

INSTYTUT MASZYN PRZEPIYWOVYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

redakcja

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPIYWOVYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

65

WARSZAWA—POZNAŃ 1974

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

KOMITET REDAKCYJNY — EXECUTIVE EDITORS
KAZIMIERZ STELLER — REDAKTOR — EDITOR
JERZY KOŁODKO · JÓZEF ŚMIGIELSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA — EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN, 80-952 Gdańsk,
skr. pocztowa 621, ul. Gen. Józefa Fiszer 14, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1974

Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 400+90 egz.	Oddano do składania 31 V 1974 r.	
Ark. wyd. 14. Ark. druk. 11.	Podpisano do druku 2 XII 1974 r.	
Papier ilustrac. kl. V, 70 g 70 × 100 cm.	Druk ukończono w grudniu 1974 r.	
Nr zam. 449/30.	F-15/1068.	Cena zł 42, —

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

ZYGFRYD DOMACHOWSKI, ANDRZEJ MALINOWSKI

Gdańsk

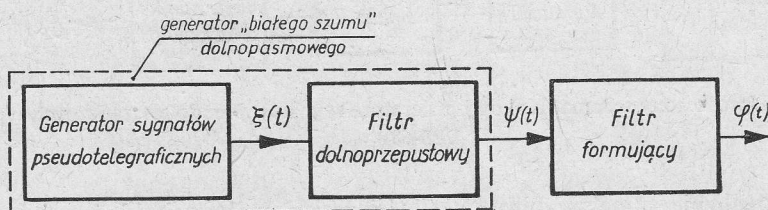
Badania modelowe układu regulacji mocy turbozespołu przy wymuszeniach stochastycznych*

Część I. Wytwarzanie stochastycznego sygnału zmian częstotliwości do badania układów regulacji turbin

Praca dotyczy symulowania stochastycznych zmian częstotliwości w systemie elektroenergetycznym, do modelowania badań optymalizacyjnych układów regulacji turbozespołów.

Tematyka przedstawionej pracy ma u swych podstaw problemy związane z regulacją turbozespołów i bloków biorących udział w regulacji częstotliwości systemu elektroenergetycznego. Otóż, zarówno sygnały zakłócające jak sterujące oddziałujące w tych układach regulacji mają charakter procesów stochastycznych. Badania modelowe takich układów regulacji wymagają więc znajomości charakterystyk statystycznych poszczególnych sygnałów, a następnie — symulacji sygnałów stochastycznych o zadanych charakterystykach statystycznych. W literaturze spotyka się prace dotyczące badań zwłaszcza nad charakterystykami statystycznymi częstotliwości w systemie elektroenergetycznym; zmiany częstotliwości stanowią jeden z sygnałów sterujących w układach regulacji turbozespołów uczestniczących w regulacji pierwotnej częstotliwości.

Zbudowano układ do symulowania sygnałów o charakterystykach statystycznych typowych dla częstotliwości w systemie elektroenergetycznym. Układ do wytwarzania



Rys. 1. Schemat blokowy układu do wytwarzania stochastycznego sygnału elektrycznego o zadanych charakterystykach statystycznych

* Praca wykonana w ramach problemu resortowego PAN-19, grupa tematyczna 6.

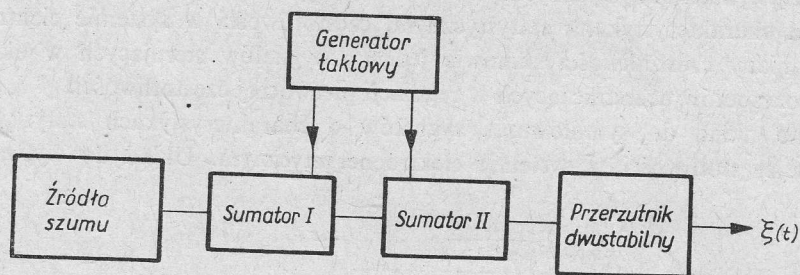
stochastycznego sygnału elektrycznego o zadanych charakterystykach statystycznych można przedstawić za pomocą schematu blokowego jak na rys. 1. Sygnał pseudotelegraficzny $\xi(t)$ wytwarzany przez generator typu SPS-68 produkcji Zakładu Teletransmisji Politechniki Gdańskiej jest podawany na filtr dolnoprzepustowy; na jego wyjściu otrzymuje się ciągły „biały szum” dolnopasmowy $\psi(t)$, o gaussowskiej gęstości rozkładu prawdopodobieństwa. Przepuszczając tego typu sygnał przez liniowy filtr formujący, o odpowiednio dobranej funkcji przenoszenia, można otrzymać sygnał gaussowski $\varphi(t)$, o pożądanej funkcji korelacji własnej. Poszczególne punkty niniejszego opracowania zawierają krótki opis działania poszczególnych bloków oraz analizę własności statystycznych sygnałów na ich wyjściach. Rozważania teoretyczne poparto przykładami eksperymentalnych charakterystyk statystycznych, otrzymanych w trakcie badań zbudowanego układu. Posługując się omówioną w tej części pracy metodą i aparaturą, badano przebiegi dynamiczne w układzie regulacji mocy turbozespołu uczestniczącego w regulacji pierwotnej częstotliwości.

W części II opracowania zostaną omówione w szczególności badania dotyczące optymalizacji parametrów regulatora w takim układzie regulacji.

1. Wytwarzanie sygnału pseudotelegraficznego i jego właściwości statystyczne

1.1. Zasada działania generatora sygnałów pseudotelegraficznych typu SPS-68

Uproszczony schemat blokowy generatora SPS-68 jest przedstawiony na rys. 2. Jako źródło szumu wykorzystano złącze półprzewodnikowe diody Zenera. Na skutek procesów fizycznych w nim zachodzących, napięcie na obciążeniu diody fluktuuje wokół pewnej wartości średniej. Składowa zmienna tych fluktuacji, zwana napięciem szumowym, przechodzi przez poziom zerowy w przypadkowych momentach czasu.



Rys. 2. Uproszczony schemat blokowy generatora sygnałów pseudotelegraficznych typu SPS-68

Sumator I realizuje sumę modulo dwa ilości zmian znaku tej składowej w bramce czasowej o szerokości t_B ; zespół bramkujący włączany jest periodycznie w odstępach czasu T_1 . Stan wyjścia sumatora jest zerowany po każdorazowym cyklu pracy. Prawdopodobieństwo pojawienia się impulsu na wyjściu sumatora I, P_1^I , i prawdopodobieństwo jego braku, P_0^I są odpowiednio równe

gdzie

$$P_1^I = \frac{1}{2} + \varepsilon, \quad P_0^I = \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{e^{-2\nu t_B}}{2}, \quad (2)$$

przy czym ν jest średnią ilością zmian znaku składowej zmiennej napięcia szumowego, przypadających na jednostkę czasu.

