

Bezpośrednio z opisanej metody wynika, że rodzina (4.10) spełnia warunki 1° - 7° definicji z punktu 3. Pozostałe warunki tej definicji są konieczne aby istniało równanie różniczkowe.

Ponieważ dla rodziny krzywych wyznaczonej opisaną metodą istnieje równanie różniczkowe, więc ważny jest następujący

WNIOSEK 4.

Dwuparametrowa rodzina krzywych

$$\varepsilon = f(t + K(\xi, \eta)) \cos(\omega t + L(\xi, \eta))$$

jest rodziną drgań okresowo-zanikających.

Na zakończenie wykażemy, że drgania (4.10) spełniają postulat zanikania drgań i wyprowadzimy wzór na dekrement logarytmiczny. W tym celu zbadamy związek między kolejnymi amplitudami drgań.

Z lematu 1 wynika, że zbiór amplitud drgań $\mathcal{A}$ jest sumą zbiorów $\mathcal{A}^{(i)}$, $i \in \mathcal{Z}_+$. W przypadku rodziny (4.10), każdy zbiór $\mathcal{A}^{(i)}$ jest obrazem zbioru warunków początkowych,

który pokrywa się ze zbiorem $\mathcal{R}$, przez odwzorowanie A_i określone następująco:

$$\begin{aligned} t_{\mathcal{A}}^{(i)} &= \frac{1}{\omega} [2\pi i - L(\xi, \eta)], \\ \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i)} &= f\left(\frac{1}{\omega} [2\pi i - L(\xi, \eta)] + K(\xi, \eta)\right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Funkcja f jest monotoniczna więc istnieje względem niej funkcja odwrotna. Przy ustalonym i układ (4.11) można rozwiązać względem $L(\xi, \eta)$, $K(\xi, \eta)$ i rozwiązanie ma postać

$$K(\xi, \eta) = f^{-1}(\varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i)}) - t_{\mathcal{A}}^{(i)}, \quad L(\xi, \eta) = 2\pi i - \omega t_{\mathcal{A}}^{(i)}. \quad (4.12)$$

Podstawiając (4.12) do układu funkcji, który odpowiada odwzorowaniu $A_{i+1}: R \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{A}^{(i+1)}$ otrzymujemy układ reprezentujący odwzorowanie przejścia $A_i^{i+1}: \mathcal{A}^{(i)} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{A}^{(i+1)}$

$$\begin{aligned} t_{\mathcal{A}}^{(i+1)} &= t_{\mathcal{A}}^{(i)} + T_0, \\ \varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i+1)} &= f(T_0 + f^{-1}(\varepsilon_{\mathcal{A}}^{(i)})). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Z postaci wzorów (4.13) wynika

WNIOSEK 5.

Dla każdej rodziny drgań okresowo-zanikających o postaci (4.10) spełniony jest postulat zanikania drgań.

Związek między kolejnymi amplitudami drgań czyli odwzorowanie $A: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, zdefiniowane wzorem (3.7), określa układ funkcji

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{\mathcal{A}} &= t_{\mathcal{A}} + T_0, \\ \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{A}} &= f(T_0 + f^{-1}(\varepsilon_{\mathcal{A}})). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Uwzględniając (4.14) we wzorze (3.9), który jest miarą tłumienia, otrzymujemy dla drgań skonstruowanych przedstawioną metodą, wzór na dekrement logarytmiczny w funkcji wartości amplitud drgań

$$\delta = \ln \frac{\varepsilon_{\mathcal{A}}}{f(T_0 + f^{-1}(\varepsilon_{\mathcal{A}}))}. \quad (4.15)$$

5. Przykłady aproksymacji rodziną drgań okresowo-zanikających

PRZYKŁAD 5.1.

Zadanie sformułujemy następująco. Dana jest funkcja jednej zmiennej

$$f(t) = \frac{a_1}{a_2 + a_3 t}, \quad (5.1.1)$$

gdzie a_1, a_2, a_3 — stałe parametry.

Należy przeanalizować warunki istnienia rodziny drgań okresowo-zanikających dla tej funkcji, następnie wyznaczyć tę rodzinę i jej równanie różniczkowe oraz zbadać charakter tłumienia drgań. Sprawdzamy więc, czy spełnione są warunki podpunktu A punktu 4.

Widać natychmiast, że dana funkcja jest klasy C^3 w przedziale $0 \leq t < +\infty$ wtedy, gdy $a_2 a_3 > 0$, czyli gdy parametry a_2, a_3 są tego samego znaku. Funkcja $f(t)$ jest oznaczona dodatnio wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 > 0$ i $(a_2 + a_3 t) > 0$ lub $a_1 < 0$ i $(a_2 + a_3 t) < 0$. Warunki te są równoważne warunkom $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ lub $a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 < 0$. Z kolei funkcja $f(t)$ jest oznaczona ujemnie wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 < 0$ i $(a_2 + a_3 t) > 0$ lub $a_1 > 0$ i $(a_2 + a_3 t) < 0$, zatem pod warunkiem, że $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ lub $a_1 > 0, a_2 < 0, a_3 < 0$. Mamy więc dwa przypadki i wykażemy, że w każdym przypadku spełniony jest warunek 2° podpunktu A.

Przypadek 1. $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ lub $a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 < 0$.

Funkcja $f(t)$ jest oznaczona dodatnio. Obliczamy pochodną

$$f_t(t) = -a_1 a_3 \frac{1}{(a_2 + a_3 t)^2}. \quad (5.1.2)$$

Widzimy, że pochodna jest funkcją oznaczoną ujemnie więc w przedziale $0 \leq t < +\infty$ funkcja $f(t)$ jest monotonicznie malejąca.

Przypadek 2. $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ lub $a_1 > 0, a_2 < 0, a_3 < 0$.

Funkcja $f(t)$ jest oznaczona ujemnie. Pochodna (5.1.2) jest funkcją oznaczoną dodatnio więc w przedziale $0 \leq t < +\infty$, funkcja $f(t)$ jest monotonicznie rosnąca.

Zgodnie z podpunktem A punktu 4 należy teraz wprowadzić odwzorowanie Π . Podstawiając (5.1.1) i (5.1.2) do (4.2) otrzymujemy

$$\varepsilon = \frac{a_1}{a_2 + a_3 u} \cos v, \quad (5.1.3a)$$

$$\varepsilon_t = -a_1 a_3 \frac{1}{(a_2 + a_3 u)^2} \cos v - a_1 \omega \frac{1}{a_2 + a_3 u} \sin v. \quad (5.1.3b)$$

Układ (5.1.3) reprezentuje w naszym przykładzie odwzorowanie $\Pi: \mathcal{W}_0 \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{R}$, gdzie $\mathcal{W}_0 = \{(u, v) : u \in \langle 0, +\infty \rangle, v \in \langle -2\pi, 0 \rangle\}$ i należy zbadać czy istnieje odwzorowanie odwrotne $\Pi^{-1}: \mathcal{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{W}_0$.

Rozwiązywanie tego problemu rozpoczniemy od wyznaczenia rozwiązań układu (5.1.3) względem u i v . W równaniu (5.1.3b) przenosimy człon $-a_1 a_3 \frac{1}{(a_2 + a_3 u)^2} \cos v$ na lewą stronę i następnie podnosimy obie strony do potęgi drugiej. Otrzymujemy równanie, które po redukcji zmiennej v za pomocą równania (5.1.3a) sprowadza się do równania kwadratowego względem $(a_2 + a_3 u)$ o postaci

$$(\varepsilon_t^2 + \omega^2 \varepsilon^2)(a_2 + a_3 u)^2 + 2a_3 \varepsilon \varepsilon_t (a_2 + a_3 u) + a_3^2 \varepsilon^2 - a_1^2 \omega^2 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik

$$\Delta = 4\omega^2[a_1^2 \varepsilon_t^2 - \varepsilon^2(a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2)]$$

i następnie pierwiastki

$$(a_2 + a_3 u^+) = \frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{\varepsilon_t^2 + \omega^2 \varepsilon^2}, \quad (5.1.4)$$

$$(a_2 + a_3 u^-) = \frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{\varepsilon_t^2 + \omega^2 \varepsilon^2}.$$

