

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

66

WARSZAWA—POZNAN 1975

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW
MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

KOMITET REDAKCYJNY - EXECUTIVE EDITORS
KAZIMIERZ STELLER - REDAKTOR - EDITOR
JERZY KOŁODKO · JÓZEF ŚMIGIELSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA - EDITORIAL OFFICE
Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1975

Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 370+90 egz.	Oddano do składania 7 VIII 1974 r.
Ark. wyd. 14,75. Ark. druk. 11,375+1 wkl.	Podpisano do druku 17 II 1975 r.
Papier druk. sat. kl. V, 70 g	Druk ukończono w lutym 1975 r.
Nr zam. 577/43 F-17/1183.	Cena zł 45,-

DRUKARNIA UNIWERSYTETU IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

MIECZYSLAW LUBAŃSKI

Gdańsk

Podstawy teoretyczne pomiaru koncentracji elektronów w plazmie wyładowania przy użyciu cylindrycznej anteny mikrofalowej*

W pracy przedstawiono analizę zachowania się cylindrycznej anteny liniowej w plazmie oraz wyniki obliczeń numerycznych impedancji wejściowej cylindrycznej anteny mikrofalowej w plazmie wyładowania elektrycznego w gazach. Przedstawiono jednocześnie możliwość prostego sposobu wykorzystania otrzymanych wyników w mikrofalowych pomiarach koncentracji elektronów.

1. Wprowadzenie

Zainteresowanie zachowaniem się anten w ośrodkach stratnych pojawiło się w chwili, gdy podjęto próby wykorzystywania ich do celów radiokomunikacji w jonosferze, pod ziemią oraz w wodzie morskiej.

Jednocześnie stwierdzona została przydatność anten do diagnostyki ośrodków stratnych. Pomiar impedancji wejściowej anteny umożliwia wyznaczenie parametrów elektrycznych ośrodka, w którym jest umieszczona antena. Niezbędna jest tu jednak znajomość zależności impedancji wejściowej od parametrów elektrycznych ośrodka. Powstało wiele prac, np. [1, 2, 3] poświęconych teorii anteny liniowej w ośrodku stratnym. Uzyskane wyniki nie są jednak na ogół bezpośrednio przydatne do celów eksperymentalnych.

Szczególnym ośrodkiem stratnym jest plazma, której własności oraz parametry są przedmiotem zainteresowania wielu laboratoriów fizycznych. Stosowana powszechnie w diagnostyce plazmy, posiadająca wiele zalet, metoda sondy Langmuira naraża jednak poważne trudności interpretacyjne, które w szczególności dotyczą wyznaczania koncentracji elektronów. Liniowa antena cylindryczna może stanowić niezależne narzędzie do pomiarów parametrów plazmy, umożliwiające weryfikację wyników uzyskanych przy użyciu sondy elektrycznej. W warunkach laboratoryjnych obiektem badań jest często plazma wyładowania elektrycznego w gazach. Do pomiaru parametrów takiej plazmy, generowanej w rurach o przeciętnej średnicy kilku centymetrów, można użyć liniowej anteny cylindrycznej pracującej w pasmie mikrofalowym. Antena mikrofalowa posiada w tych warunkach rozmiary mniejsze od rozmiarów obszaru zajmowanego przez plazmę.

O wartości impedancji wejściowej anteny decyduje pole elektryczne w najbliższym

* Praca wykonana w ramach problemu resortowego PAN-19, grupa tematyczna 4.

sąsiedztwie przewodnika tworzącego antenę. Dzięki temu oraz dzięki małym rozmiarom względnym anteny, pomiar impedancji wejściowej umożliwia wyznaczenie lokalnych parametrów plazmy, przy czym obszar uśredniania ma rozmiary w przybliżeniu równe rozmiarom anteny [4]. Należy podkreślić, że inne metody mikrofalowe stosowane w diagnostyce plazmy na ogół nie umożliwiają wykonywania pomiarów lokalnych. Dla wyznaczenia parametrów plazmy z pomiaru impedancji wejściowej zanurzonej w niej anteny, konieczna jest jednak znajomość zależności impedancji wejściowej od tych parametrów. Na wartość impedancji wejściowej anteny umieszczonej w tak szczególnym ośrodku jak plazma wpływa jednakże wiele zjawisk. Najważniejsze z nich to promieniowanie fali elektromagnetycznej, promieniowanie fali elektroakustycznej oraz powstawanie warstwy jonowej wokół przewodnika anteny. Stopień wpływu tych zjawisk na wartość impedancji wejściowej zależy od parametrów plazmy, pulsacji sygnału doprowadzonego do anteny oraz rozmiarów geometrycznych anteny. Analizę wpływu poszczególnych zjawisk na wartość impedancji anteny przedstawiono w wielu wcześniej ogłoszonych pracach, np. [1, 2, 4, 6, 7, 8]. Uzyskane wyniki dotyczą jednakże szczególnej geometrii anteny i nie jest na ogół możliwe ich proste wykorzystanie w pomiarach parametrów plazmy.

W niniejszej pracy przedstawiono analizę własności anteny cylindrycznej umieszczonej w plazmie izotropowej. Z analizy tej wynika, że dla danej plazmy można tak dobrać pulsację sygnału oraz geometrię anteny, że o wartości jej impedancji wejściowej będzie decydowało zjawisko promieniowania fali elektromagnetycznej. W pracy pokazano, że przypadek ten ma miejsce dla smukłej anteny cylindrycznej o dowolnej praktycznie stosowanej długości, pracującej w mikrofalowym pasmie X , umieszczonej w przeciętnej plazmie wyładowania elektrycznego w gazach.

W dalszej części pracy przedstawiono sposób numerycznego obliczania impedancji anteny o dowolnej długości, w plazmie, w przybliżeniu Lorentza. Jako podstawę tych obliczeń przyjęto równanie całkowite Hallena dla rozkładu prądu w antenie. Równanie to uwzględnia jedynie wpływ zjawisk elektromagnetycznych na rozkład prądu, a zatem i na wartość impedancji wejściowej anteny. Różnica pomiędzy rzeczywistą wartością impedancji anteny w plazmie a wartością obliczoną z równania Hallena zależy, jak wspomniano wyżej, od pulsacji sygnału, geometrii anteny oraz od parametrów plazmy. Dla przeciętnej plazmy wyładowania elektrycznego w gazach impedancja wejściowa smukłej anteny cylindrycznej pracującej w mikrofalowym pasmie X jest, w wystarczającym dla celów praktycznych przybliżeniu, równa wartości impedancji obliczonej z równania całkowitego Hallena.

