

INSTYTUT MASZYN PRZEPIYWOVYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

redakcja

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPIYWOVYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

65

WARSZAWA—POZNAŃ 1974

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW
MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

KOMITET REDAKCYJNY — EXECUTIVE EDITORS
KAZIMIERZ STELLER — REDAKTOR — EDITOR
JERZY KOŁODKO · JÓZEF ŚMIGIELSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA — EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN, 80-952 Gdańsk,
skr. pocztowa 621, ul. Gen. Józefa Fiszer 14, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1974

Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 400+90 egz.	Oddano do składania 31 V 1974 r.
Ark. wyd. 14. Ark. druk. 11.	Podpisano do druku 2 XII 1974 r.
Papier ilustrac. kl. V, 70 g 70×100 cm.	Druk ukończono w grudniu 1974 r.
Nr zam. 449/30.	F-15/1068. Cena zł 42,—

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

JÓZEF WIĘCKOWSKI

Gdańsk

Wstęp do teorii zginania belek o zmiennej strukturze*

Omówiono przejście graniczne od dyskretnego układu ze zderzakami, liną i amortyzatorami do układu ciągłego o zmiennej strukturze. Rozwiązano kilka zadań statycznych i dynamicznych pod obciążeniem ruchomym i harmonicznym w czasie. Rozwiązano zagadnienie zderzenia wewnętrznego w układzie według różnych modeli teoretycznych.

1. Wstęp

Dynamika i statyka belek na podłożu sprężystym Winklera znajduje szerokie zastosowanie w mechanice konstrukcji okrętowych, budowlanych itp. Teoria takich belek jest dobrze znana, szczególnie w zakresie sprężystym. W zastosowaniu do dynamiki mostów i nawierzchni dróg (gdzie stosuje się również inne modele teoretyczne, np. półprzestrzeń sprężystą) można znaleźć obszerne monografie, np. [1], w której autor cytuje około trzysta pozycji bibliograficznych (do 1971 r.) poświęconych dynamice prętów pod obciążeniami ruchomymi. Zarówno wśród wymienionych w tej monografii prac, jak również wśród innych dostępnych czasopism do 1973 roku autor niniejszej pracy nie znalazł elementów teorii zginania prętów przedstawionej w niniejszej pracy. Przez zmienną strukturę belki będziemy rozumieli jednostronne więzy typu różniczkowego narzucone na ugięcia lub siły wewnętrzne.

Niniejszy artykuł jest kontynuacją badań podjętych w 1970 r. [2] nad dynamiką pewnych układów łańcuchowych. W cytowanej pracy sformułowano i zbadano analitycznie różne uproszczone modele układów łańcuchowych, aproksymując ich ruch ruchem zastępczych układów ciągłych o zmiennej strukturze. Nie uwzględniono wtedy w badaniach wpływu bezwładności obrotowej, który okazał się istotny zgodnie z pracą [3], jak również zderzenia wewnętrznego.

Niniejsza praca ma na celu przedstawienie różnych modeli teoretycznych ciągłych układów łańcuchowych z elementami sztywnymi w zależności od przyjmowania relacji konstytutywnych. Zmienna struktura będzie zadawana jednostronnym ograniczeniem krzywizny lub momentu gnącego. Rozwiązania statyczne przedstawione w punkcie 5 można częściowo znaleźć w pracy [2]. Badanie wpływu amortyzatorów lepkich na fali

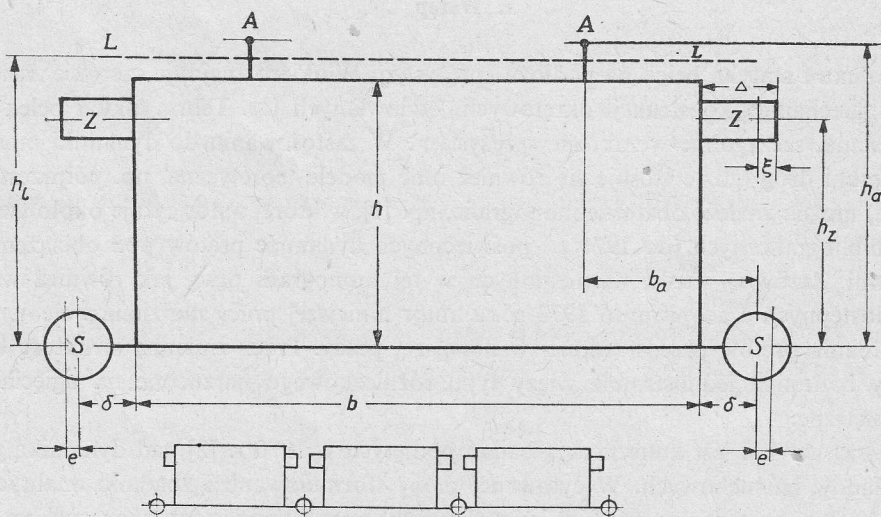
* Praca wykonana w ramach problemu resortowego PAN-19, grupa tematyczna 2.

regularnej (pkt 6), problem dynamiczny ruchu pręta pod działaniem siły i momentu skupionego poruszających się ze stałą prędkością (pkt 7), jak również zagadnienia zderzenia wewnętrznego omawiane w części ogólnej i zastosowaniach, stanowią, zdaniem autora, oryginalną część pracy.

Nie przedstawia się żadnych wyników analizy numerycznej problemu, jeżeli końcowe wzory nie są proste. Obszerna dyskusja tego rodzaju będzie opublikowana w osobnym opracowaniu. Niewątpliwie kontrowersyjne są modele zderzenia wewnętrznego, które muszą znaleźć głębsze uzasadnienie teoretyczne, jak również potwierdzenie eksperymentalne. Osobliwe jest również występowanie w układzie ciągłym zjawiska odwrotnego do zderzenia, przy którym powstaje kręt układu.

2. Opis deformacji

Dla opisu położenia układu łańcuchowego złożonego z elementów jak na rys. 1, niezbędne są dla każdego elementu łańcucha trzy parametry, gdyż do chwili wyczerpania luzu na zderzeniach Z oraz luzów w sworzniach S , każdy z elementów powtarzalnych porusza się jak płaskie, swobodne ciało sztywne.



Rys. 1. Element powtarzalny układu i zestaw łańcuchowy elementów

Położenie wzajemne uch łączących dwa elementy przy wzajemnej translacji elementów można zawsze opisać parametrami e i θ jak na rys. 2, gdzie x — przyjęta oś pozioma. Oprócz tego cały element, jak ciało sztywne, może ulegać obrotowi o kąt φ względem osi x . Ogólnie mamy zatem trzy parametry wygodne do opisu układu — e , θ , φ , gdzie e i θ podlegają następującym ograniczeniom:

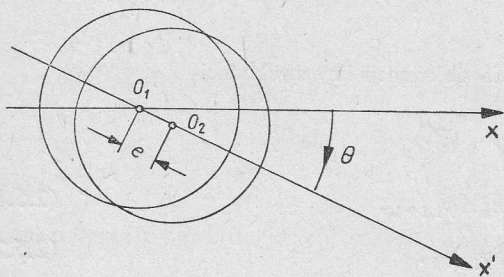
$$0 \leq e \leq D - d, \quad (2.1.1)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (2.1.2)$$

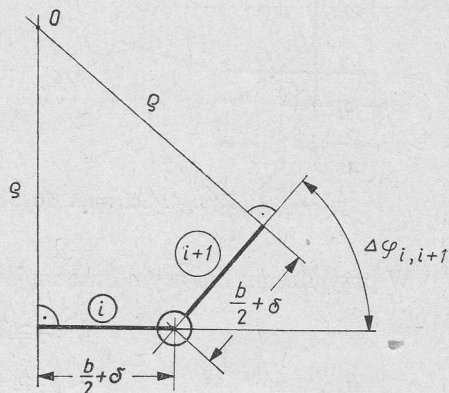
natomiast φ jest kątem małym, tzn.

$$|\varphi| \leq 1. \quad (2.1.3)$$

Rozważmy łańcuch elementów powtarzalnych, spełniających warunek $e \equiv 0$ i $\theta \equiv 0$ i wprowadźmy przyrosty kąta obrotu φ , przy przejściu od elementu i -tego do $i+1$ -ego $\Delta\varphi_{i,i+1}$. Jest to zatem kąt obrotu elementu $i+1$ względem elementu i . Niech ξ_i oraz ξ_{i+1}



Rys. 2. Wzajemne położenie łańcuchów łączących elementy powtarzalne



Rys. 3. Schemat do wyznaczenia krzywizny zastępczego układu ciągłego

oznaczają ściśnięcia (dodatnie, rys. 1) zderzaków, to, zgodnie z rys. 3, promień koła wpisanego w linię łamaną elementów lub jego krzywizna $1/\rho$ będzie

$$\frac{1}{\rho} = 2 \frac{\delta - \Delta}{(b - 2\delta)h_z} + \frac{\xi_i - \xi_{i+1}}{(b + 2\delta)h_z}, \quad (2.2.1)$$

a związek krzywizny z przyrostem kąta o skierowaniu dodatnim +)