Z równania (5.1.3a) odpowiednio do pierwiastków (5.1.4) dostajemy

$$\cos v^+ = \frac{\varepsilon}{a_1} \frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{\varepsilon_t^2 + \omega^2 \varepsilon^2},$$

$$\cos v^- = \frac{\varepsilon}{a_1} \frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{\varepsilon_t^2 + \omega^2 \varepsilon^2}.$$

Wyzaczyliśmy więc dwa układy funkcji, mianowicie

$$u^+ = \frac{1}{a_3} \left(-a_2 + \frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{\varepsilon_t^2 + \omega^2 \varepsilon^2} \right), \quad (5.1.5a)$$

$$v^+ = \arccos \left(\frac{\varepsilon}{a_1} \frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{\varepsilon_t^2 + \omega^2 \varepsilon^2} \right), \quad (5.1.5b)$$

oraz

$$u^- = \frac{1}{a_3} \left(-a_2 + \frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{\varepsilon_t^2 + \omega^2 \varepsilon^2} \right), \quad (5.1.6a)$$

$$v^- = \arccos \left(\frac{\varepsilon}{a_1} \frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{\varepsilon_t^2 + \omega^2 \varepsilon^2} \right). \quad (5.1.6b)$$

Nie zmniejszając ogólności, ograniczamy dalsze rozważania do przypadku gdy $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$. Ponieważ mamy dwa układy rozwiązań powstaje pytanie, który układ funkcji reprezentuje odwzorowanie Π^{-1} i czy odwzorowanie to jest jednoznacznie określone.

Należy znaleźć na płaszczyźnie $(\varepsilon, \varepsilon_t)$ dziedzinę $\tilde{\mathcal{R}}$ wyznaczonych par funkcji i zbadać w niej kolejno wartości (u^+, v^+) układu (5.1.5) i (u^-, v^-) układu (5.1.6). Odwzorowanie odwrotne reprezentuje ten układ funkcji, dla którego istnieje zbiór $\mathcal{R} \subset \tilde{\mathcal{R}}$, taki że jego obraz przez to odwzorowanie pokrywa się ze zbiorem $\mathcal{W}_0$.

Przystępując do szczegółowej analizy, zauważmy, że dziedziną $\tilde{\mathcal{R}}$ rozwiązań jest zbiór punktów, na płaszczyźnie których współrzędne spełniają warunek $\Delta \geq 0$ z wyłączeniem początku układu współrzędnych. Z przyrównania wyróżnika do zera dostajemy równanie krzywej granicznej

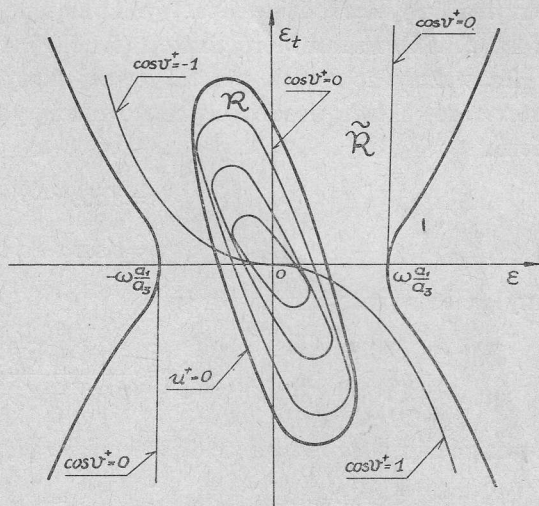
$$a_1^2 \varepsilon_t^2 - \varepsilon^2(a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2) = 0. \quad (5.1.7)$$

Stąd widać, że osie ε , ε_t są osiami symetrii krzywej granicznej.

Rozwiązując równanie (5.1.7) względem ε_t otrzymujemy

$$\varepsilon_t = \pm \frac{\varepsilon}{a_1} \sqrt{(a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2)}.$$

Krzywą graniczną tworzą więc dwie krzywe, z których jedna jest położona w półpłaszczyźnie $\varepsilon \leq -\omega \frac{a_1}{a_3}$, a druga w półpłaszczyźnie $\varepsilon \geq \omega \frac{a_1}{a_3}$. Wykreślona krzywa graniczna jest widoczna na rys. 4. Punkty należące do obszaru zawartego między gałęziami krzywej granicznej spełniają warunek $\Delta > 0$, więc z wyjątkiem początku układu współrzędnych ale wraz z punktami krzywej granicznej tworzą dziedzinę $\tilde{\mathcal{R}}$ rozwiązań.



Rys. 4. Analiza funkcji $u^+ = K^+(\varepsilon, \varepsilon_t)$, $v^+ = L^+(\varepsilon, \varepsilon_t)$ na płaszczyźnie $(\varepsilon, \varepsilon_t)$ w przykładzie 1. Rodzina elips przedstawia krzywe stałej wartości funkcji $u^+ = K^+(\varepsilon, \varepsilon_t)$. Zbiór $\mathcal{R}$ jest dziedziną odwzorowania π^{-1} w przypadku gdy $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$

Weźmy teraz układ (5.1.6). Zbadamy miejsca zerowe funkcji (5.1.6a). Z przyrównania tej funkcji do zera dostajemy równanie

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\Delta} = a_3 \varepsilon \varepsilon_t + a_2 (\varepsilon_t^2 + \omega^2 \varepsilon^2). \quad (5.1.8)$$

Żeby nie komplikować rozważań, założmy że spełniona jest nierówność $a_3^2 - 4a_2^2\omega^2 < 0$. Wówczas prawa strona równania (5.1.8) jest funkcją oznaczoną dodatnio, więc w zbiorze $\tilde{\mathcal{R}}$ nie ma punktów, których współrzędne spełniają równanie (5.1.8), czyli funkcja (5.1.6a) nie posiada miejsc zerowych. Stąd wnioskujemy, że w zbiorze wartości odwzorowania, które reprezentuje układ (5.1.6) nie ma punktu o współrzędnej u równej zero, a takie punkty zawiera zbiór $\mathcal{W}_0$.

Ten wniosek eliminuje układ (5.1.6) jako reprezentację odwzorowania Π^{-1} .

Z kolei rozważmy układ (5.1.5). Wyznamy na płaszczyźnie $(\varepsilon, \varepsilon_t)$ krzywe, wzdłuż których funkcja (5.1.5a) jest wielkością stałą o wartościach $u^+ \in \langle 0, +\infty \rangle$. Przekształcamy wyrażenie (5.1.5a) do postaci

$$u^+ - \frac{1}{a_3} \left(-a_2 + \frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}}{\varepsilon_t^2 + \omega^2 \varepsilon^2} \right) = 0. \quad (5.1.9)$$

W powyższym równaniu traktujemy u^+ jako parametr i dla każdego $u^+ \in \langle 0, +\infty \rangle$ szukamy punktów, których współrzędne $\varepsilon, \varepsilon_t$ spełniają to równanie. Zauważmy, że (5.1.9) można zastąpić równaniem

$$\left[u^+ - \frac{1}{a_3} \left(-a_2 + \frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{\varepsilon_t^2 + \omega^2 \varepsilon^2} \right) \right] \left[u^+ - \frac{1}{a_3} \left(-a_2 + \frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{\varepsilon_t^2 + \omega^2 \varepsilon^2} \right) \right] = 0. \quad (5.1.10)$$

Wynika to z faktu, że drugi człon po lewej stronie jest funkcją oznaczoną dodatnio w $\tilde{\mathcal{R}}$. Po wykonaniu przekształceń równanie (5.1.10) sprowadza się do postaci

$$(a_3 u^+ + a_2)^2 \omega^2 \varepsilon^2 + [a_3 \varepsilon + \varepsilon_t (a_3 u^+ + a_2)]^2 = \omega^2 a_1^2. \quad (5.1.11)$$

Otrzymaliśmy więc rodzinę elips. Wynika stąd, że każdej wartości $u^+ \in \langle 0, +\infty \rangle$ odpowiada elipsa (5.1.11), wzdłuż której funkcja (5.1.5a) jest wielkością stałą o wartości równej u^+ .

