

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

66

WARSZAWA—POZNAN 1975

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW
MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

KOMITET REDAKCYJNY - EXECUTIVE EDITORS
KAZIMIERZ STELLER - REDAKTOR - EDITOR
JERZY KOŁODKO · JÓZEF ŚMIGIELSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA - EDITORIAL OFFICE
Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1975

Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 370+90 egz.	Oddano do składania 7 VIII 1974 r.
Ark. wyd. 14,75. Ark. druk. 11,375+1 wkl.	Podpisano do druku 17 II 1975 r.
Papier druk. sat. kl. V, 70 g	Druk ukończono w lutym 1975 r.
Nr zam. 577/43 F-17/1183.	Cena zł 45,-

DRUKARNIA UNIWERSYTETU IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

EUSTACHY S. BURKA

Gdańsk

O pewnym modelu komory przepływowej z mechanicznym wzbudnikiem drgań*

W pracy przedstawiono równanie opisujące ruch płaskiego wzbudnika sprężystego, umieszczonego wzdłuż strugi cieczy nieściśliwej, w komorze przepływowej o prostokątnym przekroju poprzecznym i zamocowanego wspornikowo jednym swoim końcem.

Przyjęte założenia odpowiadają przypadkowi, gdy stosunek wysokości komory do długości wzbudnika jest mały. Zanalizowano stabilność rozwiązania zerowego (stanu równowagi), badając przybliżoną postać uzyskanego równania nieliniowego. Badania stabilności dotyczą iloczynowej funkcji opisującej drgania. Czynniki zależne od położenia, zwany funkcją kształtu, przyjmuje się za znany. Uzyskano kryterium stabilności oraz omówiono wpływ lepkości cieczy na przedstawiony wynik.

Wyprowadzono wzór na grubość zastępczą warstwy cieczy stowarzyszonej ze wzbudnikiem w czasie jego drgań.

Praca ma charakter wstępny w analizie przedstawionego przepływu przy uwzględnieniu kavitacji.

Wykaz najważniejszych oznaczeń

a	— połowa wysokości komory,	$f(x, t) = f$	— funkcja opisująca odchylenie wzbudnika od położenia równowagi,
$A_i, A_i^{(0)}$	— współczynniki w równaniu drgań końca wzbudnika, $i = 1, \dots, 8$,	I_i, J_i, K_i, L	— całki zależne od funkcji kształtu φ ,
$B_j, B_j^{(0)}$	$j = 0, \dots, 3$, zależne od funkcji kształtu	l	— długość wzbudnika,
b	— szerokość komory,	$Oxyz, Oxy$	— układy współrzędnych przestrzenne,
b'	— szerokość wzbudnika,	$O\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}'$	— układ współrzędnych przestrzeni fazowej,
c	— prędkość przepływu,	$p(x, y, t) = p$	— ciśnienie w cieczy,
c_g	— prędkość krytyczna dla drgań samowzbudnych,	$p_i(x, t) = p_i$	— ciśnienie w obszarze D_i , $i = 1, 2, \dots$
d	— grubość wzbudnika,	$\Delta p = p_1 - p_2$	— różnica ciśnień,
d_i	— grubość warstwy zastępczej cieczy,	$p_\infty(t) = p_\infty$	— ciśnienie daleko przed (i za) wzbudnikiem,
d/dt	— pochodna względem zmiennej t ,	$s_i(x, t) = a + \varepsilon_i f(x, t)$	— grubość strumienia w obszarze D_i , $i = 1, 2, \dots$,
dE/dl	— gęstość liniowa sił działających na wzbudnik,	sgn	— funkcja „signum” (znak),
D, D_i	— obszary na płaszczyźnie, w której odbywa się przepływ, $i = 0, 1, 2, 3$,	t	— czas,
E	— moduł Younga płaskownika (wzbudnika),	$t_0 = l/c$	

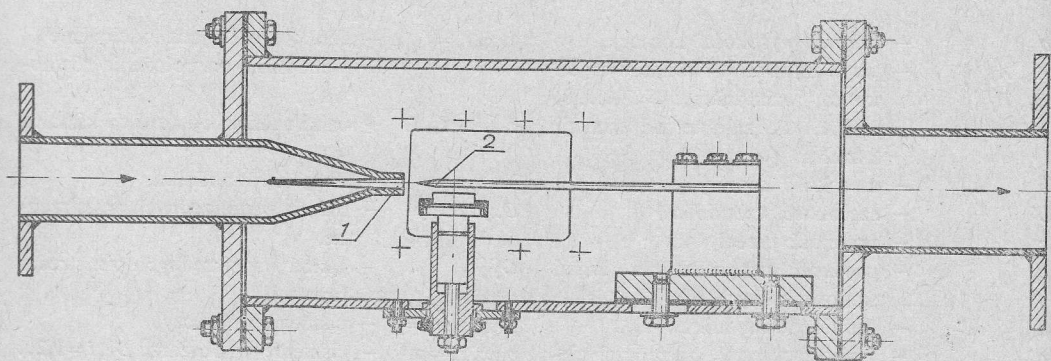
* Praca wykonana w ramach planu resortowego PAN-19, grupa tematyczna 8.

- $\tilde{t}$ — czas „znormalizowany”,
 $\vec{v} = (v_x, v_y)$ — pole prędkości,
 $v_i = (x, t) = v_i$ — prędkość w obszarze D_i , $i=1, 2, \dots$,
 α — współczynnik określony w rozdziale 6,
 $\gamma(t) = \gamma = f(l)/a$ — funkcja opisująca ruch swobodnego końca wzbudnika,
 $\tilde{\gamma}_{T(t)}(\tilde{t}) = \gamma(t)$ — cyrkulacja jednostkowa wokół wzbudnika,
 $\langle -\delta, \delta \rangle$ — przedział wartości funkcji γ (w rozdz. 7),
 $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_t = \partial/\partial t$ — pochodne cząstkowe względem x i t ,
 $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 1$,
 $\lambda_i(t)$, $\bar{\mu}_i(t)$, $\mu(x, y)$ — funkcje określone w rozdz. 4,
 ρ_s , ρ_l — gęstość wzbudnika i cieczy,
 $\sigma_l(x, t) = \sigma_l = 4s_l/a$
 $\varphi(\xi) = f(\xi \cdot l, t)/f(l, t)$ — funkcja kształtu dla postaci iloczynowej drgań,
 $\bar{\varphi}(\xi) = \int_0^\xi \varphi(\xi') d\xi'$

1. Wprowadzenie

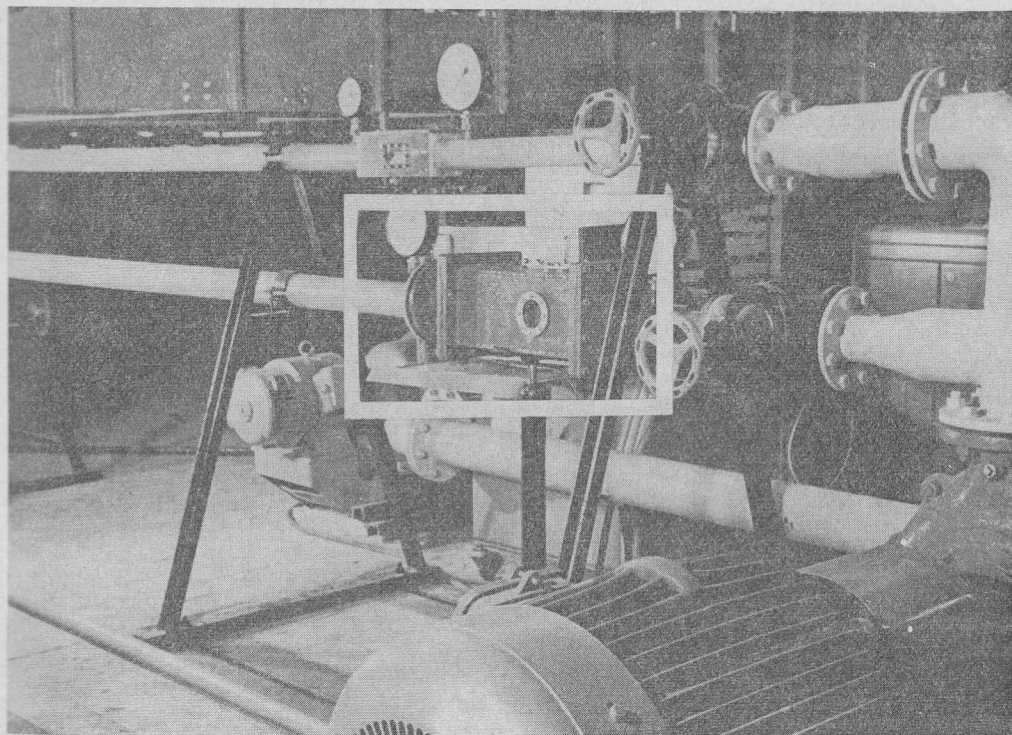
Zmiana charakteru ruchu wywołana zjawiskiem kawitacji powoduje zmianę rozkładu ciśnień w całym obszarze przepływu, a co za tym idzie, wpływa na samo zjawisko kawitacji [1]. Badanie efektów wzajemnego oddziaływania jest jednym z głównych celów dociekań badaczy zajmujących się zjawiskiem kawitacji.

Z dotychczasowych badań wiadomo, że wpływ kawitacji na charakter przepływu jest znikomy w początkowym jej stadium. Szczególnie sprzyjające warunki dla tworzenia się kawitacji powstają w obszarze działania drgań hydrodynamiczno-akustycznych. Kawitację obserwuje się wtedy w formie pęcherzyków nie tworzących zwartej kolonii, lecz rozłożonych mniej lub bardziej regularnie w całej objętości medium, gdzie przebiegi hydromechaniczne wykazują dostateczną intensywność.



Rys. 1. Schemat przepływowej komory kawitacyjnej z mechanicznym wzbudnikiem drgań

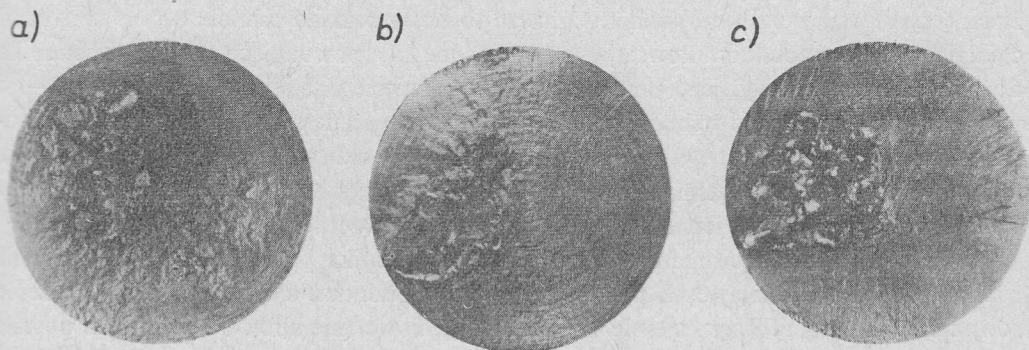
Tym niemniej w opisanych wyżej warunkach można wywołać silny proces erozji kawitacyjnej [2]. Odpowiednim modelem dla badań takiego zjawiska jest komora kawitacyjna z mechanicznym wzbudnikiem drgań (rys. 1 i 2). W oparciu o badania [2, 3, 4] można stwierdzić, że urządzenie takie, służące zarówno do badań zjawiska kawitacji jak i erozji kawitacyjnej w obszarze ultradźwięków, stwarza warunki badań pozwalające uzyskać obraz bardzo



Rys. 2. Stanowisko badawcze z komorą kawitacyjną w laboratorium Zakładu Dynamiki Cieczy IMP PAN w Gdańsku. (Fot. T. Link)

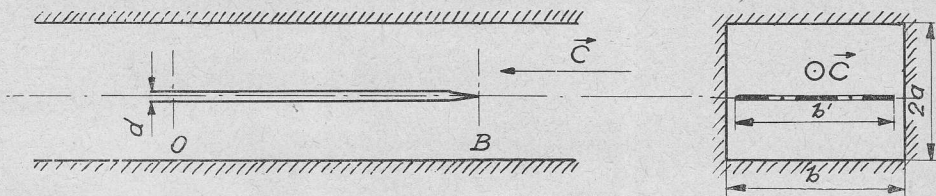
zbliżony do warunków występujących w stosowanych urządzeniach technicznych (rys. 3). Zasada działania przedstawionego urządzenia polega na tym, że ciecz wypływająca z dyszy 1 (rys. 1) trafia na płaski wzbudnik sprężysty 2 zamocowany wspornikowo, umieszczony w obszarze przepływu. Powstające siły oddziaływania wzbudnika z cieczą wywołują jego drgania rezonansowe.