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\Delta\varphi_{i,i+1}}{b + 2\delta}. \quad (2.2.2)$$

Do wprowadzenia relacji (2.2) i (2.3) wykorzystano założenie

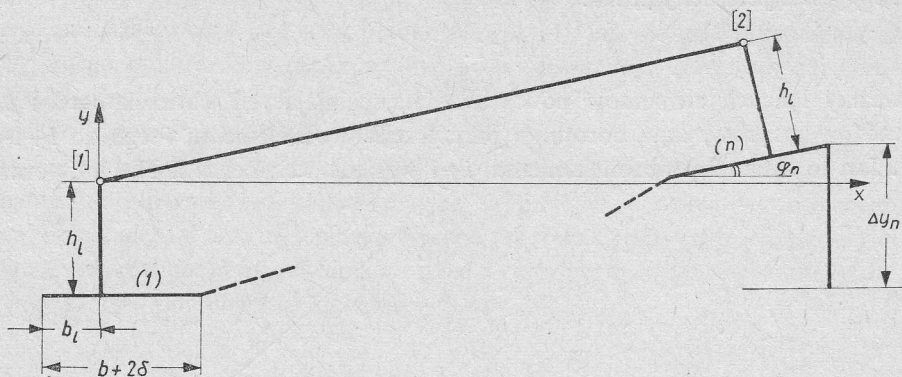
$$|\Delta\varphi_{i,i+1}| \ll 1. \quad (2.3)$$

Relacja (2.2.2) stanowi podstawowy związek do aproksymacji dyskretnego układu łańcuchowego układem ciągłym.

Opis deformacji amortyzatorów A (rys. 1) sprowadza się do obliczenia odległości punktów zamocowania jako funkcji $\Delta\varphi_{i,i+1}$. Z rys. 4 współrzędne punktu [2] w układzie x_2, y_2 mają postać:

$$x_2 = b_a + b_a \cos \Delta\varphi_{i,i+1} + h_a \sin \varphi_{i,i+1}, \quad (2.4.1)$$

$$y_2 = h_a \cos \varphi_{i,i+1} - b_a \sin \Delta\varphi_{i,i+1} - h_a. \quad (2.4.2)$$



Rys. 4. Schemat do obliczenia deformacji liny swobodnej

W przybliżeniu liniowym otrzymujemy

$$x_2 \cong 2b_a + h_a \Delta \varphi_{i,i+1}, \quad (2.5.1)$$

$$y_2 \cong -b_a \Delta \varphi_{i,i+1}. \quad (2.5.2)$$

Odległość punktów zamocowania amortyzatorów po uwzględnieniu jedynie składnika liniowego wynosi

$$\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 2b_a + h_a \Delta \varphi_{i,i+1} \equiv A_a. \quad (2.6)$$

Opis deformacji linii L (rys. 1) można sprowadzić do schematu jak na rys. 4. Przy założeniu małych kątów, łatwo wykazać, że

$$\Delta y_n = (b + 2\delta)[(n-1) \Delta \varphi_{1,2} + (n-2) \Delta \varphi_{2,3} + \dots + \Delta \varphi_{n-1,n}], \quad (2.7.1)$$

$$\varphi_n = \sum_{j=2}^n \Delta \varphi_{j-1,j}. \quad (2.7.2)$$

W przyjętym na rys. 4 układzie odniesienia, współrzędne punktu [2] są przy założeniu małych φ_i :

$$x_2 = n(b + 2\delta) - 2b_l + h_l \varphi_n, \quad (2.8.1)$$

$$y_2 = \Delta y_n + b_l \varphi_n. \quad (2.8.2)$$

Obliczenie odległości punktów [1] i [2] daje aktualną długość linii A_l (gdy jest napięta do linii prostej). Długość ta w przybliżeniu liniowym wynosi:

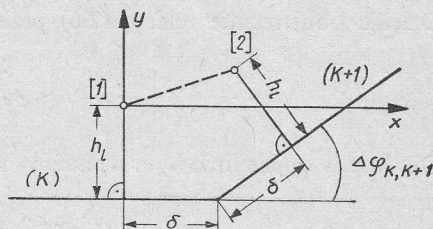
$$A_l = n(b + 2\delta) - 2b_l \sum_{j=2}^n \varphi_{j-1,j}, \quad (2.9)$$

a w przybliżeniu kwadratowym

$$A_l = n(b + 2\delta) - 2b_l + h_l \varphi_n - \frac{1}{2} \frac{h_l^2}{n(b + 2\delta) - 2b_l} \varphi_n^2 + \frac{1}{2} \frac{(\Delta y_n - b_l \varphi_n)^2}{n(b + 2\delta) - 2b_l}. \quad (2.10)$$

W przypadku mocowania równoległego liny do elementów na wysokości h_l otrzymuje się wynik odmienny dopiero w przybliżeniu kwadratowym. Znajdźmy bowiem dla elementów k i $k+1$ odległość punktów [1] i [2] według rys. 5.

Rys. 5. Schemat do obliczenia deformacji liny przylegającej



Współrzędne punktu [2], przy zachowaniu jedynie składników liniowych są

$$x_2 = 2\delta + h_l \Delta \varphi_{k,k+1}, \quad (2.11.1)$$

$$y_2 = -\delta \Delta \varphi_{k,k+1}, \quad (2.11.2)$$

skąd odległość punktów [1] i [2] z zachowaniem części liniowych i drugiego stopnia

$$\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 2\delta + h_l \Delta \varphi_{k,k+1} + \frac{\delta}{4} \left(1 - \frac{h_l^2}{\delta^2} \right) \Delta^2 \varphi_{k,k+1}. \quad (2.12)$$

Obliczając teraz całkowitą długość liny, gdy jest napięta, za zachowaniem składników do drugiego stopnia łącznie, otrzymujemy

$$A_l = n(b + 2\delta) - 2b_l + h_l \varphi_n + \frac{\delta}{4} \left(1 + \frac{h_l^2}{\delta^2} \right) \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta \varphi_{k,k+1})^2. \quad (2.13)$$

W przybliżeniu liniowym wynik jest identyczny z (2.9).

Przejście na zastępczy układ ciągły odbywa się przez wprowadzenie znanego, elementarnego związku krzywizny z drugą pochodną

$$\frac{1}{\rho} = -y'' \quad (2.14)$$

i przez wprowadzenie odkształceń właściwych zderzaków

$$\tilde{\xi}_1(x) \equiv \frac{\xi_{i+1}}{b + 2\delta}, \quad (2.15.1)$$

$$\tilde{\xi}_2(x) \equiv \frac{\xi_i}{b + 2\delta} \quad (2.15.2)$$

oraz całkowitego odkształcenia właściwego

$$\tilde{\xi}(x) \equiv \tilde{\xi}_1(x) + \tilde{\xi}_2(x). \quad (2.16)$$

Do modelu ciągłego wprowadzimy również właściwe odkształcenie amortyzatorów

$$\lambda_a \equiv \frac{A_a}{b+2\delta}. \quad (2.17)$$

Dzieląc obustronnie relację (2.6) przez $b+2\delta$ i korzystając z (2.3) i (2.14) otrzymamy

$$\lambda_a = \frac{2b_a}{b+2\delta} + h_a y''. \quad (2.18)$$

Dla liny w opisie liniowym wpiszemy relację (2.9) w postaci

$$A_l = n(b+2\delta) - 2b_l + h_l(b+2\delta) \sum_{j=2}^n \left(-\frac{1}{\rho_j} \right). \quad (2.19)$$

Zastępując krzywiznę drugą pochodną, otrzymujemy w przybliżeniu

$$(b+2\delta) \sum_{j=2}^n y_j'' \cong \int_{l_p}^{l_k} y'' dx = y'(l_k) - y'(l_p) \quad (2.20)$$

i ostatecznie wydłużenie liny będzie

$$A_l = n(b+2\delta) - 2b_l + h_l[y'(l_k) - y'(l_p)], \quad (2.21)$$

a l_k i l_p oznaczają oczywiście współrzędne początku i końca liny (miejsc zamocowania).

Przybliżenia ciągłe drugiego stopnia podamy jedynie dla prostszego przypadku liny przylegającej. Ostatni składnik w równaniu (2.13) można wtedy przybliżyć następująco:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{4} \left(1 + \frac{h_l^2}{\delta^2} \right) \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta \varphi_{k,k+1})^2 &= \frac{1}{4} \delta (b+2\delta) \left(1 + \frac{h_l^2}{\delta^2} \right) \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\Delta \varphi_{k,k+1}}{b+2\delta} \right)^2 (b+2\delta) \cong \\ &\cong \frac{1}{4} \delta (b+2\delta) \left(1 - \frac{h_l^2}{\delta^2} \right) \int_{l_p}^{l_k} (y'')^2 dx. \end{aligned} \quad (2.22)$$

3. Siły wewnętrzne i równania ruchu

Przekroźmy rozważany układ łańcuchowy przez sworzeń łączący elementy i oraz $i+1$ i narysujmy oddziaływanie prawej odrzuconej części układu na część lewą, zakładając dodatnie skierowania jak na rys. 6 (siły rysujemy tu oczywiście na układzie nieodkształconym).

