

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPIYWOYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPIYWOYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

66

WARSZAWA—POZNAŃ 1975

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW
MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

KOMITET REDAKCYJNY - EXECUTIVE EDITORS
KAZIMIERZ STELLER - REDAKTOR - EDITOR
JERZY KOŁODKO · JÓZEF ŚMIGIELSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA - EDITORIAL OFFICE
Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1975

Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 370+90 egz.	Oddano do składania 7 VIII 1974 r.
Ark. wyd. 14,75. Ark. druk. 11,375+1 wkl.	Podpisano do druku 17 II 1975 r.
Papier druk. sat. kl. V, 70 g	Druk ukończono w lutym 1975 r.
Nr zam. 577/43 F-17/1183.	Cena zł 45,-

DRUKARNIA UNIWERSYTETU IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

JÓZEF WIĘCKOWSKI

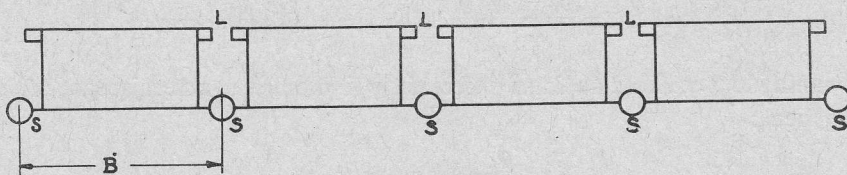
Gdańsk

Skręcanie belki o zmiennej strukturze*

Sformułowano równania skręcania belki o zmiennej strukturze ze sztywną strefą zwania i wyznaczono całkę ogólną oraz sformułowano warunki graniczne na froncie strefy zwania lub na styku stref zwania o przeciwnych skrętnościach. Rozwiązano zagadnienia początkowe przy obciążeniu momentem skupionym oraz stacjonarne odpowiadające działaniu fali. W zakończeniu zbadano wpływ deformacji sprężystej strefy zwania na momenty skręcające od zderzenia wewnętrznego.

1. Wstęp

Niniejsza praca jest kontynuacją prac [1, 2, 3] dotyczących zginania pewnych dyskretnych układów łańcuchowych z luzami aproksymowanych modelem ciągłym z więzami różniczkowymi jednostronnymi. Schemat układu tego rodzaju przedstawiono na rys. 1 oznaczając przez S sworznie łączące elementy powtarzalne, a przez L luzy zapewniające



Rys. 1. Schemat układu łańcuchowego

znikanie momentu gnącego przed zetknięciem elementów podczas zginania całości na wodzie. W dotychczasowych pracach postulowano, że luz w połączeniach sworzniami jest pomijalny. W tym opracowaniu przyjmujemy, że wynosi on ε oraz, że każde dwa elementy powtarzalne połączone są dwoma sworzniami o tych samych luzach. Niech b oznacza szerokość elementu powtarzalnego, a B jego długość (rys. 1). Względny ekstremalny kąt skręcenia elementów układu dyskretnego będzie

$$\Phi_0 = \pm \frac{2\varepsilon}{b}. \quad (1.1)$$

* Praca wykonana w ramach problemu resortowego PAN-19, grupa tematyczna 2.

W aproksymacji układu dyskretnego układem ciągłym rozłożymy wielkość Φ_0 na długości elementu B i ograniczymy pierwszą pochodną kąta skręcenia relacją

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| \leq a_0 \equiv \frac{\Phi_0}{B}. \quad (1.2)$$

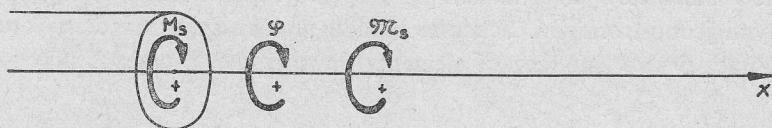
Postulując w dalszym ciągu, że układ pływa na spokojnej wodzie lub na fali, pominiemy sprzężenie zginania ze skręceniem oraz hydrodynamiczne oddziaływanie wody. Wpływ jej objawi się jedynie liniowym podłożem Winklera na skręcanie i harmonicznym wzbudzeniem od fali. Badanie wpływu mas zredukowanych tłumienia hydrodynamicznego, oddziaływania ustalonego przepływu wody i sprzężenia ze zginaniem będzie przedmiotem innych opracowań.