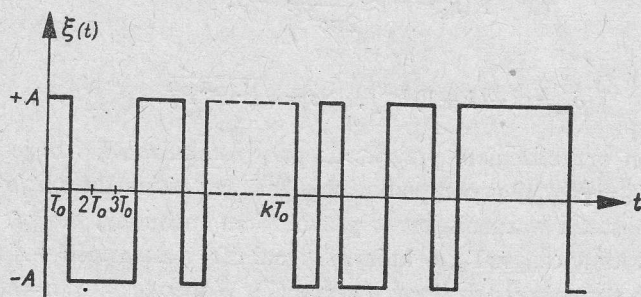
Sumator II realizuje sumę modulo dwa impulsów na wyjściu sumatora I, periodycznie, w przedziale czasu $T_2 = 4T_1$. Po zakończeniu każdego cyklu sumowania stan wyjścia układu jest zerowany. Prawdopodobieństwo pojawienia się impulsu lub jego braku na wyjściu sumatora II są równe odpowiednio

$$P_1^{II} = \frac{1}{2} - 8\varepsilon^4 = \frac{1}{2} - \delta, \quad P_0^{II} = \frac{1}{2} + 8\varepsilon^4 = \frac{1}{2} + \delta, \quad (3)$$

gdzie oznaczyliśmy $\delta = 8\varepsilon^4$. Porównując wzory (1) i (3) (mając przy tym na uwadze iż $\varepsilon \ll 1$), łatwo zauważyć, że sumator II dokonuje korekcji równomierności rozkładu prawdopodobieństwa sygnału wyjściowego.

Przerzutnik dwustabilny przekształca ciąg impulsów z wyjścia sumatora II w sygnał postaci fali prostokątnej, jak na rys. 3. Zmiany znaku sygnału $\xi(t)$ mają charakter losowy, jednakże mogą występować jedynie w momentach kT_0 ($k=0, 1, 2, \dots$). Sygnał taki, ze względu na podobieństwo do generowanego w telegrafii, przy nadawaniu kodem równomiernym, zwany jest pseudotelegraficznym.

Opis omówionego generatora jest zawarty między innymi w pracy [1].



Rys. 3. Wycinek jednej z możliwych realizacji sygnału pseudotelegraficznego

1.2. Teoretyczne charakterystyki statystyczne sygnału pseudotelegraficznego $\xi(t)$

1.2.1. Wartość średnia $E[\xi(t)]$

Wartość średnia $E[\xi(t)]$ sygnału pseudotelegraficznego nie zależy od czasu i wynosi

$$E[\xi(t)] = 2A\delta, \quad (4)$$

gdzie A – amplituda sygnału pseudotelegraficznego.

Dla generatora SPS-68 wartość $\delta < 5 \cdot 10^{-3}$. Wobec tego

$$E[\xi(t)] < A \cdot 10^{-2}. \quad (5)$$

1.2.2. Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa

Weźmy pod uwagę przedział czasu $[0, kT_0]$. Wewnątrz tego przedziału, sygnał pseudo-telegraficzny $\xi(t)$ przyjmie wartość $+A$ w m podprzedziałach o długości T_0 każdy, zaś wartość $-A$ w n podprzedziałach o długości T_0 każdy. Określimy gęstość rozkładu prawdopodobieństwa sygnału $\xi(t)$ względem liczb m, n . Otóż, przyporządkujmy chwili iT_0 ($i=0, 1, 2, \dots, k$) zmienną losową ξ_{iT_0} o następujących własnościach:

1. Zmienna losowa ξ_{iT_0} ma dwie realizacje

$$\begin{aligned} 1 &- \text{gdy } \xi(t) = +A & \text{dla } t \in [(i-1)T_0, iT_0] \\ 0 &- \text{gdy } \xi(t) = -A & \text{dla } t \in [(i-1)T_0, iT_0]. \end{aligned}$$

2. Prawdopodobieństwa tych realizacji wynoszą odpowiednio

$$P(\xi_{iT_0}=1) = P_1^{\text{II}} = \frac{1}{2} - \delta, \quad P(\xi_{iT_0}=0) = P_0^{\text{II}} = \frac{1}{2} + \delta.$$

3. Zmienne losowe $\xi_{iT_0}, \xi_{jT_0}, i \neq j$ są statystycznie niezależne.

Zauważmy, że liczby m są realizacjami zdefiniowanej poniżej zmiennej losowej η_k ,

$$\eta_k = \sum_{i=0}^k \xi_{iT_0}. \quad (6)$$

Prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną losową η_k wartości m obliczymy, posługując się asymptotycznym wzorem Laplace'a (patrz np. [4])

$$P(\eta_k = m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\delta_m^2}{2\sigma^2}}, \quad (7)$$

gdzie

$$\delta_m = m - (k+1)P_1^{\text{II}}, \quad \sigma = \sqrt{k \cdot P_1^{\text{II}} P_0^{\text{II}}}. \quad (8)$$

Wzór (7) jest dobrym przybliżeniem przy $k \gg 1$; przy ustalonych k i m jest najbardziej dokładny, gdy $P_1^{\text{I}} = P_0^{\text{II}} = \frac{1}{2}$ (w tym przypadku błąd ma wartość rzędu $\sigma m^4 / \sigma^6$). Dla omawianego generatora, ostatni warunek jest w przybliżeniu spełniony, można więc przyjąć (przy $k \gg 1$), że sumaryczny czas mT_0 , w którym sygnał $\xi(t)$ ma wartość $+A$ (w przedziale $[0, kT_0]$), ma rozkład normalny, określony wzorem (7). Wobec tego, że $n = k - m$, ten sam wniosek jest słuszny dla czasu nT_0 , w którym sygnał $\xi(t)$ przyjmuje wartość $-A$. Do tego samego rezultatu można dojść, stosując twierdzenie graniczne o rozkładach równomiernych, które w szczególnym przypadku odnosi się do przedstawionego wyżej problemu.

1.2.3. Funkcja korelacji i gęstość widmowa

Podany wzór (9) jest ogólną definicją funkcji korelacji procesu stochastycznego $\xi(t)$

$$F_{\xi\xi}(t, t+\tau) \stackrel{\text{def}}{=} E[\xi(t)\xi(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot g(x_1, x_2, t, \tau) dx_1 dx_2, \quad (9)$$

gdzie x_1, x_2 — realizacje zmiennych losowych odpowiednio $\xi(t), \xi(t+\tau)$; $g(x_1, x_2, t, \tau)$ — dwuwymiarowa gęstość rozkładu prawdopodobieństwa realizacji zmiennych losowych $\xi(t), \xi(t+\tau)$; E — operator uśredniania w zbiorze realizacji.