Przedstawiony wyżej model eksperymentalny stał się inspiracją do zbadania przebiegów ciśnień w teoretycznym, uproszczonym modelu komory przepływowej. Jego schemat



Rys. 3. Próbkę z ołowiu po badaniach w komorze kawitacyjnej z mechanicznym wzbudnikiem drgań, po 10 minutach ekspozycji. Średnica próbek $D=30$ mm, prędkość wypływu wody z dyszy $v_d=30$ m/s, częstotliwość drgań wzbudnika $f=130$ Hz, amplituda: a) $A=2$ mm, b) $A=3$ mm, c) $A=4$ mm

przedstawiono na rys. 4. Jest to nieskończona rura o jednakowym na całej długości prostokątnym przekroju poprzecznym, o szerokości b i wysokości $2a$. W poziomej płaszczyźnie symetrii umieszczony jest płaski wzbudnik sprężysty o szerokości $b' \approx b$, grubości d i długości l , jednym końcem zamocowany wspornikowo (punkt O). Parametry E_s i ρ_s oznaczają odpowiednio moduł Younga i gęstość materiału, z którego wykonano wzbudnik. Na prawo



Rys. 4. Schemat uproszczony komory przepływowej z mechanicznym wzbudnikiem drgań

od punktu O (por. rys. 4) wzbudnik może wykonywać jedynie wahania poprzeczne około położenia OB , które jest położeniem równowagi tego płaskownika. Przez rurę przepływa ciecz doskonała o gęstości ρ_l tak, aby wzbudnik był ustawiony „pod prąd”. Pomija się zatem siły lepkości i ponadto pominiemy siły grawitacyjne. Prędkość cieczy daleko przed wzbudnikiem oznaczmy literą c .

Opracowanie ma na celu wskazanie sposobu obliczania drgań wzbudnika w tym uproszczonym modelu i wywołanych tymi drganiami pulsacji ciśnień, przy założeniu, że występująca kawitacja nie ma wpływu na przepływ. Zagadnienie to potraktowano dwuwymiarowo (zakładając jednorodność w kierunku szerokości rury). Ponadto zakłada się, że wysokość rury $2a$ jest znacznie mniejsza od długości wzbudnika l . Pozwoliło to na dokonanie pewnych uproszczeń przy wyznaczaniu pola prędkości i rozkładu ciśnień. Przy ich wyznaczaniu niezbędne jest wprowadzenie warunku dotyczącego cyrkulacji Γ pola prędkości wokół wzbudnika. Przyjmując, że wynosi ona stale zero, otrzymano kryterium niestabilności drgań określonego typu postaci iloczynowej (por. rozdz. 4). Przy tym okaże się, że są one wtedy nieograniczone. Przypadkowe odchylenie się wzbudnika od położenia równowagi prowadzi zatem do zbliżenia się (końcem swobodnym) do ściany górnej (ew. dolnej) rury prowadzącej ciecz. Zamknięcie się jednej części strumienia, np. nad wzbudnikiem, oznacza zmianę cyrkulacji wokół wzbudnika. Oznacza to nowy rozkład ciśnień, a tym samym sił działających na wzbudnik. Powstają wtedy m. in. siły powodujące powrót wzbudnika do położenia równowagi, jego przekroczenie i zamknięcie drugiej części strumienia — w przyjętym przypadku pod wzbudnikiem. Powstaje analogiczna sytuacja jak wyżej i wzbudnik zaczyna wykonywać powtarzające się okresowo drgania poprzeczne (por. rozdz. 7). Powyższy opis drgań wyjaśnia, dlaczego w pracy rozpatrzono ogólnie przypadek, gdy wspomniana cyrkulacja Γ jest stała i niekoniecznie równa zero.

Obliczenie rozkładu ciśnień po obu stronach wzbudnika pozwala dalej na obliczenie różnicy ciśnień Δp działających po obu stronach wzbudnika, a tym samym na ułożenie równania jego drgań. Uzyskuje się równanie nieliniowe (nieliniowość wynika z postaci zależności Δp od funkcji opisującej drgania) i bada się je metodą uproszczoną. Ograniczymy się do badania takich drgań, gdy kształt odchylonego wzbudnika nie zmienia się w czasie drgań (por. (4.5)) oraz żądamy, aby szukana funkcja spełniała wynikające z równania

ruchu równanie całkowite opisujące bilans mocy tych drgań. Uzyskane równanie (nadal nieliniowe) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu dla funkcji opisującej ruch końca wzbudnika przy założeniu, że kształt odchylenia drgającego wzbudnika (funkcja φ , por. (4.5)) jest znany. Przedstawione zależności podano w rozdziale 4. Następne rozdziały pracy poświęcono opisowi metody analizy przyjętego równania. Jest to analiza przybliżona, opierająca się na badaniu współczynników rozwinięcia składnika nieliniowego względem potęg szukanej funkcji (opisującej ruch końca wzbudnika, por. (4.8)). Ograniczono się do rozpatrywania co najwyżej trzecich potęg tego rozwinięcia. Formalną część obliczeń współczynników zamieszczono w Dodatku. Uproszczone równanie przedstawiono w rozdziale 5 (wzór (5.5)).

Analiza tego równania pozwoliła m. in. uzyskać warunek konieczny niestabilności położenia równowagi, dany wzorem (6.9) oraz wzór na równoważną grubość wzbudnika (5.8), pod warunkiem, że kształt odchylenia się wzbudnika jest znany. Należy zaznaczyć, że wprawdzie genezą badanego modelu jest komora kawitacyjna, to jednak zjawiska kawitacji nie uwzględniono. Tym niemniej można stwierdzić, że tego rodzaju wyniki mają duże znaczenie teoretyczne, bowiem pozwalają na opisanie obszarów obniżonego ciśnienia, w których kawitacja może wystąpić. Przewidywanie to może dotyczyć jedynie przypadków kawitacji hydrodynamicznej w jej stadium początkowym, tzn. wtedy, gdy kawitacja nie ma istotnego wpływu na hydromechanikę przepływu. Należy zaznaczyć, że opisany model wymaga rozwinięcia poprzez uwzględnienie lepkości i opisanie towarzyszących przebiegów akustycznych i że podjęcie prób w tym kierunku może znacznie zwiększyć dokładność przewidywań teoretycznych.

2. Wyznaczenie pola prędkości cieczy przy zadanym ruchu wzbudnika

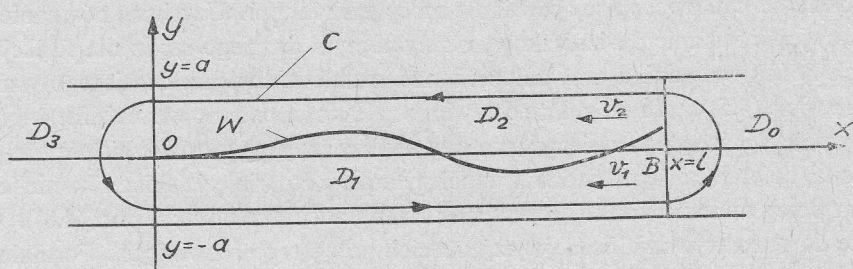
Model wyjściowy jest przestrzenny. Jego przekrój przedstawiono na rys. 4. Celem opisanego badanego przepływu wprowadzimy układ współrzędnych $Oxyz$ tak zorientowany, aby były spełnione następujące warunki:

- początek O układu współrzędnych leży na prostej zamocowania wzbudnika w środku jego szerokości,
- oś Ox jest równoległa do ścian rury (komory) i przeciwnie skierowana do prędkości cieczy,
- oś Oy jest prostopadła do płaszczyzny wzbudnika w położeniu równowagi.

Zwrot osi Oz można wybrać dowolnie. Ze względu na to, że pomijamy siły lepkości, można przyjąć, że nie występuje niejednorodność w kierunku tej osi.

Założenie to pozwala na traktowanie zagadnienia dwuwymiarowo, tj. w płaszczyźnie Oxy (por. rys. 5). Dalsze uproszczenia będziemy opisywać pomijając istnienie trzeciego wymiaru (w kierunku osi Oz).

Przyjmujemy, że wszystkie punkty wzbudnika opisują ruch wzdłuż prostej prostopadłej do położenia, jakie zajmuje w stanie równowagi, tj. do odcinka OB leżącego na osi Ox , a koniec swobodny B ma odciętą $l > 0$ (równą długości wzbudnika). W przyjętym układzie, współrzędne wektora prędkości cieczy opisuje para (v_x, v_y) , przy tym daleko przed wzbudnikiem $v_{x\infty} = -c$, $v_{y\infty} = 0$.



Rys. 5

Punkty wzbudnika można indeksować odciętymi x , wzdłuż których się poruszają, $x \in \langle 0, l \rangle$. Ruch wzbudnika jest opisany funkcją $f(x, t)$, która oznacza rzędną punktu $x \in \langle 0, l \rangle$ w chwili t (t – dowolna liczba rzeczywista). Należy przyjąć, że $|f(x, t)| \leq a$, gdzie $2a$ oznacza wysokość przekroju poprzecznego komory. Przyjmiemy, że w każdej chwili t ciecz całkowicie wypełnia dwuspójny obszar

$$D = \{(x, y) : |y| \leq a\} \setminus W,$$

gdzie

$$W = \{(x, y) : x \in \langle 0, l \rangle, y = f(x, t)\}.$$

Oznacza to, że nie uwzględnia się kawitacji, oraz, że pomija się objętość zajęta przez wzbudnik (choć parametr l oznaczający grubość wzbudnika odgrywa zasadniczą rolę w równaniu drgań, por. rozdz. 4).