Praca jest zdaniem autora w całości oryginalna. Nie ma w literaturze poświęconej mechanice teoretycznej i stosowanej teorii układów łańcuchowych z jednostronnymi więzami różniczkowymi, którą w skrócie nazwalismy teorią belek o zmiennej strukturze.

2. Równania ruchu belki zbudowanej z elementów sztywnych

Przyjmijmy umownie oznaczenia dla zewnętrznych momentów skręcających $\mathfrak{M}_s$, kąta skręcenia φ oraz wewnętrznego momentu skręcającego M_s , jak na rys. 2.

Belkę przed osiągnięciem granicznych wartości pochodnej $\partial\varphi/\partial x$ będziemy nazywali rozwartą, po osiągnięciu wartości granicznych belką zwartą.



Rys. 2. Umowa znaków dla obciążeń i sił wewnętrznych

Równania do wyznaczenia kąta skręcenia φ i momentu skręcającego M_s dla belki rozwartej będą:

$$i_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -k\varphi + m(x, t), \quad (2.1.1)$$

$$M_s \equiv 0, \quad (2.1.2)$$

przy jednoczesnym warunku

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| < a_0. \quad (2.1.3)$$

Równania do wyznaczenia tych samych wielkości dla belki zwartej są

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \pm a_0, \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial M_s}{\partial x} - k\varphi + m(x, t) = i_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (2.2.2)$$

gdzie i_0 — gęstość liniowa momentu bezwładności masy pręta, k — sztywność hydrostatyczna podłoża, $m(x, t)$ — obciążenie ciągle momentami zewnętrznymi.

Równania (2.1) i (2.2) dają się prosto rozwiązać. Wprowadzając oznaczenie

$$\alpha \equiv \sqrt{\frac{k}{i_0}} \quad (2.3)$$

otrzymamy następujące całki ogólne:

— dla belki rozwartej

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = & \frac{1}{i_0} \int_0^t \frac{\sin \alpha(t-\tau)}{\alpha} m(x, \tau) d\tau + \\ & + C_1(x) \sin \alpha t + C_2(x) \cos \alpha t, \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

gdzie $C_i(x)$, $i=1, 2$ — dowolne funkcje miejsca x

$$M_s(x, t) \equiv 0, \quad (2.4.2)$$

— dla belki zwartej

$$\varphi(x, t) = \pm a_0 x + C_{\pm}(t), \quad (2.5.1)$$

$$\begin{aligned} M_s(x, t) = & \pm k a_0 \frac{x^2}{2} + C_{\pm}(t) x - \int_{x_0}^x m(\xi, t) d\xi + \\ & + i_0 x \ddot{C}_{\pm}(t) + D_{\pm}(t). \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Wskaźnikami $\pm$ wyróżniono dowolne funkcje czasu dla strefy zvarcia o skrętności dodatniej ($\partial\varphi/\partial x = a_0$) i skrętności ujemnej ($\partial\varphi/\partial x = -a_0$).

Przypadek obciążeń statycznych upraszcza znacznie rozwiązania — dla belki rozwartej

$$\varphi(x) = \frac{1}{k} m(x), \quad (2.6.1)$$

$$M_s(x) \equiv 0, \quad (2.6.2)$$

a dla belki zwartej

$$\varphi(x) = \pm a_0 x + C_{\pm} \quad (2.7.1)$$

$$M_s(x) = \pm k a_0 \frac{x^2}{2} + k C_{\pm} x - \int_{x_0}^x m(\xi) d\xi + D_{\pm}. \quad (2.7.2)$$

Warunki graniczne dla statyki są oczywiste. Jeżeli x_0 jest współrzędną punktu rozgraniczającego strefy zvarcia i rozwarcia, to musi w tym miejscu zachodzić ciągłość momentu skręcającego i ciągłość kąta skręcenia φ . Jeżeli x_0 jest punktem styku dwóch stref zvarcia o przeciwnych skrętnościach, co może pojawić się w statyce wtedy, gdy w x_0 przyłożony jest zewnętrzny moment skręcający $\mathfrak{M}$, to oprócz warunku ciągłości kąta ugięcia mamy warunek zadanej nieciągłości momentu

$$M_s(x_0^+) - M_s(x_0^-) = -\mathfrak{M}. \quad (2.8)$$

Najprostszym przykładem zastosowań może być zadanie statycznego skrócenia pręta nieskończonego zewnętrznym momentem skupionym $\mathfrak{M}$ jak na rys. 3.