Rozpatrywany proces $\xi(t)$ jest niestacjonarny (jego funkcja korelacji zależy od t i τ); dla takich procesów wprowadza się (patrz np. [3]) pojęcie tzw. średniej funkcji korelacji

$$\overline{F_{\xi\xi}(t, \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F_{\xi\xi}(t, t+\tau) dt, \quad (10)$$

która zależy tylko od różnicy czasów τ – jak dla procesów stacjonarnych w szerokim sensie. Posługując się wzorem (10), otrzymamy, zgodnie z (9)

$$\begin{aligned} \overline{F_{\xi\xi}(t, \tau)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(x_1, x_2, t, \tau) dt dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{g(x_1, x_2, t, \tau)} dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Średnią funkcję korelacji można zatem obliczyć, kładąc do wzoru (9) zamiast gęstości rozkładu prawdopodobieństwa – jej wartość średnią.

Określimy dwuwymiarową gęstość rozkładu prawdopodobieństwa $g(x_1, x_2, t, \tau)$ sygnału pseudotelegraficznego $\xi(t)$. W tym celu oberzmy na osi czasu dowolny punkt $t > 0$ i oddalony od niego o $\tau > 0$ punkt $t + \tau$. Otóż, gdy

1. $0 < \tau < T_0$, to dla $iT_0 < t < (i+1)T_0 - \tau$, $i=0, 1, 2, 3, \dots$, punkty t oraz $t + \tau$ należą do przedziału czasu $(iT_0, (i+1)T_0)$. Wówczas $\xi(t)$ i $\xi(t + \tau)$ mają jednakowe znaki; możemy więc napisać

$$g(x_1, x_2, t, \tau) \underset{\substack{\tau \in (0, T_0) \\ t \in (iT_0, (i+1)T_0 - \tau)}}{=} g_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2} [\delta(x_1 - A, x_2 - A) + \delta(x_1 + A, x_2 + A)], \quad (12)$$

gdzie $\delta(x_1, x_2)$ jest dystrybucją Diraca w przestrzeni dwuwymiarowej.

Dla $(i+1)T_0 - \tau < t < (i+1)T_0$, punkty t i $t + \tau$ należą do różnych przedziałów o długości T_0 ; wówczas $\xi(t)$ i $\xi(t + \tau)$ mogą przyjmować z jednakowym prawdopodobieństwem różne znaki.

Dwuwymiarowa gęstość rozkładu prawdopodobieństwa przyjmie zatem w tym przypadku postać:

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, t, \tau) \underset{\substack{\tau \in (0, T_0) \\ t \in ((i+1)T_0 - \tau, (i+1)T_0)}}{=} g_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{4} [\delta(x_1 - A, x_2 - A) + \\ &+ \delta(x_1 + A, x_2 + A) + \delta(x_1 - A, x_2 + A) + \delta(x_1 + A, x_2 - A)]. \end{aligned} \quad (13)$$

2. Gdy $T_0 < \tau < \infty$, to punkty t oraz $t + \tau$ są oddalone o więcej niż T_0 . Wobec tego

$$g(x_1, x_2, t, \tau) \underset{\substack{\tau \in (T_0, \infty) \\ t \in (0, \infty)}}{=} g_2(x_1, x_2). \quad (14)$$

Poszukiwaną gęstość rozkładu prawdopodobieństwa można zatem zapisać następująco:

$$g(x_1, x_2, t, \tau) = \begin{cases} g_1(x_1, x_2) & \text{dla } iT_0 < t < (i+1)T_0 - \tau \\ g_2(x_1, x_2) & \text{dla } (i+1)T_0 - \tau < t < (i+1)T_0 \\ g_2(x_1, x_2) & \text{dla } 0 < t < \infty \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{gdy } 0 < \tau < T_0 \\ i = 0, 1, 2, \dots \\ \text{gdy } T_0 < \tau < \infty \end{array} \right\} \quad (15)$$

Średnią gęstość rozkładu prawdopodobieństwa sygnału pseudotelegraficznego, $g(x_1, x_2, t, \tau)$, obliczymy następująco:

Gdy $0 < \tau < T_0$, to

$$\begin{aligned} \overline{g(x_1, x_2, t, \tau)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(x_1, x_2, t, \tau) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT_0} \int_0^{nT_0} g(x_1, x_2, t, \tau) dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{T_0} \int_{iT_0}^{(i+1)T_0} g(x_1, x_2, t, \tau) dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{T_0} \left[\int_{iT_0}^{(i+1)T_0 - \tau} g_1(x_1, x_2) dt + \int_{(i+1)T_0 - \tau}^{(i+1)T_0} g_2(x_1, x_2) dt \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

Wobec tego, że $g_1(x_1, x_2)$ i $g_2(x_1, x_2)$ nie zależą od czasu t , to ich całki występujące we wzorze (16) nie zależą od i . Zatem

$$\begin{aligned} \overline{g(x_1, x_2, t, \tau)} &= \frac{1}{T_0} \left[\int_0^{T_0 - \tau} g_1(x_1, x_2) dt + \int_{T_0 - \tau}^{T_0} g_2(x_1, x_2) dt \right] = \\ &= \left(1 - \frac{\tau}{T_0}\right) \cdot g_1(x_1, x_2) + \frac{\tau}{T_0} \cdot g_2(x_1, x_2). \quad (17) \end{aligned}$$

Gdy $T_0 < \tau < \infty$, to

$$\overline{g(x_1, x_2, t, \tau)} = g_2(x_1, x_2). \quad (18)$$

Średni dwuwymiarowy rozkład gęstości prawdopodobieństwa sygnału pseudotelegraficznego ma więc postać:

$$\overline{g(x_1, x_2, t, \tau)} = \begin{cases} \left(1 - \frac{\tau}{T_0}\right) g_1(x_1, x_2) + \frac{\tau}{T_0} g_2(x_1, x_2) & \text{dla } 0 < \tau < T_0, \\ g_2(x_1, x_2) & \text{dla } T_0 < \tau < \infty. \end{cases} \quad (19)$$

Po podstawieniu (19) do (11) otrzymujemy średnią funkcję korelacji sygnału $\xi(t)$

$$\overline{F_{\xi\xi}(t, \tau)} = \begin{cases} A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T_0}\right) & \text{dla } 0 < \tau < T_0, \\ 0 & \text{dla } T_0 < \tau < \infty, \end{cases} \quad (20)$$

której wykres jest przedstawiony na rysunku 4.