Redukując wszystkie oddziaływania w przekroju do osi sworzni, otrzymamy moment

$$M_{i,i+1} = -R_{a,i,i+1} h_a - R_l h_l - R_{z,i,i+1} h_z \quad (3.1)$$

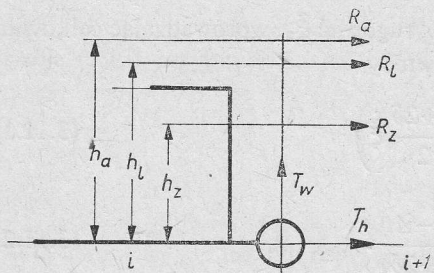
oraz siłę poziomą

$$P_{i,i+1} = R_{a,i,i+1} + R_l + R_{z,i,i+1} + T_{h,i,i+1}. \quad (3.2)$$

Jeżeli na układ nie działają żadne siły poziome $P_{i,i+1} = 0$, jeżeli natomiast do prawego

końca łańcucha przyłożymy na linii sworznia siłę podłużną P i pominiemy bezwładność ruchu podłużnego, to $P_{i,i+1}=P$.

Ustalimy prawa konstytutywne dla poszczególnych rodzajów sił. Przyjmujemy, że amortyzatory mają charakterystyki zależne jedynie od prędkości.



Rys. 6. Siły wewnętrzne w przekroju przez sworznie

Dla modelu dyskretnego mamy wtedy

$$R_{a,i;i+1} = f_a \left(h_a \frac{d}{dt} (\Delta \varphi_{i;i+1}) \right), \quad (3.3)$$

a dla układu ciągłego

$$R_a = f_a \left(h_a (b+2\delta) \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} \right). \quad (3.4)$$

Siła w linii R_l będzie zależała zarówno od długości linii w stanie nienapiętym l_0 , jak również od aktualnej odległości zamocowań A_l . Nie będziemy wprowadzali tutaj zależności od prędkości. Mamy zatem

$$R_l = f_l(l_0, A_l) \quad (3.5)$$

i tylko w zależności od tego, czy rozważamy model ciągły, czy dyskretny, i zależnie od sposobu mocowania, należy podstawić odpowiednie A_l .

Siła w zderzakach $R_{z,i;i+1}$ jest dla obydwu zderzaków na styku jednakowa. Mamy zatem

$$R_{z,i;i+1} = f_z(\xi_2, \dot{\xi}_2) \quad (3.6)$$

oraz relację wynikającą z założenia jednakowych sił w obydwu zderzakach

$$f_z(\xi_2, \dot{\xi}_2) = f_z(\xi_1, \dot{\xi}_1). \quad (3.7)$$

Dla układu ciągłego otrzymujemy w oczywisty sposób

$$R_z = f_z(\tilde{\xi}_2(b+2\delta), \dot{\tilde{\xi}}_2(b+2\delta)), \quad (3.8.1)$$

$$f_z(\tilde{\xi}_2(b+2\delta), \dot{\tilde{\xi}}_2(b+2\delta)) = f_1(\tilde{\xi}_1(b+2\delta), \dot{\tilde{\xi}}_1(b+2\delta)), \quad (3.8.2)$$

oraz dodatkową relację wynikającą z (2.2) i (2.15)

$$y'' = -2 \frac{\delta - \Delta}{(b+2\delta)h_2} - (\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2) \frac{1}{h_z}. \quad (3.9)$$

W szczególnym, najprostszym przypadku, gdy układ jest liniowy, tzn. elementy powtarzalne mają burty prostopadłe do płaszczyzny swobodnej i stałą szerokość

$$\mathcal{H}_q(z_1, z_2) = -k_1 z_1, \quad (3.14.1)$$

$$\mathcal{H}_m(z_1, z_2) = k_2 z_2, \quad (3.14.2)$$

relacje (3.13) przyjmują postać

$$q = q_0 - k_1 y + A k_1 f(x, t), \quad (3.15.1)$$

$$m = m_0 + k_2 \frac{\partial y}{\partial x} - A k_2 \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (3.15.2)$$

Dalej zajmujemy się już tylko przypadkiem liniowym. Z równania (3.12.2) obliczamy siłę tnącą

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} + i_0 \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} + m_0 + k_2 \frac{\partial y}{\partial x} - A k_2 \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.16)$$

i rugując ją z równania (3.12.1), otrzymamy

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + i_0 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial m_0}{\partial x} + k_2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - A k_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + q_0 - k_1 y + A k_1 f(x, t) = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (3.17.1)$$

Równanie powyższe wraz z równaniem konstytutywnym

$$M = -R_a h_a - R_l h_l - R_z h_z \quad (3.17.2)$$

stanowią układ do wyznaczenia niewiadomych $M(x, t)$ i $y(x, t)$. Zauważmy, że nie uwzględniamy w tym układzie odkształcalności sprężystej segmentów. Układ opisany równaniami (3.17) będziemy nazywali ciągłym układem łańcuchowym, złożonym z elementów sztywnych.

Sprecyzujemy prawa konstytutywne dla poszczególnych sił wewnętrznych. Dla siły w linii przyjmiemy liniowe prawo konstytutywne dla rozciągania i niemożliwość przeniesienia siły ściskającej, tzn.

$$R_l = \begin{cases} k_l (A_l - l_0) & \text{dla } A_l - l_0 \geq 0, \\ 0 & \text{dla } A_l - l_0 < 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

l_0 oznacza długość liny w stanie naturalnym, $k_l > 0$ – współczynnik sztywności.

Podstawiając A_l , z uwzględnieniem nieliniowości dla przypadku liny przylegającej do segmentów, otrzymamy

$$R_l = k_l \left[h(b + 2\delta) - 2b_l - l_0 \right] + k_l h_l \left[\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{l_k} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{l_p} \right] + \\ - \frac{k_l}{4} \delta (b + 2\delta) \left(1 + \frac{h_l^2}{\delta^2} \right) \int_{l_p}^{l_k} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.19)$$

dla $A_l - l_0 > 0$.

Prawo konstytutywne dla amortyzatorów przyjmujemy w postaci liniowej, bez żadnych dodatkowych ograniczeń. To znaczy, zgodnie z (3.4), jeżeli charakterystyka amortyzatora będzie

$$f_0(\vartheta) \equiv \lambda \vartheta \Rightarrow R_a = \lambda h_a (b + 2\delta) \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2}. \quad (3.20)$$

Przejdziemy teraz do najbardziej złożonego prawa dla zderzaków w przypadku (3.11). Rozważmy wpięrow układ ciągły, w którym zderzaki odgrywają jedynie rolę ograniczników wzajemnego ruchu poszczególnych elementów. Mamy zatem, gdy

$$\tilde{\xi} < \frac{2\Delta}{b + 2\delta} \Rightarrow R_z = 0. \quad (3.21)$$

W przypadku osiągnięcia granicznej wartości $\tilde{\xi}$ następuje zwarcie lokalne układu. Druga pochodna zgodna z równaniem (3.11.2) osiąga wartość graniczną i nie może już dalej się zmniejszać. Mamy zatem następujący warunek ograniczający podczas ruchu drugą pochodną:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \geq -\frac{2\delta}{(b + 2\delta)h_z} \equiv -B_0 = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{\text{gr}}. \quad (3.22)$$

Przedział, w którym relacja (3.22) jest równością będziemy nazywali strefę zwania, natomiast przedział, gdzie obowiązuje znak $>$ — strefą rozwarcia układu.

Na granicy strefy zwania, druga pochodna osiąga swą wartość graniczną. Jeżeli prędkość drugiej pochodnej przy osiągnięciu wartości granicznej jest ujemna, albo jeżeli prędkość drugiej pochodnej ma nieciągłość skokową, powinno wystąpić zjawisko zderzenia na granicy rozszerzającej się strefy zwania.

I. Kręt właściwy pręta wynosi

$$i_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}. \quad (3.23)$$

Jeżeli w czasie przejścia frontu strefy zwania wystąpi nieciągłość skokowa krętu właściwego, to musi wystąpić zderzenie i pojawi się chwilowy moment wewnętrzny M_n . Niech t_0 oznacza czas przejścia frontu przez element dx , a V_z — prędkość strefy zwania, wtedy

$$i_0 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \Big|_{t=t_0^+} - \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \Big|_{t=t_0^-} \right) V_z dt = M_n dt, \quad (3.24)$$

ze względu na przeciwne skierowania dodatnie momentu i kątów ugięcia. Dzieląc obustronnie przez $h_z dt$, otrzymamy siłę na zderzakach

$$P_u = -\frac{i_0 V_z}{h_z} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \Big|_{t=t_0^+} - \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \Big|_{t=t_0^-} \right). \quad (3.25)$$

Gdy $y(x, t) = y(x - V_z t)$, tzn. prędkość strefy zwania jest znana i dla obserwatora ru-

chomego linia ugięcia nie zmienia się, otrzymamy po podstawieniu

$$P_u = + \frac{i_0 V_z^2}{h_z} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{t_0^+} - \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{t_0^-} \right). \quad (3.26)$$

Symbol $|_{t_0^+}$ oznacza, że drugą pochodną należy brać po przejściu frontu strefy zvarcia, gdy krzywizna jest graniczna, a zatem

$$P_u = \frac{-i_0 V_z^2}{h_z} \left[\frac{2\delta}{(b+2\delta)h_z} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right)_{t_0^-} \right] \quad (3.27)$$

i można stąd wyznaczyć naprężenia σ_u , znając przekrój F zderzaków.