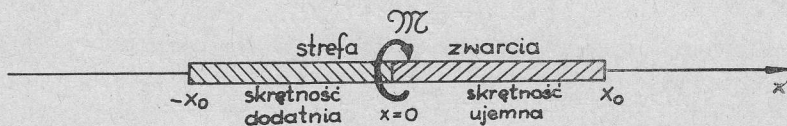
Proste rachunki, których nie przytaczamy prowadzą do wyznaczenia zarówno stałych dowolnych całkowania jak i współrzędnej strefy zwarcia x_0 . Otrzymamy

$$\varphi = a_0(x_0 - x) \quad x \in \langle 0, x_0 \rangle, \quad (2.9.1)$$

$$M_s = -\frac{ka_0}{2}(x - x_0)^2 \quad x \in (0, x_0), \quad (2.9.2)$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{a_0 k}}. \quad (2.9.3)$$

Odmienne przedstawiają się warunki graniczne w przypadku dynamiki. Niech x_0 będzie punktem rozgraniczenia strefy zwarcia ($x < x_0$) i strefy rozwarcia. Niech strefa zwarcia porusza się z prędkością v_z w kierunku osi x . Dokładnie v_z jest prędkością propagacji frontu strefy zwarcia. Ponieważ $i_0(\partial\varphi/\partial t)$ jest krętem właściwym (gęstością krętu)



Rys. 3. Strefa zwarcia wywołana działaniem momentu skupionego

elementu w punkcie, to wszędzie tam, gdzie przy przejściu frontu wystąpi nieciągłość krętu właściwego, wystąpi zjawisko zderzenia wewnętrznego w belce na froncie strefy. Z równania krętu i impulsu otrzymamy równanie do wyznaczenia momentu zderzenia

$$i_0 v_z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=t_0^+} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=t_0^-} \right) dt = -M_u dt. \quad (2.10)$$

Znak minus po prawej stronie wynika z przyjętej umowy sił wewnętrznych oraz tego, że oddziaływanie strefy zwarcia na przejmowane elementy ze strefy rozwartej jest siłą wewnętrzną.

Warunki graniczne dla sił wewnętrznych na froncie strefy zwarcia będą zatem

$$i_0 v_z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=t_0^+} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=t_0^-} \right) = M_s(x_0^+) - M_s(x_0^-) \quad (2.11)$$

i $M_s(x_0^+) = 0$ dla rozpatrywanego przypadku szczególnego.

Nieciągłość dynamiczna momentu skracającego wystąpi również w ruchomym punkcie rozdzielającym dwie strefy zwarcia o przeciwnych skrzytnościach. Problem taki pojawi się np. przy rozwiązywaniu zadania z momentem skupionym $\mathfrak{M}$, poruszającym się po belce. Dodatkowa zmiana momentu spowodowana nieciągłością krętu będzie stosownie do umowy znaków

$$M_s(x_0^+) - M_s(x_0^-) = \mathfrak{M} + i_0 v_z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=t_0^+} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=t_0^-} \right). \quad (2.12)$$

3. Belka obciążona skupionym momentem zewnętrznym

Rozpatrzmy wpieryw przypadek stałego momentu $\mathfrak{M}$ poruszającego się z zadaną prędkością ϑ w kierunku osi x' . Wprowadzając dla wygody ruchomy układ odniesienia relacją

$$x = x' - \vartheta t \quad (3.1)$$

otrzymamy równania ruchu belki rozwartej

$$i_0 \vartheta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k \varphi = 0. \quad (3.2.1)$$