Podobnie jak w przypadku funkcji korelacji, średnią gęstość widmową $\overline{\Phi_{\xi\xi}(\omega, t)}$ definiuje się następująco:

$$\overline{\Phi_{\xi\xi}(\omega, t)} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_{\xi\xi}(\omega, t) dt, \quad (21)$$

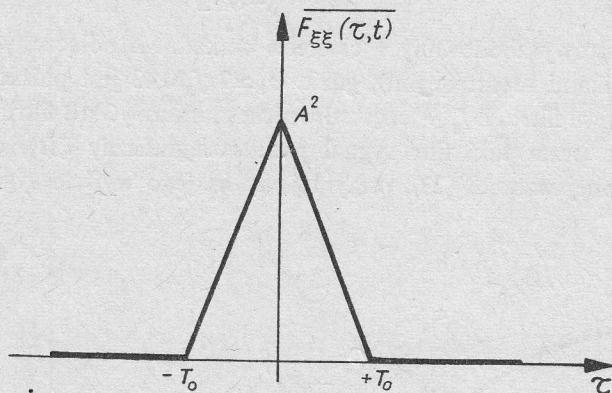
inaczej

$$\overline{\Phi_{\xi\xi}(\omega, t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi\xi}(t, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F_{\xi\xi}(t, \tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (22)$$

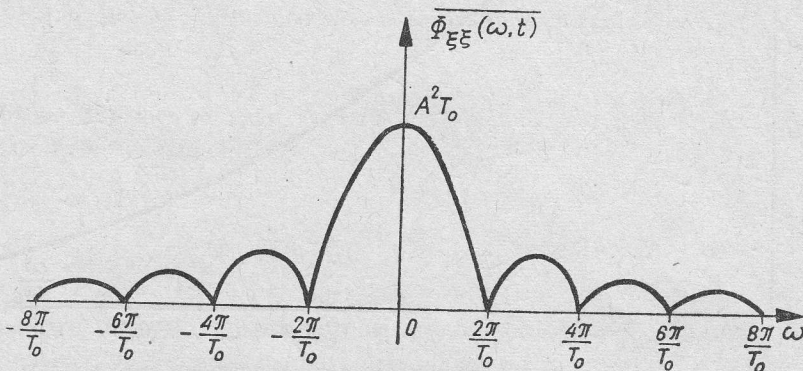
Średnia gęstość widmowa jest więc transformatą Fouriera średniej funkcji korelacji. Uwzględniając (20), otrzymujemy:

$$\overline{\Phi_{\xi\xi}(\omega, t)} = A^2 T_0 \left(\frac{\sin \omega \frac{T_0}{2}}{\frac{\omega T_0}{2}} \right)^2. \quad (23)$$

Wykres średniej gęstości widmowej sygnału pseudotelegraficznego jest przedstawiony na rysunku 5.



Rys. 4. Wykres średniej funkcji korelacji sygnału $\xi(t)$



Rys. 5. Wykres średniej gęstości widmowej sygnału $\xi(t)$

2. Przekształcanie sygnału pseudotelegraficznego w sygnał o charakterze ciągłego, gaussowskiego „białego szumu” dolnopasmowego

2.1. Teoretyczne charakterystyki statystyczne sygnału $\psi(t)$ na wyjściu filtra dolnoprzepustowego

2.1.1. Gęstość widmowa i funkcja korelacji sygnału $\psi(t)$

Sygnał o zbliżonej do „białego szumu” dolnopasmowej postaci gęstości widmowej można otrzymać przepuszczając sygnał pseudotelegraficzny przez filtr dolnoprzepustowy, o odpowiednio dobranej funkcji przenoszenia. Otóż, gęstość widmowa sygnału $\psi(t)$, otrzymanego na wyjściu filtra liniowego pobudzanego sygnałem stochastycznym $\xi(t)$, jest określona wzorem

$$\Phi_{\psi\psi}(\omega) = |H(j\omega)|^2 \Phi_{\xi\xi}(\omega), \quad (24)$$

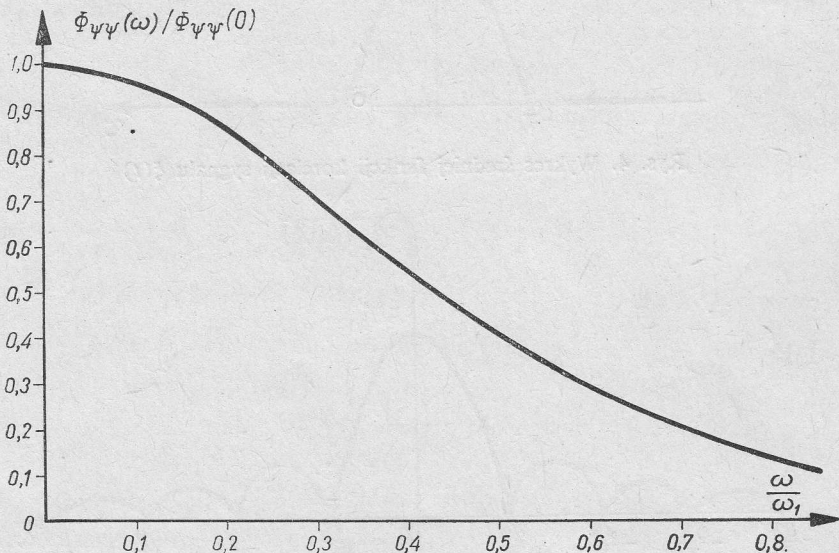
gdzie $H(j\omega)$ – funkcja przenoszenia filtra.

Niech moduł funkcji przenoszenia $H(j\omega)$ ma postać:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]^2} \quad (25)$$

(filtr dolnoprzepustowy zbudowany z czterech kaskadowo połączonych ogniw RC , oddzielonych wtórnymi separującymi), gdzie $\omega_1 \simeq 2\pi f_g/0,43$ jest pulsacją graniczną 3 dB pojedynczego ogniwa filtra, a f_g – częstotliwością graniczną 3 dB filtra.

Przepuszczając przez taki filtr sygnał pseudotelegraficzny $\xi(t)$, o średniej gęstości widmowej określonej wzorem (23), otrzymujemy na jego wyjściu sygnał $\psi(t)$ o gęstości



Rys. 6. Wykres przybliżonej gęstości widmowej sygnału $\psi(t)$

widmowej

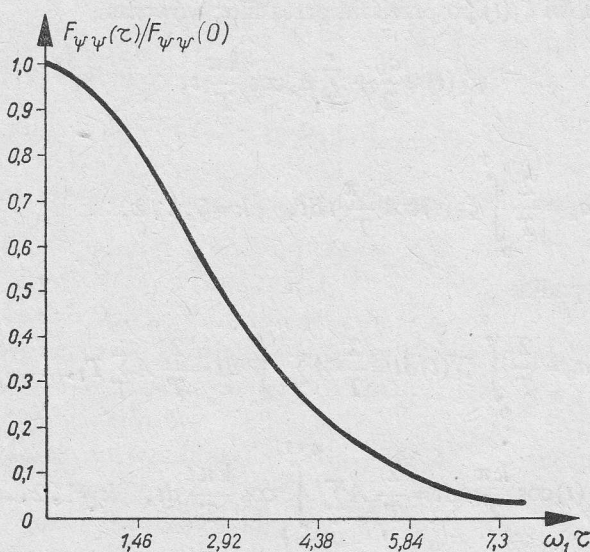
$$\Phi_{\psi\psi}(\omega) = \frac{A^2 T_0}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]^4} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\omega T_0}{2}}{\frac{\omega T_0}{2}}\right)^2. \quad (26)$$

