

INSTYTUT MASZYN PRZEPIYWOVYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

redakcja

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPIYWOVYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

65

WARSZAWA—POZNAŃ 1974

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

KOMITET REDAKCYJNY — EXECUTIVE EDITORS
KAZIMIERZ STELLER — REDAKTOR — EDITOR
JERZY KOŁODKO · JÓZEF ŚMIGIELSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA — EDITORIAL OFFICE

Instytut Maszyn Przepływowych PAN, 80-952 Gdańsk,
skr. pocztowa 621, ul. Gen. Józefa Fiszer 14, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1974

Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 400+90 egz.	Oddano do składania 31 V 1974 r.	
Ark. wyd. 14. Ark. druk. 11.	Podpisano do druku 2 XII 1974 r.	
Papier ilustrac. kl. V, 70 g 70 × 100 cm.	Druk ukończono w grudniu 1974 r.	
Nr zam. 449/30.	F-15/1068.	Cena zł 42, —

DRUKARNIA UNIwersytetu IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

ANDRZEJ KONORSKI

Gdańsk

Krytyczne warunki nierównowagowego przepływu czynników dwufazowych*

Przeprowadzono analizę powstawania warunków krytycznych w nierównowagowym przepływie czynników dwufazowych. Podano sposób wyznaczania prędkości krytycznych, wprowadzając nowe pojęcia do opisu warunków powstawania stanu krytycznego. Dla przypadku rozprężających przepływów pary wilgotnej przedstawiono odpowiednie parametry charakterystyczne w funkcji prędkości rozprężania i zilustrowano je przykładowymi obliczeniami numerycznymi.

Oznaczenia

- | | |
|--|---|
| a — prędkość dźwięku (prędkość fazowa rozchodzenia się zaburzeń akustycznych), | n — współczynnik wymiany ciepła (we wzorze (3.7)), |
| b — współczynnik oporu kropeł w jednostce objętości (wg wzoru (3.11)), | P — siła oddziaływania kropeł na gaz w jednostce objętości, |
| c_k — prędkość krytyczna, | p — ciśnienie statyczne, |
| c_p — ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, | $\dot{p} = \frac{dp}{dt}$ — prędkość zmiany ciśnienia, |
| E — źródło energii termicznej w jednostce objętości, | Q — źródło ciepła w jednostce objętości, |
| e — gęstość strumienia energii termicznej na powierzchni kropeł, | q — gęstość strumienia ciepła na powierzchni kropeł, |
| F — pole przekroju prostopadłego do kierunku przepływu, przypadające na jednostkę strumienia masy przepływającej mieszaniny, | R — stała gazowa, |
| g — udział masowy w strumieniu przepływu, | s — entropia właściwa, |
| h — entalpia właściwa przemiany fazowej („ciepło utajone”), | T — temperatura bezwzględna, |
| i — entalpia właściwa, | t — czas, |
| m — współczynnik wymiany masy (we wzorze (3.7)), | u — odchyłka prędkości (prędkość względna), |
| m_{pol} — wykładnik politropy, | w — prędkość, |
| N — koncentracja kropeł, | Y — źródło masy w jednostce objętości, |
| | y — gęstość strumienia masy na powierzchni kropeł, |
| | z — współrzędna przestrzenna, |

* Praca wykonana w ramach problemu resortowego PAN-19, grupa tematyczna 2.

- | | |
|---|---|
| α_k – bezwymiarowe przedstawienie prędkości krytycznej (wg wzoru (6.10)), | i, j – liczby porządkowe frakcji kropel, |
| β – krytyczny stosunek ciśnień, | k – krytyczne warunki przepływu czynnika, |
| γ – gęstość, | kg – krytyczne warunki przepływu samego składnika gazowego, |
| Δ – oznaczenie przyrostu, | s – stan równowagi wewnętrznej (nasyce- |
| δ – odchyłka od temperatury nasycenia, | nia), |
| κ – wykładnik izentropy w gazie, | R – relaksacja, |
| λ_k – bezwymiarowe przedstawienie prędkości krytycznej (wg wzoru (6.13)), | ∞ – granicznie wielka częstość dźwięku. |
| ν – częstość, | |
| ξ – miara sumarycznego odchylenia od równowagi wewnętrznej (wg wzoru (6.19)), | |
| ρ – promień kropli, | |
| Φ – łączna powierzchnia kropel w jednostce objętości, | |

Wskaźniki górne

- () – bez wskaźnika – składnik gazowy,
 (') – składnik ciekły,
 () * – pozorne przyrosty parametrów,
 (~) – słabe zaburzenia.

Wskaźniki dolne

- f – przepływ z „zamrożoną wymianą”,

1. Wstęp

Zjawisko występowania krytycznych warunków przepływu (tzw. „blokowania przepływu”) jest jednym ze zjawisk charakteryzujących przepływ czynników ściśliwych i posiada ogólnie znaną, prostą interpretację teoretyczną dla przepływu gazów (jednofazowych), a w szczególności gazów doskonałych. Parametry opisujące to zjawisko, jak również związki między tymi parametrami a parametrami opisującymi proces rozchodzenia się w czynniku słabych zaburzeń używane są jako wielkości lub funkcje charakterystyczne, decydujące o własnościach rozpatrywanych przepływów.

Przy przepływie mieszanin wielofazowych zarówno zjawisko występowania krytycznych warunków przepływu, jak i proces rozchodzenia się słabych zaburzeń w czynniku podlegać będą bardziej złożonemu prawom, zaś związki między parametrami opisującymi te zjawiska będą musiały uwzględniać odmienny i bardziej złożony charakter przemian występujących w przepływach czynników wielofazowych. Wymienić tu należy przede wszystkim wpływ występujących w przepływach wielofazowych stanów braku równowagi termodynamicznej i różnic prędkości między poszczególnymi podukładami (fazami, frakcjami) uczestniczącymi w przepływie oraz wpływ wewnętrznych procesów wymiany (ciepła, masy, pędu) między tymi podukładami.

Zagadnienie krytycznego przepływu czynników wielofazowych – w szczególności jednoskładnikowych par mokrych i mieszanin – było przedmiotem szeregu prac doświadczalnych i analityczno-obliczeniowych, skierowanych głównie na uzyskanie danych i sposobów obliczania wypływu pary mokrej lub odparowującej wody (np. [1, 6]). Ostatnio w niektórych pracach analizowano przypadki krytycznego wypływu mieszanin wielofazowych przy przyjęciu określonych założeń, dotyczących wzajemnego wpływu przepływających faz ([4, 5]).

W niniejszej pracy podjęto próbę analizy krytycznych warunków nierównowagowych

przepływów czynników dwufazowych (par wilgotnych o wielu frakcjach fazy ciekłej). Celem pracy jest wyprowadzenie zależności, umożliwiających jednolitą interpretację powstawania warunków krytycznych w ogólnym przypadku braku równowagi termodynamicznej w przepływie oraz obliczeniowe wyznaczenie wartości parametrów charakterystycznych, takich jak prędkość krytyczna, krytyczny stosunek ciśnień, parametry odchylenia od równowagi w stanie krytycznym i in.

Rozważania niniejszej pracy prowadzone będą w oparciu o proponowany w poprzednich pracach autora sposób traktowania przemian nierównowagowych w przepływach czynników dwufazowych ([7, 8, 9, 10, 11, 12]) i mają zastosowanie w zakresie ważności rozpatrywanego modelu fizycznego.

2. Założenia i opis przyjętego modelu przepływu

Rozpatrywane będą zjawiska występujące w jednowymiarowym, ustalonym przepływie czynnika dwufazowego, będącego parą wilgotną dowolnej substancji. Czynnik składa się z fazy gazowej (będącej składnikiem nośnym mieszaniny) oraz zawartych w niej kropeł cieczy różnych rozmiarów, rozmieszczonych w dowolny nieregularny sposób; grupy kropeł o jednakowych wielkościach i parametrach fizycznych nazywane będą frakcjami. Krople cieczy traktowane będą jako kuliste i nieodkształcalne, a ich stan cieplny określony wartością temperatury. Zakłada się, że faza ciekła jest na tyle rozdrobniona, aby można było uśredniać wzajemne oddziaływanie każdej z jej frakcji z fazą gazową. Każdy z rozpatrywanych podukładów (fazy, frakcje) uważany będzie za jednorodny fizycznie, a jego stan określany za pomocą średnich masowych wartości odpowiednich parametrów.

W dalszym ciągu rozpatrywany będzie technicznie ważny zakres parametrów czynnika, dla którego dopuszczalne jest pominięcie objętości właściwej kropeł cieczy w porównaniu z objętością właściwą fazy gazowej, tzn.

$$\gamma' \gg \gamma.$$

Wpływ składowych kapilarnych uważać będziemy za pomijalny.

Rozpatrzmy przemiany termodynamiczne i kinematyczne, którym podlegać będzie przepływ czynnika pod wpływem wymuszeń, działających ze skończoną prędkością. Przebieg czasowy wymuszeń określić możemy poprzez zadanie przebiegu stosownego parametru przepływu, np. przekroju jednostkowego F lub ciśnienia statycznego p . Odpowiedzią układu na działanie wymuszenia będzie następowanie przemian w poszczególnych podukładach (fazach, frakcjach), prowadzących do powstania między nimi różnic parametrów stanu cieplnego i różnic prędkości – czyli do powstania stanu braku równowagi wewnętrznej w czynniku. Skutkiem stanu braku równowagi wewnętrznej będzie z kolei występowanie procesów wymiany wewnętrznej (masy, energii, pędu) pomiędzy fazą gazową – jako składnikiem nośnym przepływu – a każdą z frakcji fazy ciekłej.