$$M_s \equiv 0. \quad (3.2.2)$$

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| < a_0. \quad (3.2.3)$$

Zerowe warunki początkowe ruchu prowadzą oczywiście do rozwiązania

$$\varphi \equiv 0. \quad (3.3)$$

Dla belki zwartej mamy równania

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \pm a_0, \quad (3.4.1)$$

$$\frac{dM_s}{dx} = k \varphi. \quad (3.4.2)$$

Nie będziemy przytaczali rachunków szczegółowych, warto jednak zwrócić uwagę, że warunek graniczny (2.12) przybierze w tym wypadku postać

$$M_s(0^+) - M_s(0^-) = -\mathfrak{M} - i_0 \vartheta^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{0^-} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{0^+} \right), \quad (3.5)$$

gdyż front taki przesuwają się w prawo ($\vartheta > 0$).

Rozwiązania są następujące. Dynamiczna strefa zvarcia pokrywa się ze strefą statyczną, tzn. jest w przedziale $\langle -x_0, x_0 \rangle$, gdzie

$$x_0 = \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{ka_0}}. \quad (3.6)$$

Moment skrećający M_s jest nieparzysty i oczywiście nieciągły w $x=0$. Oblicza się go z relacji

$$M_s(x) = \begin{cases} 0 & |x| > x_0 \\ -\operatorname{sgn} x \left[\frac{ka_0}{2} (x_0 - x \operatorname{sgn} x)^2 + a_0 i_0 \vartheta^2 \right] & |x| \leq x_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

dla $|x| \leq x_0$.

Drugi składnik w nawiasie, proporcjonalny do ϑ^2 , jest momentem zderzenia.

Innym ogólniejszym zadaniem, które można rozwiązać posługując się całkami (2.4) i (2.5), jest ruch stałego momentu $\mathfrak{M}$ z prędkością monotonicznie niemalejącą $\mathfrak{g}(t)$ i warunkami początkowymi określonymi przez zadanie statyczne. Zadajmy funkcję $x_0(t)$ określającą w układzie nieruchomym miejsce przyłożenia momentu stałego $\mathfrak{M}$. Będziemy postulowali $x_0(0)=0$ oraz różniczkowalność funkcji $x_0(t)$. Niech $x_1(t)$ i $x_2(t)$ są krańcami strefy zwarcia podczas ruchu. Przedział $\langle x_1, x_0 \rangle$ będzie strefą o skrętności dodatniej, natomiast przedziały (x_0, x_2) — strefą o skrętności ujemnej. Korzystając z warunków granicznych (2.11) i (2.12) otrzymamy po licznych przekształceniach następujące rozwiązanie:

— w strefie o skrętności dodatniej

$$\varphi_1 = a_0(x - x_1), \quad (3.8.1)$$

$$M_{s,1} = \frac{ka_0}{2}(x - x_1)^2 - a_0 i_0(x - x_1) \ddot{x}_1 + a_0 i_0 \dot{x}_1^2, \quad (3.8.2)$$

— w strefie o skrętności ujemnej

$$\varphi_2 = -a_0(x - x_2), \quad (3.9.1)$$

$$M_{s,2} = -\frac{ka_0}{2}(x - x_2)^2 + a_0 i_0(x - x_2) \ddot{x}_2 - a_0 i_0 \dot{x}_2^2. \quad (3.9.2)$$

Warunki do wyznaczenia $x_1(+)$ i $x_2(+)$, które wynikają z warunków brzegowych, sprowadzają się do równań

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (3.10.1)$$

oraz

$$ka_0 x_0^2 + a_0 i_0 \frac{d^2}{dt^2} (x_0)^2 + \mathfrak{M} - \frac{ka_0}{2} (x_1^2 - x_2^2) - \frac{a_0 i_0}{2} \frac{d^2}{dt^2} (x_1^2 + x_2^2). \quad (3.10.2)$$

Oznaczając przez

$$\alpha \equiv \sqrt{\frac{k}{a_0}} \quad (3.11)$$

otrzymamy całkę ogólną równania (3.10.2) w postaci

$$\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) = x_0^2 - \frac{\mathfrak{M}}{ka_0} + C_1 \sin \alpha t + C_2 \cos \alpha t. \quad (3.12)$$

Dla $t=0$, $x_0(0)=0$, $x_1 = -x_2 = \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{ka_0}} \equiv \bar{x}$, co wynika z rozwiązania zadania statycznego.