Przy spełnionym warunku

$$f_g \ll f_0 \quad (27)$$

(wówczas sygnał $\varphi(t)$ będzie miał charakter procesu gaussowskiego, patrz punkt 2.1.2), możemy napisać w przybliżeniu

$$\Phi_{\psi\psi}(\omega) \approx \frac{A^2 T_0}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]^4}. \quad (28)$$



Rys. 7 Wykres przybliżonej funkcji korelacji sygnału $\psi(t)$

Przybliżoną funkcję korelacji sygnału $\psi(t)$ można otrzymać, obliczając odwrotną transformatę Fouriera funkcji (28),

$$F_{\psi\psi}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\psi\psi}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{5}{32} A^2 T_0 \omega_1 \cdot e^{-\omega_1 \tau} \left(1 + \omega_1 \tau + \frac{2}{5} \omega_1^2 \tau^2 + \frac{1}{15} \omega_1^3 \tau^3\right). \quad (29)$$

Znormalizowane wykresy przybliżonej gęstości widmowej (28) oraz przybliżonej funkcji korelacji (29) są przedstawione na rysunkach 6 i 7.

2.1.2. Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa i wartość średnia sygnału $\psi(t)$

Wykażemy, że sygnał $\psi(t)$ na wyjściu filtru można traktować jako proces o gaussowskiej gęstości rozkładu prawdopodobieństwa. W tym celu zdefiniujemy następujące funkcje:

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } \xi(t) < 0 \\ \xi(t) & \text{gdy } \xi(t) \geq 0, \end{cases} \\ \xi_2(t) &= \begin{cases} \xi(t) & \text{gdy } \xi(t) < 0 \\ 0 & \text{gdy } \xi(t) \geq 0. \end{cases}\end{aligned}\quad (30)$$

Wówczas, oczywiście

$$\xi_1(t) \geq 0, \quad \xi_2(t) \leq 0 \quad (31)$$

oraz

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t). \quad (32)$$

Weźmy pod uwagę funkcję $\xi_1(t)$. Niech $T > 0$ będzie dowolnie wybranym momentem czasu. Załóżmy, że funkcję $\xi_1(t)$ rozłożono w szereg Fouriera cosinusów. Przyjmiemy, że wymieniony wyżej filtr wytłumi harmoniczne funkcji $\xi_1(t)$ począwszy od $n+1$. Niech $\psi_1(t)$ odpowiada sygnałowi $\xi_1(t)$ po przejściu przez filtr; wówczas

$$\psi_1(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos \frac{k\pi}{T} t, \quad (33)$$

gdzie

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T \xi_1(t) \cos \frac{k\pi}{T} t dt, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

W rozpatrywanym przypadku

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T \xi_1(t) dt = \frac{2}{T} A \sum_i \int_{t_i}^{t_i+T_i} dt = \frac{2}{T} A \sum_i T_i, \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T \xi_1(t) \cos \frac{k\pi}{T} t dt = \frac{2}{T} A \sum_i \int_{t_i}^{t_i+T_i} \cos \frac{k\pi}{T} t dt, \quad k=1, 2, \dots, n,\end{aligned}\quad (35)$$

gdzie i oznacza podprzedziały przedziału $[0, T]$, w których funkcja $\xi_1(t) > 0$ ($= +A$), t_i — czas, w którym funkcja $\xi_1(t)$ przyjmie wartość $+A$, T_i — długość okresu, zaczynającego się w chwili t_i , w którym funkcja $\xi_1(t)$ nie zmienia wartości. Zauważmy, że

$$\frac{2}{T} \int_{t_i}^{t_i+T_i} \cos \frac{k\pi}{T} t dt = \frac{2}{k\pi} \left[\sin \frac{k\pi}{T} (t_i + T_i) - \sin \frac{k\pi}{T} t_i \right]. \quad (36)$$

Wobec powyższego możemy napisać

$$\frac{k\pi}{T} t_i = p\pi + \alpha, \quad (37)$$

gdzie p jest pewną liczbą całkowitą, natomiast $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Przyjmiemy, że również $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{k\pi}{T} T_i < \frac{\pi}{2}$ (przy k ograniczonym, można uczynić $\frac{k\pi}{T}$ dowolnie małym, byleby T było dostatecznie duże; prawdopodobieństwo, aby T_i było rzędu T może być w tych warunkach bliskie zeru). Wówczas, posługując się jako przybliżeniem pierwszym wyrazem rozwinięcia w szereg Maclaurina

$$\begin{aligned} \sin \frac{k\pi}{T} (t_i + T_i) - \sin \frac{k\pi}{T} T_i &= \pm \sin \left(\alpha + \frac{k\pi}{T} T_i \right) \mp \sin \alpha \approx \\ &\approx \pm \left(\alpha + \frac{k\pi}{T} T_i - \alpha \right) = \pm \frac{k\pi}{T} T_i. \end{aligned} \quad (38)$$

Dalej, zgodnie z (36) i drugim spośród wyrażeń (35),

$$a_k \approx \pm \frac{2}{T} A \sum_i T_i, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (39)$$

Ogólnie, zgodnie z (39) i z pierwszym spośród wyrażeń (35),

$$a_k \sim \sum_i T_i, \quad k=0, 1, 2, \dots, n. \quad (40)$$

Zgodnie więc z rozważaniami w punkcie 1.2.2 niniejszej pracy, zmienna losowa

$$mT_0 = \sum_i T_i \quad (41)$$

ma gaussowską gęstość rozkładu prawdopodobieństwa.

Zatem, również współczynniki rozwinięcia w szereg Fouriera funkcji $\psi_1(t)$ (na wyjściu filtru) mają taką gęstość, a to oznacza, wobec (33) i (40), że funkcja $\psi_1(t)$ ma gaussowską gęstość rozkładu prawdopodobieństwa.

Analogiczne rozważania dotyczą funkcji $\psi_2(t)$. Wobec tego, na podstawie (32), funkcja

$$\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t) \quad (42)$$

ma również gaussowską gęstość rozkładu prawdopodobieństwa. Wartość średnia sygnału na wyjściu filtru wynosi

$$E\psi(t) = E\psi_1(t) + E\psi_2(t) = 0, \quad (43)$$

ponieważ $E\psi_1(t) = -E\psi_2(t)$ (sygnały $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ mają przeciwne znaki, natomiast ich własności statystyczne są identyczne).