W niniejszej pracy pokazano również, jak uzyskane wyniki obliczeń numerycznych można w prosty i bezpośredni sposób wykorzystać w mikrofalowych pomiarach względnej koncentracji elektronów w plazmie wyładowania lub plazmie o zbliżonych właściwościach fizycznych

2. Liniowa antena cylindryczna w plazmie izotropowej

W przypadku ogólnym, antena cylindryczna umieszczona w izotropowej plazmie o skończonej temperaturze elektronów promieniuje falę elektromagnetyczną oraz falę elektroakustyczną (falę plazmową), której nie towarzyszy zmienne pole magnetyczne.

Wokół przewodnika anteny tworzy się jednocześnie warstwa jonowa, której grubość zależy od parametrów plazmy.

Te trzy zjawiska decydują o wartości impedancji wejściowej anteny. Stopień ich wpływu na wartość impedancji zależy od parametrów plazmy, pulsacji ω sygnału doprowadzonego do anteny oraz od rozmiarów geometrycznych anteny.

W niniejszej pracy przyjęto model Lorentza plazmy [5], który w sposób dostatecznie dobry opisuje elektryczne właściwości plazmy wyładowania elektrycznego w gazach. W modelu tym stan plazmy opisany jest całkowicie przez dwa niezależne parametry: koncentrację N nośników ładunku oraz częstość zderzeń ν elektronów z cząstkami ciężkimi. Jeżeli zachodzi konieczność uwzględnienia ściśliwości gazu elektronowego musi być dodatkowo znana temperatura elektronów T . Temperatura cząstek ciężkich w plazmie wyładowania elektrycznego jest znacznie niższa niż temperatura elektronów i nie wpływa na przewodność elektryczną σ oraz przenikalność elektryczną ε plazmy.

Dla określonego modelu plazmy istnieją ściśle związki pomiędzy N i ν a przewodnością elektryczną i przenikalnością elektryczną.

W przypadku plazmy w przybliżeniu Lorentza wygodnie jest posługiwać się zespoloną względną przenikalnością elektryczną K_c , która może być wyrażona następującą zależnością [5]:

$$K_c = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} = K - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} = 1 - \frac{n_e}{1 - js} = 1 - \frac{n_e}{1 + s^2} - j \frac{n_e s}{1 + s^2}, \quad (2.1)$$

gdzie ε_c — zespolona przenikalność elektryczna plazmy, ε_0 — przenikalność elektryczna próżni, K — względna rzeczywista przenikalność plazmy, n_e — względna koncentracja elektronów w plazmie, s — względna częstość zderzeń elektronów z cząstkami ciężkimi, przy czym

$$n_e = \frac{N}{N_c} = \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2, \quad (2.2)$$

$$s = \frac{\nu}{\omega}, \quad (2.3)$$

gdzie N_c — krytyczna koncentracja elektronów, ω_p — pulsacja własna plazmy, ω — pulsacja pola elektromagnetycznego.

W przypadku plazmy o małych stratach, gdy $s^2 \ll 1$ wzór (2.1) przyjmie postać uproszczoną:

$$K_c \approx 1 - n_e - j n_e s. \quad (2.4)$$

Przeciętna laboratoryjna plazma wyładowania elektrycznego w gazach szlachetnych, która dostatecznie silnie oddziałuje z polem elektromagnetycznym anteny posiada w przybliżeniu następujące parametry: $N \leq 10^{11} \text{ cm}^{-3}$, $\omega_p \leq 1,7 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$, ν rzędu 10^9 s^{-1} oraz T rzędu 10^4 K .

Zachodzi potrzeba stwierdzenia, w jakim stopniu promieniowanie fali elektroakustycznej oraz powstawanie warstwy jonowej wpływa na wartość impedancji wejściowej anteny. Innymi słowy powstaje pytanie, czy przy danej pulsacji sygnału doprowadzonego do przekroju wejściowego anteny i dla plazmy o podanych wyżej parametrach granicznych

wartość impedancji wejściowej zależy jedynie od zjawisk związanych z promieniowaniem fali elektromagnetycznej.

Wpływ promieniowania fali elektroakustycznej na wartość impedancji wejściowej jest w ogólnym przypadku trudny do oszacowania. Balmain obliczył [6], przy pewnych fizycznie uzasadnionych założeniach upraszczających, składową elektroakustyczną impedancji wejściowej anteny, której długość jest mniejsza od długości promieniowanej fali elektromagnetycznej. Całkowita impedancja wejściowa anteny jest sumą składowej elektromagnetycznej Z_e i składowej elektroakustycznej Z_p . Dla obliczenia składowej Z_p impedancji niezbędna jest znajomość składowej elektroakustycznej E_p natężenia pola elektrycznego. Składowa E_p może być łatwo znaleziona jeżeli do pary równań Maxwella dołączy się równanie ruchu elektronów z uwzględnieniem siły spowodowanej gradientem ciśnienia gazu elektronowego, równanie ciągłości oraz równanie stanu gazu elektronowego. Z wymienionego kompletu równań można uzyskać równanie dla składowej elektroakustycznej natężenia pola elektrycznego:

$$(\nabla^2 - \alpha^2) \mathbf{E}_p = \frac{1 - K_c}{j\omega\epsilon_c} \nabla \nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (2.5)$$

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2 [n_e - (1 - js)]}{v^2}, \quad (2.6)$$

gdzie

$$v = \sqrt{\frac{\gamma k T}{m}} \quad (2.7)$$

— prędkość dźwięku w gazie elektronowym, γ — stosunek ciepł właściwych, k — stała Boltzmanna, T — temperatura elektronów, m — masa elektronu, $\mathbf{J}$ — gęstość prądu elektrycznego w antenie.

Zakładając, że rozkład prądu w antenie jest liniowy oraz, że prąd płynie na powierzchni przewodnika, można z (2.5) obliczyć składową podłużną natężenia pola E_{pz} oraz wartość składowej elektroakustycznej impedancji Z_p . Całkowita impedancja wejściowa anteny, której długość jest mniejsza od długości fali elektromagnetycznej jest dla $\omega > \omega_p$ równa [6]

$$Z = Z_e + Z_p = \frac{1}{j\omega\pi\epsilon_c h} \left\{ \ln \frac{h}{a} - 1 + (1 - K_c) \frac{\pi}{2} [J_0(\beta a) N_0(\beta a) + j J_0^2(\beta a)] \right\}, \quad (2.8)$$

gdzie $2h$ — długość anteny, a — promień anteny, J_0 , N_0 — funkcje Bessela, $\beta = -j\alpha$.

Plazma wyładowania elektrycznego w gazach szlachetnych o podanych wyżej parametrach granicznych, przy pulsacji sygnału $\omega \cong 6,28 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$ (mikrofalowe pasmo X) jest plazmą o małych stratach i spełnia następujące warunki: $v/\omega \ll 1$, oraz $\omega > \omega_p$.