II. Drugi mechanizm uwzględnia własności fizyczne zderzaków. Opiszemy je modelem pręta, w którym będzie się rozchodziła fala podłużna od uderzenia, pochłaniająca całkowicie względną energię kinetyczną przy zderzeniu.

Energia kinetyczna względna dT pochłaniana przez zderzaki w jednostce czasu

$$dT = \frac{1}{2} (i_0 V_z dt) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \Big|_{t_0^+} - \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \Big|_{t_0^-} \right)^2. \quad (3.28)$$

Całkowita energia mechaniczna przekazywana do dwóch zderzaków początkowo nieodkształconych i posiadających przekrój zderzenia F jest następująca:

$$T_z = 2EF \int_0^{at} [f'(x-at)]^2 dx. \quad (3.29)$$

W chwili $t=0$ (czas zderzenia dla modelu zderzaków)

$$\frac{dT_z}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{dT}{dt} \Big|_{t=t_0}. \quad (3.30)$$

Z powyższego równania można wyznaczyć $f(0)$, tzn. wydłużenia jednostkowe, a zatem i naprężenie $\sigma_u = Ef(0)$.

Obliczenia szczegółowe, których nie przytaczamy, prowadzą do wyniku

$$\sigma_u = -\frac{1}{2} E \sqrt{\frac{i_0 V_z}{EFa}} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \Big|_{t=t_0^+} - \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \Big|_{t=t_0^-} \right). \quad (3.31)$$

W przypadku, gdy strefa zvarcia posuwa się jak ciało sztywne z prędkością V_z , $y(x, t) = y(x - v_2 t)$ i, w analogii do wzoru (3.27), otrzymamy

$$\sigma_n = -\frac{1}{2} EV_z \sqrt{\frac{i_0 V_z}{EFa}} \left[\frac{2\delta}{(b+2\delta)h_z} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right)_{t_0^-} \right]. \quad (3.32)$$

III. Trzeci mechanizm zderzenia będzie uwzględniał dodatkowo to, że w rzeczywistości względna energia kinetyczna wytrącana jest porcjami przy kolejnych zderzeniach elementów powtarzalnych o długości $b+2\delta$ ze strefą zvarcia.

Niech w przedziale t_1, t_2 strefa zvarcia przejdzie drogą $b+2\delta$. Całkowita energia kinetyczna do przekazania zderzakom będzie

$$T_{1,2} = \frac{1}{2} i_0 \int_{t_1}^{t_2} V_z \left(\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \right|_{t^+} - \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \right|_{t^-} \right)^2 dt. \quad (3.33)$$

Przedstawmy tę energię $T_{1,2}$ w postaci

$$T_{1,2} = \frac{1}{2} i_0 (b+2\delta) \frac{\dot{\xi}_0^2}{h_z^2}, \quad (3.34)$$

gdzie $\dot{\xi}_0$ jest prędkością zderzenia na zderzakach. Niech mechanizm zderzenia polega na przekazaniu całej energii $T_{1,2}$ do zderzaków, przy zachowaniu styku w procesie zderzenia i równości prędkości względnych elementu powtarzalnego i zderzaków na powierzchni styku. Będziemy mieli zatem równanie

$$\frac{1}{2} i_0 (b+2\delta) \frac{\dot{\xi}_0^2}{h_z^2} = \frac{1}{2} i_0 (b+2\delta) \frac{\dot{\xi}^2}{h_z^2} + 2(T+V). \quad (3.35)$$

Pierwszy składnik po prawej stronie jest pozostałą do rozproszenia względną energią kinetyczną układu, a dalsze — sumą energii kinetycznej i potencjalnej w zderzakach.

Zakładając w zderzakach falę postępową i zerowe warunki początkowe, otrzymamy równanie

$$\frac{1}{2} I \frac{\dot{\xi}_0^2}{h_z^2} = \frac{1}{2} I \frac{a^2 [f'(-at)]^2}{h_z^2} + 2EF \int_0^{at} [f'(x-at)]^2 dx, \quad (3.36)$$

którego rozwiązaniem jest

$$f'(x-a_0 t) = - \left| \frac{\dot{\xi}_0}{a} \right| e^{-\frac{2F\rho h_z^2}{I}(x-at)}, \quad (3.37)$$

ρ jest tutaj gęstością materiału zderzaków, a — prędkością propagacji fali podłużnej.

Analogicznie jak w poprzednich przypadkach $f'(0)$ jest wydłużeniem jednostkowym na czole fali i ekstremalnym minimalnym wydłużeniem. Zatem

$$(\sigma_n)_{\min} = - \frac{E}{a} |\dot{\xi}_0|, \quad (3.38)$$

gdzie $\dot{\xi}_0$ należy wyznaczyć przez przyrównanie prawych stron relacji (3.33), (3.34).

Ponieważ na czole fali występuje duży gradient naprężeń, drogą pomiarów można sprawdzić jedynie wartość średnią na długości l_0 bazy czujnika tensometrycznego.

Całkując naprężenia σ na długości l_0 od czola fali, otrzymamy ekstremalne naprężenia wskazywane przez aparaturę $(\sigma_p)_{\min}$ w zależności od naprężeń maksymalnych na czole

$$(\sigma_p)_{\min} = (\sigma_n)_{\min} \frac{I}{2F\rho h_z^2} \frac{1 - e^{-\frac{2F\rho h_z^2}{I} l_0}}{l_0}. \quad (3.39)$$

Należy się spodziewać, że w ten sposób wyznaczone naprężenia będą oszacowane co do bezwzględnej wartości z nadmiarem, gdyż nie cała energia kinetyczna względna ulega rozproszeniu, a z części rozpraszanej część przekazywana jest na deformacje sworzni i uch w połączeniach elementów powtarzalnych (rys. 1). Trzeci model zderzenia może znaleźć zastosowanie przy postępującej strefie zwarcia. W przypadku znikających okresowo zwarć punktowych oraz pojawianiu się stref krótszych od elementu powtarzalnego i nie poruszających się ruchem postępowym, traci sens metoda obliczania względnej energii kinetycznej T_{12} . Są to oczywiście sprzeczności w opisach własności układu ciągłego i dyskretnego. Warto zwrócić uwagę, że przy postępującej strefie zwarcia na jednym końcu wytraca się kręt, co można opisać zderzeniem natomiast na drugim końcu ustępującej straty kręt się wyzwala. Można to zjawisko wytłumaczyć brakiem dysypacji w układzie i nieskończoną prędkością propagacji energii mechanicznej w sztywnej strefie zwarcia.

Przejdziemy do opisu innych praw konstytutywnych dla zderzaków. Niech np. zderzaki dają skończone siły reakcji dla skończonych prędkości deformacji właściwych $\tilde{\xi}$. Mamy wtedy ogólnie

$$R_z = f_z(\tilde{\xi}, \dot{\tilde{\xi}}), \quad (3.40)$$

gdzie f_z jest rosnącą względem każdej zmiennej i $f(0, 0) = 0$, oraz

$$R_z \geq 0. \quad (3.41)$$

Najprostszym przypadkiem jest tutaj zderzak liniowy, czysto sprężysty z charakterystyką

$$R_z = k_z \cdot \tilde{\xi} \quad (3.42)$$

i ograniczeniem dla $\tilde{\xi}$ długością zderzaków

$$0 \leq \tilde{\xi} \leq \frac{2\Delta}{b+2\delta}. \quad (3.43)$$

Dla $\tilde{\xi} < 0$ będzie $R_z = 0$, a dla $\tilde{\xi} = \frac{2\Delta}{b+2\delta}$ wystąpi zjawisko zderzenia, które może być opisane jednym z modeli omówionych wyżej. Zderzaki zakłada się tutaj czysto sprężyste, bez masy. Nie wystąpią w nich zatem żadne efekty bezwładnościowe. Oznacza to, że dla $\tilde{\xi}$ spełniających nierówność (3.43) styk jest zawsze zapewniony. Zadanie komplikuje się znacznie, gdy wprowadzimy funkcję f_z zależną od $\dot{\tilde{\xi}}$. Przy rozwieraniu zderzaków może wystąpić sytuacja, w której dla $\tilde{\xi} \in \left(0, \frac{2\Delta}{b+2\delta}\right)$ reakcja R_z spadnie do zera.

Dalszy ruch zderzaków do momentu ponownego styku będzie opisany równaniem

$$f_z(\tilde{\xi}, \dot{\tilde{\xi}}) = 0, \quad (3.44)$$

dla którego warunkiem początkowym jest ściśnięcie właściwe $\tilde{\xi}$, przy którym zderzaki tracą kontakt.