Zauważmy, że środek symetrii każdej elipsy leży w początku układu współrzędnych. Przez obrót układu współrzędnych, to znaczy po wykonaniu w równaniu (5.1.11) podstawienia

$$\varepsilon = \varepsilon' \cos \alpha - \varepsilon_t' \sin \alpha,$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon' \sin \alpha + \varepsilon_t' \cos \alpha,$$

przy kącie α wyznaczonym wzorem

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_3(a_3 u^+ + a_2)}{(a_3 u^+ + a_2)^2(\omega^2 - 1) + a_3^2},$$

równanie elipsy sprowadza się do kierunków głównych i ma postać

$$\begin{aligned} & \{(a_3 u^+ + a_2)^2 \omega^2 \cos^2 \alpha + [a_3 \cos \alpha + (a_3 u^+ + a_2) \sin \alpha]^2\} \varepsilon'^2 + \\ & + \{(a_3 u^+ + a_2)^2 \omega^2 \sin^2 \alpha + [(a_3 u^+ + a_2) \cos \alpha - a_3 \sin \alpha]^2\} \varepsilon_t'^2 = \omega^2 a_1^2. \end{aligned}$$

Widać stąd, że osie elips maleją do zera gdy $u^+ \rightarrow +\infty$. Wewnątrz elipsy określonej parametrem $u^+ = 0$ leżą wszystkie pozostałe elipsy rodziny. Dla ilustracji rozważań na rys. 4 wykreślono kilka elips wyznaczonej rodziny. Ze struktury zbioru $\mathcal{W}_0 = \{(u, v) : u \in \langle 0, +\infty \rangle, v \in \langle -2\pi, 0 \rangle\}$ wynika, że układ (5.1.5) reprezentuje odwzorowanie Π^{-1} wtedy, gdy wzdłuż każdej krzywej stałej wartości funkcji (5.1.5a) funkcja (5.1.5b) przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $\langle -2\pi, 0 \rangle$. Wykażemy, że warunek ten jest spełniony korzystając z faktu, że zamiast funkcji (5.1.5b) można badać funkcję trygonometryczną $\cos v^+$. Wyznamy obszary stałego znaku tej funkcji i krzywe, wzdłuż których $\cos v^+$ jest równy 1 lub -1 .

Z wzoru (5.1.5b) widać, że $\cos v^+$ zeruje się wzdłuż osi ε_t oraz w punktach, których współrzędne spełniają równanie

$$\frac{1}{2} \sqrt{\Delta} = a_3 \varepsilon \varepsilon_t. \quad (5.1.12)$$

Podnosząc obie strony równania (5.1.12) do potęgi drugiej otrzymujemy równanie przedstawiające dwie proste: $\varepsilon = \omega \frac{a_1}{a_3}$, $\varepsilon = -\omega \frac{a_1}{a_3}$. Równanie (5.1.12) jest spełnione wzdłuż pół-

prostych: $\varepsilon = \omega \frac{a_1}{a_3}$, $\varepsilon_t \geq 0$; $\varepsilon = -\omega \frac{a_1}{a_3}$, $\varepsilon_t \leq 0$. Jak łatwo sprawdzić półproste te nie przecinają elips rodziny (5.1.11).

Z kolei $\cos v^+ = 1$ wzdłuż gałęzi paraboli $\varepsilon_t = -\frac{a_3}{a_1} \varepsilon^2$ położonej w IV ćwiartce, a $\cos v^+ = -1$ wzdłuż gałęzi paraboli $\varepsilon_t = \frac{a_3}{a_1} \varepsilon^2$ położonej w II ćwiartce płaszczyzny. Wszystkie wyznaczone powyżej krzywe zaznaczono na rys. 4, gdzie widać, że wzdłuż elips rodziny (5.1.11) funkcja (5.1.5b) przyjmuje wartości z przedziału $\langle -2\pi, 0 \rangle$. Podsumowując przeprowadzone rozważania stwierdzamy, że w przypadku gdy współczynniki a_1 , a_2 , a_3 są dodatnie, układ (5.1.5) reprezentuje odwzorowanie Π^{-1} . Dziedzina tego odwzorowania jest obszar wypełniony elipsami rodziny (5.1.11).

Wykazaliśmy więc, że dla funkcji (5.1.1) spełnione są warunki istnienia rodziny drgań okresowo-zanikających. Wykorzystując wzory wyprowadzone w punkcie 4 możemy napisać postać tej rodziny i jej równanie różniczkowe.

Podstawiając funkcję f i jej pochodne do (4.8) otrzymujemy

$$\varepsilon_{tt} = 2a_1 a_3^2 \frac{1}{(a_2 + a_3 u)^3} \cos v + 2\omega a_1 a_3 \frac{1}{(a_2 + a_3 u)^2} \sin v - \omega^2 \frac{a_1}{a_2 + a_3 u} \cos v. \quad (5.1.13)$$

Z kolei podstawiając (5.1.5) do (5.1.13) dostajemy równanie różniczkowe

$$\varepsilon_{tt} + \omega^2 \varepsilon + 2a_3 \left(\frac{\varepsilon_t^2 + \omega^2 \varepsilon^2}{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t + \omega \sqrt{a_1^2 \varepsilon_t^2 - \varepsilon^2 (a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2)}} \right) \varepsilon_t = 0, \quad (5.1.14)$$

którego rozwiązania są drganiami okresowo-zanikającymi o postaci

$$\varepsilon = \frac{a_1}{a_2 + a_3(t + K(\xi, \eta))} \cos(\omega t + L(\xi, \eta)), \quad (5.1.15)$$

gdzie

$$K(\xi, \eta) = \frac{1}{a_3} \left(-a_2 + \frac{-a_3 \xi \eta + \omega \sqrt{a_1^2 \eta^2 - \xi^2 (a_3^2 \xi^2 - \omega^2 a_1^2)}}{\eta^2 + \omega^2 \xi^2} \right),$$

$$L(\xi, \eta) = \arccos \left(\frac{\xi}{a_1} \frac{-a_3 \xi \eta + \omega \sqrt{a_1^2 \eta^2 - \xi^2 (a_3^2 \xi^2 - \omega^2 a_1^2)}}{\eta^2 + \omega^2 \xi^2} \right).$$

Jak wiemy z rozważań w punkcie 4 dla rodziny drgań (5.1.15) spełniony jest postulat zanikania drgań, a dekrement logarytmiczny jest funkcją wartości amplitud drgań.

Podstawiając funkcję (5.1.1) i funkcję względem niej odwrotną do (4.15) otrzymujemy wzór

$$\delta = \ln \left(1 + \frac{a_3}{a_1} T_0 \varepsilon_{\text{sd}} \right) \quad (5.1.16)$$

charakteryzujący tłumienie układu, którego drgania aproksymowano funkcją (5.1.15).

PRZYKŁAD 5.2.

Rozwiązać zadanie sformułowane jak w poprzednim przykładzie w przypadku funkcji o postaci

$$f(t) = \frac{a_1}{\cosh(a_2 + a_3 t)}, \quad (5.2.1)$$

gdzie a_1, a_2, a_3 – stałe parametry. Jest oczywiste, że dana funkcja jest klasy C^3 w przedziale $0 \leq t < +\infty$.

Ponieważ kosinus hiperboliczny jest funkcją oznaczoną dodatnio, więc $f(t)$ jest funkcją o stałym znaku generowanym przez znak parametru a_1 .

Mamy dwa przypadki:

Przypadek 1. $a_1 > 0$.

Funkcja $f(t)$ jest oznaczona dodatnio. Obliczamy pochodną:

$$f_t(t) = -a_1 a_3 \frac{\sinh(a_2 + a_3 t)}{\cosh^2(a_2 + a_3 t)}. \quad (5.2.2)$$

Zgodnie z warunkiem 2° podpunktu A funkcja $f(t)$ ma być monotonicznie malejąca gdy jest oznaczona dodatnio. Warunek ten jest spełniony gdy $a_3 \sinh(a_2 + a_3 t) > 0$, a więc gdy współczynniki a_2, a_3 są tego samego znaku. Widzimy stąd, że funkcja $f(t)$ jest oznaczona dodatnio i monotonicznie malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ lub $a_1 > 0, a_2 < 0, a_3 < 0$.

Przypadek 2. $a_1 < 0$.

Funkcja $f(t)$ jest oznaczona ujemnie.