Zgodnie z równaniem (2.8), wpływ promieniowania fali elektroakustycznej na wartość impedancji wejściowej może być pominięty jeśli zachodzą następujące nierówności:

$$\pi(1 - K) J_0(\beta a) N_0(\beta a) + 3,4 \ll \Omega, \quad (2.9)$$

$$\frac{1 - K}{2\omega h \epsilon} J_0^2(\beta a) \ll R_e, \quad (2.10)$$

gdzie

$$\Omega = 2 \ln \frac{2h}{a} \quad (2.11)$$

– smukłość anteny, R_e – składowa elektromagnetyczna rezystancji wejściowej.

Należy zauważyć, że dla plazmy o małych stratach K_e w równaniu (2.8) można zastąpić przez K . Dla krótkiej anteny mikrofalowej o umiarkowanej smukłości, w plazmie o wyżej podanych parametrach, nierówności (2.9) oraz (2.10) są dobrze spełnione. Można więc uważać, że krótka antena cylindryczna w opisanych warunkach ma pomijalnie małą składową elektroakustyczną impedancji wejściowej.

Antena, która jest krótka i cienka w stosunku do długości fali elektromagnetycznej, może być gruba i długa w porównaniu z długością fali elektroakustycznej. Fakt ten oznacza, że musi być uwzględniona skończona grubość przewodnika anteny poprzez przyjęcie wyżej wspomnianego założenia o powierzchniowym przepływie prądu. Przyjęcie liniowego rozkładu prądu wzdłuż anteny jest założeniem upraszczającym. Jest ono jednakże fizycznie uzasadnione, ponieważ oddziaływania pomiędzy prądem a oscylującą plazmą są w przypadku fali elektroakustycznej dostatecznie słabe [6]. Innymi słowy, o podłużnym rozkładzie prądu w antenie decydują przede wszystkim zjawiska elektromagnetyczne.

Można więc stwierdzić, że wzór (2.8) jest w przybliżeniu słuszny oraz, że impedancja wejściowa krótkiej anteny cylindrycznej, w zakresie mikrofalowym w plazmie wyładowania elektrycznego, praktycznie nie posiada składowej elektroakustycznej Z_p . Wydaje się, że wniosek ten może być uogólniony dla anteny o większej długości elektrycznej.

Wpływ warstwy jonowej powstającej wokół przewodnika anteny na wartość impedancji wejściowej może być oszacowany jeżeli znany jest stosunek promienia Debye'a λ_D w danej plazmie do średnicy przewodnika anteny $2a$.

Jeżeli $\lambda_D/2a \ll 1$, to wpływ warstwy jonowej na impedancję wejściową może być pominięty [6, 7, 8]. Wpływ warstwy jonowej powinien być uwzględniony jeżeli częstotliwość sygnału jest znacznie mniejsza od częstotliwości własnej plazmy o małej koncentracji elektronów i o małych stratach.

Dla przeciętnej plazmy wyładowania elektrycznego w gazach, która dostatecznie silnie oddziałuje z polem elektromagnetycznym anteny warunek $\lambda_D/2a \ll 1$ jest na ogół spełniony. Na przykład dla plazmy o podanych wyżej parametrach promień Debye'a jest rzędu 10^{-2} mm, natomiast średnica przewodu anteny rzędu 10^{-1} mm. W tych warunkach wpływ warstwy jonowej na wartość impedancji wejściowej może więc być zaniedbany.

3. Impedancja wejściowa liniowej anteny cylindrycznej w zimnej plazmie izotropowej

W niniejszym rozdziale przedstawiona jest metoda obliczania impedancji wejściowej anteny cylindrycznej umieszczonej w plazmie izotropowej. Przyjęto przy tym, że pulsacja pola, geometria anteny oraz parametry plazmy są takie, że impedancja wejściowa anteny posiada jedynie składową elektromagnetyczną. Innymi słowy przyjęto, że plazma jest zimna oraz, że promień Debye'a jest znacznie mniejszy od rozmiarów geometrycznych anteny.

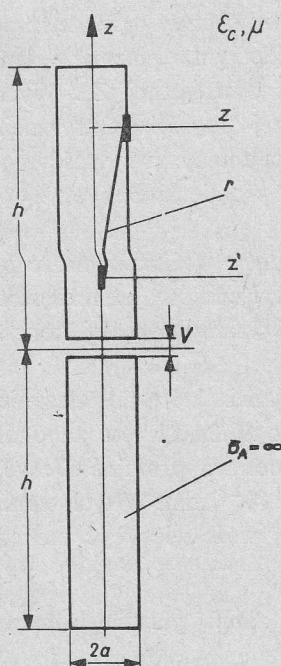
Dla obliczenia impedancji wejściowej wykorzystano metodę równania całkowego

Hallena [9] zmodyfikowanego przez Kinga i Harrisona [2] dla ośrodków stratnych. Równanie całkowe, które spełnia funkcja rozkładu prądu w antenie ma postać następującą [1, 10]:

$$\int_{-h}^h I(z') \frac{e^{-jkr}}{r} dz' = C \cos kz + \frac{2\pi V}{j\zeta} \sin k|z|, \quad (3.1)$$

gdzie $I(z')$ – funkcja rozkładu prądu, V – napięcie w przekroju wejściowym anteny, C – stała, ζ – impedancja falowa plazmy, k – zespolona stała propagacji fali, r – odległość od źródła pola do punktu, w którym oblicza się wartość pola, z – współrzędna.

Równanie całkowe (3.1) jest słuszne dla anten o dowolnej długości i o dużej smukłości Ω . Antena o dużej smukłości spełnia warunek $h \gg a$. Przyjęcie tego warunku pozwala założyć, że prąd $I(z')$ płynie w osi przewodnika anteny. Zakłada się również, że przewodność przewodnika anteny σ_A jest nieskończenie wielka. W praktyce oznacza to, że równanie (3.1) można stosować do ośrodków o ograniczonej przewodności. Plazma wyładowania elektrycznego w gazach o parametrach podanych wyżej, dobrze spełnia warunek ograniczonej



Rys. 1. Antena cylindryczna w układzie współrzędnych

przewodności. Na rys. 1 przedstawiona jest antena cylindryczna w układzie współrzędnych. Na rysunku tym zaznaczone są rozmiary geometryczne anteny oraz parametry otaczającej ją plazmy. Parametry elektryczne plazmy oraz zmienna r występująca w równaniu (3.1) wyrażają się następującymi wzorami:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}, \quad (3.2)$$

gdzie μ – przenikalność magnetyczna plazmy, oraz

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_c \mu} = \beta - j\alpha = \beta \left(1 - j \frac{\alpha}{\beta} \right) = \beta (1 - jp), \quad (3.3)$$

gdzie α – stała tłumienia, β – stała fazowa, $p = \alpha/\beta$,

$$r = [(z - z')^2 + a^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.4)$$

Nie jest znana dotychczas analityczna postać rozwiązania równania całkowego (3.1) dla anten o dowolnej długości. Otrzymane metodą iteracji rozwiązania w postaci nieskończonych szeregów mają bardzo złożoną postać i są mało przydatne w praktyce.