Podzielmy obszar D na cztery części (rys. 5):

$$D_0 = \{(x, y) \in D : |y| \leq a, x > l\},$$

$$D_1 = \{(x, y) \in D : -a \leq y < f(x, t), 0 \leq x \leq l\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \in D : f(x, t) < y \leq a, 0 \leq x \leq l\},$$

$$D_3 = \{(x, y) \in D : |y| \leq a, x < 0\}.$$

Interesować nas będzie pole prędkości $\vec{v} = (v_x, v_y)$ w obszarach D_1 i D_2 (po obu stronach wzbudnika). Ustalimy obecnie zasady jakimi będziemy się posługiwać przy wyznaczaniu tego pola. Przede wszystkim przyjmiemy, że wysokość komory $2a$ spełnia warunek

$$a \ll l. \quad (2.1)$$

Pozwala on uzyskać wniosek, że składowe wektora prędkości spełniają warunek

$$|v_y| \ll |v_x|.$$

Następnie pominiemy w ogóle składową v_y (przynajmniej w D_1 i D_2). Ponadto przyjmiemy, że w obszarach D_1 i D_2 składowa w kierunku osi x nie zależy od rzędnej, tj. od odległości od wzbudnika. Pozwala to wprowadzić oznaczenie

$$v_1(x, t) = v_x(x, y, t) \quad \text{dla} \quad (x, y) \in D_1,$$

$$v_2(x, t) = v_x(x, y, t) \quad \text{dla} \quad (x, y) \in D_2.$$

Nie będziemy zajmowali się opisem przepływu w obszarach przejściowych w pobliżu granicy z obszarami D_3 i D_0 .

Nieściśliwość cieczy pozwala przyjąć, że prędkości v_1 i v_2 spełniają następujące równanie ciągłości:

$$\partial_x [v_i(x, t) s_i(x, t)] = -\partial_t s_i(x, t) \quad (2.2)$$

dla $i=1, 2$, gdzie $s_i(x, t)$ oznacza grubość strumienia cieczy w obszarze D_i w miejscu x w chwili t , tzn.

$$s_i(x, t) = a + \varepsilon_i f(x, t) \quad (2.3)$$

dla $x \in \langle 0, l \rangle$, $i=1, 2$, gdzie

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{dla } i=1 \\ -1 & \text{dla } i=2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Zakładając, że funkcja $f(x, t)$ opisująca drgania wzbudnika jest znana, rozwiązania równań (2.2) przyjmują postać

$$v_i(x, t) = \left[- \int_0^x \partial_t s_i(x', t) dx' + a v_i(0, t) \right] / s_i(x, t). \quad (2.5)$$

Ustalimy warunki brzegowe, jakie powinny spełniać prędkości v_1 i v_2 w punktach $x=0$ i $x=l$, które pozwoliłyby wyznaczyć $v_1(0, t)$ i $v_2(0, t)$. Z warunku nieściśliwości cieczy wynika następujący warunek:

$$a(v_1(0, t) + v_2(0, t)) = -2ac. \quad (2.6)$$

Za pomocą (2.5) można wykazać, że warunek ten pociąga następującą tożsamość:

$$s_1(x, t) v_1(x, t) + s_2(x, t) v_2(x, t) = -2ac \quad (2.7)$$

dla $x \in \langle 0, l \rangle$.

Przystąpimy następnie do sformułowania drugiego warunku. Będzie on w pewnym sensie opisywać cyrkulację pola prędkości wokół wzbudnika W . Przyjęty warunek ma postać

$$\int_0^l [v_1(x, t) - v_2(x, t)] dx = \Gamma(t) l, \quad (2.8)$$

gdzie $\Gamma(t)$ jest przedziałami stałą funkcją czasu. Parametr $\Gamma = \Gamma(t)$ wymiaru prędkości, nazywać będziemy jednostkową cyrkulacją wokół wzbudnika. Można bowiem sobie wyobrazić (rys. 5), że warunek (2.8) powstał z warunku $\oint_C \vec{v} dl = l\Gamma$ przez pominięcie całek po małych łukach leżących w obszarach D_0 i D_3 (por. (2.1)).

W celu uzyskania z warunku (2.8) równania dla $v_1(0, t)$ i $v_2(0, t)$ podstawimy (2.8) do (2.5). Po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[- \int_0^x \partial_t f(x', t) dx' + a v_1(0, t) \right] / s_1(x, t) dx + \\ - \int_0^l \left[\int_0^x \partial_t f(x', t) dx' + a v_2(0, t) \right] / s_2(x, t) dx = \Gamma, \end{aligned} \quad (2.9)$$

tn.

$$\lambda_1(t) v_1(0, t) - \lambda_2(t) v_2(0, t) = \bar{\mu}_1(t) + \bar{\mu}_2(t) + \Gamma, \quad (2.10)$$

gdzie

$$\lambda_i(t) = \frac{a}{l} \int_0^l \frac{dx}{s_i(x, t)}, \quad (2.11)$$

$$\bar{\mu}(t) = \frac{a}{l} \int_0^l \frac{\mu(x, t) dx}{s_i(x, t)} \quad (2.12)$$

dla $i=1, 2$, przy tym s_i są dane wzorami (2.3) oraz

$$\mu(x, t) = \frac{1}{a} \int_0^x \partial_t f(x', t) dx' \quad (2.13)$$

dla $x \in \langle 0, l \rangle$. Rozwiązując (2.6) i (2.10) jako układ równań dla $v_i(0)$, $i=1, 2$ otrzymujemy

$$v_1(0, t) = [-2c\lambda_2(t) + (\bar{\mu}_1(t) + \bar{\mu}_2(t) + \Gamma)] / (\lambda_1(t) + \lambda_2(t)), \quad (2.14')$$

$$v_2(0, t) = [-2c\lambda_1(t) - (\bar{\mu}_1(t) + \bar{\mu}_2(t) + \Gamma)] / (\lambda_1(t) + \lambda_2(t)). \quad (2.14'')$$

Podstawiając uzyskany wzór do (2.5) i stosując oznaczenia (2.3) oraz (2.11) - (2.13) otrzymujemy następującą postać rozwiązania układu równań (2.5), spełniającą warunki (2.6) i (2.8) (argumenty występujących funkcji pominięto):

$$v_1 = \frac{-2c\lambda_2 + [\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 + \Gamma - \mu(\lambda_1 + \lambda_2)]}{(\lambda_1 + \lambda_2) \sigma_1}, \quad (2.15')$$

$$v_2 = \frac{-2c\lambda_1 - [\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 + \Gamma - \mu(\lambda_1 + \lambda_2)]}{(\lambda_1 + \lambda_2) \sigma_2}, \quad (2.15'')$$

gdzie dodatkowo oznaczono

$$\sigma_i(x, t) = s_i(x, t)/a \equiv 1 + \varepsilon_i a^{-1} f(x, t) \quad (2.16)$$

dla $x \in \langle 0, l \rangle$, $i=1, 2$.

Reasumując możemy stwierdzić, że poczynione założenia sprowadzają zagadnienie do problemu dwuwymiarowego. Korzystając z warunku (2.1) poczyniono dalsze uproszczenia:

$$\begin{aligned} v_y(x, y, t) &= 0 & \text{dla } (x, y) \in D_1 \cup D_2, \\ \partial_y v_x(x, y, t) &= 0 & \text{dla } (x, y) \in D_i, \quad i=1, 2. \end{aligned}$$

Równanie ciągłości posiada wtedy proste rozwiązanie (2.5). Wprowadzenie naturalnych warunków (2.6) i (2.8) pozwala wyznaczyć stałe całkowania $v_1(0, t)$ i $v_2(0, t)$ oraz wyrazić w konsekwencji rozwiązanie w postaci (2.15), o ile znany jest ruch wzbudnika (tj. funkcja $f(x, t)$) oraz cyrkulacja jednostkowa wokół wzbudnika.

3. Wyznaczenie rozkładu ciśnień działających na wzbudnik

Wskutek pominięcia sił lepkości można przyjąć, że ciśnienie p spełnia równanie

$$\text{grad } p = -\rho_l \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (3.1)$$

które dla naszego modelu przyjmuje postać

$$\partial_x [p_i(x, t) + \frac{1}{2}\rho_l v_i^2(x, t)] = -\rho_l \partial_t v_i(x, t), \quad (3.2)$$

gdzie

$$p_i(x, t) \equiv p(x, y, t) \quad \text{o ile} \quad (x, y) \in D_i$$

dla $i=1, 2$. Ciśnienie p_i w każdym z obszarów D_i można zatem wyliczyć z następujących wzorów:

$$p_i(x, t) = p_i(0, t) + \frac{1}{2}\rho_l v_i^2(0, t) - \frac{1}{2}\rho_l v_i^2(x, t) = \int_0^x \partial_t v_i(x', t) dx'. \quad (3.3)$$

Podobne do przeprowadzonego w uzasadnieniu równości (2.8) rozumowanie skłania do przyjęcia następującego warunku:

$$p_i(0, t) + \frac{1}{2}\rho_l v_i^2(0, t) = p_\infty(t) + \frac{1}{2}\rho_l c^2 \quad (3.4)$$

dla $i=1, 2$, gdzie symbolem $p_\infty(t)$ oznaczono wartość ciśnienia daleko przed (lub daleko za) wzbudnikiem. Siły działające na jednostkę powierzchni wzbudnika wynoszą zatem:

$$\begin{aligned} \Delta p(x, t) &\equiv p_1(x, t) - p_2(x, t) = \\ &= \frac{1}{2}\rho_l (v_2^2(x, t) - v_1^2(x, t)) + \rho_l \int_0^x \partial_t (v_2(x', t) - v_1(x', t)) dx' \end{aligned} \quad (3.5)$$

dla $x \in \langle 0, l \rangle$.

Ze względu na jednorodność w kierunku osi Oz można przyjąć, że

$$b \equiv b' = 1 \quad (3.6)$$

i wtedy Δp oznacza zarazem gęstość liniową sił działających na jednostkę długości wzbudnika, tj.

$$\frac{dF}{dl}(x, t) = \Delta p(x, t). \quad (3.7)$$

Reasumując możemy stwierdzić, że siły działające na wzbudnik o szerokości jednostkowej, zależą od ruchu wzbudnika określonego funkcją $f(x, t)$ poprzez zależności (3.7), (3.5) i (2.15) oraz, że nie zależą one od ciśnienia $p_\infty(t)$, przy jakim odbywa się przepływ (przy założeniu, że prędkość fal akustycznych jest nieskończona).

4. Równanie drgań wzbudnika. Postać uproszczona

Przyjmując nadal, że wzbudnik ma szerokość jednostkową, tzn. $b' = 1$, możemy zgodnie z teorią sprężystości opisać drgania wzbudnika równaniem [5]

$$\frac{1}{12}d^3 E \partial_x^4 f(x, t) + d\rho_s \partial_t^2 f(x, t) = \frac{dF}{dl}(x, t). \quad (4.1)$$

Gęstość liniowa dF/dl sił działających na wzbudnik jest określona wzorem (3.7). Siły te zależą w sposób nieliniowy od szukanej funkcji f , na którą nakłada się warunki brzegowe zależne od sposobu zamocowania, dla $x=0$ mamy zamocowanie wspornikowe, tzn.

$$f(0, t) = \partial_x f(x, t) = 0, \quad (4.2)$$

zaś dla $x=l$ przyjmujemy, że siły ścinające i moment zginający są równe zero, tzn.

$$\partial_x^2 f(l, t) = \partial_x^3 f(l, t) = 0. \quad (4.3)$$

W takim przypadku pomnożenie obustronne równania (4.1) przez $\partial_t f$ i scałkowanie w przedziale $\langle 0, l \rangle$, po zastosowaniu całkowania przez części w pierwszym składniku, prowadzi do następującego równania:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{24} E d^3 \int_0^l (\partial_x^2 f(x, t))^2 dx + \frac{1}{2} d \rho_s \int_0^l (\partial_t f(x, t))^2 dx \right] = \int_0^l \Delta p(x, t) \cdot \partial_t f(x, t) dx, \quad (4.4)$$

które jest bilansem mocy dla drgającego wzbudnika płaskiego (z zamocowaniem wspornikowym w jednym końcu i tzw. swobodnym drugim końcem). Pierwszy składnik po lewej stronie równania reprezentuje energię potencjalną odkształceń sprężystych, a drugi kinetyczną. Prawa strona równania (4.4) oznacza moc sił oddziaływania z cieczą.