Zgodnie z warunkiem 2° podpunktu A funkcja $f(t)$ ma być monotonicznie rosnąca gdy jest oznaczona ujemnie. Ponieważ funkcja jest monotonicznie rosnąca gdy jej pochodna jest oznaczona dodatnio więc, jak widać z wzoru (5.2.2), warunek ten jest spełniony gdy $a_3 \sinh(a_2 + a_3 t) > 0$, czyli przy identycznych warunkach na współczynniki a_2, a_3 jak w poprzednim przypadku.

Wynika stąd, że funkcja $f(t)$ jest oznaczona ujemnie i monotonicznie rosnąca wtedy, gdy $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ lub $a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 < 0$.

Postępując zgodnie ze schematem nakreślonym w poprzednim przykładzie przeanalizujemy odwzorowanie $\Pi: \mathcal{W}_0 \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{R}$, które w rozważanym przykładzie jest reprezentowane przez układ funkcji

$$\varepsilon = \frac{a_1}{\cosh(a_2 + a_3 u)} \cos v, \quad (5.2.3a)$$

$$\varepsilon_t = -a_1 a_3 \frac{\sinh(a_2 + a_3 u)}{\cosh^2(a_2 + a_3 u)} \cos v - \omega \frac{a_1}{\cosh(a_2 + a_3 u)} \sin v. \quad (5.2.3b)$$

Należy wyznaczyć odwzorowanie odwrotne $\Pi^{-1}: \mathcal{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{W}_0$. W tym celu rozwiążemy układ

(5.2.3) względem u i v . W równaniu (5.2.3b) przenosimy człon $-a_1 a_3 \frac{\sinh(a_2 + a_3 u)}{\cosh^2(a_2 + a_3 u)} \cos v$ na lewą stronę i następnie podnosimy obie strony do potęgi drugiej. Otrzymujemy równanie, które po redukcji zmiennej v za pomocą równania (5.2.3a) sprowadza się do równania kwadratowego względem $\tanh(a_2 + a_3 u)$ o postaci

$$(a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2) \tanh^2(a_2 + a_3 u) + 2a_3 \varepsilon \varepsilon_t \tanh(a_2 + a_3 u) + \varepsilon_t^2 + \omega^2(\varepsilon^2 - a_1^2) = 0.$$

Obliczamy wyróżnik

$$\Delta = 4\omega^2[(a_1^2 - \varepsilon^2)(a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2) - a_1^2 \varepsilon_t^2]$$

i następnie pierwiastki

$$\begin{aligned} \tanh(a_2 + a_3 u^+) &= \frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2}, \\ \tanh(a_2 + a_3 u^-) &= \frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2}. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Z kolei wykorzystując (5.2.3a) można (5.2.3b) przedstawić w postaci

$$\varepsilon_t = -a_3 u \tanh(a_2 + a_3 u) - \omega \varepsilon \tanh v.$$

Stąd odpowiednio do pierwiastków (5.2.4) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tanh v^+ &= \frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{-\omega^2 a_1^2 \varepsilon_t - \frac{1}{2} a_3 \varepsilon \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2}, \\ \tanh v^- &= \frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{-\omega^2 a_1^2 \varepsilon_t + \frac{1}{2} a_3 \varepsilon \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2}. \end{aligned}$$

Mamy więc dwa układy funkcji, mianowicie

$$u^+ = \frac{1}{a_3} \left[-a_2 + \operatorname{Ar} \tanh \left(\frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2} \right) \right], \quad (5.2.5a)$$

$$v^+ = \operatorname{arc} \tanh \left(\frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{-\omega^2 a_1^2 \varepsilon_t - \frac{1}{2} a_3 \varepsilon \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2} \right), \quad (5.2.5b)$$

oraz

$$u^- = \frac{1}{a_3} \left[-a_2 + \operatorname{Ar} \tanh \left(\frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2} \right) \right], \quad (5.2.6a)$$

$$v^- = \operatorname{arc} \tanh \left(\frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{-\omega^2 a_1^2 \varepsilon_t + \frac{1}{2} a_3 \varepsilon \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2} \right). \quad (5.2.6b)$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie ograniczymy dalsze rozważania do przypadku $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$. Wyznamy najpierw dziedzinę $\mathcal{D}$ rozwiązań, następnie przeanalizujemy na płaszczyźnie $(\varepsilon, \varepsilon_t)$ najpierw funkcje (5.2.6), a następnie (5.2.5).

Zauważmy, że dziedziną $\tilde{\mathcal{R}}$ rozwiązań jest zbiór punktów na płaszczyźnie, których współrzędne spełniają warunek $\Delta \geq 0$.

Z przyrównania wyróżnika do zera dostajemy równanie krzywej granicznej

$$(a_1^2 - \varepsilon^2)(a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2) - a_1^2 \varepsilon_t^2 = 0. \quad (5.2.7)$$

Widać stąd, że osie ε , ε_t są osiami symetrii krzywej granicznej.

Rozwiązując równanie (5.2.7) względem ε_t dostajemy

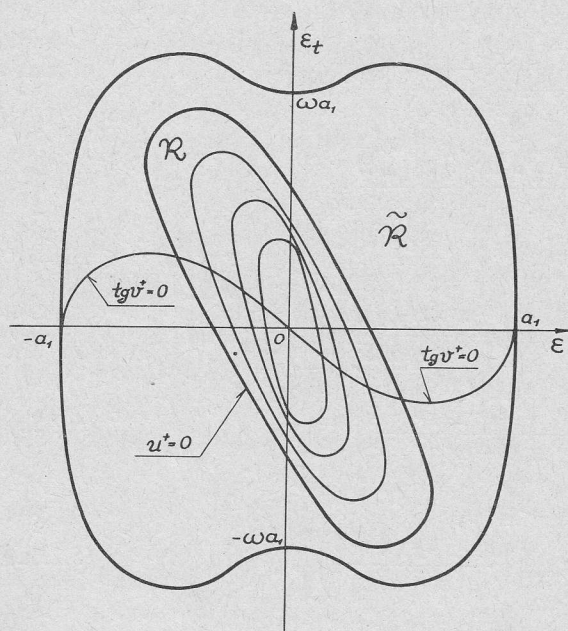
$$\varepsilon_t = \pm \frac{1}{a_1} \sqrt{(a_1^2 - \varepsilon^2)(a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2)}, \quad (5.2.8)$$

czyli dwie krzywe, z których jedna leży po dodatniej, a druga po ujemnej stronie osi ε_t . W celu wykreślenia krzywej granicznej szukamy punktów ekstremalnych. Stwierdzamy, że są możliwe dwa przypadki:

1° $a_3 < \omega$. Punkty ekstremalne są punktami przecięcia krzywych (5.2.8) z osią ε_t . Górna krzywa osiąga w punkcie przecięcia minimum, a dolna maksimum.

2° $a_3 > \omega$. Pojawiają się dodatkowe ekstrema dla $\varepsilon_{1,2} = \pm \frac{a_1}{a_3} \sqrt{\frac{1}{2}(a_3^2 - \omega^2)}$. Górna krzywa ma dodatkowo dwa maksima, a dolna dwa minima.

Wykreślona krzywa graniczna w przypadku gdy $a_3 > \omega$ jest widoczna na rys. 5.



Rys. 5. Analiza funkcji $u^+ = K^+(\varepsilon, \varepsilon_t)$, $v^+ = L^+(\varepsilon, \varepsilon_t)$ na płaszczyźnie $(\varepsilon, \varepsilon_t)$ w przykładzie 2. Rodzina elips przedstawia krzywe stałej wartości funkcji $u^+ = K^+(\varepsilon, \varepsilon_t)$. Zbiór $\mathcal{R}$ jest dziedziną odwzorowania Π^{-1} w przypadku gdy $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$

Punkty należące do obszaru ograniczonego krzywą graniczną spełniają warunek $\Delta > 0$, wobec tego wraz z punktami krzywej granicznej tworzą dziedzinę $\tilde{\mathcal{R}}$ rozwiązań.

Weźmy teraz układ (5.2.6). Pokażemy że w zbiorze wartości odwzorowania, które układ ten reprezentuje nie ma punktów o współrzędnej u równej zero. Z przyrównania

funkcji (5.2.6a) do zera dostajemy równanie

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\Delta} = a_3 \varepsilon \varepsilon_t + (a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2) \operatorname{tgh} a_2. \quad (5.2.9)$$

Funkcja po prawej stronie równania (5.2.9) zeruje się wzdłuż krzywej

$$\varepsilon_t = -\frac{a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2}{a_3 \varepsilon} \operatorname{tgh} a_2, \quad (5.2.10)$$

która składa się z dwóch gałęzi, z których jedna leży w II ćwiartce, a druga w IV ćwiartce płaszczyzny i dzieli płaszczyznę na trzy podobszary stałego znaku rozważanej funkcji.