W dalszym ciągu niniejszej pracy przedstawione są wyniki obliczeń numerycznych otrzymanych przy założeniu, że funkcja rozkładu prądu może być aproksymowana wielomianem algebraicznym [10] stopnia n .

Część rzeczywistą β , część urojoną α zespolonej stałej propagacji k oraz impedancję falową plazmy wygodnie jest przedstawić następująco:

$$\alpha = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} t_\alpha, \quad (3.5)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} t_\beta, \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{\zeta} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (t_\beta - jt_\alpha), \quad (3.7)$$

gdzie

$$t_\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} - 1 \right]}, \quad (3.8)$$

$$t_\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} + 1 \right]}. \quad (3.9)$$

Dla plazmy o małych stratach ($s \ll 1$) można przyjąć następujące przybliżenia na wartość parametrów elektrycznych plazmy:

$$\varepsilon \cong \varepsilon_0 (1 - n_e), \quad (3.10)$$

$$\sigma \cong \varepsilon_0 n_e \nu, \quad (3.11)$$

$$\mu = \mu_0. \quad (3.12)$$

W takim przypadku

$$t_\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{n_e s}{1 - n_e} \right)^2} - 1 \right]}, \quad (3.13)$$

$$t_\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{n_e s}{1 - n_e} \right)^2} + 1 \right]}, \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{\sqrt{1 - n_e}}{\zeta_0} (t_\beta - jt_\alpha) = \frac{\sqrt{1 - n_e}}{376,5} (t_\beta - jt_\alpha), \quad (3.15)$$

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - n_e} t_\alpha, \quad (3.16)$$

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - n_e} t_\beta, \quad (3.17)$$

$$k = \beta(1 - jp) = \beta \left(1 - j \frac{t_\alpha}{t_\beta} \right) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - n_e} (t_\beta - jt_\alpha), \quad (3.18)$$

gdzie

$$p = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{t_\alpha}{t_\beta}, \quad (3.19)$$

ζ_0 – impedancja falowa próżni, c – prędkość światła w próżni.

Równanie (3.1) przyjmie więc postać:

$$\int_{-h}^h I(z') \frac{e^{-p\beta r} e^{-j\beta r}}{r} dz' = C \cos \beta(z - jpz) - \frac{2\pi V}{376,5} \sqrt{1 - n_e} (t_\alpha + jt_\beta) \cdot \sin \beta(|z| - jp|z|). \quad (3.20)$$

Dla otrzymania rozwiązania (3.20) wygodnie jest aproksymować funkcję rozkładu prądu wielomianem algebraicznym o postaci [10]

$$I(z') = \sum_{m=1}^n I_m \left(1 - \frac{|z'|}{h} \right)^m, \quad (3.21)$$

gdzie I_m – amplitudy zespolone prądów, n – stopień wielomianu.

Jak łatwo zauważyć, rozwinięcie (3.21) spełnia oczywiste równości

$$I(0) = I_1 + I_2 + \dots + I_n, \quad (3.22)$$

$$I(h) = 0. \quad (3.23)$$

Podstawiając wielomian (3.21) do (3.20) oraz zmieniając miejscami znak sumy i całki, i przyjmując, że równanie całkowe spełnione jest w $n+1$ punktach z_q wzdłuż anteny, takich że

$$z_q = (q-1) \frac{h}{n}, \quad (3.24)$$

gdzie $q=1, 2, \dots, (n+1)$, otrzymuje się:

$$\sum_{m=1}^n I_m F_m(z_q) - C \cos \beta(z_q - jpz_q) = -1,66 \cdot 10^{-2} V \sqrt{1 - n_e} (t_\alpha + jt_\beta) \sin \beta(|z_q| - jp|z_q|), \quad (3.25)$$

gdzie z kolei

$$F_m(z_q) = \int_{-h}^h \left(1 - \frac{|z'|}{h} \right)^m \frac{e^{-p\beta r_q} e^{-j\beta r_q}}{r_q} dz', \quad (3.26)$$

a

$$r_q = [(z_q - z')^2 + a^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.27)$$

Przyjmując, że I_m , F_m oraz C są zespolone, tzn. że

$$I_m = I_{mr} + jI_{mi}, \quad (3.28)$$

$$F_m(z_q) = F_{mr}(z_q) + jF_{mi}(z_q), \quad (3.29)$$

$$C = C_r + jC_i, \quad (3.30)$$

gdzie

$$F_{mr}(z_q) = \int_{-h}^h \left(1 - \frac{|z'|}{h}\right)^m \frac{e^{-p\beta r_q}}{r_q} \cos \beta r_q dz', \quad (3.31)$$

$$F_{mi}(z_q) = - \int_{-h}^h \left(1 - \frac{|z'|}{h}\right)^m \frac{e^{-p\beta r_q}}{r_q} \sin \beta r_q dz', \quad (3.32)$$

oraz rozwijając funkcje trygonometryczne w (3.25), otrzymuje się dwa układy równań liniowych dla części rzeczywistej I_{mr} oraz części urojonej I_{mi} amplitudy zespolonej prądu I_m :

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^n [I_{mr} F_{mr}(z_q) - I_{mi} F_{mi}(z_q)] + \\ & - C_r \cos \beta z_q \cosh p\beta z_q + C_i \sin \beta z_q \sinh p\beta z_q = \\ & = -1,66 \cdot 10^{-2} V \sqrt{1 - n_e} (t_\alpha \sin \beta |z_q| \cosh p\beta z_q + t_\beta \cos \beta z_q \sinh p\beta |z_q|), \end{aligned} \quad (3.33)$$

oraz

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^n [I_{mr} F_{mi}(z_q) + I_{mi} F_{mr}(z_q)] + \\ & - C_r \sin \beta z_q \sinh p\beta z_q - C_i \cos \beta z_q \cosh p\beta z_q = \\ & = -1,66 \cdot 10^{-2} V \sqrt{1 - n_e} (t_\beta \sin \beta |z_q| \cosh p\beta z_q - t_\alpha \cos \beta z_q \sinh p\beta |z_q|). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Admitancja wejściowa anteny jest zgodnie z definicją równa

$$Y = G + jB = \frac{I(0)}{V}. \quad (3.35)$$

Podstawiając do powyższego wyrażenia (3.22) oraz uwzględniając (3.28), otrzymuje się:

$$Y = \frac{1}{V} \sum_{m=1}^n I_m = \sum_{m=1}^n \left(\frac{I_{mr}}{V} + j \frac{I_{mi}}{V} \right) = \sum_{m=1}^n (G_m + jB_m). \quad (3.36)$$