Mamy zatem z (3.12) $C_2=0$. Aby znaleźć sens fizyczny stałej C_1 różniczkujemy obustronnie równania (3.10.1) i (3.12) i podstawiamy $t=0$. Otrzymamy wtedy

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 2\dot{x}_0, \quad (3.13.1)$$

$$\dot{x}_2 - \dot{x}_1 = \frac{\alpha C_1}{\bar{x}}. \quad (3.13.2)$$

Na to aby $C_1=0$ potrzeba i wystarcza aby $\dot{x}_1=\dot{x}_2=\dot{x}_0$, tzn. aby cała strefa zvarcia miała prędkość początkową jednakową i równą $\dot{x}_0$. Jeżeli założyć $\dot{x}_1(0) \neq \dot{x}_2(0)$ i oznaczyć $\dot{x}_2(0) - \dot{x}_1(0) \equiv \Delta\vartheta$, to z równań (3.12) i (3.10.1) można obliczyć długość strefy zvarcia

$$x_2(t) - x_1(t) = \sqrt{\frac{4\mathfrak{M}}{ka_0} + \frac{4x\Delta\vartheta}{\alpha}} \sin \alpha t. \quad (3.14)$$

Długość strefy zvarcia jest wtedy funkcją okresową z tym, że dla dostatecznie dużych $\Delta\vartheta$ może stracić sens rozwiązanie (3.14), jak również rozwiązania (3.8) i (3.9) otrzymane przy założeniu, że x_1 i x_2 są rosnącymi funkcjami czasu. Organami swobodnymi strefy zvarcia nie będziemy się dalej zajmowali.

W przypadku $\Delta\vartheta=0$ otrzymamy z (3.14) długość strefy zvarcia identyczną z długością strefy zvarcia dla momentu działającego statycznie. Rozważając dla tego przypadku układ (3.10.1) i (3.14) otrzymamy

$$x_i = x_0 \pm \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{ka_0}}, \quad i=1, 2, \quad (3.15)$$

gdzie znak „+” obowiązuje dla $i=2$, a „-” dla $i=1$. Interesujące są rozwiązania dla momentów w miejscu występowania zderzeń. Otrzymujemy

$$M_s(x_1^+) = -M_s(x_2^-) = a_0 i_0 \dot{x}_0^2, \quad (3.16)$$

a więc tak jak dla momentu poruszającego się ze stałą prędkością. W miejscu przyłożenia momentu $\mathfrak{M}$ otrzymamy jednak wynik odmienny

$$M_s(x_0^-) = -M_s(x_0^+) = \frac{\mathfrak{M}}{2} + a_0 i_0 \dot{x}_0^2 + a_0 i_0 \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{ka_0}} \ddot{x}_0, \quad (3.17)$$

gdyż pojawia się dodatkowy składnik od przyspieszenia $\ddot{x}_0$.

Analogicznymi metodami można rozwiązać problem ruchu pręta pod działaniem stałego momentu skupionego $\mathfrak{M}$, przyłożonego w punkcie $x=0$ przy zerowych warunkach początkowych, ze względu na symetrię przytoczymy jedynie wyniki rachunku w strefie $(0, x_0)$ o skłonności ujemnej

$$\varphi = a_0(x - x_0), \quad x \in (0, x_0), \quad (3.18.1)$$

$$M_s = -ka_0 \frac{x^2}{2} + ka_0 x_0 x + i_0 a_0 x \ddot{x}_0 - \frac{\mathfrak{M}}{Z}, \quad x \in (0, x_0). \quad (3.18.2)$$

Warunki graniczne prowadzą do równania różniczkowego względem kwadratu długości strefy zvarcia

$$i_0 \frac{d^2}{dt^2} (x_0^2) + kx_0^2 = \frac{\mathfrak{M}}{a_0}. \quad (3.19)$$

Przy stałym momencie $\mathfrak{M}$ i warunkach początkowych $x_0(0) = \dot{x}_0(0) = 0$, otrzymamy

$$x_0 = \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{ka_0}} (1 - \cos \alpha t), \quad (3.20)$$

gdzie α — wielkość podana wzorem (3.11). Moment od uderzenia na froncie strefy zwarcia otrzymamy z (3.18.2) podstawiając $x=x_0$

$$M_s(x_0^-) = M_u = -\frac{\mathfrak{M}}{Z} \cos^2 \frac{\alpha t}{Z}. \quad (3.21)$$

Zjawisko przebiega zatem okresowo, jeżeli nie występuje w układzie tłumienie wewnętrzne.