Zgodnie z założeniem o pomijalności objętości właściwej kropeł, przepływ mieszaniny dwufazowej można więc traktować jako przepływ czynnika gazowego (mającego właściwości fizyczne takie, jak faza gazowa rozpatrywanego przepływu), w którym działa system wewnętrznych źródeł ciepła, masy i pędu, rozmieszczonych w czynniku w sposób ciągły.

Oddziaływanie tych źródeł na przepływ gazu zastępuje procesy wymiany z kroplami cieczy, zaś wydajność tych zastępczych źródeł będzie sterowana zmiennością parametrów, charakteryzujących odchylenia od równowagi wewnętrznej i z kolei wpływać będzie na przebieg bilansów wielkości zachowawczych każdego z podukładów. Procesy wymiany ze źródłami zastępczymi będą więc miały charakter procesów relaksacyjnych. Tego rodzaju model przemian w czynniku dwufazowym opisano w poprzednich pracach autora ([8, 10, 11]).

Jednym z istotnych wniosków, wynikających ze stosowania tego modelu do opisu przemian czynnika dwufazowego jest stwierdzenie, że wartości parametrów określających odchylenie od równowagi termodynamicznej, zależą nie tylko od aktualnego stanu czynnika, lecz od całej „historii” jego stanów. Zależność ta ma charakter „zanikającej pamięci”, tzn. że stany leżące dalej w przeszłości wywierają słabszy wpływ na stan aktualny.

Stan braku równowagi wewnętrznej w czynniku określimy podając dla każdego z podukładów odchyłkę temperatury danego podukładu od temperatury równowagi (nasylenia):

$$\left. \begin{aligned} \delta &= T - T_s, \\ \delta'_i &= T'_i - T_s, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

oraz dla każdej z frakcji fazy ciekłej odchyłkę prędkości (w stosunku do prędkości fazy gazowej):

$$u_i = w - w'_i. \quad (2.2)$$

Będziemy przyjmować, że wartości wszystkich odchyłek są małe w stosunku do bezwzględnych wartości odpowiednich parametrów, tzn.:

$$\left| \frac{\delta}{T_s} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\delta'_i}{T_s} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{u}{w} \right| \ll 1. \quad (2.3)$$

Z przyjęcia tego wyniku dopuszczalność pominięcia wpływu spontanicznego tworzenia się fazy ciekłej poprzez tworzenie zarodki w jednorodnej fazie gazowej. Oznacza to, że na rozpatrywanym odcinku przepływu nie ulega zmianie ilość przepływających kropeł w jednostce czasu; przemiany fazowe mają miejsce na powierzchniach istniejących kropeł, co wpływa odpowiednio na zmienność promieni kropeł.

Dla udziałów masowych strumienia przepływu ważna będzie zależność

$$g + \sum_i g'_i = 1. \quad (2.4)$$

Wartości tych udziałów różnić się będą od wartości udziałów masy kropeł przebywających w określonych objętościach kontrolnych ze względu na występujące różnice prędkości między fazami.

Koncentracja kropeł i -tej frakcji (tzn. ilość kropeł przebywających w jednostce objętości) wyniesie więc:

$$N_i = \frac{3}{4\pi\rho_i^3} \frac{g'_i}{g} \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{1}{1 - \frac{u_i}{w}}. \quad (2.5)$$

Łączna powierzchnia kropeł tej frakcji wyniesie będzie:

$$\Phi_i = 4\pi\rho_i^2 N_i, \quad (2.6)$$

zaś łączna powierzchnia kropeł wszystkich frakcji, przebywających w jednostce objętości czynnika:

$$\Phi = \sum_i \Phi_i. \quad (2.7)$$

Jako przekrój jednostkowy określimy wielkość pola przekroju, prostopadłego do kierunku przepływu czynnika, która przypada na jednostkę strumienia masy przepływającej mieszaniny dwufazowej. Przy użyciu poczynionego założenia o pomijalności objętości właściwej cieczy w porównaniu z objętością właściwą fazy gazowej można napisać:

$$F = \frac{g}{\gamma_w}. \quad (2.8)$$

3. Podstawowe zależności

Dla opisanego powyżej ustalonego przepływu gazu, w którym działają źródła zastępcze, imitujące oddziaływanie fazy ciekłej, ważne będą równania zachowania masy, pędu i energii całkowitej:

$$\frac{d}{dz}(\gamma_w) = Y_s, \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dz}(\gamma_w^2) = -\frac{dp}{dz} + P + Y_w', \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dz} \left[\gamma_w \left(i + \frac{w^2}{2} \right) \right] = Q + Y \left(i_s + \frac{w'^2}{2} \right) + P_w. \quad (3.3)$$

Odpowiednio równaniami zachowawczymi dla i -tej frakcji kropeł cieczy (napisanymi dla pojedynczej kropli) będą:

$$\frac{d}{dt} (\frac{4}{3}\pi\rho^3\gamma')_i + 4\pi\rho^2 y_i = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt} (\frac{4}{3}\pi\rho^3\gamma'i')_i + 4\pi\rho^2 e_i = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{dt} (\frac{4}{3}\pi\rho^3\gamma'w')_i + \frac{P_i}{N_i} - w \frac{d}{dt} (\frac{4}{3}\pi\rho^3\gamma')_i = 0. \quad (3.6)$$

Gęstości strumieni wymiany masy i ciepła (skierowanych od kropeł do fazy gazowej), odniesione do jednostki powierzchni kropeł i -tej frakcji, przedstawimy w funkcji odchyłek od temperatury nasycenia

$$y_i = m'_i \delta'_i + m_i \delta, \quad q_i = n'_i \delta'_i + n_i \delta, \quad (3.7)$$

zaś gęstością strumienia energii termicznej na powierzchni kropeł tej frakcji będzie:

$$e_i = q_i + y_i i_s. \quad (3.8)$$

Ten sposób przedstawienia strumieni wymiany oparty jest na poprzednich pracach autora ([7, 8]), w których wyznaczone również zostały wartości liczbowe współczynników wymiany m i n dla różnych zakresów parametrów czynnika i promieni kropeł. Wydajnościami zastępczych źródeł masy, ciepła i energii termicznej, zastępujących oddziaływanie z kroplami tej frakcji będą więc:

$$\left. \begin{aligned} Y_i &= \Phi_i y_i, \\ Q_i &= \Phi_i q_i, \\ E_i &= \Phi_i e_i, \end{aligned} \right\}, \quad (3.9)$$

zaś sumarycznymi wydajnościami źródeł zastępczych, oddziałujących na przepływ fazy gazowej:

$$Y = \sum_i Y_i, \quad Q = \sum_i Q_i, \quad E = \sum_i E_i. \quad (3.10)$$

Podobnie wielkość siły oddziaływania kropeł na fazę gazową określimy jako liniową funkcję odchyłek prędkości:

$$P = \sum_i P_i = - \sum_i b_i u_i, \quad (3.11)$$

gdzie, w zależności od stanu czynnika i wielkości kropeł, współczynnik b wyznacza się bądź z prawa Stokesa, bądź też z zależności dla molekularno-kinetycznego oddziaływania kropli z gazem.

Zespół równań (3.1) do (3.11) w połączeniu ze związkami (2.1) do (2.5) oraz równaniami stanu i równaniami krzywych nasycenia określa całkowicie przebieg parametrów rozpatrywanego przepływu dwufazowego. Ponieważ przepływ jest ustalony, ważna będzie przy tym relacja:

$$w \frac{d}{dz} = \frac{d}{dt}. \quad (3.12)$$

Przy użyciu równania (3.1) można przedstawić wzór (3.2) w postaci:

$$\gamma w \frac{dw}{dz} + \frac{dp}{dz} - P = 0. \quad (3.13)$$

W podobny sposób równanie (3.3) przechodzi w równanie pierwszej zasady termodynamiki dla elementu fazy gazowej w postaci:

$$\gamma \frac{di}{dt} - \frac{dp}{dt} - Q = 0. \quad (3.14)$$

Traktując fazę gazową w zakresie rozpatrywanych odchyłeń od równowagi jak gaz doskonały można zamiast (3.14) napisać:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{T}{p} \left(\frac{dp}{dt} + Q \right), \quad (3.15)$$

zaś z równania stanu gazu:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T}{p} \cdot \frac{dp}{dt} - \frac{T}{\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{dt} \quad (3.16)$$

Przyrównując do siebie prawe strony obu ostatnich równań otrzyma się po przekształceniach:

$$w \left(\frac{dp}{dz} - a_\infty^2 \cdot \frac{d\gamma}{dz} \right) - (\kappa - 1) Q = 0, \quad (3.17)$$

gdzie

$$a_\infty = \sqrt{\frac{\kappa p}{\gamma}} \quad (3.18)$$

jest prędkością dźwięku w gazie (jednofazowym), w którym nie występuje działanie źródeł i sił wywołanych przez słabe zaburzenia, tzn. w przypadku czynnika dwufazowego prędkość dźwięku o częstości tak dużej, by wywołane przez falę dźwiękową procesy wymiany między gazem i kroplami można było uważać za „zamrożone” (mogą natomiast mieć miejsce procesy wymiany, wywołane istnieniem w przepływie stacjonarnych odchyśleń od równowagi wewnętrznej). Wielkość a_∞ będzie więc charakterystyczną prędkością dla porównawczego procesu przepływu z „zamrożoną” wymianą między fazami.