2.2. Przykłady eksperymentalnych charakterystyk statystycznych wytwarzanych sygnałów $\psi(t)$

Badania eksperymentalnych charakterystyk statystycznych sygnału $\psi(t)$ przeprowadzono za pomocą uniwersalnej maszyny analogowej. Złożyły się na nie pomiary statystycznej wartości średniej, dystrybuanty oraz funkcji korelacji. Zakładając ergodyczność pro-

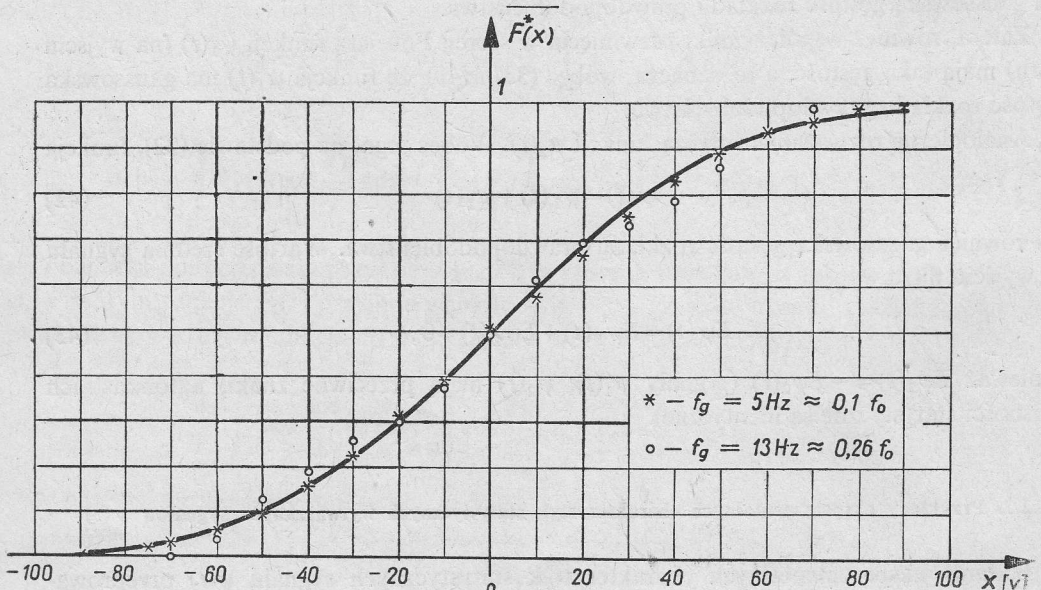
cesu $\psi(t)$, charakterystyki statystyczne uzyskiwano metodą uśredniania względem czasu. Opis zastosowanych metod pomiarowych oraz ocenę ich dokładności można znaleźć między innymi w pracach [5, 6, 7]. Tu ograniczymy się tylko do podania niektórych z otrzymanych w trakcie pomiarów wyników.

2.2.1. Eksperymentalna wartość średnia sygnału $\psi(t)$

Przyjmując czas uśredniania $T=200$ s, przeprowadzono serię pomiarów statystycznej wartości średniej m_ψ^* sygnału $\psi(t)$, o dyspersji $\sigma_\psi^2=1600$ V² i przy $\omega_1=14,6$ rad/s. Obliczono następnie wartość średnią statystycznej wartości średniej $E[m_\psi^*]$. Okazało się, iż $|E[m_\psi^*]| < 0,5$ V.

2.2.2. Eksperymentalna dystrybuanta sygnału $\psi(t)$

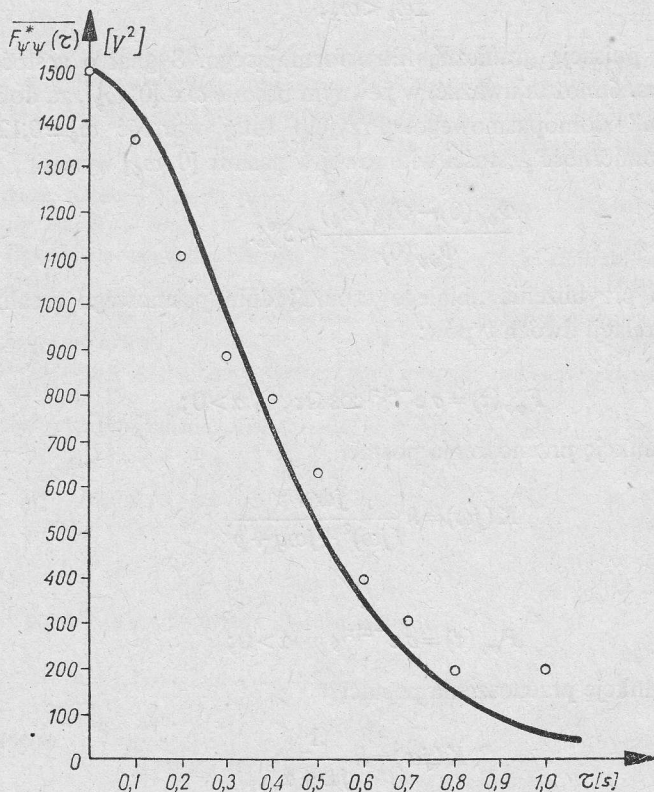
Na rys. 8 przedstawiono wyniki pomiarów dystrybuanty sygnału $\psi(t)$, otrzymane przy $A=90$ V, $\sigma_\psi^2=1600$ V², $f_0=50$ s⁻¹, $f_g=5$ i 13 s⁻¹. Wartości dystrybuanty w poszczególnych punktach są wynikiem uśredniania na zbiorach wartości otrzymanych drogą uśredniania względem czasu. Przyjęto czas uśredniania $T=100$ s. Dla porównania, naniesiono na rysunku (linią ciągłą) krzywą teoretyczną dystrybuanty gaussowskiej o dyspersji $\sigma_\psi^2=1600$ V². Z przeprowadzonych badań wynika, iż przy $f_g/f_0 \leq 0,1$ sygnał $\psi(t)$ można uważać za dobre przybliżenie procesu gaussowskiego.



Rys. 8. Wykres eksperymentalnej dystrybuanty sygnału $\psi(t)$

2.2.3. Eksperymentalne funkcje korelacji sygnału $\psi(t)$

Na rys. 9 przedstawiono wyniki pomiarów średniej statystycznej funkcji korelacji sygnału $\psi(t)$, przy $A=81,5$ V, $\sigma_{\psi}^2=1510$ V², $f_0=5$ s⁻¹, $f_g=0,5$ s⁻¹. Przyjmując czas uśredniania $T=200$ s, mierzono wartości statystycznej funkcji korelacji $F_{\psi\psi}^*(\tau)$. Funkcję $\bar{F}_{\psi\psi}^*(\tau)$ otrzymano drogą uśredniania za zbiorze wyników pomiarów. Na rysunku linią ciągłą przedstawiono krzywą teoretyczną funkcji korelacji $F_{\psi\psi}(\tau)$ dla podanych wyżej parametrów sygnału.