Badanie rozwiązań równania (4.1) jest utrudnione zważywszy na formę zależności Δp od f . Klasa rozwiązań równania (4.4) jest znacznie szersza od klasy rozwiązań równania (4.1). Przewidując np. rozwiązanie równania (4.4) w postaci iloczynowej, tzn.

$$f(x, t) = a \varphi(x/l) \cdot \gamma(t), \quad (4.5)$$

dla dużej klasy funkcji φ istnieje rozwiązanie γ , bowiem (4.4) jest wtedy równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu drugiego z dostatecznie prostymi współczynnikami. Z drugiej strony żadne z rozwiązań równania (4.1) nie musi być postaci (4.5). Ale jak wykazują badania, rozwiązanie równania (4.1) może się niewiele różnić od postaci (4.5), zwłaszcza gdy prędkość rozchodzenia się fal poprzecznych w wzbudniku płaskim znacznie przewyższa prędkość przepływu. Bowiem warunek (4.5) oznacza rezygnację z falowego charakteru drgań wzbudnika.

Powyższe argumenty skłaniają do rozpatrywania tych rozwiązań równania (4.4), które są postaci (4.5). Występującą tam funkcję φ opisującą kształt odchylania się wzbudnika płaskiego od położenia równowagi nazywać będziemy funkcją kształtu. Rozpatrywanie jedynie równania (4.4) nie może prowadzić do wyznaczenia funkcji kształtu. Powstaje zatem problem wyboru funkcji kształtu φ tak, aby rozwiązanie równania (4.4) postaci (4.5) najlepiej aproksymowało rozwiązanie równania (4.1). Problem ten nie został rozwiązany.

W dalszej części pracy ograniczono się do badania charakteru rozwiązań γ równania (4.4) przy założeniu, że funkcja kształtu jest znana. Wymienimy jedynie ogólne własności funkcji kształtu

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(1) = \varphi'''(1) = 0, \quad (4.6)$$

$$|\varphi(\xi)| \leq \varphi(1) = 1 \quad \text{dla} \quad \xi \in (0, 1). \quad (4.7)$$

Przy spełnieniu tych warunków iloczyn $a \cdot \gamma(t)$ opisuje ruch swobodnego końca wzbudnika płaskiego

$$f(l, t) = a \cdot \gamma(t). \quad (4.8)$$

Przy poczynionych założeniach równanie (4.4) przyjmuje postać

$$\frac{Ed^3}{12l^4} \int_0^1 [\varphi''(\xi)]^2 d\xi \cdot \gamma(t) + d\rho_s \int_0^1 [\varphi(\xi)]^2 d\xi \gamma''(t) = \frac{1}{a} \int_0^1 \Delta p(\xi l, t) \varphi(\xi) d\xi, \quad (4.9)$$

które przy zadanej funkcji kształtu jest wspomnianym równaniem dla funkcji γ . Dla dalszych rozważań celowe jest podanie wzorów pozwalających explicite wyrazić zależność prawej strony równania (4.9) od funkcji γ i przyjętej funkcji kształtu φ . Formuły zawarte w rozdziale 2 zapisują się teraz następująco:

$$\sigma_i(x, t) = 1 + \varepsilon_i \varphi(\xi) \gamma(t), \quad (4.10)$$

$$\lambda_i(t) = \int_0^1 (1 + \varepsilon_i \varphi(\xi) \gamma(t)^{-1}) d\xi, \quad (4.11)$$

$$\mu(x, t) = l\gamma' \int_0^\xi \varphi(\xi') d\xi' \equiv l\gamma' \bar{\varphi}(\xi), \quad (4.12)$$

$$\bar{\mu}_i(t) = l\gamma' \int_0^1 \bar{\varphi}(\xi) [1 + \varepsilon_i \varphi(\xi) \gamma(t)]^{-1} d\xi, \quad (4.13)$$

gdzie $\xi = x/l$ dla $x \in \langle 0, l \rangle$. Siły działające na wzbudnik wyrażają się sumą i różnicą prędkości v_1 i v_2

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho_l [(v_2 - v_1)(v_2 + v_1) + 2l \int_0^\xi \partial_t [v_2 - v_1] d\xi'], \quad (4.14)$$

gdzie

$$v_2 + v_1 = \frac{-2c(\lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2) - [\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 + \Gamma - \mu(\lambda_1 + \lambda_2)](\sigma_1 - \sigma_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2) \sigma_1 \sigma_2}, \quad (4.15)$$

$$v_2 - v_1 = \frac{-2c(\lambda_1 \sigma_1 - \lambda_2 \sigma_2) - 2[\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2 + \Gamma - \mu(\lambda_1 + \lambda_2)]}{(\lambda_1 + \lambda_2) \sigma_1 \sigma_2}. \quad (4.16)$$

5. Przybliżona postać równania mocy

Zgodnie z założeniami zawartymi w rozdziale 4 przyjmujemy, że funkcja kształtu φ jest znana. Wówczas równanie mocy (4.9) jest równaniem drugiego rzędu dla funkcji $\gamma(t)$. Funkcja $\gamma(t) \equiv 0$ jest rozwiązaniem tego równania dla $\Gamma = 0$, bowiem $\Delta p(x, t)$ jest wtedy

równe zero ($v_2 \equiv v_1$). Jednakże interesuje nas stabilność tego rozwiązania. W celu jej zbadania przyjmujemy, że

$$|\gamma| \ll 1. \quad (5.1)$$

W załączonym na końcu pracy Dodatku wyprowadzono przybliżoną zależność prawej strony równania (4.9) od γ z dokładnością do trzecich potęg γ (wzór (D.14)). W celu przedstawienia uzyskanego w ten sposób przybliżenia równania (4.9) możemy napisać

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}(\xi) &= \int_0^\xi \varphi(\xi') d\xi' & \text{dla } \xi \in \langle 0, 1 \rangle \\ I_i &= \int_0^1 \varphi^i(\xi) d\xi & \text{dla } i=0, 1, \dots \\ J_i &= \int_0^1 \bar{\varphi}(\xi) \varphi^i(\xi) d\xi & \text{dla } i=0, 1, \dots \\ L &= \int_0^1 [\varphi''(\xi)]^2 d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Niech ponadto, $\tilde{\gamma}$ oznacza zależność γ od czasu „znormalizowanego” $\tilde{t}$ określonego wzorem

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_0}, \quad (5.3)$$

gdzie

$$t_0 = \frac{l}{c}. \quad (5.4)$$

Oznacza to np. że $\tilde{\gamma}'(\tilde{t}) = \gamma'(t) t_0$. Dla funkcji $\tilde{\gamma}$ otrzymuje się wówczas następujące równanie przybliżone (dla $|\tilde{\gamma}| \ll 1$):

$$\begin{aligned} \frac{Ed^3}{12l^4} L\tilde{\gamma} + \frac{c^2 d \rho_s}{l^2} I_2 \tilde{\gamma}'' &= \\ &= 2\rho_i \frac{c^2}{a_d} (A_1 \tilde{\gamma} + A_2 \tilde{\gamma}'' + A_3 \tilde{\gamma}^3 + A_4 (\tilde{\gamma}')^2 + A_5 (\tilde{\gamma}')^2 \tilde{\gamma}^3 + \\ &+ A_6 \tilde{\gamma}'' \tilde{\gamma}^2 + A_7 \tilde{\gamma}' + A_8 \tilde{\gamma}' \tilde{\gamma}^2 + B_0 + B_1 \tilde{\gamma}' \gamma + B_2 \tilde{\gamma}^2 + B_3 \tilde{\gamma}' \tilde{\gamma}^3]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Współczynniki L , I_2 , A_i oraz B_j zależą jedynie od funkcji kształtu i cyrkulacji prądu wokół wzбудnika. Na początek przyjmijmy $\Gamma=0$. Odpowiadające temu wartości A_i oraz B_j oznaczmy przez $A_i^{(0)}$ i $B_j^{(0)}$. Wzory dla tych wartości wyprowadzono w Dodatku (por. (D.18) - (D.25)), a mianowicie:

$$B_j^{(0)} = 0 \quad \text{dla } j=0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_1^{(0)} &= \int_0^1 (\varphi - I_1)^2 d\xi > 0 \\
 A_2 &= A_2^{(0)} = - \int_0^1 (\bar{\varphi} - J_0)^2 d\xi < 0, \\
 A_3^{(0)} &= 2 \int_0^1 \varphi^2 (\varphi - I_1)^2 d\xi > 0, \\
 A_4 &= A_4^{(0)} = A_6 = A_6^{(0)} = - \int_0^1 \varphi^2 (\bar{\varphi} - J_0)^2 d\xi < 0, \\
 A_5 &= A_5^{(0)} = -2 \int_0^1 [\varphi^2 (\bar{\varphi} - J_0) - (J_2 - I_2 J_0)]^2 d\xi < 0 \\
 A_7 &= A_7^{(0)} = A_8 = A_8^{(0)} = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Uwzględniając rozpatrywanie przypadku $\Gamma \neq 0$ otrzymamy następujące wzory (por. (D.26) - (D.30) oraz (D.17)):

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 - A_1^{(0)} &= \left(\frac{\Gamma}{2c} \right) I_2 > 0, \\
 A_3 - A_3^{(0)} &= 2 \left(\frac{\Gamma}{2c} \right)^2 \int_0^1 (\varphi^2 - I_2)^2 d\xi > 0, \\
 B_0 &= \frac{\Gamma}{2c}, \\
 B_1 &= 0 \\
 B_2 &= 3B_0 \int_0^1 \varphi^2 (\varphi - I_1) d\xi, \\
 B_3 &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Uzyskane zależności sugerują pominięcie masy wzbudnika wobec masy pulsującego w takt jego drgań strumienia cieczy. Wynika to z porównania współczynników przy $\tilde{\gamma}''$ po prawej i lewej stronie równania (5.5).

Równoważna grubość cieczy wynosi zatem

$$d_l = \frac{l^2}{a} \frac{\rho_l}{\rho_s} \frac{-A}{I_2} \quad (5.8)$$

i jest znacznie większa od grubości wzbudnika. Dlatego drugi człon równania (5.5) będziemy w dalszych rozważaniach pomijać.