Drugim przypadkiem może być zderzak nieliniowy tak skonstruowany, że jego ściśnię-

cie do granicznej wartości $\tilde{\xi} = \frac{2\Delta}{b+2\delta}$ nie jest możliwe, gdyż prowadzi do reakcji nieskończenie dużych. Zwarcie nie może nigdy nastąpić, natomiast w przypadku sił zależnych od prędkości może zdarzyć się utrata kontaktu zderzaków przed ich całkowitym rozprężeniem. Mamy zatem w tym przypadku również

$$R_z = f_z(\tilde{\xi}, \dot{\tilde{\xi}}), \quad (3.45)$$

gdzie funkcja f_z musi spełniać wszystkie warunki wymienione uprzednio oraz dodatkowo

$$\lim_{\xi \rightarrow \frac{2\Delta}{b+2\delta}} f_z(\tilde{\xi}, \dot{\tilde{\xi}}) = +\infty. \quad (3.46)$$

Zderzak liniowo-sprężysty nie jest tu oczywiście możliwy do realizowania.

Przejdźmy do rozwiązań szczegółowych.

4. Statyka (układ ciągły, bez liny i zderzaków $R_z = 0$ dla $\xi < \Delta$)

Poza stratą zwarcia, tzn. gdy druga pochodna spełnia nierówność

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \geq -\frac{2\delta}{(b+2\delta)h_z}, \quad (4.1.1)$$

otrzymujemy z równań (3.17)

$$M \equiv 0 \quad (4.1.2)$$

$$k_2 \frac{d^2 y}{dx^2} - k_1 y + \frac{dm_0}{dx} + q_0 = 0, \quad (4.1.3)$$

a z równania (3.16) formułę do obliczenia siły tnącej

$$Q = m_0 + k_2 \frac{dy}{dx}. \quad (4.1.4)$$

Poza strefą zwarcia mamy zatem do czynienia z układem ciągłym nie przenoszącym momentu gnącego, natomiast przenoszącym siłę tnącą.

W strefie zwarcia mamy stałą drugą pochodną linii ugięcia

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{2\delta}{(b+2\delta)h_z} \quad (4.2.1)$$

i następujące równania równowagi do wyznaczenia momentu gnącego i siły tnącej:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{dm_0}{dx} - k_2 \frac{2\delta}{(b+2\delta)h_z} + q_0 - k_1 y = 0, \quad (4.2.2)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} + m_0 + k_2 \frac{dy}{dx}. \quad (4.2.3)$$

W strefie zvarcia ponadto musi być spełniony warunek

$$M \geq 0, \quad (4.2.4)$$

gdyż ten model nie może przenosić sił rozciągających na zderzakach.

Warunki graniczne, przy których będziemy rozwiązywali zadania, sprowadzą się do ciągłości ugięć i kątów ugięcia na granicy strefy zvarcia x_0 , tzn.

$$y^{(n)}(x_0^+) = y^{(n)}(x_0^-), \quad n=0,1 \quad (4.3)$$

oraz ciągłości momentów i siły tnącej, tzn.

$$Q(x_0^+) = Q(x_0^-), \quad (4.4.1)$$

$$M(x_0^+) = M(x_0^-). \quad (4.4.2)$$

W miejscu przyłożenia siły skupionej P i momentu skupionego M będą dopuszczalne rozwarcia punktowe, tzn. nieciągłości pierwszej pochodnej. Nieciągłości te muszą jednak spełniać warunek

$$y'(x_0^+) - y'(x_0^-) > 0, \quad (4.5)$$

ze względu na jednostronne ograniczenie krzywizny. Miejsca rozwarcia punktowego mogą wystąpić zarówno we wnętrzu strefy zvarcia, jak i na jej brzegu, jeżeli jest odciążony.

Jest oczywiste, że w miejscach rozwarcia punktowego nieobciążonych momentem zewnętrznym, moment gnący jest ciągły i równy zero. Jeżeli natomiast miejsce rozwarcia jest obciążone momentem zewnętrznym, należy podać obciążenia obydwu brzegów. Obciążenia te będą równe jednostronnym granicom momentu gnącego w miejscu punktowego zvarcia.

5. Belka nieskończona pod działaniem siły skupionej i momentu skupionego

Posługując się modelem z punktu 4 rozważmy przypadek jak na rys. 8. Niech $P \leq 0$. Założmy dodatkowo, że na całej belce nie występuje strefa zvarcia. Mamy wtedy na całej belce

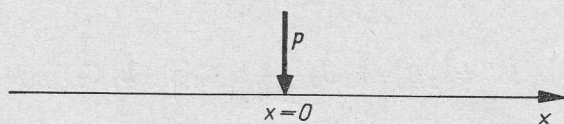
$$y' \geq -B_0 \quad (5.1.1)$$

(B_0 według (3.22)) i

$$M \equiv 0 \quad (5.1.2)$$

oraz równanie zginania

$$k_2 y'' - k_1 y = 0. \quad (5.1.3)$$



Rys. 8. Schemat obciążenia pręta

Wprowadzając oznaczenie

$$\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \equiv \alpha \quad (5.2)$$

i rozwiązując równanie (5.1.3), z wykorzystaniem warunków

$$y(0^+) - y(0^-) = 0, \quad (5.3.1)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} y = 0, \quad (5.3.2)$$

otrzymamy rozwiązanie

$$y(x) = ce^{-\alpha|x|}. \quad (5.4)$$

Wykorzystanie warunku nieciągłości siły tnącej w zerze

$$k_2 [y'(0^+) - y'(0^-)] = -P \quad (5.5)$$

prorowadzi do wyznaczenia stałej C i rozwiązania

$$y(x) = \frac{P}{2k_2 \alpha} e^{-\alpha|x|}. \quad (5.6)$$

Na to, aby rozwiązanie (5.6) spełniało dla każdego X warunek rozwarcia (5.1.1) z co najwyżej punktową strefą zwarcia, siła P musi spełniać warunek

$$P_{gr} = \frac{k_2}{\alpha h_z} \frac{4\delta}{b + 2\delta} \leq P \leq 0. \quad (5.7)$$

Ponieważ graniczna wartość drugiej pochodnej jest osiągana lewo- i prawostronnie w zerze i tylko w zerze, i ugięcie jest symetryczne względem punktu $x=0$, będziemy postulowali symetryczną strefę zwarcia w otoczeniu $x=0$, o długości $2x_0$ z rozwarciem punktowym (nieciągłością y') w $x=0$. Strefa zwarcia będzie więc przedziałem

$$I_z = \langle -x_0, 0 \rangle \cup (0, x_0 \rangle. \quad (5.8)$$

Ponieważ w całej strefie jest

$$y'' = -B_0 \quad (5.9)$$

ze względu na symetrię rozwiązania zapewniające ciągłość ugięć, będzie dla $x \in I_z$

$$y(x) = -B_0 \frac{x^2}{2} + C_1|x| + C_2, \quad (5.10)$$

a równanie różniczkowe dla momentu, zgodnie z (4.2.2)

$$M'' = k_2 B_0 - k_1 B_0 \frac{x^2}{2} + k_1 C_1|x| + k_1 C_2. \quad (5.11)$$

Ze względu na symetrię zadania i ciągłość momentu gnącego w zerze, ogólne rozwiąza-

nie dla $x \in I_z$ będzie

$$M = k_2 B_0 \frac{x^2}{2} - k_1 B_0 \frac{x^4}{24} + k_1 C_1 \frac{|x|^3}{6} + k_1 C_2 \frac{x^2}{z} + D_1 |x| + D_2, \quad (5.12)$$

gdzie D_1 i D_2 – nowe stałe zadania.

Ustalmy warunki graniczne w zerze. Warunek istnienia zadanego skoku siły tnącej, zgodnie z (4.2.3) wynosi

$$2D_1 + 2C_1 k_2 = -P, \quad (5.13.1)$$

a warunek rozwarcia punktowego sprowadza się do zerowania momentu w zerze, tzn.

$$D_2 = 0. \quad (5.13.2)$$

Przejdźmy do wyznaczenia rozwiązań w strefie rozwarcia, tzn. $I_r \in \langle x_0, +\infty \rangle$. Mamy tam spełnione warunki (5.1) i rozwiązanie szczególne spełniające warunek $y \xrightarrow{x/\infty} 0$,

$$y(x) = C e^{-\alpha(x-x_0)}. \quad (5.14)$$

Warunki graniczne w punkcie krańcowym strefy zwarcia są:

– ciągłość ugięć

$$-B_0 \frac{x_0^2}{2} + C_1 x_0 + C_2 = C, \quad (5.15.1)$$

– ciągłość kątów ugięcia

$$-B_0 x_0 + C_1 = -\alpha C, \quad (5.15.2)$$

– ciągłość momentu gnącego

$$k_2 B_0 \frac{x_0^2}{2} - k_1 B_0 \frac{x_0^4}{24} + k_1 C_1 \frac{x_0^3}{6} + k_1 C_2 \frac{x_0^2}{2} + D_1 x_0 + D_2 = 0, \quad (5.15.3)$$

– ciągłość siły tnącej

$$k_2 B_0 x_0 - k_1 B_0 \frac{x_0^3}{6} + k_1 C_1 \frac{x_0^2}{2} + k_1 C_2 x_0 + D_1 = 0. \quad (5.15.4)$$

Układ równań (5.13) i (5.15) można rozwiązać przyjmując x_0 jako dane, natomiast P jako niewiadomą. Jest to wtedy zawsze układ równań liniowych, łatwy, choć żmudny do analitycznego rozwiązania.