Rys. 9. Wykres eksperymentalnej funkcji korelacji sygnału $\psi(t)$

3. Przekształcanie „białego szumu” dolnopasmowego w sygnał o charakterze ciągłego procesu gaussowskiego z zadaną funkcją korelacji

3.1. Przekształcanie sygnału typu „biały szum” w sygnał stochastyczny z zadaną funkcją korelacji

Problem kształtowania gaussowskiego procesu stochastycznego o zadanej gęstości widmowej $\Phi_{\varphi\varphi}(\omega)$ (funkcji korelacji $F_{\varphi\varphi}(\tau)$), sprowadza się do syntezy filtru o transmitancji $K(j\omega)$ spełniającej warunek

$$\Phi_{\varphi\varphi}(\omega) = |K(j\omega)|^2 \cdot D, \quad (44)$$

gdzie D oznacza gęstość widmową „białego szumu” (jego intensywność). Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa sygnału $\varphi(t)$ jest przy tym tego samego typu co sygnału wejściowego.

3.2. Przykłady realizowanych funkcji korelacji

Do wytworzenia sygnału o zadanej funkcji korelacji można posłużyć się „białym szumem” dolnopasmowym o gęstości widmowej równomiernej w pasmie pulsacji $\omega \in [0, \omega_x]$. Wartość ω_x musi przy tym spełniać warunek

$$\omega_k < \omega_x, \quad (45)$$

gdzie ω_k jest górną pulsacją graniczną filtru formującego. Sygnał o gęstości widmowej przedstawionej na rys. 6 można uważać, w pewnym pasmie $\omega \in [0, \omega_\psi]$, za dobre przybliżenie „białego szumu” dolnopasmowego. Przyjęto tutaj wartość $\omega_\psi \simeq 0,12\omega_1 = 0,28\omega_g$, przy której nierównomierność gęstości widmowej w pasmie $[0, \omega_\psi]$ wynosi

$$\frac{\Phi_{\psi\psi}(0) - \Phi_{\psi\psi}(\omega_\psi)}{\Phi_{\psi\psi}(0)} \approx 5\%. \quad (46)$$

Za pomocą takiego przybliżenia „białego szumu” dolnopasmowego zrealizowano sygnały o funkcjach korelacji dwóch typów:

1.

$$F_{\varphi\varphi}(\tau) = \sigma e^{-\alpha|\tau|} \cos \Omega\tau, \quad \alpha > 0; \quad (47)$$

filtr formujący ma funkcję przenoszenia postaci

$$K(j\omega) = h \frac{j\omega + p}{(j\omega)^2 + j\omega q + p^2} \quad (48)$$

— patrz Dodatek I,

2.

$$F_{\varphi\varphi}(\tau) = \sigma e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0; \quad (49)$$

filtr formujący ma funkcję przenoszenia postaci

$$K(j\omega) = h \frac{1}{j\omega + \alpha} \quad (50)$$

— patrz Dodatek II.

Funkcje przenoszenia filtrów formujących modelowano na maszynie analogowej.

Obydwa typy wytwarzanych sygnałów posłużyły do modelowych badań optymalizacyjnych regulatora mocy turbospołu, przy wymuszeniach stochastycznych. Obie wymienione wyżej funkcje korelacji (47) i (49) są typowe jako składowe funkcji korelacji zmian częstotliwości w systemie elektroenergetycznym.

4. Wnioski

Pomiary charakterystyk statystycznych sygnałów pozwoliły stwierdzić, że zarówno przyjęta metoda jak i zastosowana aparatura nadają się w pełni do wytwarzania sygnału zbliżonego do „białego szumu” dolnopasmowego, gaussowskiego, o wartości średniej

równiej zero, a dalej — do symulowania stochastycznych zmian częstotliwości w systemie elektroenergetycznym, jako sygnału sterującego w układzie regulacji turbozespołu. W związku z tym, w następnym etapie prac przeprowadzono modelowe badania optymalizacyjne układu regulacji mocy turbozespołu, przy oddziaływaniu nań stochastycznego sygnału sterującego.

Praca wpłynęła do Redakcji w październiku 1972 r.

Literatura

- [1] T. Bartkowski, W. Porębski, E. Ziajka, *Generator wolnozmiennych procesów przypadkowych do statystycznego modelowania obiektów sterowania*. Zesz. Nauk. Politechniki Gdańskiej Nr 87, 1966.
- [2] Z. Domachowski, A. Malinowski, *Generowanie „białego szumu” dolnopasmowego do badań modelowych układu sterowania turbozespołu*. Prace V Krajowej Konferencji Automatyki, zeszyt 6, Gdańsk, czerwiec 1971.
- [3] A. A. Charkiewicz, *Spektry i analiz* (wyd. IV). Gosudarstwennoje izdatielstwo fiziko-matiematičeskoj litieratury, Moskwa 1962.
- [4] W. R. Lewin, *Tieorija slučajnych processow i jejo primjenienije w radiotiechnike*. Sowietskoje radio, Moskwa 1960.
- [5] L. Lewin, *Mietody rieszenija tiechničeskich zadacz s izpolzowanijem analogowych wyczislitielnych maszin*. „Mir”, Moskwa 1966.
- [6] N. A. Lifszyc, W. N. Pugaczew, *Wierojatnostnyj analiz sistiem awtomaticzeskowo uprawlenija*. Sowietskoje radio, Moskwa 1963.
- [7] L. L. Rotkop, *Statisticzeskije mietody issledowanija na elektronnych modelach*. Eniergija, Moskwa 1967.

Dodatek I

Funkcji korelacji postaci (47) odpowiada gęstość widmowa

$$\Phi_{\varphi\varphi}(\omega) = 2\sigma\alpha \frac{\omega^2 + (\Omega^2 + \alpha^2)}{\omega^4 + 2(\alpha^2 - \Omega^2)\omega^2 + (\alpha^2 + \Omega^2)^2}. \quad (\text{D-1})$$

Wobec tego otrzymujemy

$$|K(j\omega)| = [\Phi_{\varphi\varphi}(\omega)/D]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2\sigma\alpha}{D} \frac{\omega^2 + (\alpha^2 + \Omega^2)}{\omega^4 + 2(\alpha^2 - \Omega^2)\omega^2 + (\alpha^2 + \Omega^2)^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{D-2})$$

Dla argumentu zespolonego, transmitację filtru kształtującego można zapisać w postaci

$$K(s) = h \frac{s+p}{s^2 + qs + p^2}, \quad (\text{D-3})$$

gdzie

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma\alpha}{D}}, \quad p = \sqrt{\alpha^2 + \Omega^2}, \quad q = 2\alpha. \quad (\text{D-4})$$

Filtr o takiej transmitacji można modelować na maszynie analogowej metodą programowania bezpośredniego.