6. Stabilność równowagi

Interesuje nas zachowanie się wzbudnika w pobliżu jego położenia równowagi $|\tilde{\gamma}| \ll 1$. W przypadku gdy ciecz posiada własności zbliżone do doskonałej, można przyjąć, że do momentu ewentualnego rozwinięcia się drgań samowzbudnych cyrkulacja prądu wokół

wzbudnika jest taka, jak przy symetrycznym opływie, tzn. $\Gamma=0$. Uzyskane równanie przybliżone ma wtedy postać (por. (5.5))

$$\tilde{\gamma}''[-A_2 - A_4 \tilde{\gamma}^2] = \tilde{\gamma}(A_1^{(0)} - \alpha L + A_4(\tilde{\gamma}')^2) + \tilde{\gamma}^3(A_3^{(0)} + A_5(\tilde{\gamma}')^2), \quad (6.1)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{E}{24\rho l} \frac{d^3 a}{l^4} \frac{1}{c^2}. \quad (6.2)$$

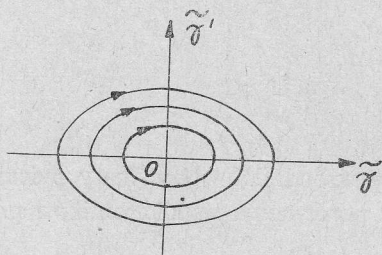
Znając jedynie znaki współczynników $A_1^{(0)} - \alpha L$, $A_3^{(0)}$, A_4 , A_5 i znaki A_2 , A_4 (por. (5.6)) możemy dokładnie opisać zachowanie się rozwiązania $\gamma(t)$ w pobliżu położenia równowagi. W celu wykazania tego, wprowadzimy przestrzeń fazową $O\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}'$ dla naszego układu. Stan równowagi reprezentowany jest przez punkt (O, O) . Rozpatrzmy trzy przypadki.

1. $A_1^{(0)} - \alpha L < 0. \quad (6.3)$

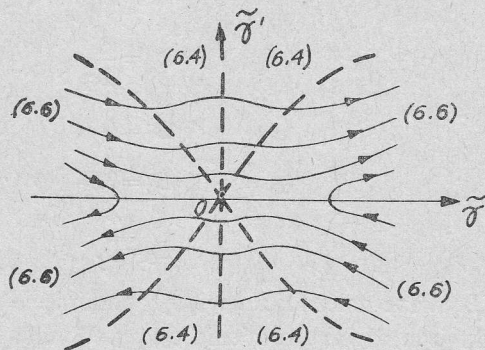
Istnieje wówczas takie otoczenie punktu (O, O) w płaszczyźnie fazowej $O\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}'$, dla którego

$$\operatorname{sgn} \tilde{\gamma}'' = -\operatorname{sgn} \tilde{\gamma} \quad (6.4)$$

mimo, że współczynnik $A_3^{(0)}$ jest dodatni. Oznacza to, że w otoczeniu tym krzywe fazowe przecinają osie $O\tilde{\gamma}$ i $O\tilde{\gamma}'$ w sposób taki, jak przedstawiono na rys. 6., tj. wypukłościami od punktu O . Z bliższej analizy wynika, że punkt (O, O) jest wtedy punktem stabilnym, w tym sensie, że każde rozwiązanie zaczynające się w tym otoczeniu jest ograniczone.



Rys. 6



Rys. 7

Przykłady krzywych fazowych odpowiadających rozwiązaniom w tym przypadku przedstawiono na rys. [6].

2. $A_1^{(0)} - \alpha L = 0. \quad (6.5)$

W powyższym przypadku każde otoczenie punktu (O, O) składa się z dwu części, w których spełniona jest zależność (6.4) oraz zależność

$$\operatorname{sgn} \tilde{\gamma}'' = \operatorname{sgn} \tilde{\gamma}. \quad (6.6)$$

Granicę pomiędzy tymi częściami wyznaczają linie utworzone z punktów $(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}')$ spełniającą

cych równanie

$$(\tilde{\gamma}')^2 \tilde{\gamma} [A_4 + A_5 \tilde{\gamma}^2] + \tilde{\gamma}^3 A_3^{(0)} = 0,$$

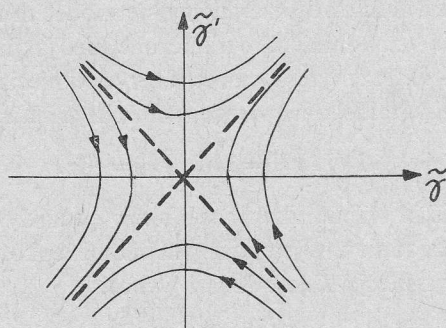
zn. prosta $\tilde{\gamma}=0$ oraz krzywe o równaniu (por. (5.6))

$$\left| \frac{\tilde{\gamma}'}{\tilde{\gamma}} \right| = \left[-\frac{A_3^{(0)}}{A_4 + A_5 \tilde{\gamma}^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.7)$$

Przykład takich krzywych, dla których $\tilde{\gamma}''=0$, przedstawiono na rys. 7 (linie przerywane). Na rysunku tym naniesiono również przykłady krzywych fazowych, odpowiadających pewnym rozwiązaniom. Oznaczają one, że punkt (O, O) nie jest w tym przypadku punktem stabilnym, gdyż każde rozwiązanie przechodzące w pobliżu tego punktu rośnie nieograniczenie gdy $t \rightarrow \infty$.

$$3. \quad A_1^{(0)} - \alpha L > 0. \quad (6.8)$$

Wówczas w pewnym otoczeniu punktu (O, O) dla dowolnych wartości γ spełniona jest równość (6.6), a zarazem jest to punkt niestabilny. Typowe przebiegi krzywych fazowych odpowiadających rozwiązaniom dla tego przypadku przedstawiono na rys. 8. Interesujące jest to, że ograniczenie się do trzecich potęg rozwinięcia Δp względem γ nie pozwala na wskazanie przypadków, dla których rozwiązania niestabilne byłyby ograniczone. Wynika to z tego, że współczynnik $A_3^{(0)}$ jest dodatni. Również w przypadku $\Gamma \neq 0$ siły „powracające” proporcjonalne do $\tilde{\gamma}^3$ nie występują (składowa B_0 może wtedy odgrywać rolę sił „powracających”).



Rys. 8

W wyniku przedstawionych dociekań otrzymujemy kryterium stabilności. Jeśli drgania wzbudnika są postaci iloczynowej (4.5) i funkcja kształtu φ nie spełnia warunku

$$\alpha \equiv \frac{Ed^3 a}{24\rho_l l^4} \frac{1}{c^2} \leq \frac{A_1^{(0)}}{L}, \quad (6.9)$$

to takie drgania nie mogą się rozwinąć podczas przepływu z prędkością c .

Oznacza to, że warunkiem koniecznym dla wystąpienia drgań z daną funkcją kształtu

φ jest warunek przekroczenia przez prędkość c pewnej prędkości granicznej

$$c \geq c_g \equiv \sqrt{\frac{E}{24\rho_l}} \sqrt{\frac{d^3 a}{l^4}} \sqrt{\frac{L}{A_1^{(0)}}}, \quad (6.10)$$

przy czym zależność od funkcji kształtu jest zawarta w ostatnim czynniku (por. (5.2) i (5.6)).

7. Drgania niestabilne

Jak przedstawiono w rozdziale poprzednim, można zbadać organiczoność rozwiązań równania (6.1). Otóż w przypadku, gdy spełniony jest warunek (6.10) (lub też warunek (6.5) względnie (6.8)), równanie (6.1) nie posiada rozwiązań ograniczonych. Przyjmując, że drgania wzbudnika są opisane równaniem (6.1) nie można otrzymać drgań okresowych (ograniczonych). Przyczyn niedokładności podanego opisu drgań należy upatrywać w założeniu, że cyrkulacja wokół wzbudnika jest stała. Dla cieczy lepkich założenie to nie jest spełnione, co wyjaśnić można obrazowo w ten sposób, że przez przekrój większy, przy tej samej różnicy ciśnień, ciecz przepływa z większą prędkością. W takiej sytuacji cyrkulacja Γ jest funkcją zależną od amplitudy drgań wzbudnika i współczynnika lepkości. Okazuje się, że efekty lepkości można wymodelować odpowiednią zmiennością cyrkulacji Γ przedziałami stałą w czasie. Niech np. odchylenie wzbudnika jest tak duże, że zamknięty jest dostęp do jednego z obszarów D_1 lub D_2 . Cyrkulacja wtedy gwałtownie się zmienia. W modelu doświadczalnym (rys. 1) może się tak zdarzyć, gdy swobodny koniec wzbudnika wyjdzie poza bezpośrednie działanie strumienia wypływającego z dyszy.

W celu uzyskania opisu ilościowego zajmiemy się modelem najprostszym, ze zmienną cyrkulacją, gdy wychylenia wzbudnika są ograniczone, np. jakimiś oporami znajdującymi się w punktach (l, δ) i $(l, -\delta)$. Przy tym w momencie $\tilde{t}_1$ zetknięcia się wzbudnika z oporem, pole prędkości zmienia się na takie, dla którego spełnione zostają warunki:

$$\vartheta_1(l, \tilde{t}_1^+) = \vartheta_2(l, \tilde{t}_1^+) = -c. \quad (7.1)$$

Odpowiadać to może wyjściu wzbudnika poza obszar oddziaływania strumienia z dyszy i ustaleniu się przepływu zgodnie z występującymi siłami lepkości.

Następnie dla $\tilde{t} > \tilde{t}_1$ cyrkulacja Γ jest stała i wynosi

$$\Gamma(\tilde{t}) = \Gamma(\tilde{t}_1^+), \quad (7.2)$$

gdzie, wobec (7.1) (por. również równanie (2.7)),

$$\Gamma(\tilde{t}_1^+) = \int_0^1 \frac{-c(1-\delta)d\xi}{1+\delta\varphi(\xi)} + \int_0^1 \frac{c(1-\delta)d\xi}{1-\delta\varphi(\xi)} \cong 2c\delta(I_1-1) + 2c\delta^3(I_3-I_2) \quad (7.3)$$

(dla $1 > \delta > 0$, cyrkulacja $\Gamma(\tilde{t}_1^+)$ jest liczbą ujemną, jeśli spełniony jest warunek (4.7)). Podstawiając tę wartość do wzorów (5.5) - (5.7) i przyjmując $\tilde{\gamma}'(\tilde{t}_1^+) = 0$, otrzymujemy w tym momencie wartość przyspieszenia

$$\tilde{\gamma}''(\tilde{t}_1^+) = (-A_2 - A_4\delta^2) - [(A_1^{(0)} - \alpha L)\delta + A_3^{(0)}\delta^3 + B_0 + B_2\delta^2 + B_0^2 I_2 \delta + B_0^2 A_3^{(0)}\delta^3],$$

gdzie

$$B_0 = \frac{\Gamma}{2c} = \delta(I_1 + 1) + \delta^3(I_3 - I_2). \quad (7.4)$$

Przyjmując dalej, że $0 < \delta \ll 1$, stwierdzimy, że o znaku przyspieszenia w chwili $\tilde{t}_1^+$ decyduje suma

$$A_1^{(0)} - \alpha L + I_1 - 1,$$

od której wymaga się, aby była ujemna, gdyż tylko wtedy może nastąpić ruch w kierunku położenia równowagi.