Proste wzory otrzymuje się dla stałej C_1 i ugięcia C w miejscu styku stref zwarcia i rozwarcia

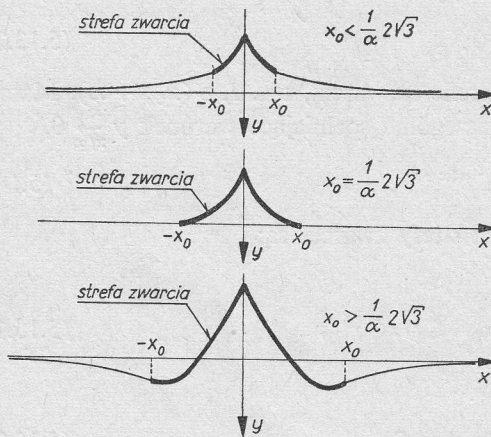
$$C_1 = B_0 \frac{\frac{x_0^2 \alpha^2}{4} + x_0 \alpha + 1}{\alpha(1 - \frac{1}{3} \alpha x_0)}, \quad (5.16.1)$$

$$C = -\frac{B_0}{\alpha^2} \frac{1 - \frac{1}{12} x_0^2 \alpha^2}{1 + \frac{1}{3} x_0 \alpha}. \quad (5.16.2)$$

Następujące wnioski wynikają z relacji (5.16.2):

Wniosek 1. $y''(x_0^+) = C\alpha^2$ jest rosnącą funkcją x_0 . Oznacza to nieciągłość drugiej pochodnej w punkcie x_0 i wobec (5.14) spełnienie warunku ograniczenia drugiej pochodnej w całej strefie rozwarcia.

Wniosek 2. Ponieważ $C = y(x_0)$, to dla $x_0 \alpha = 2\sqrt{3}$ występuje zmiana znaku ugięcia na granicy strefy zwarcia i część belki wyciąganej z podłoża (wody) zanurza się. Obraz obydwu rodzajów ugięć i stan graniczny przedstawia rys. 9. Jest sprawą oczywistą, że siła tnąca w punkcie x_0 zmienia znak w tym punkcie, gdy x_0 przekracza wartość $\frac{1}{3} 2\sqrt{3}$. Dalszymi szczegółami rozwiązania dla tego przypadku zajmować się nie będziemy i rozwiążemy ważny praktycznie przypadek $P > 0$.



Rys. 9. Kolejne fazy wzrostu długości strefy zwarcia

Jeżeli założyć, że w otoczeniu punktu $x=0$ nie ma strefy zwarcia, to $M \equiv 0$ i warunek zadanego skoku pierwszej pochodnej prowadzi do wyniku

$$y'(0^+) - y'(0^-) = -\frac{P}{k_1} < 0, \quad (5.17)$$

a to nie jest dopuszczalne. W otoczeniu punktu $x=0$ musi zatem pojawić się strefa zwarcia. Ze względu na symetrię zadania otrzymamy w strefie zwarcia ugięcie

$$y = -B_0 \frac{x^2}{2} + C_2 \quad (5.18.1)$$

oraz moment gnący

$$M = k_2 B_0 \frac{x^2}{2} - k_1 B_0 \frac{x^4}{24} + k_1 C_2 \frac{x^2}{2} + D_1 |x| + D^2. \quad (5.18.2)$$

W strefie rozwarcia natomiast $x \geq 0$ i rozwiązanie będzie podobnie jak w poprzednim wypadku

$$y(x) = C e^{-\alpha(x-x_0)}. \quad (5.18.3)$$

Rozwiązania (5.18) zapewniają ciągłość ugięć i kątów ugięcia oraz momentów gnących w $x=0$. Pozostałe warunki do wyznaczenia stałych D_1 , D_2 , C , C_2 i siły P w funkcji strefy zwarcia są następujące:

- zadana nieciągłość siły tnącej w $x=0$

$$2D_1 = -P, \quad (5.19.1)$$

- ciągłość ugięć dla $x=x_0$

$$C = -B_0 \frac{x_0^2}{2} + C_2, \quad (5.19.2)$$

- ciągłość kątów ugięcia w $x=x_0$

$$-\alpha C + B_0 x_0 = 0, \quad (5.19.3)$$

- ciągłość momentu gnącego w $x=x_0$

$$k_2 B_0 \frac{x_0^2}{2} - k_1 B_0 \frac{x_0^4}{24} + k_1 C_2 \frac{x_0^2}{2} + D_1 x_0 + D_2 = 0, \quad (5.19.4)$$

- ciągłość siły tnącej w $x=x_0$

$$k_2 B_0 x_0 - k_1 B_0 \frac{x_0^3}{6} + k_1 C_2 x_0 + D_1 = 0. \quad (5.19.5)$$

Układ (5.19) jest prosty do rozwiązania, a stałe mają ważne interpretacje:

- ugięcie na krańcu strefy zvarcia

$$C = y(x_0) = B \frac{x_0}{\alpha}, \quad (5.20.1)$$

- ugięcie w miejscu przyłożenia siły P

$$C_2 = y(0) = B_0 \left(\frac{x_0}{\alpha} + \frac{x_0^2}{2} \right), \quad (5.20.2)$$

- siła P w funkcji długości strefy zvarcia

$$P = 2B_0 - \left(\frac{1}{3} k_1 x_0^3 + k_2 x_0 + k_1 \frac{x_0^2}{\alpha} \right), \quad (5.20.3)$$

- moment gnący w miejscu przyłożenia siły P

$$D_2 = M(0) = \frac{B_0}{2} \left(\frac{1}{4} k_1 x_0^4 + k_1 \frac{x_0^3}{\alpha} + k_2 x_0^2 \right) \quad (5.20.4)$$

oczywiście dodatni, tak jak być powinno.

Rozwiążemy ostatnie zadanie statyczne. Belka półograniczona $x \geq 0$ pod działaniem momentu skupionego M_0 , przyłożonego w punkcie $x=0$. Oczywiście dla $M_0 < 0$ nie ma rozwiązania, gdyż zvarcie zajść nie może (moment gnący musi być dodatni), a w rozwarcu moment gnący jest zerem. Mamy zatem $M_0 \geq 0$. Postulujemy strefę zvarcia w prawostronnym przedziale $\langle 0, x_0 \rangle$ punktu $x=0$, a dla $x > x_0$ strefę rozwarcia. Mamy wtedy

w strefie zwania rozwiązania dla ugięcia

$$y(x) = -B_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad (5.21.1)$$

i momentów gnących

$$M(x) = k_2 B_0 \frac{x^2}{2} - k_1 B_0 \frac{x^4}{24} + k_1 C_1 \frac{x^3}{6} - k_1 C_2 \frac{x^2}{2} + D_1 x + D_2. \quad (5.21.2)$$

Natomiast w strefie rozwarcia ugięcie według (5.18.3) i $M \equiv 0$.

Warunki graniczne w $x=0$ są $Q=0$ i $M=M_0$, a w $x=x_0$ sprowadzają się do żądania ciągłości ugięć i kątów ugięcia oraz ciągłości momentów i sił tnących. Pięć stałych C_1 , C_2 , D_1 , D_2 , C oraz moment M_0 wyznaczamy w funkcji strefy zwania. Przytoczmy wyniki końcowe rachunku:

$$C_1 = B_0 x_0 \frac{1 + \alpha x_0 + \frac{1}{3} \alpha^2 x_0^2}{1 + \alpha x_0 + \frac{\alpha^2 x_0^2}{2}}, \quad (5.22.1)$$

$$D_1 = -k_2 C_1, \quad (5.22.2)$$

$$D_2 = M_0. \quad (5.22.3)$$

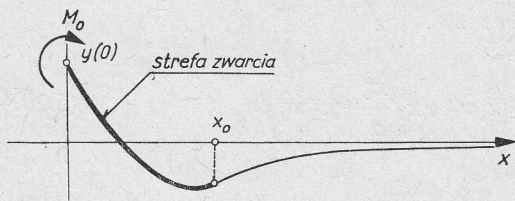
Ugięcie na krańcu strefy zwania:

$$y(x_0) = C_2 = B_0 \frac{\frac{1}{6} \alpha x_0^3}{1 + \alpha x_0 + \frac{\alpha^2 x_0^2}{2}} \quad (5.24)$$

jest zawsze dodatnie dla $x_0 > 0$. Ze wzrostem momentu kraniec strefy zwania ulega zanurzeniu.

Moment M_0 , również dodatni, gdy $x_0 > 0$ i rosnący wraz z x_0 jest

$$M_0 = B_0 \frac{k_1 x_0^4}{16} \frac{1 + \frac{1}{3} \alpha x_0 + \frac{1}{18} \alpha^2 x_0^2}{1 + \alpha x_0 + \frac{\alpha^2 x_0^2}{2}} + B_0 \frac{k_2 x_0^2}{2} \frac{1 + \alpha x_0 + \frac{1}{6} \alpha^2 x_0^2}{1 + \alpha x_0 + \frac{\alpha^2 x_0^2}{2}}. \quad (5.25)$$



Rys. 10. Linia ugięcia i położenia strefy zwania

Wykres ugięcia podano schematycznie na rys. 10. Dla belki nieograniczonej zadanie jest nieco bardziej skomplikowane.