4. Belka obciążona momentem ciągłym okresowym

Zakładamy obciążenia zewnętrzne ciągłym momentem skręcającym, np. pochodzącym od podstawowej fali powierzchniowej

$$m(x', t) = -A \cos(\lambda x' - \omega t). \quad (4.1)$$

Wprowadzając ruchomy układ odniesienia według relacji $x = \lambda x' - \omega t$ napiszemy równania belki rozwartej (2.1) w postaci

$$i_0 \omega^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + k \varphi = -A \cos x, \quad (4.2.1)$$

$$M_s \equiv 0, \quad (4.2.2)$$

$$\left| \frac{d\varphi}{dx} \right| < \frac{a_0}{\lambda}. \quad (4.2.3)$$

Rozwiązanie równania (4.2.1) opisujące ruch wymuszony belki będzie

$$\varphi(x) = \frac{A}{k - i_0 \omega^2} \cos x. \quad (4.3)$$

Przyrównując $|\varphi'(x)|$ do granicznej wartości a_0/λ , otrzymamy tzw. amplitudę zwarcia A_z , tzn. taką amplitudę fali obciążenia, przy której pojawia się pierwsze zwarcie punktowe

$$A_z = \frac{a_0}{\lambda} (k - i_0 \omega^2). \quad (4.4)$$

Punkty zwarcia x_z w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ są

$$x_z = \pm \frac{\pi}{2}, \quad (4.5)$$

pozostałe powtarzają się okresowo w odstępach 2π . Dla $A > A_z$ postulujemy istnienie symetrycznej strefy zwarcia $\langle x_0, \pi - x_0 \rangle$ w otoczeniu punktu $\pi/2$ oraz takiej samej długości strefy dookoła pozostałych punktów zwarcia początkowego. Ze względu na symetrię i okresowość obciążenia zbadamy jedynie przedział $\langle x_0, \pi - x_0 \rangle$, w którym obciążenie zewnętrzne jest rosnące, a zatem

$$\varphi = \frac{a_0}{\lambda} x + C, \quad (4.6)$$

natomiast moment skręcający z równania (2.1.2)

$$\lambda M_s - k \frac{a_0 x^2}{\lambda z} - k C x - A \sin x + D = 0. \quad (4.7)$$

Rozwiązanie w strefie rozwarcia $\langle -x_0, x_0 \rangle$ opisuje się funkcją (4.3) jeżeli badamy jedynie ruch wymuszony. Warunki graniczne ciągłości kątów skręcenia i nieciągłości momentów (według (2.11)) prowadzą do wyznaczenia stałych C , D oraz amplitudy obciążenia A w funkcji współrzędnej początku strefy zvarcia x_0 . Wyniki końcowe rachunku są następujące:

– kąt skręcenia w strefie zvarcia

$$\varphi = \frac{a_0}{\lambda} \left(x - \frac{\pi}{2} \right), \quad (4.8)$$

– amplituda obciążenia zewnętrznego

$$A = \frac{a_0}{\lambda} \frac{\frac{\pi}{2} - x_0}{\cos x_0} (k - i_0 \omega^2). \quad (4.9)$$

Jak widać z powyższego równania, dla $x_0 = 0$ następuje całkowite zvarcie belki, w której występują jedynie kolejne strefy zvarcia o przeciwnych skrętnościach. Amplituda pełnego zvarcia belki będzie zatem

$$A_p = \frac{a_0}{\lambda} \cdot \frac{\pi}{2} (k - i_0 \omega^2). \quad (4.10)$$

Dla $k = i_0 \omega^2 \Rightarrow A_z = A_p = 0$ i ruch pod działaniem fali możliwy jest jedynie w pełnym zvarciu.