Przeciwieństwem tego procesu będzie proces porównawczy przebiegający przy ciągłym zachowaniu pełnej równowagi termodynamicznej między fazami; w procesie takim mielibyśmy do czynienia z całkowicie odwracalnym przebiegiem zjawisk wymiany masy, energii i pędu między fazami. Charakterystyczną prędkością odniesienia dla takiego procesu będzie prędkość rozprzestrzeniania się (w czynniku pozostającym w stanie równowagi termodynamicznej, tzn. w stanie nasycenia) fali dźwiękowej o skrajnie małej częstotliwości. Wyprowadzenie tej prędkości zawiera praca autora [10]; wielkość tę określa się wzorem

$$a_s^2 = \frac{-gh}{2 - \frac{h}{RT_s} - \frac{T_s}{h} \left(c_p + \frac{g'}{g} \cdot c_p' \right)} \quad (3.19)$$

Wielkości, określone wzorami (3.18) i (3.19) wyznaczają zakres dyspersji prędkości dźwięku w rozpatrywanym czynniku dwufazowym. Prędkość rozprzestrzeniania się w takim czynniku zaburzeń akustycznych o dowolnej częstotliwości przybierać będzie wartości pośrednie (por. [10]):

$$a_s \leq a \leq a_\infty \quad (3.20)$$

4. Krytyczne warunki przepływu mieszaniny dwufazowej

Dla ustalonego przepływu czynnika dwufazowego napiszemy równanie ciągłości przepływu składnika gazowego (odniesione do jednostki natężenia przepływu mieszaniny dwufazowej):

$$\frac{dw}{w} = \frac{dg}{g} - \frac{dF}{F} - \frac{d\gamma}{\gamma}, \quad (4.1)$$

gdzie względny przyrost udziału masowego składnika gazowego wynosi

$$\frac{dg}{g} = \frac{Y}{1 - w\gamma} \cdot dz. \quad (4.2)$$

Eliminując z równań zachowania pędu i energii (3.13) i (3.17) wielkość dp otrzyma się po przekształceniach:

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \left(P - \frac{\kappa - 1}{w} Q \right) \frac{dz}{\gamma a_\infty^2} - \frac{w \cdot dw}{a_\infty^2}. \quad (4.3)$$

Podstawiając wyrażenia (4.2) i (4.3) do równania (4.1) otrzyma się równanie opisujące zmienność warunków przepływu przy uwzględnieniu oddziaływania źródeł i sił zastępczych:

$$\left(1 - \frac{w^2}{a_\infty^2} \right) \cdot \frac{dw}{w} = - \frac{dF}{F} + \left(Y + \frac{\kappa - 1}{a_\infty^2} Q \right) \frac{dz}{\gamma w} - \frac{P \cdot dz}{\gamma \cdot a_\infty^2}. \quad (4.4)$$

Krytyczne warunki przepływu rozpatrywanego czynnika dwufazowego określimy następująco: krytycznymi warunkami przepływu nazywany będzie taki stan przepływu, przy którym gęstość strumienia przepływu czynnika dwufazowego osiąga wartość ekstremalną i równocześnie pochodna prędkości składnika gazowego jest niezerowa, tzn.

$$F_k(z) = \text{extr}, \quad \left(\frac{dw}{dz} \right)_k \neq 0. \quad (4.5)$$

Przekrój, w którym występują krytyczne warunki przepływu nazywany będzie przekrojem krytycznym, zaś parametry opisujące stan termiczny i kinematyczny przepływu w tym przekroju — parametrami krytycznymi.

Równanie (4.4) opisujące zmienność warunków przepływu rozpatrywanego czynnika można przedstawić w postaci takiej, jak dla przepływu gazu (jednofazowego) wprowadzając pojęcie pozornych przyrostów parametrów stanu. Będą to takie wartości przyrostów parametrów stanu, które w przepływie samego składnika gazowego (mającego parametry panujące w danym przekroju) powodowałyby zmienność prędkości i gęstości strumienia przepływu taką, jaka istnieje w rzeczywistym przepływie rozpatrywanego czynnika dwufazowego przez ten sam przekrój. Pozorne przyrosty gęstości i ciśnienia statycznego w dowolnym określonym przekroju przepływu zdefiniowane zostaną następująco:

$$\frac{d\gamma^*}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} - Y, \quad (4.6)$$

$$\frac{dp^*}{dz} = \frac{dp}{dz} - P. \quad (4.7)$$

Biorąc pod uwagę równanie (3.17) można wyrażenie (4.6) napisać w postaci:

$$\frac{d\gamma^*}{dt_{\text{izotrop}}} = \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)_{\text{izotrop}} - \frac{\kappa - 1}{a_\infty^2} Q - Y, \quad (4.8)$$

gdzie

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{\text{izentrop}} = \frac{1}{a_{\infty}^2} \cdot \frac{dp}{dt}. \quad (4.9)$$

Z uwagi na konieczność spełniania równania stanu przez gaz, pozorną wartością przyrostu temperatury gazu będzie:

$$dT^* = \frac{T}{p} \cdot dp^* - \frac{T}{\gamma} \cdot d\gamma^*, \quad (4.10)$$

skąd uwzględniając wzory (4.6) i (4.7):

$$\frac{dT^*}{dt} = \frac{dT}{dt} - \frac{T}{p} \left(P_w - \frac{a_{\infty}^2}{\kappa} Y \right), \quad (4.11)$$

lub przy uwzględnieniu (3.16), (4.8) i (4.9):

$$\frac{dT^*}{dt} = \frac{T}{p} \left[\frac{\kappa - 1}{\kappa} \left(\frac{dp}{dt} + Q \right) + \frac{a_{\infty}^2}{\kappa} Y - P_w \right]. \quad (4.12)$$

Wyrażenia (4.6), (4.7) i (4.11) względnie równoważne im wzory (4.7), (4.8) i (4.12) przedstawiają relację między przyrostami odpowiednich parametrów, istniejącymi w rzeczywistym przepływie dwufazowym a odpowiadającymi im pozornymi przyrostami tych samych parametrów w fikcyjnym „równoważnym” przepływie gazu (jednofazowego). Występujące w tych wyrażeniach wartości wydajności źródeł i sił zastępczych są — zgodnie z uwagami poczynionymi w rozdziale 2 — funkcjami parametrów opisujących odchylenie od równowagi, a stąd funkcjami przebiegu wymuszenia działającego na przepływ (np. przebiegu ciśnienia statycznego p).

Przy użyciu równania (3.13) i określenia (4.7) można więc napisać:

$$d\gamma^* \equiv \left(\frac{\partial \gamma^*}{\partial p^*} \right) \cdot dp^* = -\gamma_w \left(\frac{\partial \gamma^*}{\partial p^*} \right) \cdot dw. \quad (4.13)$$

Wprowadzając (4.2), (4.6) i (4.13) do równania (4.1) otrzyma się po przekształceniach równanie opisujące zmienność warunków przepływu w postaci:

$$\left(1 - \frac{w^2}{c_k^2} \right) \cdot \frac{dw}{w} = -\frac{dF}{F}, \quad (4.14)$$

gdzie

$$c_k^2 = \frac{\partial p^*}{\partial \gamma^*}. \quad (4.15)$$

Wielkość c_k jest prędkością krytyczną, tzn. prędkością składnika gazowego, przy której wystąpią krytyczne warunki przepływu, określone definicją (4.5). Przy użyciu wyrażeń

(4.7) do (4.9) można wartość prędkości krytycznej wyrazić wzorem:

$$c_k^2 = a_\infty^2 \frac{1 - \frac{P \cdot w}{\left(\frac{dp}{dt}\right)}}{1 - \frac{(\kappa - 1)Q + a_\infty^2 \cdot Y}{\left(\frac{dp}{dt}\right)}} \quad (4.16)$$

lub uwzględniając wzory (3.7) do (3.11) możemy przedstawić wartość prędkości krytycznej w funkcji wartości odchyłek od równowagi, występujących w rozpatrywanym (krytycznym) przekroju:

$$c_k^2 = \frac{\frac{dp}{dt} + w \sum_i b_i u_i}{\frac{dp}{dt} - \delta \sum_i \Phi_i [(\kappa - 1)n + a_\infty^2 m]_i - \sum_i [(\kappa - 1)n'_i + a_\infty^2 m'_i] \Phi'_i \delta'_i} \quad (4.17)$$

Biorąc pod uwagę, że w przypadku gdy przekrój rozpatrywany jest przekrojem krytycznym będzie

$$w = c_k \quad (4.18)$$

otrzyma się z (4.16) w wyniku rozwiązania równania kwadratowego:

$$\frac{c_k}{a_\infty} = \frac{-a_\infty \cdot P \pm \sqrt{a_\infty^2 \cdot P^2 + 4 \left(\frac{dp}{dt}\right) \left[\frac{dp}{dt} - (\kappa - 1)Q - a_\infty^2 Y\right]}}{2 \left[\frac{dp}{dt} - (\kappa - 1)Q - a_\infty^2 Y\right]}, \quad (4.19)$$

przy czym dla przepływu w dodatnim kierunku osi współrzędnych właściwy jest znak przed pierwiastkiem „plus”.

Wartość c_k może posiadać jeszcze inną ciekawą interpretację fizyczną. Weźmy pod uwagę fikcyjny, znajdujący się w spoczynku gaz (jednofazowy) mający własności i parametry stanu takie, jak składnik gazowy rzeczywistego przepływu dwufazowego w rozpatrywanym przekroju. Przyjmijmy, że w gazie tym działać mogą źródła masy i ciepła oraz siła masowa, których wydajność (względnie wielkość siły) jest znaną funkcją mogących mieć miejsce zaburzeń ciśnienia; działanie tych źródeł jak i przebieg przemian będą więc miały charakter barotropowy. Przyjmijmy wreszcie, że w omawianym gazie fikcyjnym relacja pomiędzy wydajnością źródeł (wielkością siły masowej) a wywołującymi je zmianami ciśnienia jest taka, jaka istnieje w rzeczywistym przepływie czynnika dwufazowego w rozpatrywanym przekroju, tzn. że zmiana ciśnienia dp o wartości takiej, jaka ma miejsce w rzeczywistym przepływie odpowiada wydzielению masy i ciepła w ilości $(Y \cdot dt)$ i $(Q \cdot dt)$ oraz pracy siły masowej $(P \cdot dz)$ również o wartości takiej, jaka występuje w rozpatrywanym elemencie rzeczywistego przepływu dwufazowego.