W punkcie $x=0$ występuje rozwarcie punktowe, zatem warunki graniczne sprowadzają się do żądania ciągłości ugięć i siły tnącej. Dla $x < 0$ cała belka pracuje w warunkach roz-

warcia do pewnej wartości $M_{0, \text{gr}}$, a dla $M_0 > M_{0, \text{gr}}$ pojawia się od strony $x=0$ strefa zwarcia o rosnącej długości. Oczywiście jest, że dla tego przypadku istnieje rozwiązanie również przy $M_0 < 0$. Ugięcia są wtedy lustrzanym odbiciem w osi y ugięć dla przypadku $M_0 > 0$. Przypadku tego omawiać szczegółowo nie będziemy i przejdziemy do zadań dynamicznych. Inne przypadki zadań statycznych można znaleźć w pracy [2].

6. Belka nieskończona rozwarta z amortyzatorem lepkiem na fali regularnej

Załóżmy trygonometryczny obrys fali płaskiej

$$f(x, t) = \sin(vx - \omega t). \quad (6.1)$$

Równania ruchu układu przy założeniu jak w tytule tego punktu będą, zgodnie z równaniami (3.17), postaci

$$M = -\lambda h_a^2 (b + 2\delta) \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} \quad (6.2.1)$$

oraz

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + i_0 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + k_2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + A k_2 v^2 \sin(vx - \omega t) - k_1 y + A k_1 \sin(vx - \omega t) = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (6.2.2)$$

Wprowadzając nową zmienną bezwymiarową

$$\xi \equiv vx - \omega t \quad (6.3.1)$$

i rugując z układu (6.2) moment gnący M , otrzymamy do wyznaczenia ugięcia $y(\xi)$ równanie zwyczajne

$$\lambda h_a^2 (b + 2\delta) \omega v^4 y^V + i_0 v^2 \omega^2 y^{IV} + (k_2 v^2 - \rho \omega^2) y'' - k_1 y + A(k_1 + v^2 k_2) \sin \xi = 0. \quad (6.3.2)$$

Rozwiązanie w postaci

$$y(\xi) = D_s \sin \xi + D_c \cos \xi \quad (6.4)$$

prowadzi do następujących wartości stałych D_s i D_c :

$$D_s = -A \frac{(k_1 + k_2 v^2) [(\rho + i_0 v^2) \omega^2 - (k_1 + k_2 v^2)]}{[(i_0 v^2 + \rho) \omega^2 - (k_1 + k_2 v^2)]^2 + \lambda^2 h_a^4 (b + 2\delta)^2 \omega^2 v^2}, \quad (6.5.1)$$

$$D_c = A \frac{\lambda h_a \omega v^4 (b + 2\delta) (k_1 + k_2 v^2)}{[(i_0 v^2 + \rho) \omega^2 - (k_1 + k_2 v^2)]^2 + \lambda^2 h_a^4 (b + 2\delta)^2 \omega^2 v^2}. \quad (6.5.2)$$

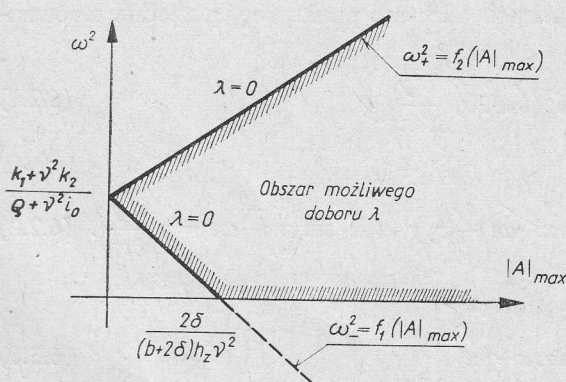
Możemy teraz obliczyć maksymalną amplitudę fali $|A|_{\text{max}}$, przy której osiąga się zwarcie punktowe na belce. Prosty rachunek, którego nie przytaczamy, prowadzi do wyniku

$$|A|_{\text{max}} = \frac{2\delta}{(b + 2\delta) h_z v^2 (k_1 + k_2 v^2)} \{ \lambda^2 h_a^4 (b + 2\delta)^2 \omega^2 v^8 + [(i_0 v^2 + \rho) \omega^2 - (k_1 + k_2 v^2)]^2 \}^{\frac{1}{2}}. \quad (6.6)$$

Jedną z możliwych form wykorzystania relacji (6.6) jest wyznaczenie współczynnika tłumienia λ dla zadanej częstości fali ω i amplitudy maksymalnej $|A|_{\max}$. Łatwo sprawdzić, że taki dobór nie zawsze jest możliwy. Dla ustalonego $|A|_{\max}$ kwadrat częstości ω^2 musi spełniać warunek $\omega_-^2 \leq \omega^2 \leq \omega_+^2$, przy czym dodatkowo istotny jest warunek $\omega_-^2 \geq 0$

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{2\delta(k_1 + v^2 k_2) \pm |A|_{\max}(b + 2\delta)h_z v^2(k_1 + k_2 v^2)}{2\delta(i_0 v^2 + \rho)}.$$

Obszar, w którym można dobrać λ według (6.6) do zadanej pary $|A|_{\max}$, ω^2 naszkicowano na rys. 11. Obliczenia numeryczne w konfrontacji z doświadczeniem będą omówione w innej pracy. Można wykazać, że przy punktowych strefach zwarcia, siły chwilowe od uderzenia, a zatem i naprężenia, są zerem według wszystkich rozważanych modeli zderzenia.



Rys. 11. Wykres obszaru, w którym można dobrać λ do zadanej pary $|A|_{\max}$, ω^2

7. Belka nieskończona pod działaniem ruchomego układu: siły skupionej i momentu skupionego

Zbadamy układ bez amortyzatorów i liny, zderzaki jak w modelu w punkcie 4. Niech układ złożony z siły P i momentu M będzie zaczepiony w tym samym punkcie x'_0 , poruszającym się po osi x' z prędkością ϑ , w kierunku rosnących x' . Jeżeli wprowadzić nową zmienną

$$x = x' - \vartheta t \quad (7.1)$$

oraz uwzględnić brak amortyzatorów, to równania w strefie rozwartej będą

$$M \equiv 0, \quad (7.2.1)$$

$$i\vartheta^2 y^{IV} + (k_2 - \rho\vartheta^2) y'' - k_1 y = 0, \quad (7.2.2)$$

a siła tnąca

$$Q = i_0 \vartheta^2 y''' + k_2 y'. \quad (7.3)$$

W strefie zwarcia natomiast

$$y'' = -B_0, \quad (7.4.1)$$

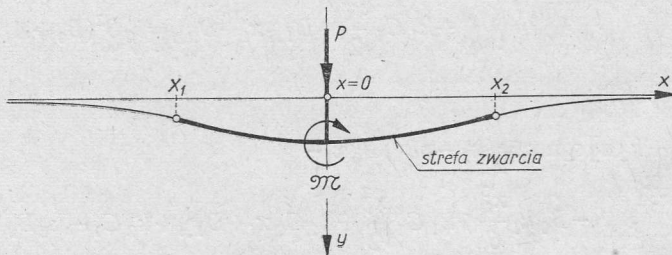
$$M'' = (k_2 - \rho \vartheta^2) B_0 + k_1 y, \quad (7.4.2)$$

gdzie przez $-B_0$ oznaczono graniczną krzywiznę pręta. Siłę tnącą liczymy z relacji

$$Q = M' + k_2 y'. \quad (7.5)$$

Będziemy postulowali, że para $P, \mathfrak{M}$ jest przyłożona w punkcie $x=0$ i w jej otoczeniu tworzy się strefa zwarcia ograniczona punktami x_1, x_2 (rys. 12). Rozwiązując równanie charakterystyczne równania różniczkowego (7.2.2) w strefie rozwarcia można sprawdzić, że posiada ono dwa pierwiastki urojone i dwa rzeczywiste, różniące się znakiem. Aby spełnić warunki znikania ugięć w nieskończoności może pozostać tylko jedna stała dowolna w rozwiązaniu. Otrzymujemy więc

$$y(x) = \begin{cases} A_2 e^{-a(x-x_2)} & x \in \langle x_2, +\infty \rangle, \\ A_1 e^{a(x-x_1)} & x \in (-\infty, x_1 \rangle. \end{cases} \quad (7.6)$$



Rys. 12. Schemat obciążenia i położenia strefy zwarcia

Stałą a liczymy z relacji

$$a \equiv \left\{ \frac{-(k_2 - \rho \vartheta^2) + [(k_2 - \rho \vartheta^2)^2 + 4k_1 \vartheta^2 i_0]^{\frac{1}{2}}}{2\vartheta^2 i_0} \right\}. \quad (7.7)$$