Aby uprościć rozważania założmy, że spełniona jest nierówność $(a_3 + 2\omega) \operatorname{tgh} a_2 > a_3$. Wówczas wzdłuż krzywej (5.2.10) wyróżnik Δ jest ujemny, czyli krzywa leży poza zbiorem $\tilde{\mathcal{H}}$ i w zbiorze $\tilde{\mathcal{H}}$ prawa strona równania (5.2.9) jest funkcją oznaczoną dodatnio. Zatem nie ma punktów, których współrzędne spełniają równanie (5.2.9), czyli funkcja (5.2.6a) nie posiada miejsc zerowych. Wnioskujemy stąd, że układ (5.2.6) nie reprezentuje odwzorowania Π^{-1} , ponieważ zbiór wartości tego odwzorowania, to znaczy zbiór $\mathcal{W}_0$ zawiera punkty o współrzędnej u równej zeru.

Z kolei rozważmy układ (5.2.5). Wyznamy najpierw krzywe stałej wartości funkcji (5.2.5a) i następnie zbadamy wartości funkcji (5.2.5b) wzdłuż tych krzywych.

Przekształcamy wyrażenie (5.2.5a) do postaci

$$\operatorname{tgh}(a_2 + a_3 u^+) - \left(\frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2} \right) = 0. \quad (5.2.11)$$

W równaniu (5.2.11) traktujemy u^+ jako parametr i dla każdego $u^+ \in \langle 0, +\infty \rangle$ szukamy na płaszczyźnie $(\varepsilon, \varepsilon_t)$ punktów, których współrzędne spełniają to równanie. Zauważmy, że (5.2.11) można zastąpić równaniem

$$\left[\operatorname{tgh}(a_2 + a_3 u^+) - \left(\frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2} \right) \right] \left[\operatorname{tgh}(a_2 + a_3 u^+) - \left(\frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2} \right) \right] = 0. \quad (5.2.12)$$

Wynika to z faktu, że drugi człon po lewej stronie nie ma miejsc zerowych w $\tilde{\mathcal{H}}$.

Po wykonaniu przekształceń otrzymujemy

$$\omega^2 \varepsilon^2 + (\varepsilon_t + a_3 \varepsilon \operatorname{tgh}(a_2 + a_3 u^+))^2 = \omega^2 a_1^2 (1 - \operatorname{tgh}^2(a_2 + a_3 u^+)). \quad (5.2.13)$$

Równanie (5.2.13) przedstawia rodzinę elips.

Tak więc każdej wartości $u^+ \in \langle 0, +\infty \rangle$ odpowiada elipsa (5.2.13), wzdłuż której funkcja (5.2.5a) jest wielkością stałą o wartości równej u^+ .

Z (5.2.13) widać, że środek symetrii każdej elipsy leży w początku układu współrzędnych. Przez obrót układu współrzędnych o kąt α określony wzorem

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_3 \operatorname{tgh}(a_2 + a_3 u^+)}{(\omega^2 - 1) + a_3^2 \operatorname{tgh}^2(a_2 + a_3 u^+)}$$

równanie elipsy sprowadza się do kierunków głównych i ma postać

$$\begin{aligned} & \{\omega^2 \cos^2 \alpha + [\sin \alpha + a_3 \cos \alpha \operatorname{tgh}(a_2 + a_3 u^+)]^2\} \varepsilon'^2 + \\ & + \{\omega^2 \sin^2 \alpha + [\cos \alpha - a_3 \sin \alpha \operatorname{tgh}(a_2 + a_3 u^+)]^2\} \varepsilon_t'^2 = \\ & = \omega^2 a_1^2 (1 - \operatorname{tgh}^2(a_2 + a_3 u^+)). \end{aligned}$$

Widać stąd, że osie elips maleją do zera gdy $u^+ \rightarrow +\infty$. Wewnątrz elipsy określonej parametrem $u^+ = 0$ leżą wszystkie pozostałe elipsy rodziny. W celu ilustracji rozważań na rys. 5 wykreślono kilka elips wyznaczonej rodziny. Zbadamy teraz wartości funkcji (5.2.5b) wzdłuż każdej elipsy rodziny. Badania te przeprowadzimy graficznie na płaszczyźnie $(\varepsilon, \varepsilon_t)$ korzystając z faktu, że zamiast funkcji (5.2.5b) można badać funkcję trygonometryczną $\operatorname{tg} v^+$. Wyznamy obszary stałego znaku tej funkcji i z położenia elips względem obszarów stałego znaku będziemy wnioskować o wartościach funkcji (5.2.5b) wzdłuż elips.

Zauważmy, że $\operatorname{tg} v^+$ zmienia znak przy przejściu przez oś ε_t , ponieważ jest funkcją nieokreśloną wzdłuż osi ε_t i przy $\varepsilon_t > 0$, gdy $\varepsilon \rightarrow 0$ ma granicę lewostronną $+\infty$, a prawostronną $-\infty$, natomiast przy $\varepsilon_t < 0$ odpowiednio $-\infty$ i $+\infty$.

Miejsca zerowe funkcji $\operatorname{tg} v^+$ określa równanie

$$\omega^2 a_1^2 \varepsilon_t = -\frac{1}{2} a_3 \varepsilon \sqrt{A}. \quad (5.2.14)$$

Podnosząc obie strony równania (5.2.14) do potęgi drugiej otrzymujemy równanie krzywej, która składa się z dwóch gałęzi, z których wybieramy gałąź położoną w II i IV ćwiartce płaszczyzny określoną równaniem

$$\varepsilon_t = -\frac{a_3}{a_1} \varepsilon \sqrt{a_1^2 - \varepsilon^2}, \quad (5.2.15)$$

wzdłuż której zeruje się funkcja (5.2.5b).

Krzywa (5.2.15) jest wykreślona na rys. 5 i jak widać wraz z osią ε_t dzieli zbiór $\tilde{\mathcal{H}}$ na cztery podzbiory stałego znaku funkcji $\operatorname{tg} v^+$. Każda elipsa przecina wszystkie podzbiory stałego znaku, a więc wzdłuż krzywej stałej wartości funkcji (5.2.5a) funkcja (5.2.5b) przyjmuje wartości z przedziału $(-\infty, 0)$, czyli obrazem zbioru punktów elips przez odwzorowanie, które reprezentuje układ (5.2.5) jest zbiór $\mathcal{W}_0$.

W wyniku przeprowadzonych rozważań stwierdzamy, że w przypadku gdy współczynniki a_1, a_2, a_3 są dodatnie układ (5.2.5) reprezentuje odwzorowanie Π^{-1} .

Konsekwencją przeprowadzonych rozważań jest wniosek, że wychodząc z danej funkcji (5.2.1) można zbudować rodzinę drgań okresowo-zanikających.

Postępując według schematu nakreślonego w punkcie 4 podstawiamy funkcję f i jej pochodne do (4.8).