Wzrosty równań liniowych (3.33) oraz (3.34) można ostatecznie przedstawić w nastę-

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^n [G_m F_{mr}(z_q) - B_m F_{mi}(z_q)] + \\
& - \bar{G} \cos \beta z_q \cosh p \beta z_q + \bar{B} \cos \beta z_q \cosh p \beta z_q = \\
& = -1,66 \cdot 10^{-2} \sqrt{1 - n_e} (t_\alpha \sin \beta |z_q| \cosh p \beta z_q + t_\beta \cos \beta z_q \sinh p \beta |z_q|), \quad (3.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^n [G_m F_{mi}(z_q) + B_m \cdot F_{mr}(z_q)] + \\
& - \bar{G} \sin \beta z_q \sinh p \beta z_q - \bar{B} \cos \beta z_q \cosh p \beta z_q = \\
& = -1,66 \cdot 10^{-2} \sqrt{1 - n_e} (t_\beta \sin \beta |z_q| \cosh p \beta z_q - t_\alpha \cos \beta z_q \sinh p \beta |z_q|), \quad (3.38)
\end{aligned}$$

gdzie G_m – składowe konduktancji wejściowej anteny, B_m – składowe susceptancji wejściowej anteny, $\bar{G} = C_r/V$ – stała, $\bar{B} = C_i/V$ – stała.

Jeżeli stopień wielomianu aproksymującego funkcję rozkładu prądu jest równy n , to układy (3.37) i (3.38) składają się z $2(n+1)$ równań liniowych. Rozwiązanie tych równań umożliwia wyznaczenie n składowych konduktancji wejściowej, n składowych susceptancji wejściowej anteny oraz dwóch nieznanymi stałych $\bar{G}$ oraz $\bar{B}$.

Impedancja wejściowa anteny

$$Z = \frac{1}{Y} = R + jX, \quad (3.39)$$

gdzie R – rezystancja wejściowa, X – reaktancja wejściowa, może być obliczona z oczywistych zależności:

$$R = \frac{\sum_{m=1}^n G_m}{\left(\sum_{m=1}^n G_m\right)^2 + \left(\sum_{m=1}^n B_m\right)^2}, \quad (4.40)$$

$$X = - \frac{\sum_{m=1}^n B_m}{\left(\sum_{m=1}^n G_m\right)^2 + \left(\sum_{m=1}^n B_m\right)^2}. \quad (3.41)$$

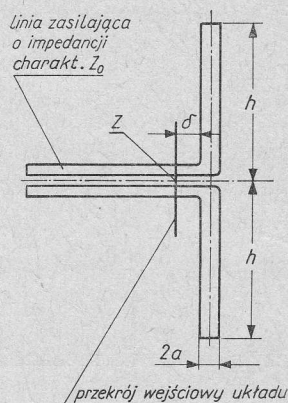
Przedstawiona wyżej metoda obliczeń impedancji wejściowej nie uwzględnia istnienia szczeliny zasilającej w rzeczywistej antenie cylindrycznej. W praktyce jednak, przy właściwie rozwiązaniem sposobie zasilania anteny, wpływ szczeliny na wartość impedancji wejściowej ma znaczenie drugorzędne.

4. Metodyka obliczeń impedancji anteny, z uwzględnieniem zastosowań do mikrofalowych pomiarów koncentracji elektronów w plazmie

Otrzymane w poprzednim rozdziale układy równań (3.37) i (3.38) oraz zależności (3.40) i (3.41) umożliwiają wyznaczenie impedancji wejściowej smukłej anteny cylindrycznej umieszczonej w plazmie wyładowania, która w podanych poprzednio warunkach

może być traktowana jako zimna plazma izotropowa o małych stratach. Przyjęto przy tym, że względna koncentracja elektronów $n_e \leq 0,5$, a względna częstość zderzeń $s \leq 0,1$. Taka wartość parametrów w przypadku mikrofalowego sygnału leżącego w pasmie X (częstotliwość $f \approx 10$ GHz) odpowiada przeciętnej plazmie wyładowania elektrycznego w gazach szlachetnych.

Układ równań (3.37) oraz (3.38) oraz całki (3.31) i (3.32) najwygodniej rozwiązać metodą numeryczną. W wyniku można otrzymać dla danych rozmiarów anteny h i a oraz danej pulsacji sygnału ω , wartości rezystancji wejściowej R oraz reaktancji wejściowej X



Rys. 2. Układ anteny z linią zasilającą

w funkcji względnych parametrów plazmy n_e oraz s . Stopień dokładności uzyskanych w ten sposób wartości R oraz X zależy oczywiście od stopnia wielomianu aproksymacyjnego (3.21), oraz od dokładności numerycznego obliczenia całek (3.31) i (3.32). Dla celów praktycznych wystarczy przyjąć stopień wielomianu $n=3$ oraz względną dokładność obliczeń wymienionych całek równą 10^{-4} .

Pomiar impedancji wejściowej anteny, przy znanych z obliczeń numerycznych zależnościach $R(n_e, s)$ i $X(n_e, s)$ umożliwia w zasadzie wyznaczenie parametrów plazmy n_e oraz s . Jak należało oczekiwać i jak wynika z treści następnego rozdziału, dla plazmy o małych stratach, reaktancja wejściowa anteny praktycznie nie zależy od względnej częstości zderzeń s i jest funkcją wyłącznie n_e . Występuje natomiast silna zależność od s rezystancji wejściowej tym większa, im większa względna koncentracja elektronów. Z faktu tego wynika, że dla wyznaczenia względnej koncentracji elektronów wystarcza pomiar reaktancji wejściowej anteny $X(n_e)$. W praktyce antena współpracuje z linią zasilającą o pewnej impedancji charakterystycznej Z_0 (rys. 2).

Przy częstotliwościach mikrofalowych, impedancja w dowolnym przekroju linii zasilającej może być wyznaczona z pomiaru rozkładu fali stojącej. Jak wiadomo, impedancja w dowolnym przekroju linii jest ściśle związana ze współczynnikiem odbicia Γ w tym przekroju. Jeżeli przekrój wejściowy układu linia-antena (rys. 2) wybrany zostanie w ten sposób, że $\delta \approx 0$, to pomiar współczynnika odbicia w tym przekroju umożliwia wyznaczenie impedancji wejściowej anteny unormowanej w stosunku do impedancji charakterystycznej Z_0 linii zasilającej.