Ponieważ L jest dodatnie, więc wymaganie to będzie spełnione w przypadku, gdy spełnimy warunek:

$$|\varphi(\xi) - I_1| \leq \varphi(1) - I_1 \equiv 1 - I_1, \quad (7.5)$$

gdzie $I_1 > 0$. Rzeczywiście więc

$$\begin{aligned} A_1^{(0)} + I_1 - 1 &\equiv I_2 - I_1^2 + I_1 - 1 \\ &\leq \int_0^1 (\varphi - I_1)^2 d\xi + I_1 - 1 \\ &\leq \int_0^1 |\varphi - I_1| d\xi + I_1 - 1 \\ &\leq (1 - I_1) + (I_1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Konsekwentnie ograniczając się do $0 < \delta \ll 1$ możemy przyjąć, że funkcja $\tilde{\gamma}$ spełnia równanie (por. (5.5) - (5.7) i (7.5))

$$\tilde{\gamma}'' = (-A_2)^{-1} [(A_1^{(0)} - \alpha L + A_4 \tilde{\gamma}'^2) \tilde{\gamma} + \delta(I_1 - 1)].$$

Tak więc w zastosowanym przybliżeniu $\tilde{\gamma}'' = 0$, na linii określonej równaniem, otrzymujemy

$$\tilde{\gamma} = \frac{-\delta(I_1 - 1)}{A_1^{(0)} - \alpha L + A_4 \tilde{\gamma}'^2}.$$

Przykład takiej linii przedstawiono na rysunkach 9 i 10 dla przypadków

$$A_1^{(0)} - \alpha L > 0 \quad \text{ i } \quad A_1^{(0)} - \alpha L = 0.$$

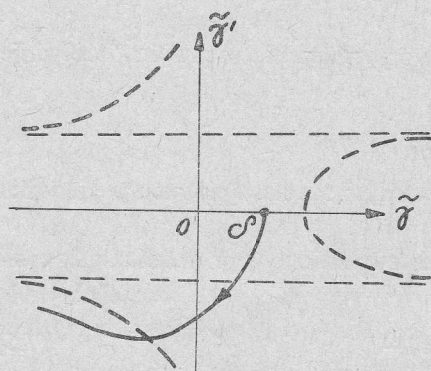
Na rysunkach 9 i 10 przedstawiono również przykłady krzywych fazowych startujących w punkcie $(\delta, 0)$.

Na mocy równania (7.5)

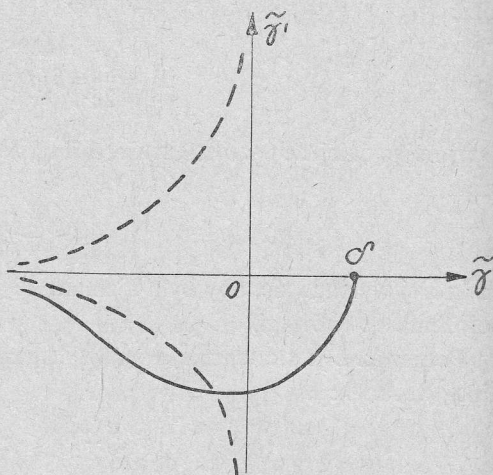
$$\gamma_0 \equiv \frac{\delta(1 - I_1)}{A_1^{(0)} - \alpha L} > \delta.$$

W obydwu przypadkach rozwiązanie jest nieograniczone względem $\tilde{\gamma}$, zaś w skończonym czasie $\tilde{\gamma}$ osiągnie wartość $-\delta < 0$.

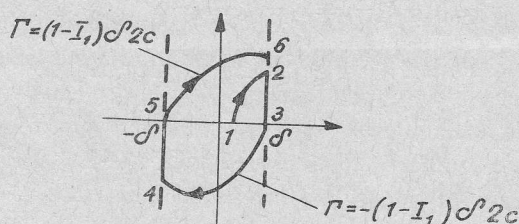
Przyjmując, że sytuacja się powtarza, otrzymujemy następujący obraz krzywej fazowej



Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11

opisującej drgania okresowe wzбудnika ograniczone punktami $\gamma \in \langle -\delta, \delta \rangle$ (rys. 11). W powyższym opisie posługujemy się krzywymi fazowymi, dla prostszej analizy uzyskanego równania oraz dlatego, aby zasugerować metodę obliczania okresu drgań przedstawionych w tym rozdziale.

Opiera się ona na ogólnym wzorze:

$$T = 2 \int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}'(\gamma)} \equiv 2 \int_{-\delta}^{\delta} \frac{d\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}'_+(\gamma)},$$

gdzie krzywe $\tilde{\gamma}'_-$ i $\tilde{\gamma}'_+$ opisują łuki 3-4 i 5-6 jak na rys. 8. Krzywe $\tilde{\gamma}'_-$ i γ'_+ można wyznaczyć np. metodą łamanych Eulera, o ile znane są współczynniki występujące w równaniu. Współczynniki te zależą od funkcji kształtu i od parametru δ , a zatem można je obliczyć z dowolną dokładnością.

8. Uwagi końcowe

Podając powyższą metodę wyznaczania drgań wzбудnika w komorze przepływowej, pragnęliśmy uzyskać przede wszystkim jakościowy opis. Można więc zupełnie dobrze opisać ruch wzбудnika w pobliżu położenia równowagi w dwu przypadkach: gdy cyrkulacja

jednostkowa Γ wokół wzbudnika wynosi zero (rozdz. 5) i gdy zależy ona od kierunku, w którym porusza się wzbudnik (rozdz. 7). Obliczenia przeprowadzono przy założeniu, że drgania wzbudnika są postaci iloczynowej i że znana jest funkcja kształtu odchylenia wzbudnika od położenia równowagi. Spośród wyników ilościowych należy zwrócić uwagę na:

- przybliżone równanie drgań (5.5) - (5.7),
- wzór na grubość zastępczą warstwy cieczy stowarzyszonej z drganiami wzbudnika (5.8),
- kryterium stabilności stanu równowagi dla drgań o danej funkcji kształtu (rozdz. 6).

Spośród innych wniosków najważniejszy wydaje się następujący: Jeśli ciecz wykazywałaby małe siły lepkości, to wahania niestabilne odbywałyby się z maksymalnie dopuszczalną amplitudą (w strumieniu jednorodnym), tj. w granicach wyznaczonych przez ściany komory, ew. przez specjalnie wprowadzone opory ograniczające (por. rozdz. 7).

Przedstawione równania pozwalają na dokładne obliczenie współczynników równania (5.5) i jego rozwiązanie dla przypadku małych drgań (np. metodą krzywych fazowych) oraz, w konsekwencji na wyznaczenie, rozkładu ciśnień w pobliżu wzbudnika. Konieczne jest określenie metody wyznaczania funkcji kształtu, najlepiej aproksymującej rozwiązanie równania (4.1), dokładnie opisującego drgania wzbudnika.

Można wyrazić przypuszczenie, że uwzględnienie wpływu lepkości na cyrkulację Γ pozwoli uzyskać drgania ograniczone, startujące z otoczenia punktu ($\tilde{\gamma}=0$, $\tilde{\gamma}'=0$) bez rezygnacji z jednorodności strumienia cieczy.

DODATEK

Przybliżona postać równania drgań

W wyprowadzeniu równania (5.5) posługiwać się będziemy zależnościami (4.10) - (4.16) i równaniem (4.9), jako równaniem wyjściowym. Ograniczymy się do wyrazów zależnych od trzecich potęg γ . Z równań (4.14) - (4.16) wynika, że $v_2 + v_1$ wystarczy wyznaczyć z dokładnością do γ^3 oraz $v_2 - v_1$ z dokładnością do γ^4 . W tym celu będziemy dokonywać przekształceń według następującego schematu.

Najpierw na podstawie (4.11) i (4.13) wyliczymy

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \int_0^1 \frac{d\xi}{1 - \varphi^2 \gamma^2} \quad (\text{D.1})$$

oraz

$$\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 = 2l\gamma' \int_0^1 \frac{\bar{\varphi} d\xi}{1 - \varphi^2 \gamma^2}. \quad (\text{D.2})$$

Oznaczając

$$\bar{\varphi}(\xi) = \int_0^\xi \varphi(\xi') d\xi', \quad (\text{D.3})$$

$$\bar{\varphi}^i \bar{\varphi}^j(\xi) = \int_0^\xi \bar{\varphi}^i(\xi') \varphi^j(\xi') d\xi', \quad (\text{D.4})$$

$$I_i = \int_0^1 \varphi^i d\xi = \bar{\varphi}^i(1), \quad (\text{D.5})$$

$$J_i = \int_0^1 \bar{\varphi} \varphi^i d\xi = \overline{\varphi \varphi^i(1)}, \quad (\text{D.6})$$

$$K_i = \int_0^1 \bar{\varphi}^2 \varphi^i d\xi = \overline{\varphi^2 \varphi^i(1)}, \quad (\text{D.7})$$

$$\bar{I}_i = \int_0^1 \varphi \bar{\varphi}^i d\xi = [\bar{\varphi} \bar{\varphi}^i]_0^1 - \int_0^1 \bar{\varphi} \varphi^i d\xi = I_1 I_i - J_i, \quad (\text{D.8})$$

$$J_i = \int_0^1 \varphi \bar{\varphi} \bar{\varphi}^i d\xi = [\bar{\varphi} \bar{\varphi} \bar{\varphi}^i]_0^1 - \int_0^1 \bar{\varphi}^2 \varphi^i d\xi = I_1 J_i - K_i \quad (\text{D.9})$$

otrzymujemy dla $\xi \in (0, 1)$, $i, j = 0, 1, \dots$ na podstawie (D.1), (D.2) i (4.10) - (4.13)

$$\lambda_1 + \lambda_2 \cong 2 \int_0^1 (1 + \varphi^2 \gamma^2 + \varphi^4 \gamma^4 + \dots) = 2(1 + \gamma^2 I_2 + \gamma^4 I_4 + \dots),$$

$$\mu(\lambda_1 + \lambda_2) \cong 2l\gamma' \bar{\varphi}(\lambda_1 + \lambda_2) = 2l\gamma'(\bar{\varphi} + \gamma^2 \bar{\varphi} I_2 + \gamma^4 \bar{\varphi} \bar{I}_4 + \dots),$$

$$\lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2 \cong (1 + \gamma \varphi) \int_0^1 (1 - \gamma \varphi + \gamma^2 \varphi^2 - \gamma^3 \varphi^3 + \gamma^4 \varphi^4 + \dots) + (1 - \gamma \varphi) \int_0^1 (1 + \gamma \varphi + \gamma^2 \varphi^2 + \gamma^3 \varphi^3 + \gamma^4 \varphi^4 + \dots) \cong 2 [1 + \gamma^2(I_2 - \varphi I_1) + \gamma^4(I_4 - \varphi I_3) + \dots],$$

$$\lambda_1 \sigma_1 - \lambda_2 \sigma_2 \cong 2 [\gamma(-I_1 + \varphi) + \gamma^3(-I_3 + \varphi I_2) + \dots],$$

$$\mu_1 = \mu_2 \cong 2l\gamma' \int_0^1 \bar{\varphi}(1 - \varphi^2 \gamma^2 + \varphi^4 \gamma^4 + \dots) \cong 2l\gamma'(J_0 + \gamma^2 J_2 + \gamma^4 J_4 + \dots),$$

$$\bar{\mu}_2 + \bar{\mu}_1 - \mu(\lambda_1 + \lambda_2) \cong 2l\gamma' [(J_0 - \bar{\varphi}) + \gamma^2(J_2 - \bar{\varphi} I_2) + \gamma^4(J_4 - \bar{\varphi} I_4) + \dots],$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\gamma \varphi,$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \sigma_1 \sigma_2 \cong 2(1 + \gamma^2 I_2 + \gamma^4 I_4 + \dots)(1 - \varphi^2 \gamma^2) = 2 [1 + \gamma^2(I_2 - \varphi^2) + \gamma^4(I_4 - \varphi^2 I_2) + \dots],$$

$$[(\lambda_1 + \lambda_2) \sigma_1 \sigma_2]^{-1} \cong \frac{1}{2} [1 + \gamma^2(-I_2 + \varphi^2) + \gamma^4(I_2^2 - \varphi^2 I_2 + \varphi^4 - I_4) + \dots].$$