Ponieważ postulujemy zwarcia na całej długości przedziału $\langle x_1, x_2 \rangle$, rozwiązanie równania (7.4.1) zapewniające ciągłość ugięć i pochodnych ugięć w punkcie $x=0$ będzie

$$y = -B_0 \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2. \quad (7.8)$$

Rozwiązanie równania (7.4.2) będzie jednak inne dla $x \in \langle x_1, 0 \rangle$ i $x \in (0, x_2 \rangle$ ze względu na przyłożone obciążenia skupione. Wyróżniając stałe całkowania w pierwszym z przedziałów wskaźnikiem $i=1$, a w drugim wskaźnikiem $i=2$, otrzymamy

$$M_i = (k_2 - \rho \vartheta^2) B_0 \frac{x^2}{2} - B_0 k_1 \frac{x^4}{24} + k_1 C_1 \frac{x^3}{6} + k_1 C_2 \frac{x^2}{2} + D_{1,i} x + D_{2,i}, \quad i=1,2. \quad (7.9)$$

Mamy teraz do spełnienia dziesięć warunków granicznych, a do wyznaczenia osiem stałych całkowania $A_1, A_2, C_1, C_2, D_{1,1}, D_{1,2}, D_{2,1}, D_{2,2}$ oraz dwie współrzędne strefy zwarcia x_1, x_2 . Oczywiście, aby rozwiązanie miało sens, moment w strefie zwarcia musi

być nieujemny, tzn.:

$$\bigwedge_{x \in \langle x_1, x_2 \rangle} M \geq 0. \quad (7.10)$$

Rozpiszemy warunki graniczne w punktach x_i ($i=1, 2$). Ciągłość ugięć

$$-B_0 \frac{x_i^2}{2} + C_1 x_i + C_2 = A_i. \quad (7.11.1)$$

Ciągłość kątów ugięcia

$$-B_0 x_i + C_1 = -A_i a \operatorname{sgn} x_i. \quad (7.11.2)$$

Zadany skok nieciągłości momentu gnącego na froncie strefy zvarcia wywołany działaniem momentu zderzenia i odbicia (patrz relacje (3.27)):

$$\begin{aligned} (k_2 - \rho \vartheta^2) B_0 \frac{x_i^2}{2} - B_0 k_1 \frac{x_i^4}{24} + k_1 C_1 \frac{x_i^3}{6} + \\ + k_1 C_1 \frac{x_i^2}{2} + D_{1,i} x_i + D_{2,i} = i_0 \vartheta^2 (B_0 + A_i a^2). \end{aligned} \quad (7.11.3)$$

Ciągłość sił tnących

$$\begin{aligned} -A_i [i_0 \vartheta^2 a^3 + k_2 a] \operatorname{sgn} x_i = (k_2 - \rho \vartheta^2) B_0 x_i - \\ - B_0 k_i \frac{x_i^3}{6} + k_1 C_1 \frac{x_i^2}{2} + k_1 C_2 x_i + D_{1,i} + k_2 C_1 - k_2 B_0 x_i. \end{aligned} \quad (7.11.4)$$

W punkcie $x_0=0$ warunki będą:

$$D_{1,2} - D_{1,1} = -P, \quad (7.11.5)$$

$$D_{2,2} - D_{2,1} = \mathfrak{M}. \quad (7.11.6)$$

Można rozwiązać układ (7.11) traktując x_1 i x_2 jako dane, a obciążenie P i $\mathfrak{M}$ wyznaczyć. Szczególnie proste formuły otrzymuje się postulując symetryczną strefę zvarcia, tzn.

$$x_2 = -x_1 = x_0. \quad (7.12)$$

Wtedy

$$C_1 = 0, \quad (7.13.1)$$

$$A_1 = A_2 = \frac{B_0 x_0}{a}, \quad (7.13.2)$$

$$y(0) = C_2 = B_0 x_0 \left(\frac{x_0}{2} - \frac{1}{a} \right), \quad (7.13.3)$$

$$\mathfrak{M} = 0, \quad (7.13.4)$$

natomiast

$$P = 2B_0 \left(k_1 \frac{x_0^3}{3} + k_1 \frac{x_0^2}{a} + b x_0 \right), \quad (7.13.5)$$

gdzie

$$b \equiv \frac{1}{2} \{k_2 - \rho g^2 + [(k_2 - \rho g^2)^2 + 4k_1 g^2 i_0]^{\frac{1}{2}}\}. \quad (7.14)$$

Otrzymaliśmy zatem rozwiązanie dla przypadku obciążenia belki siłą skupioną. Ponieważ według (7.7) i (5.2)

$$\lim_{g \rightarrow 0} a = \alpha, \quad (7.15.1)$$

$$\lim_{g \rightarrow 0} b = k_2, \quad (7.15.2)$$

otrzymane rozwiązania dynamiczne przechodzą, jak to można sprawdzić, w sposób ciągły w rozwiązania statyczne. Ponieważ $\mathfrak{M}=0$, $D_{2,2}=D_{2,1}=M(0)$. Proste rachunki prowadzą do wyniku

$$M(0) = \frac{B_0}{2} \left[k_1 \frac{x_0^4}{4} + k_1 \frac{x_0^3}{a} + x_0^2 \sqrt{(k_2 - \rho g^2)^2 + 4k_1 g^2 i_0} \right] + i g^2 B_0 (1 + a x_0). \quad (7.16)$$

Również i w tym przypadku dla $g \rightarrow 0$ otrzymuje się równanie (5.20.4). Pozostaje wyznaczyć naprężenia od uderzenia na froncie strefy zwarcia. Moment zderzenia wyróżniono drugim składnikiem poza nawiasem graniastym w relacji (7.16). Naprężenia te według trzech kolejnych modeli rozpatrywanych w punkcie 3 wynoszą

$$(\delta_{ni})_{\min} = -\gamma_i (1 + a x_0), \quad i = 1, 2, 3; \quad (7.17)$$

dla modelu 1

$$\gamma_1 = g^2 B_0 \frac{i_0}{h_z F}, \quad (7.18.1)$$

dla modelu 2

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} E g B_0 \sqrt{\frac{i_0 g}{E F a_0}}, \quad (7.18.2)$$

dla modelu 3

$$\gamma_3 = E h_z B_0 \frac{g}{a_0}. \quad (7.18.3)$$

Jak łatwo zauważyć we wszystkich przypadkach

$$\lim_{g \rightarrow 0} (\sigma_{n,i})_{\min} = 0, \quad (7.19)$$

natomiast

$$\lim_{P \rightarrow 0} (\sigma_{n,i})_{\min} = \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.20)$$

Ten ostatni wynik, sprzeczny z obserwacjami zachowania układu dyskretnego, jest oczywistym niedostatkiem układu ciągłego w opisie rzeczywistości.

Literatura

- [1] L. Fryba, *Vibration of solids and structures under moving loads*. Czechoslovak Academy of Sciences, Prague 1972.
- [2] L. Konieczny, W. Kurski, R. Piskorski, J. Więckowski i in., *Dynamika wstęgi na fali regularnej*. Politechnika Gdańska, Instytut Okrętowy (materiały wewnętrzne), 1970.
- [3] R. Piskorski, *Wpływ bezwładności obrotowej na ruch belki o zmiennej strukturze na fali regularnej*. Materiały Konf.: Drgania w układach fizycznych, Poznań 1974.

Вступление к теории изгиба балок переменной структуры

Резюме

Рассматривается дискретная цепная система из недеформированных повторительных элементов, в которой находятся буферы Z , амортизаторы A и трос L (рис. 1).

После обсуждения деформаций дискретной системы определяется переход на сплошную систему с односторонне ограниченной кривизной, описанной уравнениями (3.17). Обсуждаются возможные и практически важные конститутивные связи и предлагаются модели внутреннего столкновения, связанные со скачком кинетического момента на фронте зоны замыкания (предел, где кривизна достигает предельного значения).

Представлено несколько статических решений для системы с жесткими буферами без троса. Эта же система была исследована на случай движения силы и сосредоточенного момента с постоянной скоростью на неограниченной балке. Влияние линейных вязких амортизаторов исследовано для балки на прогрессивной регулярной волне, постулируя, по крайней мере, пунктовую зону замыкания.

Цифровая дискуссия и сопоставление с опытом будут представлены в другой работе.

Introduction to the Variable Structure Beam Bending Theory

Summary

A discrete chain system consisting of non-deformed reproducible elements, namely buffers Z , shock-absorbers A and a line L (Fig. 1) was analyzed. After the deformation of the discrete system has been discussed the change on to a continuous system with unilaterally bounded curvature was presented as described by the equation (3.17). Possible constitutive relations of practical importance were discussed. Internal collision models were proposed, these being connected to the angular momentum jump at the closure zone front (the interval where a limit value of the curvature is attained).

Several static solutions for a system with rigid buffers without a line were presented. The same system was analyzed in the case of the motion of force and concentrated moment with a constant velocity along an unrestricted beam. The influence of linear viscous shock-absorbers was investigated for a beam on the regular progressive wave, postulating at most a point closure zone.

Numerical discussion and confrontation with the experiments will be presented in another paper.