Wyprowadzimy równanie rozchodzenia się słabych zaburzeń ciśnienia w spoczywającym fikcyjnym gazie o zdefiniowanych wyżej właściwościach. Równania zachowania masy i pędu dla tego przypadku, będą miały postać:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma \tilde{w}) - Y = 0, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\gamma \tilde{w}) + \frac{\partial}{\partial z} (\gamma \tilde{w}^2) + \frac{\partial p}{\partial z} - P - Y \cdot \tilde{w} = 0. \quad (4.21)$$

Wprowadzając wielkości pozornych przyrostów parametrów jak w wyrażeniach (4.6) i (4.7) i odrzucając wielkości małe wyższych rzędów otrzyma się:

$$\gamma \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{\gamma}^*}{\partial t} = 0, \quad (4.22)$$

$$\gamma \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial z} = 0. \quad (4.23)$$

Znakiem $\sim$ oznaczono tu słabe zaburzenia.

Różniczkując powyższe równania odpowiednio według ∂t i ∂z i rugując z nich jednakowe człony, oraz biorąc pod uwagę, że

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \gamma^*}{\partial p^*} \right) = 0 \quad (4.24)$$

otrzyma się równanie falowe w znanej postaci:

$$\frac{\partial^2 p^*}{\partial t^2} - c_k^2 \cdot \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} = 0 \quad (4.25)$$

lecz zawierające wyprowadzoną wyżej krytyczną prędkość przepływu c_k .

Można więc stwierdzić, że krytyczna prędkość rozpatrywanego nierównowagowego przepływu dwufazowego równa jest prędkości dźwięku jaka istniałaby w fikcyjnym (jednofazowym) gazie, znajdującym się w spoczynku, w którym źródła masy, ciepła i pędu (siła masowa) wywoływane są zmianami ciśnienia, przy czym relacja między wydajnością tych źródeł a wielkością zmiany ciśnienia jest taka, jaka ma miejsce w rozpatrywanym przekroju rzeczywistego przepływu dwufazowego.

Jak wynika z wzorów (4.16) do (4.19), na wartość prędkości krytycznej wpływają wartości wydajności zastępczych źródeł i sił, będące funkcjami występujących w danym przekroju wartości odchyżeń od równowagi wewnętrznej. Ponieważ istniejący w tym przekroju stan nierównowagi powstał na skutek działania na przepływ wymuszeń (np. zmienności ciśnienia lub przekroju kanału) na dotychczasowej drodze przepływu, więc wartość prędkości krytycznej c_k w przepływie nierównowagowym jest również funkcją „historii przepływu” czynnika.

Na wartość c_k wpływa ponadto aktualna prędkość zmian ciśnienia $(dp/dt)_k$ w przekroju krytycznym; wystąpią przy tym dwa skrajne przypadki szczególne:

a) dla przypadku skrajnie szybkich zmian ciśnienia (przepływ z „zamrożeniem” wymiany międzyfazowej) przy użyciu równania (4.16) otrzyma się od razu:

$$\text{dla } \left(\frac{dp}{dt}\right)_k \rightarrow \pm \infty \quad c_k \rightarrow a_\infty; \quad (4.26)$$

b) dla przypadku $(dp/dt)_k \rightarrow 0$ przemiany w czynniku przebiegać będą przy ciągłym zachowaniu stanu równowagi (nasylenia). Posługując się równaniami równowagowych przemian par nasyconych otrzyma się wydajności źródeł i wielkości sił:

$$(Y)_s = \left[1 - \frac{T_s}{h} \left(c_p + \frac{g'}{g} c'_p \right) \right] \cdot \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{dp}{dt} \right)_k, \quad (4.27)$$

$$(Q)_s = \left(\frac{c_p T_s}{h} - 1 \right) \cdot \left(\frac{dp}{dt} \right)_k, \quad (4.28)$$

$$(P)_s = g/w \cdot \left(\frac{dp}{dt} \right)_k \quad (P)_s = \frac{g'}{w} \cdot \left(\frac{dp}{dt} \right)_k \quad (4.29)$$

Wstawiając powyższe wyrażenia do (4.16) otrzyma się wtedy (przy uwzględnieniu niewystępowania w tym przypadku różnic prędkości między gazem a kroplami)

$$(c_k)_s = a_s. \quad (4.30)$$

Jak widać, w obu tych skrajnych przypadkach szczególnych krytyczna prędkość przepływu równa jest rzeczywistej prędkości dźwięku — odpowiednio o skrajnie wysokiej względnie skrajnie niskiej częstotliwości — jaka istniałaby w rzeczywistym czynniku dwufazowym.

W ogólnym przypadku jednak, jak wynika z przeprowadzonych poprzednio rozważań oraz z pracy autora [10], krytyczna prędkość przepływu i prędkość rozchodzenia się w czynniku zaburzeń akustycznych (podlegająca dyspersji w funkcji częstotliwości zaburzenia) zależą w odmienny sposób od oddziaływania procesów wymiany z kroplami cieczy i nie muszą być sobie równe. Dla ogólnego przypadku będzie więc:

$$\text{oraz} \quad \left. \begin{aligned} a_s &\leq a \leq a_\infty \\ a_s &\leq c_k \leq a_\infty \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

5. Krytyczne warunki przepływu składnika gazowego w mieszaninie dwufazowej

Oprócz opisanego powyżej określenia krytycznych warunków przepływu dwufazowego na podstawie kryterium (4.5), możemy również w podobny sposób wyznaczyć prędkość przepływu, przy której wystąpi ekstremalna wartość gęstości strumienia samego tylko składnika gazowego. Dla tak zdefiniowanych warunków przepływu kryterium zostanie (zamiast jak we wzorze (4.5)) zdefiniowane następująco:

$$\left(\frac{F}{g} \right)_{kg} = \text{extr} \quad \text{i} \quad \left(\frac{dw}{dz} \right)_{kg} \neq 0. \quad (5.1)$$

Podstawiając (4.3) do (4.1) przedstawimy dla tego przypadku równanie (4.4) w nieco odmiennej postaci:

$$\left(1 - \frac{w^2}{a_\infty^2}\right) \frac{dw}{w} = \frac{dg}{g} - \frac{dF}{F} + \frac{\kappa-1}{\gamma w a_\infty^2} Q \cdot dz - \frac{P \cdot dz}{\gamma a_\infty^2}. \quad (5.2)$$

Odpowiednio do przyjętej tu definicji (5.1) posługiwać się będziemy wielkościami pozornego przyrostu ciśnienia według wzoru (4.7) oraz rzeczywistego przyrostu gęstości, za pomocą których przekształcimy równanie (5.2) otrzymując równanie opisujące zmienność warunków przepływu w postaci:

$$\left(1 - \frac{w^2}{c_{kg}^2}\right) \cdot \frac{dw}{w} = \frac{dg}{g} - \frac{dF}{F}, \quad (5.3)$$

gdzie

$$c_{kg}^2 = \frac{\partial p^*}{\partial \gamma}. \quad (5.4)$$

Wielkość c_{kg} jest prędkością, przy której wystąpią warunki krytyczne, określone definicją (5.1). Przy użyciu wzorów (4.7) i (4.9) otrzyma się

$$c_{kg}^2 = a_\infty^2 \frac{1 - \frac{P \cdot w}{\left(\frac{dp}{dt}\right)}}{1 - \frac{(\kappa-1)Q}{\left(\frac{dp}{dt}\right)}} \quad (5.5)$$

oraz, w podobny sposób jak w poprzednim rozdziale, w funkcji odchyłek od równowagi:

$$c_{kg}^2 = \frac{\frac{dp}{dt} + w \sum_i b_i u_i}{\frac{dp}{dt} - (\kappa-1) \delta \sum_i \Phi_i n_i - (\kappa-1) \sum_i n'_i \Phi_i \delta'_i} \quad (5.6)$$

i podobnie jak w (4.19) z rozwiązania równania kwadratowego:

$$\frac{c_{kg}}{a_\infty} = \frac{-a_\infty \cdot P \pm \sqrt{a_\infty^2 \cdot P^2 + 4 \left(\frac{dp}{dt}\right) \left[\frac{dp}{dt} - (\kappa-1)Q\right]}}{2 \left(\frac{dp}{dt} - (\kappa-1)Q\right)}. \quad (5.7)$$

Podobnie jak w poprzednim rozdziale można również wykazać, że wielkość c_{kg} będzie równa prędkości dźwięku w fikcyjnym gazie jednofazowym mającym własności opisane poprzednio, za wyjątkiem jednak oddziaływania źródła masy, które w tym przypadku nie będzie występować.

Dla przypadków szczególnych, charakteryzujących się skrajnymi wartościami prędkości zmian ciśnienia otrzymamy tutaj:

- a) dla przypadku $(dp/dt) \rightarrow \pm \infty$ otrzyma się od razu $c_{kg} = c_k \rightarrow a_\infty$,
 b) dla przypadku $(dp/dt)_{kg} \rightarrow 0$ dolna wartość graniczna $(c_{kg})_s$ wyznaczać się będzie z podstawienia wyrażeń (4.28) i (4.29) do (5.5).