Jak wspomniano wyżej, dla wyznaczenia koncentracji elektronów n_e w plazmie wystarcza pomiar reaktancji wejściowej anteny. Łatwo stwierdzić, że dla wyznaczenia n_e wystarczy również pomiar fazy współczynnika odbicia $\arg \Gamma$ w przekroju wejściowym układu. Należy podkreślić, że pomiar fazy współczynnika odbicia jest w układach mikrofalowych szczególnie prosty, dlatego wygodnie jest sporządzić krzywą $\arg \Gamma = f(n_e)$ umożliwiającą bezpośrednie wyznaczenie n_e z pomiaru $\arg \Gamma$.

Współczynnik odbicia w przekroju wejściowym dany jest następującą zależnością:

$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1}, \quad (4.1)$$

gdzie

$$z = \frac{Z}{Z_0} = \frac{R+jX}{Z_0} = r+jx, \quad (4.2)$$

oraz

$$r = \frac{R}{Z_0}, \quad (4.3)$$

$$x = \frac{X}{Z_0}. \quad (4.4)$$

Współczynnik odbicia można, korzystając z (4.2), przedstawić w postaci

$$\Gamma = \frac{r^2 + x^2 - 1 + j2x}{(r+1)^2 + x^2}. \quad (4.5)$$

Fazę współczynnika odbicia można wyznaczyć z następujących zależności:

$$\arg \Gamma = \varphi, \quad (4.6)$$

jeżeli $r^2 + x^2 - 1 > 0$ i $x > 0$,

$$\arg \Gamma = \varphi + \pi, \quad (4.7)$$

jeżeli $r^2 + x^2 - 1 < 0$ i $x > 0$ lub $r^2 - x^2 - 1 < 0$ i $x < 0$, oraz

$$\arg \Gamma = \varphi + 2\pi, \quad (4.8)$$

jeżeli $r^2 + x^2 - 1 > 0$ i $x < 0$ gdzie

$$\varphi = \arctg \frac{2x}{r^2 + x^2 - 1}. \quad (4.9)$$

Korzystając z (4.6) do (4.9) można dla danej anteny oraz danej impedancji charakterystycznej Z_0 wyznaczyć zależność $\arg \Gamma = f(n_e)$ i przedstawić ją w postaci graficznej.

Przebieg $\arg \Gamma$ w funkcji n_e jest w ogólnym przypadku nieliniowy. Stwierdzono jednakże na podstawie wyników uzyskanych w tej pracy, że dla anten, których długość jest bliska połowie długości fali sygnału, istnieje optymalna wartość impedancji charakterystycznej linii Z_0 , przy której zależność $\arg \Gamma = f(n_e)$ jest najbliższa liniowej.

Metodą numeryczną można w łatwy sposób wyznaczyć taką wartość Z_0 , aby suma

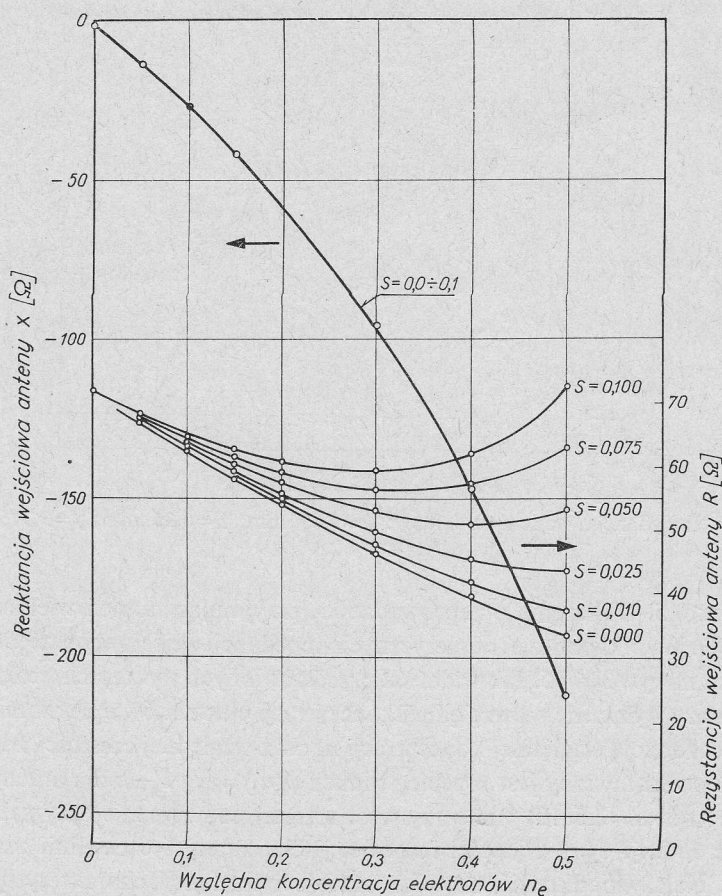
kwadratów odchyłek funkcji $\varphi(n_e)$ od prostej $an_e + b$ miała wartość minimalną:

$$\sum_{i=1}^q [\varphi(n_{ei}) - (an_{ei} + b)]^2 = \min(Z_0, a, b). \quad (4.10)$$

Można przy tym jednocześnie znaleźć współczynniki a i b prostej najlepszego przybliżenia. Liniowa zależność $\text{Arg } \Gamma$ od względnej koncentracji elektronów jest szczególnie cenna z punktu widzenia praktycznego.

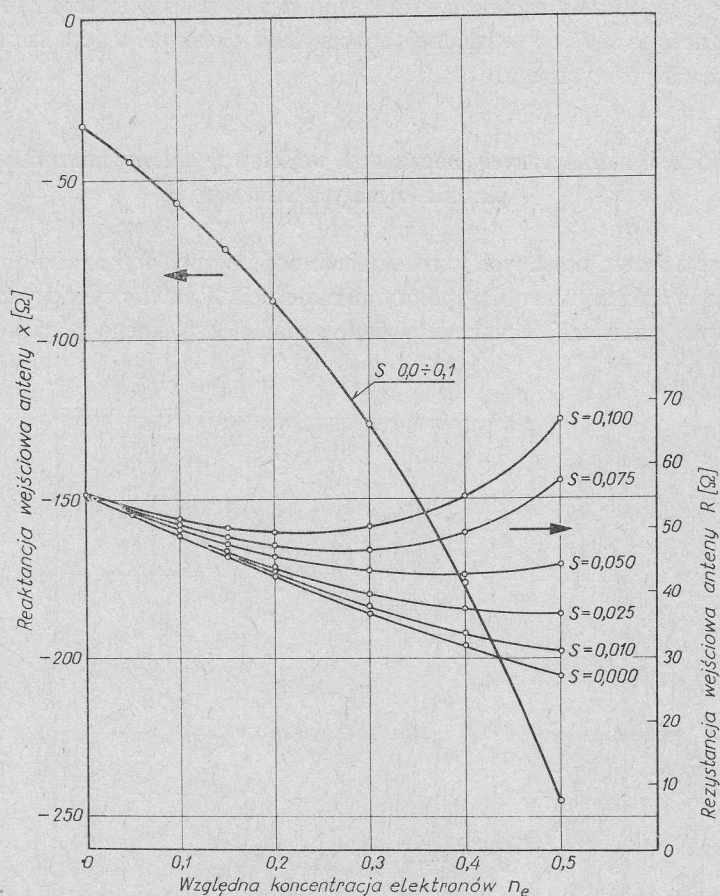
5. Wyniki obliczeń numerycznych impedancji wejściowej anteny mikrofalowej w zimnej plazmie o małych stratach