Mamy

$$\begin{aligned} \varepsilon_{tt} = 2a_3 \operatorname{tgh}(a_2 + a_3 u) & \left[a_1 a_3 \frac{\sinh(a_2 + a_3 u)}{\cosh^2(a_2 + a_3 u)} \cos v + \omega \frac{a_1}{\cosh(a_2 + a_3 u)} \sin v \right] + \\ & - (\omega^2 + a_3^2) \frac{a_1}{\cosh(a_2 + a_3 u)} \cos v. \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

Z kolei podstawiając (5.2.5) do (5.2.16) dostajemy równanie różniczkowe

$$\varepsilon_{tt} + (\omega^2 + a_3^2) \varepsilon + 2a_3 \left(\frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t + \omega \sqrt{(a_1^2 - \varepsilon^2)(a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2) - a_1^2 \varepsilon_t^2}}{a_3^2 \varepsilon^2 + \omega^2 a_1^2} \right) \varepsilon_t = 0, \quad (5.2.17)$$

którego rozwiązania są drganiami okresowo-zanikającymi o postaci

$$\varepsilon = \frac{a_1}{\cosh(a_2 + a_3(t + K(\xi, \eta)))} \cos(\omega t + L(\xi, \eta)), \quad (5.2.18)$$

gdzie

$$K(\xi, \eta) = \frac{1}{a_3} \left[-a_2 + \operatorname{Ar} \operatorname{tgh} \left(\frac{-a_3 \xi \eta + \omega \sqrt{(a_1^2 - \xi^2)(a_3^2 \xi^2 + \omega^2 a_1^2) - a_1^2 \eta^2}}{a_3^2 \xi^2 + \omega^2 a_1^2} \right) \right],$$

$$L(\xi, \eta) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\omega \xi} \frac{-\omega^2 a_1^2 \eta - a_3 \omega \xi \sqrt{(a_1^2 - \xi^2)(a_3^2 \xi^2 + \omega^2 a_1^2) - a_1^2 \eta^2}}{a_3^2 \xi^2 + \omega^2 a_1^2} \right).$$

Dla skonstruowanych drgań ważne są wnioski z punktu 4.

Na zakończenie wyprowadzimy wzór na dekrement logarytmiczny. Podstawiając funkcję (5.2.1) i funkcję względem niej odwrotną do (4.15) otrzymujemy

$$\delta = \ln \left(\frac{\frac{\varepsilon_{\infty}}{a_1}}{\cosh \left(a_3 T_0 + \operatorname{Ar} \cosh \frac{a_1}{\varepsilon_{\infty}} \right)} \right).$$

Po wykonaniu przekształceń wzór na dekrement logarytmiczny upraszcza się do postaci

$$\delta = \ln \left(\cosh a_3 T_0 + \frac{\varepsilon_{\infty}}{a_1} \sqrt{\left(\frac{a_1}{\varepsilon_{\infty}} \right)^2 - 1} \sinh a_3 T_0 \right).$$

PRZYKŁAD 5.3.

To samo zadanie jak w poprzednich przykładach przedyskutujemy w przypadku funkcji $f(t)$ danej w postaci

$$f(t) = \frac{a_1}{\sinh(a_2 + a_3 t)}, \quad (5.3.1)$$

gdzie a_1, a_2, a_3 – stałe parametry.

Analizujemy kolejno warunki istnienia rodziny drgań okresowo-zanikających dla tej funkcji. Tak więc funkcja $f(t)$ jest klasy C^3 w przedziale $0 \leq t < +\infty$ pod warunkiem, że $a_2 a_3 > 0$. Z kolei dana funkcja ma być oznaczona dodatnio lub ujemnie. Widzimy że $f(t)$ jest oznaczona dodatnio wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 > 0$ i $\sinh(a_2 + a_3 t) > 0$ lub $a_1 < 0$ i $\sinh(a_2 + a_3 t) < 0$. Warunki te są równoważne warunkom $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$, lub $a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 < 0$.

Funkcja $f(t)$ jest oznaczona ujemnie wtedy, gdy $a_1 > 0$ i $\sinh(a_2 + a_3 t) < 0$ lub $a_1 < 0$ i $\sinh(a_2 + a_3 t) > 0$, czyli pod warunkiem, że $a_1 > 0, a_2 < 0, a_3 < 0$ lub $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 > 0$.

Widzimy stąd, że są możliwe oba przypadki. Wykażemy, że w każdym przypadku spełniony jest warunek 2° podpunktu A.

Przypadek 1. $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ lub $a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 < 0$.

Funkcja $f(t)$ jest oznaczona dodatnio. Obliczamy pochodną:

$$f_t(t) = -a_1 a_3 \frac{\cosh(a_2 + a_3 t)}{\sinh^2(a_2 + a_3 t)}. \quad (5.3.2)$$

Pochodna jest funkcją oznaczoną ujemnie, więc w przedziale $0 \leq t < +\infty$ funkcja $f(t)$ jest monotonicznie malejąca.

Przypadek 2. $a_1 > 0, a_2 < 0, a_3 < 0$ lub $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 > 0$.

Funkcja $f(t)$ jest oznaczona ujemnie. Pochodna (5.3.2) jest funkcją oznaczoną dodatnio czyli w tym przypadku funkcja $f(t)$ jest monotonicznie rosnąca.

Odwzorowaniu $\Pi: \mathcal{W}_0 \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{R}$ w rozważanym przykładzie odpowiada układ funkcji

$$\varepsilon = \frac{a_1}{\sinh(a_2 + a_3 u)} \cos v, \quad (5.3.3a)$$

$$\varepsilon_t = -a_1 a_3 \frac{\cosh(a_2 + a_3 u)}{\sinh^2(a_2 + a_3 u)} \cos v - \omega \frac{a_1}{\sinh(a_2 + a_3 u)} \sin v. \quad (5.3.3b)$$

Należy wyznaczyć odwzorowanie odwrotne $\Pi^{-1}: \mathcal{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{W}_0$. Rozwiązujemy więc układ (5.3.3) względem u i v . W równaniu (5.3.3b) przenosimy człon $-a_1 a_3 \frac{\cosh(a_2 + a_3 u)}{\sinh^2(a_2 + a_3 u)} \cos v$ na lewą stronę i następnie podnosimy obie strony do potęgi drugiej. Otrzymujemy równanie, które po redukcji zmiennej v za pomocą równania (5.3.3a) sprowadza się do równania kwadratowego względem $\text{ctgh}(a_2 + a_3 u)$ o postaci:

$$(a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2) \text{ctgh}^2(a_2 + a_3 u) + 2a_3 \varepsilon \varepsilon_t \text{ctgh}(a_2 + a_3 u) + \varepsilon_t^2 + \omega^2 (a_1^2 + \varepsilon^2) = 0.$$

Obliczamy wyróżnik

$$\Delta = 4\omega^2 [(a_1^2 + \varepsilon^2)(\omega^2 a_1^2 - a_3^2 \varepsilon^2) + a_1^2 \varepsilon_t^2]$$

i następnie pierwiastki

$$\begin{aligned} \text{ctgh}(a_2 + a_3 u^+) &= \frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2}, \\ \text{ctgh}(a_2 + a_3 u^-) &= \frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2}. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Z kolei wykorzystując (5.3.3a) można (5.3.3b) przedstawić w postaci

$$\varepsilon_t = -a_3 \varepsilon \text{ctgh}(a_2 + a_3 u) - \omega \varepsilon \text{tg} v.$$

Stąd odpowiednio do pierwiastków (5.3.4) otrzymujemy

$$\operatorname{tg} v^+ = \frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{\omega^2 a_1^2 \varepsilon_t - \frac{1}{2} a_3 \varepsilon \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2},$$

$$\operatorname{tg} v^- = \frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{\omega^2 a_1^2 \varepsilon_t + \frac{1}{2} a_3 \varepsilon \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2}.$$

Mamy więc dwa układy funkcji, mianowicie

$$u^+ = \frac{1}{a_3} \left[-a_2 + \operatorname{Ar} \operatorname{ctgh} \left(\frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2} \right) \right], \quad (5.3.5a)$$

$$v^+ = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{\omega^2 a_1^2 \varepsilon_t - \frac{1}{2} a_3 \varepsilon \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2} \right), \quad (5.3.5b)$$

oraz

$$u^- = \frac{1}{a_3} \left[-a_2 + \operatorname{Ar} \operatorname{ctgh} \left(\frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2} \right) \right], \quad (5.3.6a)$$

$$v^- = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\omega \varepsilon} \frac{\omega^2 a_1^2 \varepsilon_t + \frac{1}{2} a_3 \varepsilon \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2} \right). \quad (5.3.6b)$$

Tak jak i w poprzednich przykładach ograniczamy nasze rozważania do przypadku gdy współczynniki a_1, a_2, a_3 są dodatnie.

Dziedziną $\tilde{\mathcal{R}}$ rozwiązań jest zbiór punktów na płaszczyźnie $\varepsilon, \varepsilon_t$, których współrzędne spełniają warunek $\Delta \geq 0$ i $a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2 \neq 0$.