6. Charakterystyczne parametry przepływu czynnika dwufazowego

Wyznaczenie krytycznego przekroju przepływu dwufazowego, przy znanych parametrach przepływu w przekroju przyjętym jako początkowy, wymaga obliczenia przebiegu parametrów przepływu ustalonego czynnika wzdłuż współrzędnej z pod wpływem zadanego przebiegu wymuszenia (np. przebiegu ciśnienia statycznego). Metodyka obliczeń tego typu podana została (na przykładzie innego sposobu doboru wymuszeń) w pracy autora [9].

Dla obliczenia przebiegu parametrów przepływu w funkcji zadanego przebiegu ciśnienia $p(t)$ równaniami wyjściowymi będą równania zachowania pędu i energii składnika gazowego (3.13) i (3.17), równanie stanu tego składnika (3.16) oraz równania zachowawcze kropeł cieczy (3.4) do (3.6) napisane tylokrotnie, ile jest frakcji fazy ciekłej. Ważne będzie również równanie Clausiusa-Clappeyrona (z uwzględnieniem przyjętych uprzednio uproszczeń) w postaci:

$$\frac{dT_s}{dt} = \frac{T_s}{\gamma_s h} \cdot \frac{dp}{dt}. \quad (6.1)$$

Z poczynionych w rozdziale 2 założeń wynika, że ilość kropeł każdej z frakcji przepływających w jednostce czasu przez dowolny przekrój kanału, określony wartością współrzędnej z nie ulega zmianie wzdłuż kanału (tzn. przy zmianie wartości współrzędnej z). Wynika z tego, że dla każdej z frakcji kropeł ważna jest zależność:

$$\left(\frac{dp}{\rho}\right)_j = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{dg'}{g'}\right)_j. \quad (6.2)$$

Z wymienionych wyżej równań wyjściowych przy uwzględnieniu dodatkowych związków (2.1) do (2.7) oraz (3.7) do (3.12) otrzyma się po przekształceniach równania:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\kappa-1}{\kappa} \cdot \frac{T_s}{p} \left[\left(1 - \frac{c_p T_s}{h}\right) \frac{dp}{dt} + \Phi n \cdot \delta + \sum_i \Phi_i n'_i \delta'_i \right], \quad (6.3)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{RT_s}{p} \left(\frac{1}{w} \cdot \frac{dp}{dt} + \sum_i b_i u_i \right), \quad (6.4)$$

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{-1}{\gamma'_j} (m'_j \delta'_j + m_j \delta), \quad (6.5)$$

$$\frac{d\delta'_j}{dt} = \frac{-3}{c'_p \gamma'_j \rho_j} [(m'h + n')_j \delta'_j + (mh + n)_j \delta] - \frac{T_s}{\gamma_s \cdot h} \cdot \frac{dp}{dt}, \quad (6.6)$$

$$\frac{du_j}{dt} = -\frac{RT_s}{p} \left(\sum_i b_i u_i + \frac{g}{g'_j} b_j u_j + \frac{1}{w} \cdot \frac{dp}{dt} \right). \quad (6.7)$$

Ostatnie cztery równania są ważne dla $j=1, 2, \dots, J$, gdzie J jest ilością frakcji fazy ciekłej.

Układ (6.1) do (6.7) jest więc układem $(3+4J)$ równań, pozwalających na wyznaczenie przebiegu parametrów składnika gazowego:

$$(w; T_s; \delta)$$

oraz dla każdej z frakcji fazy ciekłej

$$(\delta'_j, u'_j, \rho_j, g'_j)$$

wzdłuż drogi przepływu, gdy znany jest przebieg ciśnienia statycznego.

Na podstawie znajomości tych przebiegów wyznaczyć można również w sposób formalny przebieg przynależnych do każdego przekroju wartości prędkości krytycznych c_k i c_{kg} według wzorów (4.16) lub (4.17) i (5.5) lub (5.6).

Przekrojem krytycznym przepływu będzie przekrój, w którym prędkość przepływu składnika gazowego równa będzie prędkości krytycznej, tzn.:

$$z = z_k, \quad \text{gdy} \quad w(z_k) = c_k \quad (6.8)$$

i odpowiednio

$$z = z_{kg}, \quad \text{gdy} \quad w(z_{kg}) = c_{kg}. \quad (6.9)$$

W dalszym ciągu bliżej rozpatrywane będą technicznie ważne przypadki rozprężających przepływów par wilgotnych, których stan początkowy jest stanem równowagi, zaś prędkość początkowa jest bliska zeru.

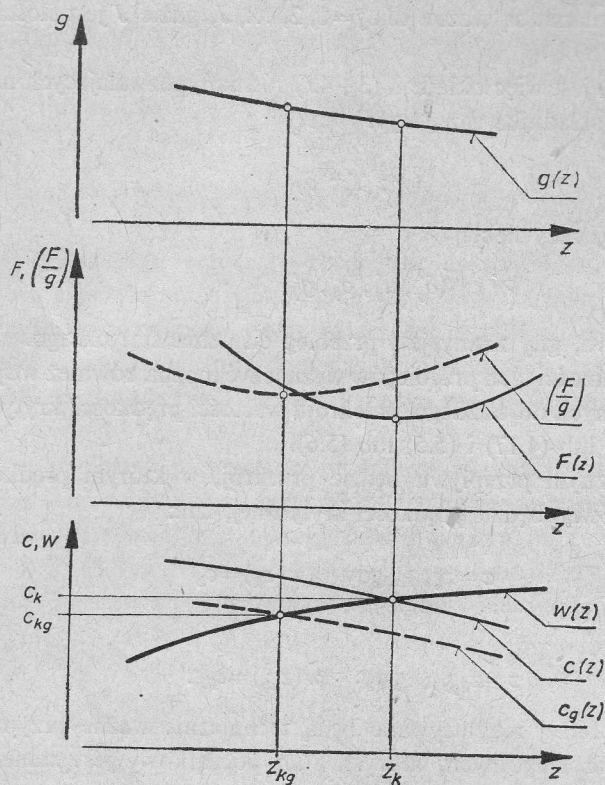
Sposób określenia przekroju krytycznego oraz zależności między określającymi go parametrami przedstawiono schematycznie na rys. 1. Dla przepływu rozprężającego przekrój, w którym osiągnięta jest największa gęstość przepływu samego tylko składnika gazowego, położony jest zawsze przed przekrojem, w którym osiąga się maksimum gęstości przepływu czynnika dwufazowego (mieszaniny).

Zgodnie z rozważanym w poprzednich rozdziałach modelem przepływu, parametry charakteryzujące krytyczne warunki przepływu będą tu bezpośrednio funkcjami przebiegu wymuszenia (np. ciśnienia statycznego $p(t)$) między przekrojem początkowym a krytycznym. Wpływ ten przedstawić można wyrażając bezwymiarowo prędkość krytyczną poprzez jej stosunek do maksymalnej prędkości dźwięku w gazie w przekroju krytycznym:

$$\alpha_k = \frac{c_k}{a_\infty}, \quad \alpha_{kg} = \frac{c_{kg}}{a_\infty}. \quad (6.10)$$

Wielkość tę określić można również bezwymiarowo, odnosząc prędkość krytyczną do maksymalnej prędkości dźwięku w przepływie rozprężającym przy „zamrożeniu” wymiany składnika gazowego z kroplami. Przypadek taki ma miejsce przy skrajnie szybkim rozprężaniu czynnika, tzn.

$$a_\infty \rightarrow (a_\infty)_f, \quad \text{gdy} \quad \frac{dp}{dt} \rightarrow -\infty \quad (6.11)$$



Rys. 1. Schemat określenia przekrojów krytycznych

i jest równoznaczny z przypadkiem rozprężania czynnika gazowego (jednofazowego). Będzie więc:

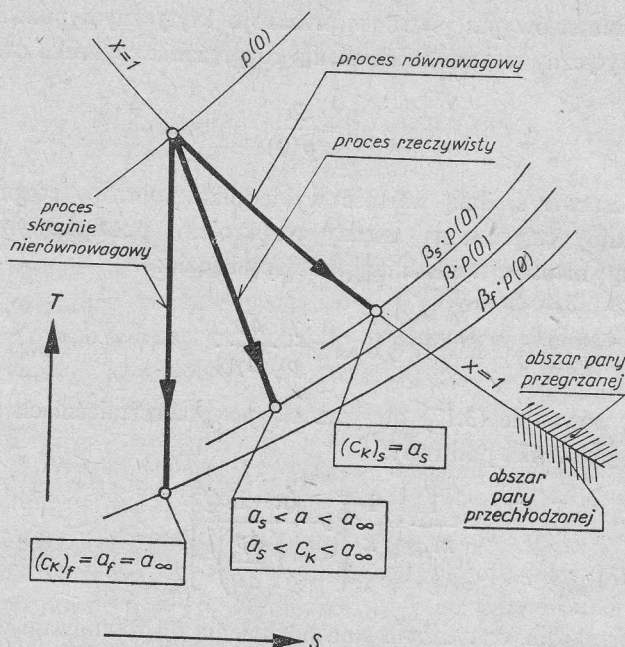
$$(a_{\infty})_f = (c_k)_f = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1}} RT(0). \quad (6.12)$$

Odpowiedni stosunek przedstawimy jako:

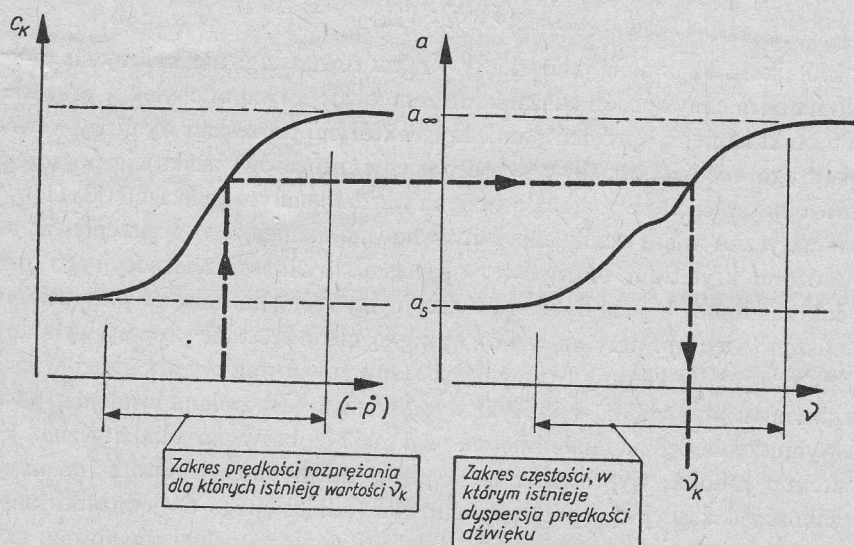
$$\lambda_k = \frac{c_k}{(a_{\infty})_f}, \quad \lambda_{kg} = \frac{c_{kg}}{(a_{\infty})_f}. \quad (6.13)$$

Schematyczne przedstawienie przebiegu rozprężania składnika gazowego (w obszarze pary przechłodzonej wykresu T - s) oraz odpowiednich procesów porównawczych przedstawiono na rys. 2.