Aby obliczyć moment skręcający według (4.7) należy podstawić stałą A według (4.9) oraz

$$C = -\frac{a_0 \pi}{2\lambda} \quad (4.11.1)$$

$$D = -i_0 \vartheta^2 \lambda a_0 \left[1 - \left(\frac{\pi}{2} - x_0 \right) \operatorname{tg} x_0 \right] + k \frac{a_0}{2\lambda} \left(x_0 - \frac{\pi}{2} \right)^2 + A \sin x_0. \quad (4.11.2)$$

Otrzymuje się wtedy moment od uderzenia na końcu strefy zvarcia

$$M_u = i_0 \vartheta^2 a_0 \left[1 - \left(\frac{\pi}{2} - x_0 \right) \operatorname{tg} x_0 \right] = M_s(x_0^+) \quad (4.12)$$

oraz moment w środku strefy

$$M_s \left(\frac{\pi}{2} \right) = M_u + A (\sin x - \sin x_0) - k \frac{a_0}{2\lambda} \left[\left(x_0 - \frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right]. \quad (4.13)$$

Wartości rezonansowej $\omega = \sqrt{k/i_0}$ następuje, jak to widać z przytoczonych, przesunięcie kątów skręcenia $\varphi(x)$ o kąt fazowy π względem wzbudzenia.

5. Wpływ odkształceń strefy zwarcia

Przyjmujemy, że po zwarciu belka może się deformować sprężysto i posiada sztywność skrętną C . Równania ruchu belki rozwartej będą

$$i_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + k\varphi = m(x, t), \quad (5.1.1)$$

$$M_s \equiv 0, \quad (5.1.2)$$

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| < a_0, \quad (5.1.3)$$

a belki zwartej

$$i_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k\varphi = m(x, t), \quad (5.2.1)$$

gdzie

$$M_s = C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - a_0 \right) \quad \text{dla} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \geq a_0, \quad (5.2.2)$$

$$M_s = C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_0 \right) \quad \text{dla} \quad -a_0 \geq \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (5.2.3)$$

Zbadamy tylko jeden przypadek ruchu stałego momentu skupionego po przecię ze stałą prędkością $\vartheta > 0$. Zakładamy, podobnie jak w innych zadaniach, zerowe warunki początkowe. W strefie rozwartej otrzymujemy

$$\varphi \equiv 0 \quad \text{i} \quad M_s \equiv 0. \quad (5.3)$$

Rozważając zadanie dla prostoty w układzie ruchomym $x = x' - \vartheta t$, gdzie x' współrzędna w układzie nieruchomym, napiszemy równanie (5.2.1) w symetrycznej strefie zwarcia $\langle -x_0, x_0 \rangle$ w postaci

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \delta^2 \varphi = 0, \quad (5.4)$$

gdzie

$$\delta \equiv \sqrt{\frac{k}{C - i_0 \vartheta^2}}. \quad (5.5)$$

Rozważymy jedynie przypadek $C - i_0 \vartheta^2 > 0$, tzn. prędkości ruchu obciążenia mniejszych od prędkości propagacji fali w belce swobodnej bez oddziaływania podłoża. Tylko ten przypadek ma znaczenie praktyczne ze względu na dużą prędkość propagacji w konstrukcjach rzeczywistych.

Warunki graniczne ciągłości kątów skręcenia w $x = 0$, $x = \pm x_0$ oraz warunek brzegowy (2.12) dynamicznej nieciągłości momentu w $x = 0$ prowadzą do następującego rozwiązania dla kąta skręcenia φ

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M} + 2Ca_0}{2\delta(C - i_0 \vartheta^2)} \frac{\text{sh } \delta(x_0 - x)}{\text{ch } \delta x_0} \quad x \in \langle 0, x_0 \rangle. \quad (5.6)$$