Podstawiając powyższe przybliżone wyrażenia do (4.15) i (4.16) otrzymujemy

$$v_2 + v_1 \cong -2c [1 + \gamma^2(I_2 - \varphi I_1) + \dots] [1 + \gamma^2(-I_2 + \varphi^2) + \dots] +$$

$$\text{Zatem} \quad -2l\gamma' [(J_0 - \bar{\varphi}) + \gamma^2(J_2 - \bar{\varphi} I_2) + \dots] [1 + \gamma^2(-I_2 + \varphi^2) + \dots] \gamma \varphi - \Gamma \gamma \varphi [1 + \gamma^2(-I_2 + \varphi^2) + \dots].$$

$$v_2 + v_1 \cong -2c [1 + \gamma^2(\varphi^2 - \varphi I_1) + \dots] - 2l\gamma' [\gamma(\varphi J_0 - \varphi \bar{\varphi}) + \gamma^3(\varphi J_2 - \varphi J_0 I_2 + \varphi^3 J_0 - \bar{\varphi} \varphi^3 + \dots) + \\ - \Gamma [\gamma \varphi + \gamma^3(\varphi^3 - \varphi I_2) + \dots]. \quad (\text{D.10})$$

Podobnie obliczamy

$$v_2 - v_1 \cong \{-2c [(\varphi - I_1) + \gamma^3(\varphi I_2 - I_3) + \dots] - 2l\gamma' [(J_0 - \bar{\varphi}) + \gamma^2(J_2 - \bar{\varphi} I_2) + \gamma^4(J_4 - \bar{\varphi} I_4) + \dots] - \Gamma\} \cdot \\ \cdot [1 + \gamma^2(\varphi^2 - I_2) + \gamma^4(I_2^2 - \varphi^2 I_2 + \varphi^4 - I_4) + \dots] \cong -2c [\gamma(\varphi - I_1) + \\ + \gamma^3(\varphi^3 - \varphi^2 I_1 + I_1 I_2 - I_3) + \dots] - 2l\gamma' [(J_0 - \bar{\varphi}) + \gamma^2(J_2 - J_0 I_2 + \varphi^2 J_0 - \bar{\varphi} \varphi^2) + \\ + \gamma^4(J_4 - J_2 I_2 - J_0 I_4 + J_0 I_2^2 + \varphi^2 J_2 - \varphi^4 J_0 I_2 + \varphi^4 J_0 - \bar{\varphi} \varphi^4) + \dots] + \\ - \Gamma [1 + \gamma^2(\varphi^2 - I_2) + \gamma^4(\varphi^4 - \varphi^2 I_2 + I_2^2 - I_4) + \dots], \quad (\text{D.11})$$

oraz

$$\partial_i(v_2 - v_1) \cong -2c\gamma' [(\varphi - I_1) + 3\gamma^2(\varphi^3 - \varphi^2 I_1 + I_1 I_2 - I_3) + \dots] - 2l\gamma'' [(J_0 - \bar{\varphi}) + \\ + \gamma^2(J_2 - J_0 I_2 + \varphi^2 J_0 - \bar{\varphi} \varphi^2) + \dots] - 2l\gamma'^2 [2\gamma(J_2 - J_0 I_2 + \varphi^2 J_0 - \bar{\varphi} \varphi^2) + \\ + 4\gamma^3(J_4 - J_2 I_2 - J_0 I_4 + J_0 I_2^2 + \varphi^2 J_2 - \varphi^2 J_0 I_2 + \varphi^4 J_0 - \bar{\varphi} \varphi^4) + \dots] + \\ - \Gamma \gamma' [2\gamma(\varphi^2 - I_2) + 4\gamma^3(\varphi^4 - \varphi^2 I_2 + I_2^2 - I_4) + \dots]. \quad (\text{D.12})$$

Wymnażając (D.10) i (D.11) stronami otrzymujemy z dokładnością do γ^3

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) \simeq & 2c^2 [\gamma(\varphi - I_1) + \gamma^3(2\varphi^3 - 3\varphi^2 I_1 + I_1 I_2 - I_3 + \dots)] + \\ & + 2cl\gamma'[(J_0 - \bar{\varphi}) + \gamma^2(3\varphi^2 J_0 - 2\varphi J_0 I_1 - 3\bar{\varphi}\varphi^2 + 2\bar{\varphi}\varphi I_1 + J_2 + J_0 I_2) + \\ & + 2(l\gamma')^2[\gamma(\varphi J_0^2 - 2\bar{\varphi}\varphi J_0 + \bar{\varphi}^2\varphi) + 2\gamma^3(\varphi J_0^2 - \bar{\varphi}\varphi J_2 - \varphi J_0^2 I_2 + \bar{\varphi}\varphi J_0 I_2 + \\ & + \varphi^3 J_0^2 - 2\bar{\varphi}\varphi^3 J_0 + \bar{\varphi}^2\varphi^3) + c\Gamma[1 + \gamma^2(3\varphi^2 - 2\varphi I_1 - I_2)] + \\ & + l\gamma'\Gamma[2\gamma(\varphi J_0 - \varphi\bar{\varphi}) + 2\gamma^3(2\varphi^3 J_0 - 2\bar{\varphi}\varphi^3 - 2\varphi J_0 I_2 + \bar{\varphi}\varphi I_2 + \varphi J_2)] + \\ & + \frac{\Gamma^2}{2} [\gamma\varphi + 2\gamma^3(\varphi^3 - \varphi I_2)]. \quad (D.13) \end{aligned}$$

Wyrażenie (D.12) pozwoli wyliczyć drugi składnik w równaniu (4.14). Wykonując całkowanie i wykorzystując oznaczenie (D.4), przy pominięciu wyrazów rzędu wyższego niż γ^3 , otrzymujemy

$$\begin{aligned} l \int_0^{\xi} \partial_t(v_2 - v_1) d\xi' = & -2cl\gamma [(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_0 I_1) + 3\gamma^2(\bar{\varphi}^3 - \bar{\varphi}^2 I_1 + \bar{\varphi}^0 I_1 I_2 - \varphi^0 I_3)] + \\ & + 2l^2\gamma''[(\bar{\varphi}^0 J_0 - \bar{\varphi}) + \gamma^2(\bar{\varphi}^0 J_2 - \bar{\varphi}^0 J_0 I_2 + \bar{\varphi}^2 J_0 - \bar{\varphi}\bar{\varphi}^2) - 2(l\gamma')^2[2\gamma(\bar{\varphi}^0 J_2 + \\ & - \bar{\varphi}^0 J_0 I_2 + \bar{\varphi}^2 J_0 - \bar{\varphi}\bar{\varphi}^2) + 4\gamma^3(\bar{\varphi}^0(J_4 - J_2 I_2 - J_0 I_4 + J_0 I_2^2) + \bar{\varphi}^2(J_2 - J_0 I_2) + \\ & + \bar{\varphi}^4 J_0 - \bar{\varphi}\bar{\varphi}^4)] - l\gamma'\Gamma[2\gamma(\bar{\varphi}^2 - \bar{\varphi}^0 I_2) + 4\gamma^3(\bar{\varphi}^4 - \bar{\varphi}^2 I_2 + \bar{\varphi}^0 I_2^2 - \bar{\varphi}^0 I_4)]]. \end{aligned}$$

Podstawiając powyższe wzory przybliżone do (4.14) i wykonując całkowanie w przedziale $\langle 0,1 \rangle$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int_0^1 \Delta p(\xi I, t) \varphi(\xi) d\xi = & 2 \frac{\rho_1 c^2}{a} [A_1 \gamma + A_2 (\gamma'' t_0^2) + A_3 \gamma^3 + A_4 (\gamma' t_0) \gamma + A_5 (\gamma' t_0) \gamma^3 + \\ & + A_6 (\gamma'' t^2) \gamma^2 + A_7 (\gamma' t_0) + A_8 (\gamma' t_0) \gamma^2 + B_0 + B_1 (\gamma' t_0) \gamma + B_2 \gamma^2 + B_3 (\gamma' t_0) \gamma^3], \quad (D.14) \end{aligned}$$

gdzie

$$t_0 = \frac{l}{c} \quad (D.15)$$

oraz

$$\begin{aligned} A_1 = & (I_2 - I_1^2) + \left(\frac{\Gamma}{2c}\right)^2 I_2, \\ A_2 = & -J_0 \bar{I}_0 + \bar{J}_0, \\ A_3 = & (2I_4 - 4I_3 I_1 + 2I_2 I_1^2) + 2 \left(\frac{\Gamma}{2c}\right)^2 (I_4 - I_2^2), \\ A_4 = & (I_2 J_0^2 - 2J_2 J_0 + K_2) - 2(\bar{I}_0 J_2 - \bar{I}_0 J_0 I_2 + \bar{I}_2 J_0 - \bar{J}_0), \\ A_5 = & 2(2I_2 J_0 J_2 - J_2^2 - I_2^2 J_0^2 + I_4 J_0^2 - 2J_4 J_0 + K_4) + \\ & - 4((J_4 - J_2 I_2 - J_0 I_4 + J_0 I_2^2) \bar{I}_0 + \bar{I}_2 J_2 - I_2 J_0 I_2 + \bar{I}_4 J_0 - \bar{J}_4), \\ A_6 = & -(\bar{I}_0 J_2 - \bar{I}_0 I_2 J_0 + \bar{I}_2 J_0 - \bar{J}_2), \\ A_7 = & (J_0 I_1 - J_1) - (\bar{I}_1 - I_1 I_0), \\ A_8 = & 3(I_3 J_0 - I_2 I_1 J_0 + J_2 I_1 - J_3) + 3(I_3 I_0 - I_2 I_1 \bar{I}_0 + \bar{I}_2 I_1 - \bar{I}_3). \end{aligned} \quad (D.16)$$

Ponadto wprowadzono oznaczenia

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \frac{\Gamma}{2c}, \\ B_1 &= 2B_0 [I_2 (J_0 + \bar{I}_0) - (J_2 + \bar{I}_2)], \\ B_2 &= 3B_0 [I_3 - I_1 I_2], \\ B_3 &= 4B_0 [I_4 (J_0 + \bar{I}_0) + I_2 (J_2 + \bar{I}_2) - I_2^2 (J_0 + \bar{I}_0) - (J_4 + \bar{I}_4)]. \end{aligned} \right\} \quad (D.17)$$