Jak wynika z rozdziału 4 (wzory (4.31)) prędkość krytyczna w ogólnym przypadku nie jest równa prędkości fazowej rozprzestrzeniania się zaburzeń akustycznych w rzeczywistym ośrodku dwufazowym. Ponieważ ta ostatnia prędkość podlega dyspersji w funkcji częstości zaburzeń, można wyznaczyć taką wartość częstości zaburzenia akustycznego, przy której jego prędkość fazowa rozprzestrzeniania się będzie równa prędkości krytycz-



Rys. 2. Schemat procesu rozprężania składnika gazowego mieszaniny dwufazowej



Rys. 3. Schemat określenia „krytycznej częstości dźwięku” w przepływie

nej przepływu, tzn.

$$a(v_k) = c_k. \quad (6.14)$$

Wielkość v_k posiada określone wartości jedynie w zakresie prędkości rozprężania, odpowiadającym zakresowi częstości, w którym występuje dyspersja prędkości dźwięku; zależności te ilustruje rys. 3 (dla przypadku stałej prędkości rozprężania).

Znajomość parametrów przepływu w przekroju krytycznym pozwala również wyznaczyć od razu krytyczny stosunek ciśnień dla rozprężania czynnika dwufazowego:

$$\beta = \frac{p_k}{p(0)} \quad (6.15)$$

oraz na jego podstawie średnią wartość wykładnika politropy rozprężania składnika gazowego mieszaniny (uśrednioną między przekrojami początkowym i krytycznym). Natomiast lokalną wartością wykładnika politropy będzie:

$$m_{\text{pol}} = \frac{\gamma}{p} \cdot \frac{dp}{d\gamma} \quad (6.16)$$

Uwzględniając równanie (3.17) otrzyma się po przekształceniach wzór, określający lokalną wartość wykładnika politropy:

$$\frac{1}{m_{\text{pol}}} = \frac{1}{\kappa} \left[1 - \frac{(\kappa - 1)Q}{\left(\frac{dp}{dt}\right)} \right] \quad (6.17)$$

Istniejący w przekroju krytycznym stan odchylenia od równowagi wewnętrznej opisywany jest wielkościami odchyłek

$$(\delta; \delta'_i; u_i)_k.$$

Przyjęcie którejkolwiek z nich jako miary braku równowagi nie byłoby słuszne m. in. ze względu na odmienny sposób zdążania do zera każdej z tych odchyłek w procesie relaksacji oraz na fakt istnienia sprzężeń pomiędzy niektórymi procesami wymiany wewnętrznej na skutek czego nie jest możliwe wyodrębnienie procesów relaksacji poszczególnych parametrów i opisanie ich za pomocą osobnych wartości stałych relaksacji ([8, 11]).

Jako sumaryczna miara odchylenia od równowagi, istniejącego w przepływie, zostanie tu wprowadzone kryterium entropowe, oparte na wielkości relaksacyjnego przyrostu entropii. Jak wiadomo, w przepływie relaksacyjnym, który ma miejsce przy ustaniu działania wymuszeń (więc np. przy $dp/dt=0$) wystąpią nieodwracalne procesy wymiany wewnętrznej, zmierzające w kierunku osiągnięcia stanu równowagi wewnętrznej w czynniku. W rozważanym tu przypadku, w którym wymuszeniem jest zmiana ciśnienia, po ustaniu działania wymuszenia będzie miała miejsce relaksacja izobaryczno-adiabatyczna.

W oparciu o podobne wyprowadzenia w poprzednich pracach autora (m. in. [9, 11]) można wielkość relaksacyjnego przyrostu entropii (odniesionego do jednostki masy przepływającej mieszaniny), jaki nastąpiłby do chwili osiągnięcia pełnej równowagi czynnika, napisać jako funkcję odchyłek od równowagi

$$\left[\sum_i (g' \cdot \Delta s'_R)_i + g \cdot \Delta s_R \right] = \frac{1}{2T_s^2} \left[c'_p \sum_i (g' \delta'^2)_i + c_p \cdot g \cdot \delta^2 + gT_s \sum_i (g' u^2)_i \right]. \quad (6.18)$$

Miarą odchylenia do równowagi będzie stosunek relaksacyjnego przyrostu entropii, wyrażonego wzorem (6.18) do relaksacyjnego przyrostu entropii, odpowiadającego przepływowi przy skrajnie możliwym odchyleniu od równowagi, tzn. przy ekspansji gazu

z „zamrożeniem wymiany” między gazem a kroplami cieczy. Miarę odchylenia od równowagi w przepływie można więc określić następująco:

$$\xi_k = \frac{\sum_i (g' \cdot \Delta s_R')_i + g \cdot \Delta s_R}{[\sum_i (g' \cdot \Delta s_R')_i + g \cdot \Delta s_R]_f}, \quad (6.19)$$

gdzie licznik i mianownik wyznacza się z tego samego wzoru (6.18), podstawiając odpowiednio odchyłki występujące w przekroju krytycznym rozpatrywanego przepływu oraz odchyłki dla stanu krytycznego przepływu samego gazu (czynnika jednofazowego). Stosunek ten osiąga wartość równą jedności w przypadku przepływu z całkowitym „zamrożeniem” wymiany między gazem a kroplami.

7. Wyniki obliczeń krytycznych warunków przepływu

Celem numerycznego zbadania zmienności parametrów, opisujących występowanie warunków krytycznych w nierównowagowym przepływie czynnika dwufazowego, wykonano serię obliczeń przepływów rozprężających wilgotnej pary wodnej (H_2O) zawierającej jedną frakcję kropel, przyjmując jako wielkość promienia kropli kolejno wartości:

$$\rho = 10^{-7} \text{ m}, \quad 10^{-6} \text{ m}, \quad 10^{-5} \text{ m}.$$

Przyjęto, że w stanie początkowym przepływu czynnik znajduje się w równowadze termodynamicznej i parametry jego wynoszą:

ciśnienie statyczne $p(0) = 0,1 \text{ bar}$,

prędkość przepływu $w(0) \approx 0$.

Udział masowy składnika gazowego w strumieniu przepływu przyjęto dla wszystkich przypadków

$$g(0) = 0,9.$$

Przyjęto, że procesy rozprężania czynnika w przepływie mają miejsce przy prostoliniowej zmianie ciśnienia w funkcji czasu, tzn.

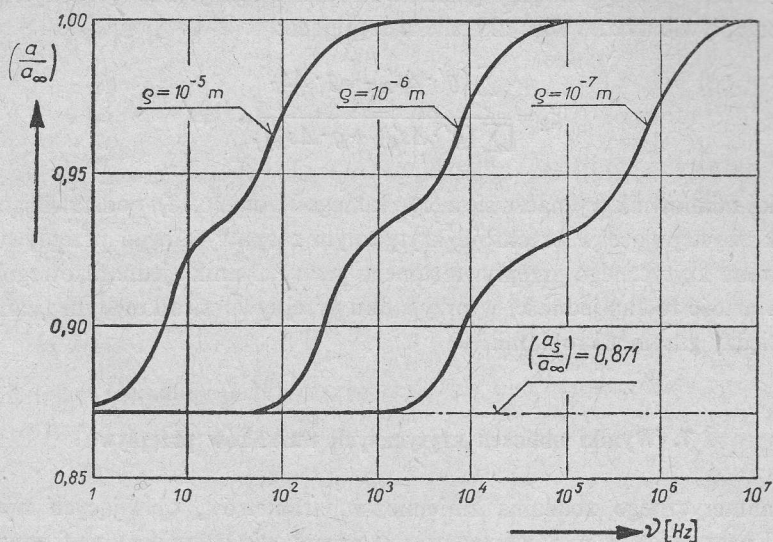
$$\dot{p} \equiv \frac{dp}{dt} = \text{idem},$$

przy czym obliczenia wykonano dla szeregu wartości szybkości rozprężania w zakresie

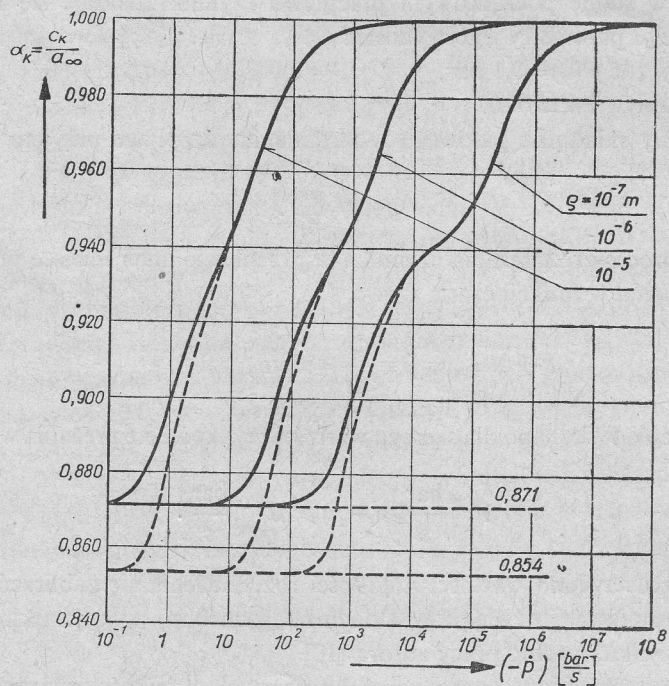
$$10^7 \frac{\text{bar}}{\text{s}} \geq (-\dot{p}) \geq 10^{-1} \frac{\text{bar}}{\text{s}}.$$

Na rys. 4 przedstawiono wartości prędkości rozchodzenia się zaburzeń akustycznych (odniesionej do prędkości dźwięku w składniku gazowym) w czynniku dwufazowym, będącym w spoczynku, według pracy autora [10].