Korzystając z metod opisanych w rozdziałach poprzednich wykonano obliczenia impedancji wejściowej oraz argumentu współczynnika odbicia Γ anteny cylindrycznej pracującej w mikrofalowym pasmie X w plazmie wyładowania elektrycznego w gazach. Obliczenia



Rys. 3. Impedancja wejściowa anteny: $h=6,88$ mm, $a=0,25$ mm, $f=9,375 \cdot 10^9$ Hz

wykonano dla pulsacji sygnału mikrofalowego $\omega = 5,88 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$ dla trzech długości anteny w pobliżu rezonansu półfalowego: $h = 6,88 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $h = 7,39 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ oraz $h = 8,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Promień przewodnika anteny $a = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$. Przyjęto przy tym, że względna częstość zderzeń elektronów z cząstkami ciężkimi $s \leq 0,1$, a względna koncentracja elektronów

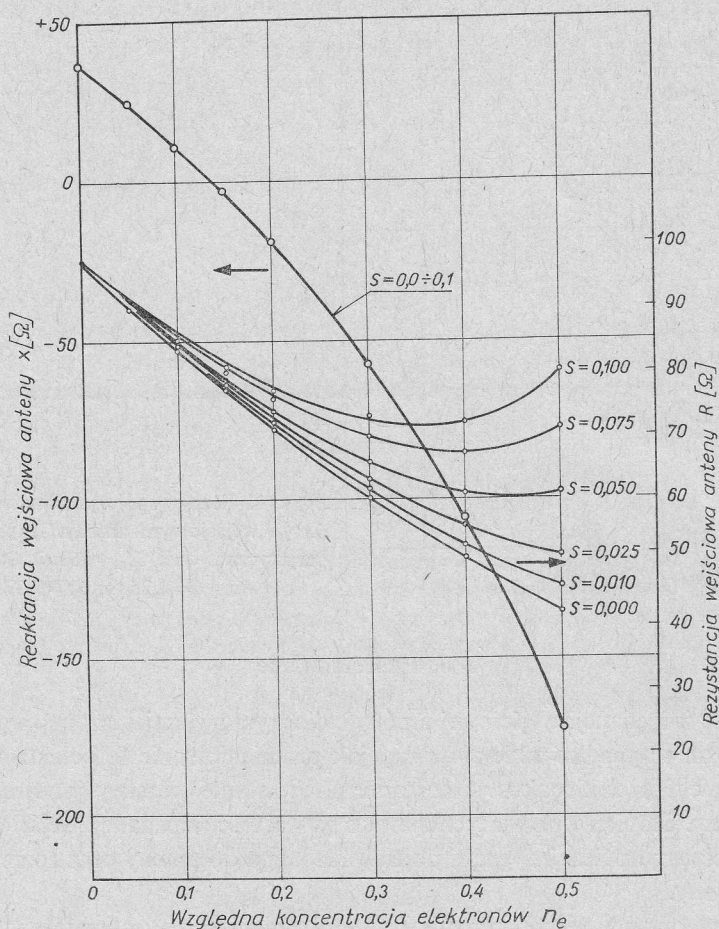


Rys. 4. Impedancja wejściowa anteny: $h = 7,39 \text{ mm}$, $a = 0,25 \text{ mm}$, $f = 9,375 \cdot 10^9 \text{ Hz}$

w plazmie $n_e \leq 0,5$. Obliczenia przeprowadzono, przyjmując stopień wielomianu aproksymującego $n = 3$. Wyniki obliczeń numerycznych impedancji wejściowej przedstawiono w postaci wykresów na rys. 3, 4 i 5. Jak widać na przedstawionych wykresach, reaktancja wejściowa anteny zależy wyłącznie od względnej koncentracji elektronów n_e , natomiast rezystancja wejściowa jest funkcją względnej koncentracji n_e oraz względnej częstości zderzeń s .

Na rys. 6 przedstawiony jest przebieg funkcji $\varphi(n_e) = \arg \Gamma - \pi$ dla anteny o wymiarach $h = 7,39 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ i $a = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, przy wyznaczonej numerycznie optymalnej ze względu na liniowość funkcji $\varphi(n_e)$ wartości impedancji charakterystycznej linii zasilającej antenę $Z_0 = 160 \Omega$. Należy podkreślić, że taka wartość impedancji charakterystycznej linii jest praktycznie realizowalna. Jak widać, liniowość $\varphi(n_e)$ jest bardzo dobra. Ma to duże znacze-

nie w technice pomiarowej, gdyż z pomiaru kąta fazowego φ można w prosty i bezpośredni sposób wyznaczyć wartość względnej koncentracji elektronów w plazmie. Cenne jest również to, że nachylenie prostych $\varphi(n_e)$, jak widać z rys. 6, bardzo mało zależy od względnej częstości zderzeń s .