Powyższe parametry dla $\Gamma=0$ przyjmują następujące wartości

$$B_i^{(0)} = 0 \quad i=0, 1, 2, 3, \quad (D.18)$$

$$A_1^{(0)} = I_2 - I_1^2 = \int_0^1 (\varphi - I_1)^2 d\xi > 0, \quad (D.19)$$

$$A_2^{(0)} = A_2 = -J_0 (I_1 I_0 - J_0) + I_1 J_0 - K_0 = -(K_0 - J_0^2) = -\int_0^1 (\bar{\varphi} - J_0)^2 d\xi < 0, \quad (D.20)$$

$$A_3^{(0)} = 2 \int_0^1 \varphi^2 (\varphi - I_1)^2 d\xi > 0. \quad (D.21)$$

Posługując się zależnościami (D.8) i (D.9) otrzymujemy

$$\int_0^1 \varphi^2 (\bar{\varphi} - J_0)^2 d\xi = I_2 J_0^2 - 2J_2 J_0 + K_2 = \bar{I}_0 J_2 - \bar{I}_0 J_0 I_2 + \bar{I}_2 J_0 - \bar{J}_2,$$

a więc

$$A_4^{(0)} \equiv A_4 = -\int_0^1 \varphi^2 (\bar{\varphi} - J_0)^2 d\xi < 0. \quad (D.22)$$

Podobnie otrzymujemy

$$\begin{aligned} A_5^{(0)} \equiv A_5 &= 2 [(J_2^2 - 2J_2 I_2 J_0 + J_0^2 I_2^2) - (K_4 - 2J_4 J_0 + J_0^2 I_4)] = \\ &= 2 [(J_2 - J_0 I_2)^2 - \int_0^1 \varphi^4 (\bar{\varphi} - J_0)^2 d\xi] = -2 \int_0^1 [\varphi^2 (\bar{\varphi} - J_0) - (J_2 - I_2 J_0)^2] d\xi < 0, \end{aligned} \quad (D.23)$$

oraz

$$A_6^{(0)} = A_6 = A_4 < 0. \quad (D.24)$$

Parametry A_7 i A_8 przyjmują wartość zero.

Z równań (D.8) i (D.9) otrzymujemy

$$\bar{I}_1 - I_1 \bar{I}_0 = I_1^2 - J_1 - (I_1 - J_0) I_1 = J_0 I_1 - J_1$$

oraz

$$\bar{I}_3 - \bar{I}_2 I_1 + I_1 I_2 I_0 - I_3 I_0 = -J_3 + J_2 I_1 - I_1 I_2 J_0 + I_3 J_0,$$

czyli

$$A_7^{(0)} = A_7 = A_8^{(0)} = A_8 = 0. \quad (D.25)$$

Parametry zależne od Γ możemy przedstawić następująco:

$$A_1 - A_1^{(0)} = B_0^2 I_2 > 0, \quad (D.26)$$

$$A_3 - A_3^{(0)} = 2B_0^2 \int_0^1 (\varphi^2 - I_2)^2 d\xi, \quad (D.27)$$

$$B_0 = \frac{\Gamma}{2c}, \quad (D.17)$$

$$B_1 = 2B_0 [I_2 J_0 + I_2 (I_1 I_0 - J_0) - J_2 - (I_1 I_2 - J_2)] = 0, \quad (D.28)$$

$$B_2 = 3B_0 \int_0^1 \varphi^2 (\varphi - I_1) d\xi, \quad (D.29)$$

$$B_3 = 4B_0 [I_4 I_1 I_0 + I_2 I_1 I_0 - I_2^2 I_1 I_0 - I_1 I_4] = 0. \quad (D.30)$$

Praca wpłynęła do Redakcji w kwietniu 1973 r.

Literatura

- [1] S. Łazarkiewicz, A. T. Troskoleński, *Nowoczesne kierunki w konstrukcji pomp wirowych*, WNT, Warszawa 1967.
- [2] L. B. Kotlarij, W. M. Fridman, *Erozionnyj effiekt pri srywnoj kawitacii i akustycznych kolebanijach w zidkosti*. Izv. AN SSSR, Mieczanika i maszynostrojenije Nr 3, 1964.
- [3] D. A. Gerszgał, W. M. Fridman, *Ultrazwukowaja apparatura*. Goseniergoizdat, 1961.
- [4] K. K. Szalniew, *Dawlenie i erozija w oblasti srywnoj kawitacii krugłogo profila*. Izv. AN SSSR, OTN Nr. 5, 1951.
- [5] V. Koloušek, *Dynamika stavebnich konstrukci*. Praha 1965.
- [6] A. F. Bermant, I. G. Aramowicz, *Kratkij kurs matematycznego analiza*. „Nauka”, Moskwa 1969.

О некоторой модели проточной камеры с механическим возбудителем колебаний

Резюме

В представленной работе анализируются колебания плоского упругого возбудителя, помещенного в проточной кавитационной камере, вдоль протекающей через нее струи, и закрепленного на одном конце. Представлен способ анализирования влияния параметров этого течения на колебания возбудителя, а тем самым и пульсации давлений в кавитационной измерительной камере во время течения.

Принимается, что жидкость идеальная, т.е. не выступают в ней силы вязкости. Кроме того, пренебрегается гравитационными силами. Далее принимается, что толщина возбудителя мала по сравнению с поперечными размерами кавитационной камеры.

Если принять, что возбудитель может колебаться единственно в направлении перпендикулярном к определяемой им плоскости, то его движение определяется отклонением $f(x, t)$ точки, находящейся на расстоянии x от точки закрепления в любой момент t . С целью вывода уравнения колебаний для функции $f(x, t)$ высчитывается сперва приближенное распределение скорости и, на этой основе, распределение давления $p(x, t)$, действующего на возбудитель. Силы, отвечающие этому давлению, входят в уравнение колебаний возбудителя в качестве „побудителя”.

В описании модели сделаны следующие упрощения:

- 1) принимается двухразмерная модель (ее ширина бесконечная),
 - 2) пренебрегается составляющей v_y вектора скорости $\vec{v} = (v_x, v_y)$,
 - 3) постоянная во времени циркуляция скорости Γ вокруг возбудителя,
 - 4) давление высчитывается по упрощенной формуле, пренебрегая ротацией поля скоростей,
 - 5) колебания каждого пункта возбудителя перпендикулярны к его расположению равновесия.
- Решения полученного уравнения колебаний исследуются упрощенным методом, принимая, что:

6) эти решения в приближении имеют форму произведения

$$f(x, y) = a \varphi \left(\frac{x}{l} \right) \gamma(t)$$

и что:

7) функция формы φ известна.

При таких предположениях функция γ является решением нелинейного уравнения, следующего из баланса мощности сил, действующих на возбудитель. Полученное уравнение исследуется в окрестности нулевого решения. Таким образом получен критерий устойчивости в форме:

$$c \leq c_g \equiv \sqrt{\frac{E}{24\rho l}} \sqrt{\frac{d^3 a}{l^4}} \sqrt{\frac{L}{A_1^{(0)}}}.$$

Зависимость последнего множителя от функции формы представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \varphi''(\xi) d\xi, \\ A_1^{(0)} &= \int_0^1 (\varphi - I_1)^2 d\xi, \\ I_1 &= \int_0^1 \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

В случае появления колебаний формы произведения, происходят они при предположении $\Gamma = \text{const}$, в максимально возможных пределах. Из исследованной модели колебаний вытекает, что, принимая зависимость этих колебаний от сил вязкости, можно получить более адекватное описание. Колебания стали бы тогда ограниченными.

Кроме того, получена зависимость на эквивалентную толщину жидкости, связанной с вибрирующим элементом

$$d_l = \frac{l^2}{a} \frac{\rho_l}{\rho_s} \frac{A_2}{I_2},$$

где

$$\begin{aligned} A_2 &= - \int_0^1 (\bar{\varphi} - J_0)^2 d\xi < 0, \\ \bar{\varphi} &= \int_0^{\xi} \varphi(\xi') d\xi', \\ J_0 &= \int_0^1 \bar{\varphi}(\rho) d\rho, \\ I_2 &= \int_0^1 \varphi^2(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Полученные и представленные в работе уравнения при приведенных предположениях являются точными.

В анализе уравнений пользовались описанием при помощи фазовых кривых.

About a Model of Flow Chamber with Mechanical Vibration Exciter

Summary

An analysis of vibrations of a flat elastic exciter located inside a flow cavitation chamber along the stream flowing through it and fixed at the end is presented. A method of analysing the influence of parameters of that flow on the vibrations of the exciter i.e. on the pressure pulsations in the measuring cavitation chamber during the flow is described.

The liquid is assumed to be perfect i.e. no forces of internal friction are present. Gravity forces are neglected too. The thickness of the exciter is assumed to be small when compared with the transverse dimensions of the cavitation chamber.

Let us assume that the exciter can vibrate only in the direction perpendicular to its centre plane. Its motion is then set by giving a deviation $f(x, t)$ of the point x (distance from the fixed end) at any moment t . In order to derive the equation of vibrations for the function $f(x, t)$ an approximate velocity distribution is calculated first and next, based on this, the distribution $p(x, t)$ of the pressure acting upon the exciter is obtained. Forces associated with this pressure play the part of the „exciting force” in the equation of exciter vibrations.

The following simplifications of the model described were made:

- 1) the model is two-dimensional (width is infinite),
- 2) v_y component of the velocity vector $\vec{v} = (v_x, v_y)$ is neglected,
- 3) the velocity circulation Γ/l around the exciter is stationary,
- 4) the pressure is derived from a simplified formula, the rotation of the velocity field being neglected,
- 5) any point of the exciter vibrates in the direction perpendicular to its equilibrium position.

The solutions to the obtained equation of vibrations are examined by a simplified method; it is assumed that

- 6) these solutions are approximate to the form of the product

$$f(x, y) = a \varphi \left(\frac{x}{l} \right) \gamma(t)$$

- 7) the function of shape φ is known.

The function γ is on these assumptions the solution of a nonlinear equation obtained from the power balance of the forces acting on the exciter. This equation was examined within the zero solution. Thus the following stability criterion was obtained:

$$c \ll c_g \equiv \sqrt{\frac{E}{24\rho l}} \sqrt{\frac{d^3 a}{l^4}} \sqrt{\frac{L}{A_1^{(0)}}}.$$

The dependence of the last factor on the function of shape reads as follows:

$$L = \int_0^1 \varphi''(\xi) d\xi,$$

$$A_1^{(0)} = \int_0^1 (\varphi - I_1)^2 d\xi,$$

$$I_1 = \int_0^1 \varphi(\xi) d\xi.$$

If the vibrations occur in the form of a product, their limits are on the assumption $\Gamma = \text{const}$ the maximum possible ones. The examined model of the vibrations shows that, when making them dependent on the forces of internal friction, a more adequate presentation could be obtained and the vibrations would then be limited.

In addition, a formula for the substitutional thickness of the layer of associated liquid was obtained:

$$d_i = \frac{l^2}{a} \frac{\rho_l}{\rho_s} \frac{-A_2}{I_2},$$

where

$$A_2 = - \int_0^1 (\bar{\varphi} - J_0)^2 d\xi < 0,$$

$$\bar{\varphi} = \int_0^{\xi} \varphi(\xi') d\xi',$$

$$J_0 = \int_0^1 \bar{\varphi}(\rho) d\rho,$$

$$I_2 = \int_0^1 \varphi^2(\xi) d\xi.$$

The equations obtained and presented here are strict on the assumptions cited.
Phase diagrams were used for the analysis of the equations.