Wyznaczenia przekrojów krytycznych i krytycznych prędkości przepływu dokonano w sposób opisany w rozdziale 6 niniejszej pracy (szkic wyjaśniający na rys. 1). Rzeczywistą prędkość przepływu w każdym przekroju i przynależną do tego przekroju prędkość kry-

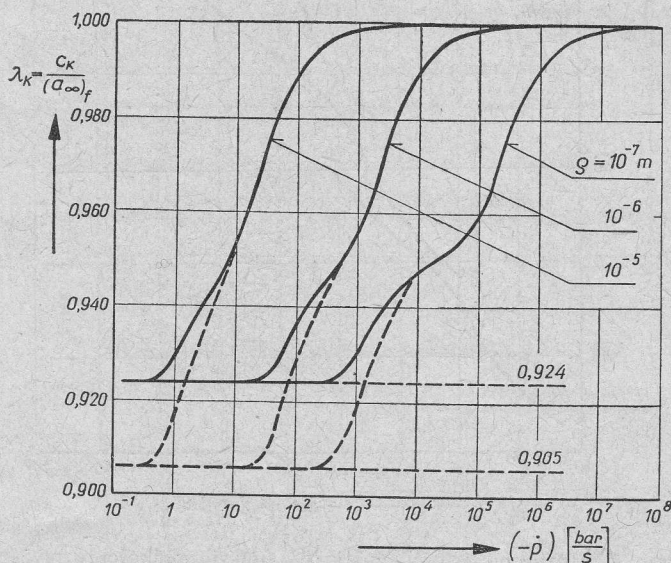


Rys. 4. Prędkość fazowa rozchodzenia się fali akustycznej w nasyconej parze wilgotnej (wg [10])



Rys. 5. Krytyczne prędkości przepływu (odniesione do maksymalnej prędkości dźwięku w przekroju krytycznym) w funkcji prędkości rozprężania

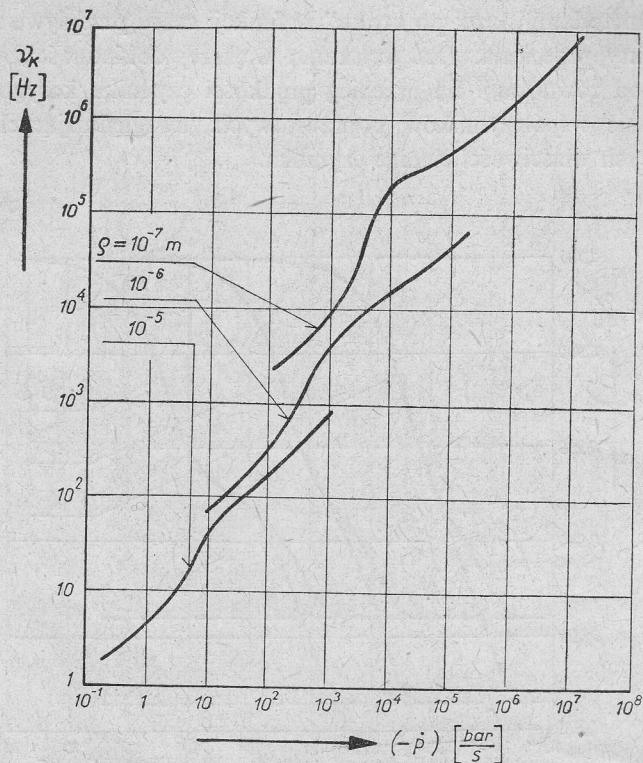
tyczną obliczano metodami „krok po kroku” w funkcji czasu przepływu i następnie wyznaczano ich punkty przecięcia. Dla uzyskania większej dokładności, wzory opisujące wpływ odchyłek od równowagi na przebieg prędkości czynnika korygowano następnie przez wprowadzenie współczynników poprawkowych, uwzględniających wpływ zmian wielkości opisujących właściwości cieplne czynnika.



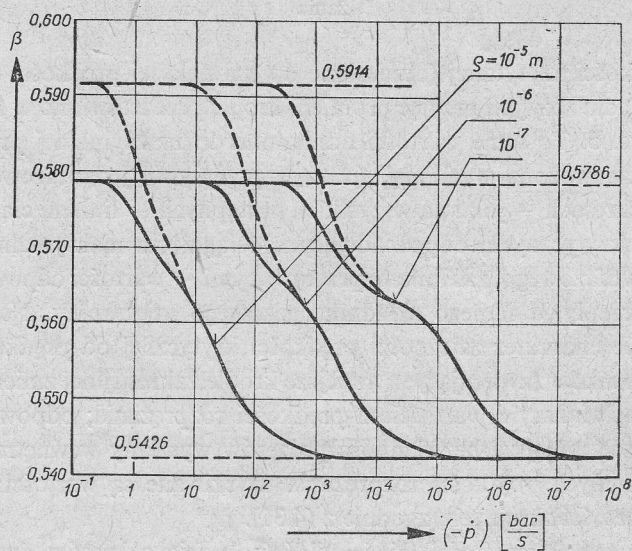
Rys. 6. Krytyczne prędkości przepływu (odniesione do maksymalnej prędkości dźwięku w stanie krytycznym przepływu gazu bez oddziaływania kropli) w funkcji prędkości rozprężania

Wartości prędkości krytycznej (odniesione do największej prędkości dźwięku w przekroju krytycznym) dla różnych przyjęć promieni kropli przedstawiono w funkcji prędkości rozprężania na rys. 5. Te same wartości odniesione do maksymalnej prędkości dźwięku w przepływie z „zamrożoną wymianą” (albo w przepływie jednofazowym) przedstawia rys. 6. Na tych wykresach — jak i na wszystkich następnych — liniami ciągłymi oznaczono przebieg wartości krytycznych, odpowiadających osiągnięciu maksymalnej gęstości przepływu czynnika dwufazowego, zaś liniami przerywanymi — wartości odpowiadające maksymalnej gęstości przepływu samego składnika gazowego mieszaniny. Na obu wykresach występuje wyraźnie charakter zależności prędkości krytycznej od prędkości rozprężania, przy czym dla czynników zawierających mniejsze krople zakres silnej zmienności tej funkcji przesunięty jest ku większym wartościom prędkości rozprężania; odpowiada to sytuacji, w której ma miejsce mniejsza bezwładność procesów wymiany wewnętrznej. Dla bardzo dużych i bardzo małych prędkości rozprężania uzyskiwane są wartości nie różniące się praktycznie od wartości skrajnych, zgodnie z (4.31).

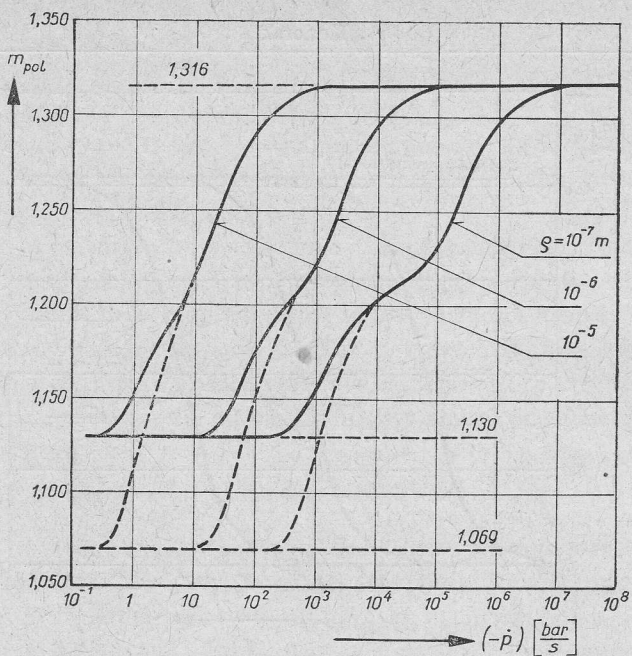
Wykres „krytycznych częstości dźwięku” (w obrębie zakresów dyspersji prędkości dźwięku) w funkcji prędkości rozprężania przedstawia rys. 7. Wartości wynikające z tego wykresu mają jedynie charakter przybliżony, ponieważ do ich wyznaczenia użyto wielkości