Dla $x \in \langle -x_0, 0 \rangle$ otrzymamy $\varphi(x)$ z warunku parzystości rozwiązań. Warunek brzegowy (2.11) na froncie strefy zwania prowadzi do wyznaczenia długości strefy zwania o ujemnej skrętności. Otrzymujemy

$$x_0 = \frac{1}{\delta} \operatorname{arch} \left(1 - \frac{\mathfrak{M}}{2C a_0} \right) \quad (5.7)$$

stąd wynika, że strefa zwania zależy znacznie od prędkości i maleje do zera gdy zbliżamy się do prędkości propagacji fal w swobodnej strefie zwania, gdyż wtedy $\delta \rightarrow +\infty$. Interesujący wynik otrzymuje się dla momentów skręcających. Zgodnie z relacjami (5.2.3) i (5.6) dla $x \in (0, x_0)$

$$M_s = C a_0 [1 - \beta \operatorname{ch} \delta (x - x_0)], \quad (5.8)$$

gdzie $\beta \geq 1$ oblicza się według wzoru

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{i_0 \vartheta^2}{C^2}}. \quad (5.9)$$

Proste przekształcenia prowadzą do wartości momentu na końcach strefy zwania

$$M_s(x_0^-) = -a_0 i_0 \vartheta^2 \beta, \quad (5.10.1)$$

$$M_s(0^+) = -a_0 i_0 \vartheta^2 \beta - \frac{\mathfrak{M}}{2} \frac{i_0 \vartheta^2}{C} \beta - \frac{\mathfrak{M}}{2}. \quad (5.10.2)$$

W miejscu przyłożenia momentu skupionego występuje dodatkowy dynamiczny składnik od uderzenia proporcjonalny zarówno do obciążenia jak i kwadratu prędkości ruchu obciążenia. Łatwo sprawdzić, że dla $C \rightarrow +\infty$ otrzymujemy z równań (5.10) dynamiczne momenty skręcające dla pręta ze sztywną strefą zwania. W równaniu (5.10.2) znika wtedy drugi składnik charakterystyczny jedynie dla sprężystej strefy zwania.

Inne zagadnienia, obejmujące również wpływ tłumienia i efekty od obciążeń nieustalonych oraz układy wielowymiarowe przedstawimy w osobnych opracowaniach.

Praca wpłynęła do Redakcji we wrześniu 1973 r.

Literatura

- [1] L. Konieczny, W. Kurski, R. Piskorski, J. Więckowski, *Dynamika wstęgi na fali regularnej* Politechnika Gdańska, Instytut Okrętowy, Materiały wewnętrzne, 1970.
- [2] R. Piskorski, *Wpływ bezwładności obrotowej na ruch belki o zmiennej strukturze na fali regularnej*. Materiały Konferencji Drgań Nieliniowych, Poznań 1974.
- [3] J. Więckowski, *Wstęp do teorii zginania belek o zmiennej strukturze*. Prace IMP, z. 65, 1974.

Скручивание балки переменной структуры

Резюме

Формулируются уравнения скручивания балки переменной структуры с жесткой зоной сплочения. Эффективно определяется общий интеграл и формулируются предельные условия на фронте зоны сплочения или в месте контакта зон сплочения противоположного скручивания.

Решены задачи статического скручивания неограниченной балки сосредоточенным моментом, динамического скручивания постоянным моментом, вращающим с постоянной и монотонно убывающей от нулевого значения скоростями при нулевых первоначальных условиях. Исследован также случай колебаний зоны сплочения, вызванный постоянным, неподвижным на стержне, но действующим при нулевых первоначальных условиях сосредоточенным моментом, а также нагрузки балки гармонической и прогрессивной волнами нагрузки.

В заключении исследуется влияние упруго демпфирующей зоны сплочения на величину момента столкновения во время установившегося движения сосредоточенного внешнего момента на балке.

Twisting of a Beam of Variable Structure

Summary

Equations describing the twisting of a beam of variable structure with rigid contact zone were formulated. A general solution was effectively determined and boundary conditions at the contact zone boundary or at the contact point of zones having opposite twists were formulated too.

The problem of static twisting of an unlimited beam by a concentrated torque and of dynamic twisting by a constant torque moving with constant velocity and with a velocity monotonically not decreasing from the zero value were solved with zero initial conditions. The problem of contact zone vibrations generated by a concentrated torque, constant and fixed on the rod, and acting at zero initial conditions was examined. The case of loading the beam with a harmonic and advancing wave was examined too.

Finally, there is analyzed the influence of a flexibly deformable contact zone on the impact torque value during the steady-state motion of the external concentrated torque along the beam.