Z przyrównania wyróżnika do zera dostajemy równanie krzywej granicznej

$$(a_1^2 + \varepsilon^2)(\omega^2 a_1^2 - a_3^2 \varepsilon^2) + a_1^2 \varepsilon_t^2 = 0. \quad (5.3.7)$$

Widać stąd, że osie $\varepsilon, \varepsilon_t$ są osiami symetrii krzywej granicznej. Rozwiązując równanie (5.3.7) względem ε_t mamy

$$\varepsilon_t = \pm \frac{1}{a_1} \sqrt{(a_1^2 + \varepsilon^2)(a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2)}. \quad (5.3.8)$$

Krzywą graniczną tworzą więc dwie krzywe, z których jedna leży w półpłaszczyźnie $\varepsilon \leq -\omega \frac{a_1}{a_3}$, a druga w półpłaszczyźnie $\varepsilon \geq \omega \frac{a_1}{a_3}$. Wykreślona krzywa graniczna jest wido-

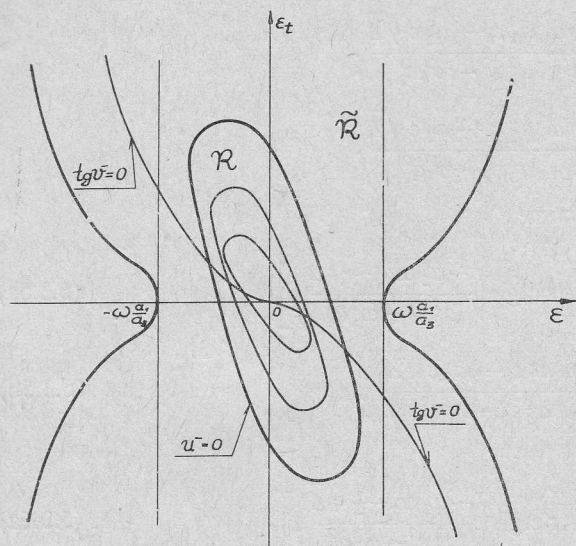
czna na rys. 6. Punkty należące do obszaru zawartego między gałęziami krzywej granicznej spełniają warunek $\Delta > 0$. Drugi warunek $a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2 \neq 0$ wyklucza punkty dwóch prostych

• równaniach $\varepsilon = \pm \omega \frac{a_1}{a_3}$, wzdłuż których $\Delta \geq 0$.

Dziedziną $\tilde{\mathcal{R}}$ rozwiązań jest więc zbiór punktów na płaszczyźnie zawarty między gałęziami krzywej granicznej wraz z punktami krzywej granicznej i bez punktów prostych

$$\varepsilon = \pm \omega \frac{a_1}{a_3},$$

Z uwagi na to, że funkcje układu (5.3.5) i (5.3.6) są nieokreślone wzdłuż prostych



Rys. 6. Analiza funkcji $u^- = K^-(\varepsilon, \varepsilon_t)$, $v^- = L^-(\varepsilon, \varepsilon_t)$ na płaszczyźnie $(\varepsilon, \varepsilon_t)$ w przykładzie 3. Rodzina elips przedstawia krzywe stałej wartości funkcji $u^- = K^-(\varepsilon, \varepsilon_t)$. Zbiór $\mathcal{R}$ jest dziedziną odwzorowania Π^{-1} w przypadku gdy $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$

$\varepsilon = \pm \omega \frac{a_1}{a_3}$, aby nie komplikować rozważań, poszukamy warunków, przy których odwzorowanie odwrotne Π^{-1} jest określone w pasie płaszczyzny $-\omega \frac{a_1}{a_3} < \varepsilon < \omega \frac{a_1}{a_3}$. Weźmy układ

(5.3.5). Łatwo sprawdzić, że funkcja (5.3.5a) jest oznaczona ujemnie w powyższym pasie płaszczyzny, co eliminuje układ (5.3.5) z rozważań. Zbadamy więc układ (5.3.6). Postępując według schematu nakreślonego w poprzednich przykładach wyznaczamy najpierw krzywe stałej wartości funkcji (5.3.6a) i następnie badamy wartości funkcji (5.3.6b) wzdłuż tych krzywych. Przekształćmy wyrażenie (5.3.6a) do postaci

$$\operatorname{ctgh}(a_2 + a_3 u^-) - \left(\frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2} \right) = 0. \quad (5.3.9)$$

W równaniu (5.3.9) traktujemy u^- jako parametr i dla każdego $u^- \in \langle 0, +\infty \rangle$ szukamy w pasie płaszczyzny $-\omega \frac{a_1}{a_3} < \varepsilon < \omega \frac{a_1}{a_3}$ punktów, których współrzędne spełniają to równanie.

Równanie (5.3.9) można zastąpić równaniem

$$\left[\operatorname{ctgh}(a_2 + a_3 u^-) - \left(\frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2} \right) \right] \left[\operatorname{ctgh}(a_2 + a_3 u^-) - \left(\frac{-a_3 \varepsilon \varepsilon_t + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta}}{a_3^2 \varepsilon^2 - \omega^2 a_1^2} \right) \right] = 0, \quad (5.3.10)$$

w którym drugi człon po lewej stronie jest funkcją oznaczoną dodatnio.

Po wykonaniu przekształceń otrzymujemy

$$\omega^2 \varepsilon^2 + (\varepsilon_t + a_3 \varepsilon \operatorname{ctgh}(a_2 + a_3 u^-))^2 = \omega^2 a_1^2 (\operatorname{ctgh}^2(a_2 + a_3 u^-) - 1). \quad (5.3.11)$$

Równanie (5.3.11) przedstawia rodzinę elips. Środkiem symetrii każdej elipsy jest po-

część układu współrzędnych. Jeżeli spełniona jest nierówność $\operatorname{ctgh} a_2 < \omega \frac{a_1}{a_3} \sqrt{a_3^2 + \omega^2}$,

to wszystkie elipsy rodziny (5.3.11) leżą w pasie płaszczyzny $-\omega \frac{a_1}{a_3} < \varepsilon < \omega \frac{a_1}{a_3}$. Wówczas każdej wartości $u^- \in \langle 0, +\infty \rangle$ odpowiada elipsa (5.3.11), wzdłuż której funkcja (5.3.6a) jest wielkością stałą o wartości równej u^- .

Przez obrót układu współrzędnych o kąt α określony wzorem

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_3 \operatorname{ctgh}(a_2 + a_3 u^-)}{(\omega^2 - 1) + a_3^2 \operatorname{ctgh}^2(a_2 + a_3 u^-)}$$

równanie elipsy sprowadza się do kierunków głównych i ma postać

$$\begin{aligned} & \{\omega^2 \cos^2 \alpha + [\sin \alpha + a_3 \cos \alpha \operatorname{ctgh}(a_2 + a_3 u^-)]^2\} \varepsilon'^2 + \\ & + \{\omega^2 \sin^2 \alpha + [\cos \alpha - a_3 \sin \alpha \operatorname{ctgh}(a_2 + a_3 u^-)]^2\} \varepsilon_t'^2 = \\ & = \omega^2 a_1^2 (\operatorname{ctgh}^2(a_2 + a_3 u^-) - 1). \end{aligned}$$

Widać stąd, że osie elips maleją do zera gdy $u^- \rightarrow +\infty$. Wewnątrz elipsy określonej parametrem $u^- = 0$ leżą wszystkie pozostałe elipsy rodziny. Rodzinę (5.3.11) ilustruje kilka elips na rys. 6.

Zbadamy teraz wartości funkcji (5.3.6b) wzdłuż każdej elipsy rodziny. Badania te przeprowadzimy graficznie na płaszczyźnie $(\varepsilon, \varepsilon_t)$ wyznaczając obszary stałego znaku funkcji $\operatorname{tg} v^-$. Z położenia elips względem obszarów stałego znaku będziemy wnioskować o wartościach funkcji (5.3.6b) wzdłuż elips.