Przy kształtowaniu procesu stochastycznego posłużono się „białym szumem” dolnopasmowym, co pociągnęło za sobą konieczność określenia szerokości pasma przenoszenia filtru. Jako górną pulsację

graniczną zdefiniowano liczbę ω_k spełniającą warunek, że dla $\omega \geq \omega_k$

$$\frac{\int_{\omega_k}^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega} \leq \varepsilon; \quad \varepsilon > 0. \quad (D-5)$$

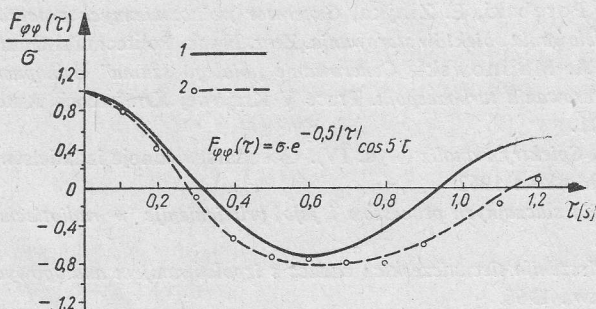
Rozwiązując nierówność (D-5) względem ω_k , otrzymano

$$\omega_k = \alpha/v + \sqrt{[(1/v^2) + 1] \alpha^2 + \Omega^2}, \quad (D-6)$$

gdzie

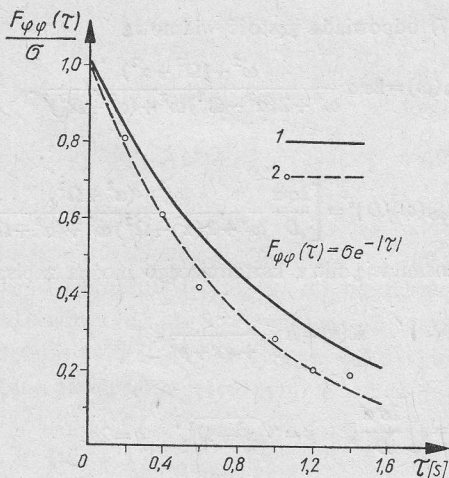
$$v = \operatorname{tg}(\varepsilon\pi), \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}. \quad (D-7)$$

W modelowaniu przyjęto $\varepsilon = 0,1$.



Rys. 10. Wykresy eksperymentalnej oraz teoretycznej oscylacyjno-wykładniczej funkcji korelacji sygnału sterującego 1 – zadana funkcja korelacji, 2 – zmierzone oszacowanie funkcji korelacji

Na rysunku 10 podano, jako przykład, wykresy zmierzonego oszacowania funkcji korelacji oraz założonego teoretycznego jej przebiegu, dla procesu stochastycznego formowanego opisaną tutaj metodą. Widoczny błąd zmierzonego oszacowania, rosnący przy zwiększaniu czasu opóźnienia τ , spowodowany jest niedokładnością wnoszoną przez zastosowaną metodę Padé opóźniania sygnału.



Rys. 11. Wykresy eksperymentalnej oraz teoretycznej wykładniczej funkcji korelacji sygnału sterującego 1 – zadana funkcja korelacji, 2 – zmierzone oszacowanie funkcji korelacji

Dodatek II

Funkcji korelacji typu (49) odpowiada gęstość widmowa $\Phi_{\varphi\varphi}(\omega) = 2\sigma \cdot \alpha / (\alpha^2 + \omega^2)$. Analogicznie jak w Dodatku I, otrzymano

$$|K(j\omega)| = \left[\frac{2\sigma\alpha}{D} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{D-8})$$

a dalej

$$K(s) = h \frac{1}{s + \alpha}, \quad (\text{D-9})$$

gdzie

$$h = \sqrt{2\sigma\alpha/D}. \quad (\text{D-10})$$

Na górną pulsację graniczną filtru, zdefiniowaną jak w Dodatku I (zależność (D-5)), otrzymano wzór

$$\omega_k = \alpha \operatorname{ctg}(\varepsilon\pi/2). \quad (\text{D-11})$$

W modelowaniu przyjęto $\varepsilon = 0,1$.

Rysunek 11 przedstawia wykresy zmierzonego oszacowania funkcji korelacji oraz założonego jej teoretycznego przebiegu, dla wybranego przykładu procesu stochastycznego rozważanego tu typu. Podobnie jak poprzednio, wzrost błędu zmierzonego oszacowania, przy zwiększaniu czasu opóźnienia τ , spowodowany jest niedokładnością metody Padé.

Модельные исследования системы регулирования мощности турбоагрегата при стохастических вынуждениях

Часть 1. Производство стохастического сигнала изменений частоты для исследований систем регулирования турбин

Резюме

Работа касается создания стохастического электрического сигнала с заданными статистическими характеристиками, служащего симулированию сигнала, воздействующего на турбоагрегат, происходящего от изменений частоты электроэнергетической сети. Примененную с этой целью электронную систему можно представить с помощью блочной схемы, как на рис. 1. Псевдотелеграфический сигнал, производимый специальным генератором, подается на нижнепропускной фильтр. На выходе из него получается сплошной нижнеполосный „белый шум”, характеризующийся гауссовой плотностью распределения вероятности. Пропуская такого типа сигнал через линейный формирующий фильтр с соответственно подобранной функцией передачи, можно получить гауссовый сигнал, характеризующийся желательной функцией автокорреляции. В работе даются краткое описание действия отдельных блоков и анализ статистических свойств сигналов на их выходах. Теоретические рассуждения иллюстрируются примерами экспериментальных статистических характеристик, полученных во время исследований построенной системы. Экспериментальные исследования позволили доказать, что как принятый метод так и примененная аппаратура отвечают требованиям, необходимым для их применения в модельных оптимизационных исследованиях системы регулирования мощности турбоагрегата, при воздействии на него стохастического управляющего сигнала.

Model Investigations of a Turbine Set Power Control System Subjected to Stochastic Input Signals

Part I. Generation of a Stochastic Signal of Frequency Changes for Investigations of Turbine Set Control System

Summary

Generation of a stochastic electrical signal of required statistical characteristics is subject of the paper, this signal being intended for simulating a signal affecting the turbine set and resulting from the frequency changes in the power network. The block diagram of an electronic system developed for that purpose is presented in Fig. 1. A pseudotelegraphic signal generated by a special generator is transferred to the low-pass filter; at its output a continuous low-frequency "white noise" of the Gaussian density of probability distribution is obtained. Such a signal can be formed by a shaping linear filter of appropriate transfer function into a Gaussian signal of a desired auto-correlation function. A short description of the operation of respective blocks together with the analysis of properties of their output signals is presented. Theoretical considerations are supplemented by examples of experimental statistical characteristics obtained during the investigation of the constructed system. During the experimental investigations it was proved that the adopted method and used instruments meet the requirements allowing their application to the model optimization investigations of the turbine set power control system affected by the stochastic control signal.