Rys. 5. Impedancja wejściowa anteny: $h=8,00$ mm, $a=0,25$ mm, $f=9,375 \cdot 10^9$ Hz

Z omawianego wykresu można w prosty sposób wyznaczyć zależność względnej koncentracji elektronów n_e od kąta fazowego φ :

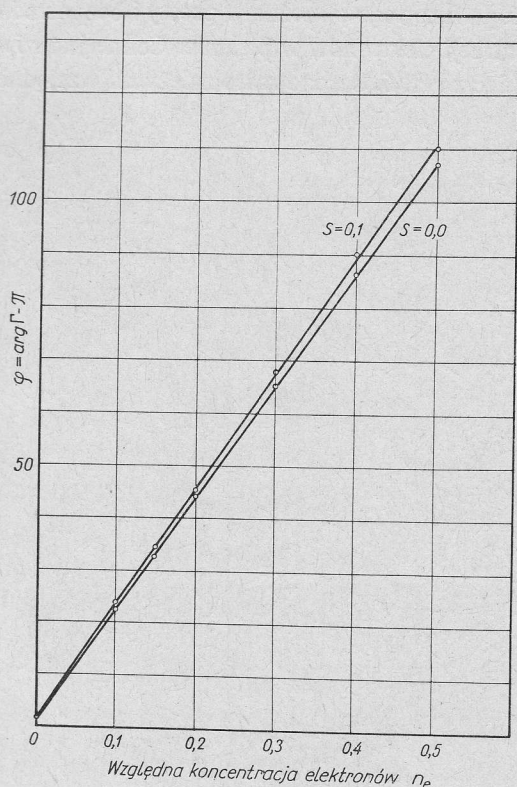
$$n_e = 4,8 \cdot 10^{-3} \varphi - 10^{-2} \quad (5.1)$$

dla $s=0$ i

$$n_e = 4,6 \cdot 10^{-3} \varphi - 10^{-2} \quad (5.2)$$

dla $s=0,1$.

Kąt fazowy φ w powyższych zależnościach wyrażony jest w stopniach.



Rys. 6. Faza współczynnika odbicia w przekroju wejściowym anteny. Impedancja charakterystyczna linii $Z_0 = 160 \Omega$. Antena: $h = 7,39$ mm, $a = 0,25$ mm, $f = 9,375 \cdot 10^9$ Hz

6. Podsumowanie

Na wartość impedancji wejściowej anteny cylindrycznej umieszczonej w plazmie wpływają w ogólnym przypadku takie zjawiska, jak promieniowanie fali elektromagnetycznej, promieniowanie fali elektroakustycznej oraz powstawanie warstwy jonowej wokół przewodnika anteny. Stopień wpływu tych zjawisk na wartość impedancji wejściowej zależy od parametrów plazmy, pulsacji sygnału doprowadzonego do anteny oraz rozmiarów geometrycznych anteny.

W pracy pokazano, że w przypadku anteny pracującej w mikrofalowym pasmie X , umieszczonej w przeciętnej plazmie wyładowania elektrycznego w gazach, wpływ promieniowania fali elektroakustycznej oraz wpływ warstwy jonowej na wartość impedancji anteny może być pominięty. Ograniczając się więc jedynie do uwzględnienia zjawiska promieniowania fali elektromagnetycznej, przedstawiono metodę wyznaczania impedancji anteny w zimnej plazmie izotropowej. Metoda ta polega na numerycznym rozwiązaniu równania całkowego Hallena dla funkcji rozkładu prądu w antenie. Uzyskane tą drogą wyniki pozwoliły dodatkowo stwierdzić, że istnieje możliwość prostego wyznaczania względnej koncentracji elektronów w plazmie z pomiaru argumentu współczynnika odbicia Γ w linii prowadzącej do anteny. Pokazano przy tym, że można tak wybrać impedancję charakterystyczną Z_0 tej linii, aby zależność argumentu współczynnika odbicia od względnej koncentracji elektronów n_e była liniowa.

Wyniki tej pracy mogą być przydatne w mikrofalowej diagnostyce plazmy wyładowania elektrycznego w gazach lub plazmy o zbliżonych własnościach fizycznych. Antena mikrofalowa może stanowić niezależne narzędzie pomiarowe, umożliwiając w ten sposób weryfikację wyników pomiarów uzyskanych na innej drodze.

Obliczenia numeryczne przeprowadzone zostały za pomocą maszyny cyfrowej Odra 1204.

Autor bardzo dziękuje Pani mgr G. Żmudzie-Trzebiatowskiej i Panu mgr T. Jankowskiemu za opracowanie programu obliczeń numerycznych, a Panu inż. J. Wasilewskiemu za pomoc w opracowaniu rysunków.

Praca wpłynęła do Redakcji w październiku 1973 r.

Literatura

- [1] R. W. P. King, C. W. Harrison, *Half-Wave Cylindrical Antenna in a Dissipative Medium: Current and Impedance*. J. Res. N.B.S. **64 D**, 365 - 380 (1960).
- [2] R. W. P. King, C. W. Harrison, Jr., D. H. Denton, Jr., *The Electrically Short Antenna as a Probe for Measuring Free Electron Densities and Collision Frequencies in an Ionized Region*. J. Res. N.B.S. **65 D**, 371 - 384 (1961).
- [3] G. A. Deschamps, *Impedance of an Antenna in a Conducting Medium*. IRE Trans. AP-10, 648 - 650 (1962).
- [4] L. D. Scott, B. R. Rao, *A Short Cylindrical Antenna as a Diagnostic Probe for Measuring Collision Frequencies in a Collision-Dominated Non-Maxwellian Plasma*. IEEE Trans. AP-17, 777-786 (1969).
- [5] M. A. Heald, C. B. Wharton, *Plasma Diagnostics with Microwaves*. John Wiley & Sons (1965).
- [6] K. G. Balmain, *Impedance of Short Dipole in a Compressible Plasma*. Radio Sci. **69 D**, 559 - 566 (1965).
- [7] I. A. Waletzko, G. Bekefi, R. F. *Admittance Measurements of a Slotted-Sphere Antenna Immersed in a Plasma*. Radio Sci. **2**, 489 - 493 (1967).
- [8] R. S. Harp, F. W. Crawford, *Characteristics of the Plasma Resonance Probe*. J. Appl. Phys. **35**, 3436 (1964).
- [9] R. W. P. King, *The Theory of Linear Antennas*. Harvard University Press (1956).
- [10] B. D. Popović, *Theory of Cylindrical Antennas in Conducting Media*. Proc. IEEE **118**, 507 - 510 (1971).

Теоретические основы измерения концентрации электронов в плазме разряда с применением цилиндрической микроволновой антенны

Резюме

В работе представлен анализ поведения цилиндрической линейной антенны в изотропной плазме. Используя метод интегрального уравнения для тока производится расчет входной импедансии микроволновой цилиндрической антенны в холодной плазме, характеризующейся малыми потерями. Представлен также, основанный на результатах численных расчетов, простой способ определения относительной концентрации электронов по принципу замера аргумента коэффициента отражения в линии питания антенны.

Theoretical Principles of Electron Number Density Measurements in an Electrical Discharge Plasma with the Use of a Cylindrical Microwave Antenna

Summary

An analysis of the linear cylindrical antenna behaviour in an isotropic plasma is presented. Based on the method of integral equation for the current, the input impedance of a cylindrical microwave antenna immersed into a small-loss cold plasma was calculated. There is also presented on the basis of the numerical calculation results a simple method of determining a relative electron number density from measurements taken on the argument of the reflection coefficient in the antenna feeder.