Zauważmy, że $\operatorname{tg} v^-$ zmienia znak przy przejściu przez oś ε_t , ponieważ jest funkcją nieokreśloną wzdłuż osi ε_t i przy $\varepsilon_t > 0$, gdy $\varepsilon \rightarrow 0$ ma granicę lewostronną $+\infty$, a prawostronną $-\infty$, natomiast przy $\varepsilon_t < 0$ odpowiednio $-\infty$ i $+\infty$. Z wzoru (5.3.6b) widać, że jeżeli współrzędne punktu należącego do zbioru $\tilde{\mathcal{R}}$ spełniają równanie

$$\omega^2 a_1^2 \varepsilon_t = -\frac{1}{2} a_3 \varepsilon \sqrt{A}, \quad (5.3.12)$$

to w tym punkcie funkcja $\operatorname{tg} v^-$ jest równa zero. Podnosząc obie strony równania (5.3.12) do potęgi drugiej otrzymujemy

$$(\omega^2 a_1^2 - a_3^2 \varepsilon^2) [a_1^2 \varepsilon_t^2 - a_3^2 \varepsilon^2 (a_1^2 + \varepsilon^2)] = 0. \quad (5.3.13)$$

Z punktów, których współrzędne spełniają równanie (5.3.13) wybieramy punkty położone w pasie płaszczyzny $-\omega \frac{a_1}{a_3} < \varepsilon < \omega \frac{a_1}{a_3}$, w których spełnione jest równanie (5.3.12). Są to punkty krzywej

$$\varepsilon_t = -\frac{a_3}{a_1} \varepsilon \sqrt{a_1^2 + \varepsilon^2} \quad (5.3.14)$$

położonej w II i IV ćwiartce płaszczyzny.

Krzywa (5.3.14) jest wykreślona na rys. 6 i jak widać wraz z osią ε_t dzielą zaznaczony na rysunku pas płaszczyzny na cztery podzbiory stałego znaku funkcji $\operatorname{tg} v^-$. Każda elipsa

przecina wszystkie podzbiory stałego znaku więc wzdłuż krzywej stałej wartości funkcji (5.3.6a) funkcja (5.3.6b) przyjmuje wartości z przedziału $\langle -2\pi, 0 \rangle$, czyli obrazem zbioru punktów elips przez odwzorowanie, które reprezentuje układ (5.3.6) jest zbiór $\mathcal{W}_0$.

Stąd wynika, że w rozważanym przypadku układ (5.3.6) reprezentuje odwzorowanie Π^{-1} .

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że spełnione są wszystkie warunki podpunktu A punktu 4, czyli na podstawie danej funkcji (5.3.1) można skonstruować rodzinę drgań okresowo-zanikających.

Podstawiając funkcję f i jej pierwszą i drugą pochodną względem czasu do (4.8) otrzymujemy

$$\varepsilon_{tt} = 2a_3 \operatorname{ctgh}(a_2 + a_3 u) \left[a_1 a_3 \frac{\cosh(a_2 + a_3 u)}{\sinh^2(a_2 + a_3 u)} \cos v + \omega a_1 \frac{1}{\sinh(a_2 + a_3 u)} \sin v \right] +$$

$$-(\omega^2 + a_3^2) \frac{a_1}{\sinh(a_2 + a_3 u)} \cos v. \quad (5.3.15)$$

Z kolei wstawiając (5.3.6) do (5.3.15) dostajemy równanie różniczkowe

$$\varepsilon_{tt} + (\omega^2 + a_3^2) \varepsilon + 2a_3 \left(\frac{a_3 \varepsilon \varepsilon_t + \omega \sqrt{(a_1^2 + \varepsilon^2)(\omega^2 a_1^2 - a_3^2 \varepsilon^2) + a_1^2 \varepsilon_t^2}}{\omega^2 a_1^2 - a_3^2 \varepsilon^2} \right) \varepsilon_t = 0,$$

którego rozwiązania są drganiami okresowo-zanikającymi o postaci

$$\varepsilon = \frac{a_1}{\sinh(a_2 + a_3(t + K(\xi, \eta)))} \cos(\omega t + L(\xi, \eta)), \quad (5.3.16)$$

gdzie

$$K(\xi, \eta) = \frac{1}{a_3} \left[-a_2 + \operatorname{Arctgh} \left(\frac{-a_3 \xi \eta - \omega \sqrt{(a_1^2 + \xi^2)(\omega^2 a_1^2 - a_3^2 \xi^2 + a_1^2 \eta^2)}}{-\omega^2 a_1^2 + a_3^2 \xi^2} \right) \right],$$

$$L(\xi, \eta) = \operatorname{arc tg} \left(\frac{.1}{\omega \xi} \frac{\omega^2 a_1^2 \eta + a_3 \omega \xi \sqrt{(a_1^2 + \xi^2)(\omega^2 a_1^2 - a_3^2 \xi^2) + a_1^2 \eta^2}}{-\omega^2 a_1^2 + a_3^2 \xi^2} \right).$$

Jak wiemy z rozważań w punkcie 4 skonstruowane drgania spełniają postulat zanikania drgań, a miara zanikania, to znaczy dekrement logarytmiczny jest funkcją wartości amplitudy drgań.

Na zakończenie tego przykładu podamy wzór na dekrement logarytmiczny charakteryzujący tłumienie układu, którego drgania aproksymowano funkcją (5.3.16).

Podstawiając funkcję (5.3.1) i funkcję względem niej odwrotną do wzoru (4.15) otrzymujemy

$$\delta = \ln \left(\frac{\frac{\varepsilon_{\mathcal{A}}}{a_1}}{\sinh \left(a_3 T_0 + \operatorname{Ar} \sinh \frac{a_1}{\varepsilon_{\mathcal{A}}} \right)} \right).$$

Po wykonaniu prostych przekształceń można wzór na dekrement logarytmiczny sprowadzić do postaci

$$\delta = \ln \left(\cosh a_3 T_0 + \frac{\varepsilon_{sd}}{a_1} \sqrt{\left(\frac{a_1}{\varepsilon_{sd}} \right)^2 + 1} \sinh a_3 T_0 \right). \quad (5.3.17)$$

Praca wpłynęła do Redakcji w marcu 1973 r.

Literatura

- [1] S. Ziemia, *Tarcie wewnętrzne przy uwzględnieniu mikroodkształceń plastycznych*. Zag. Drg. Niel. 1, 1960.
- [2] Z. Osiński, *A nonlinear rheologic model*. Proceedings of Vibration Problems, No. 2 (7), Vol. 2, 1961.
- [3] Z. Osiński, *Badanie tarcia wewnętrznego metali przy bardzo małych częstościach za pomocą swobodnych drgań skrętnych*. Zag. Drg. Niel., 3, 1962.
- [4] J. Szczygiel, *Badanie doświadczalne tłumienia materiałowego przy swobodnych drganiach wzdłużnych*. Prace IMP, z. 56, 1971.
- [5] Ja. G. Panowko, *Wnutriennije trienije pri kolebanijach uprugich sistem*. Gosudarstwennoje Izdatielstwo Fiziko-Matematiczeskoj Litieratury, Moskwa 1960.

Метод конструкции уравнения движения системы с одной степенью свободы из семейства экспериментальных кривых

Резюме

Работа касается проблемы описания сил внутреннего трения в конструкционных материалах при однородных состояниях напряжений.

Считая типичную систему для исследования внутреннего трения методом свободных колебаний системой с одной степенью свободы, представлены теоретические основы идеи аппроксимации экспериментальных кривых двупараметрическим семейством интегральных кривых и вывода дифференциального уравнения этого семейства.

В пункте 3 определяется особая форма такого семейства, т. наз. семейство периодически затухающих колебаний.

Для этого типа колебаний введено понятие амплитуды колебаний, проанализированы связи между очередными амплитудами колебаний и точно определена общеприменяемая мера демпфирования, т. наз. логарифмический декемент.

В пункте 4 представлен эффективный метод конструкции семейства периодически затухающих колебаний на основе графика его производящей функции. Метод иллюстрируется тремя примерами в пункте 5.

A Method of Derivation of the Equation of Motion of a System Having one Degree of Freedom from the Experimental Family of Curves

Summary

The problem of the description of internal friction forces in structural materials under single-axial stress conditions is dealt with.

Theoretical principles both of the concept of approximation of the experimental curves through

a two-parameter integral family of curves and of the derivation of a differential equation for this family are presented.

A special case of such a family, namely the family of periodically decaying vibrations is defined in Section 3.

A concept of the vibration amplitude is introduced for such vibrations and the relations between the subsequent amplitudes are analyzed. The commonly used damping measure, the so called logarithmic decrement, is precisely determined. An effective method of constructing a family of periodically decaying vibrations from a diagram of its generating function is described in Section 4. The method is illustrated with three examples in Section 5.