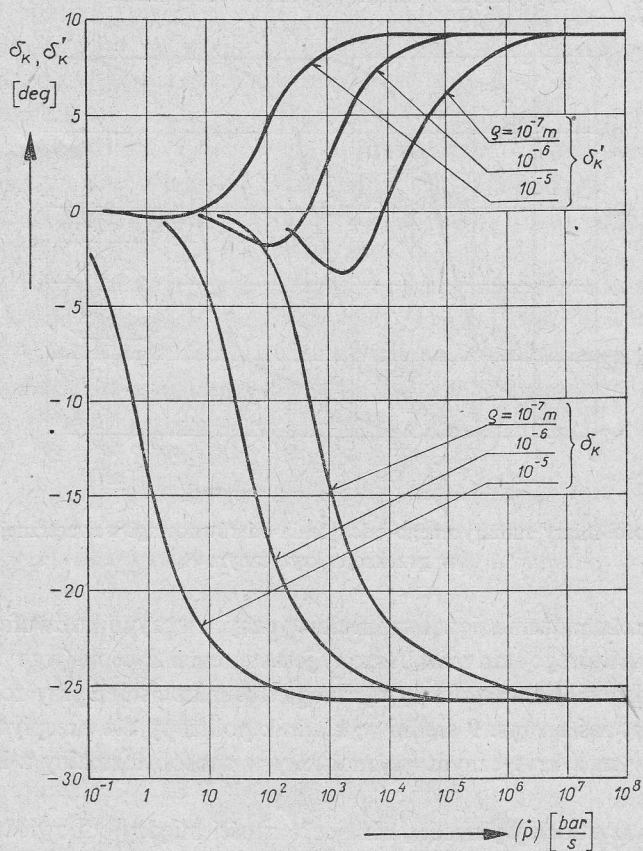
Rys. 7. Wykres „krytycznych częstości dźwięku” w funkcji prędkości rozprężania (wartości przybliżone)



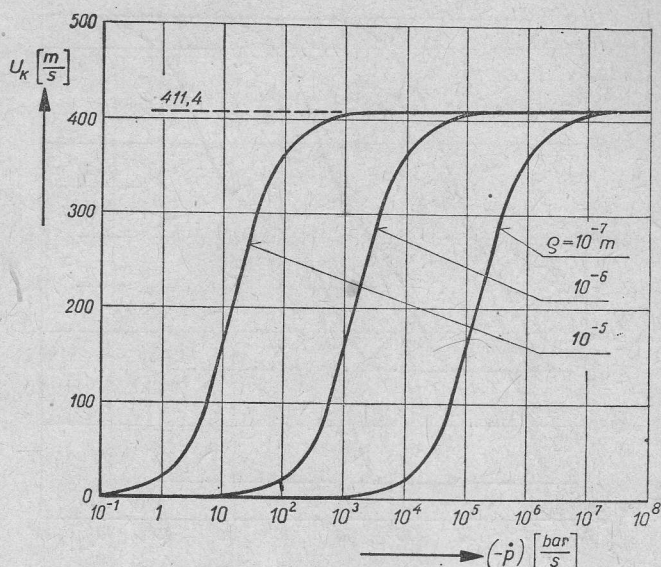
Rys. 8. Krytyczne stosunki ciśnień przepływu dwufazowego w funkcji prędkości rozprężania



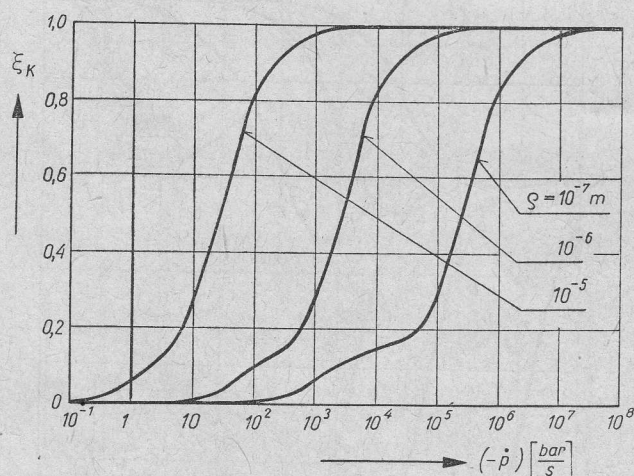
Rys. 9. Wartości średniego wykładnika politropy



Rys. 10. Wartości odchyłek od temperatury nasycenia, występujące w krytycznym przekroju przepływu



Rys. 11. Wartości różnicy prędkości między składnikiem gazowym a kroplami w przekroju krytycznym w funkcji prędkości rozprężania



Rys. 12. Wartości miary sumarycznego odchylenia od równowagi wewnętrznej w czynniku w przekroju krytycznym

prędkości fazowej rozchodzenia się zaburzeń akustycznych w czynniku dwufazowym pozostającym w spoczynku, którego stan niezaburzony jest stanem nasycenia (wg rys. 4 i pracy [10]).

Na rys. 8 przedstawiono wartości krytycznego stosunku ciśnień przy rozprężaniu czynnika dwufazowego, zaś na rys. 9 średni wykładnik politropy dla przepływu między przekrojem początkowym a krytycznym (wyznaczony w sposób formalny z krytycznego stosunku ciśnień).

Jak widać ze wszystkich wykresów, różnice wartości między odpowiednimi parametrami krytycznymi, wynikającymi z kryterium $F = \text{extr}$ (według (4.5)) i kryterium $(F/g) = \text{extr}$

(wg (5.1)) zanikają przy zwiększaniu prędkości rozprężania; jest to uzasadnione zmniejszającym się wpływem wymiany między składnikiem gazowym a kroplami.

Na rysunkach 10 i 11 przedstawiono wartości odchyłek od odpowiednich parametrów równowagi, występujące w przekroju krytycznym.

Wykres na rys. 12 przedstawia wartości miary sumarycznego odchylenia od równowagi w przekroju krytycznym, obliczone dla rozpatrywanych przypadków według wzoru (6.19).

Z ostatnich wykresów widoczny jest silny wpływ wielkości kropeł na parametry odchylenia od równowagi; można stwierdzić, że w niektórych zakresach prędkości rozprężania zmiana rozmiarów kropeł o jeden rząd wielkości powoduje przejścia od znikomych wartości odchylenia, od równowagi do prawie maksymalnego odchylenia.

8. Krótkie wnioski

1. W ustalonym przepływie czynnika dwufazowego występuje stan braku równowagi wewnętrznej (termodynamicznej i dynamicznej) między składnikiem gazowym przepływu a kroplami cieczy. Wartości parametrów, opisujących odchylenia od równowagi w określonym przekroju, są funkcjami „historii działania wymuszeń” w przepływie przed tym przekrojem.

2. Krytyczna prędkość przepływu (określona jako prędkość, przy której osiągane jest ekstremum gęstości przepływu czynnika dwufazowego) w ogólnym przypadku nie jest równa prędkości rozchodzenia się zaburzeń akustycznych w czynniku (która podlega dyspersji w funkcji częstości zaburzeń). Wartość krytycznej prędkości przepływu czynnika dwufazowego zależy od „historii stanów braku równowagi” w przepływie oraz od lokalnej wartości prędkości zmiany ciśnienia. Dla skrajnie wielkich i skrajnie małych prędkości zmiany ciśnienia, prędkość krytyczna przybiera wartości równe skrajnym wartościom prędkości dźwięku.

3. Krytyczną prędkość przepływu dwufazowego przedstawić można jako prędkość fali dźwiękowej w fikcyjnym gazie (jednofazowym), znajdującym się w spoczynku, w którym źródła masy, ciepła i pędu wywoływane są zaburzeniami ciśnienia, przy czym między wydajnością tych źródeł a zmianami ciśnienia zachodzą takie zależności, jakie mają miejsce w rozpatrywanym przekroju rzeczywistego przepływu dwufazowego (w odniesieniu do przepływu składnika gazowego mieszaniny dwufazowej).

4. Krytyczny przekrój przepływu, określony z warunku osiągania ekstremum gęstości przepływu samego tylko składnika gazowego położony będzie (w przepływach rozprężających) przed przekrojem krytycznym, określonym jak w punkcie 2 i odpowiadać mu będzie mniejsza wartość prędkości krytycznej.

5. Na podstawie rozpatrzenia obowiązujących zależności wyprowadzić można wyrażenia opisujące występowanie warunków krytycznych w przepływie nierównowagowym, takie jak bezwymiarowa prędkość krytyczna, krytyczny stosunek ciśnień, średni wykładnik politropy i in. Wprowadzono również miarę sumarycznego stanu odchylenia od równowagi, opartą na zaproponowanym kryterium entropowym.

Jak wykazują wyniki obliczeń, wartości tych parametrów zależą w istotny sposób od prędkości rozprężania w przepływie oraz od rozdrobnienia fazy ciekłej (rozmiarów kropeł).

Literatura

- [1] R. E. Henry, H. K. Fauske, *The Two-Phase Critical Flow of One-Component Mixtures in Nozzles, Orifices and Short Tubes*. Trans. ASME, Journ. of Heat Transfer, 1971, May, s. 179.
- [2] L. D. Kapusta, M. J. Rubinowicz, A. A. Szrajbier, *K woprosu o dźwizenji i tieploobmienje czastice w pulsirujuszczim potokie gaza*. Inż. Fiz. Żurnał, t. 10, 1966, s. 744.
- [3] J. Madejski, *Thermodynamics of ideal multiatomic gases in local non-equilibrium*. Arch. Mech. Stos., t. 20, 1968, s. 295.
- [4] K. M. Moore, W. R. Gibson, *Propagation of Weak Disturbances in a Gas Subject to Relaxation Effects*. Journ. of the Aerospace Sci — 1960, Feb., s. 117.
- [5] J. Pientka, *Zjawisko przekroczenia równowagi trwalej podczas przepływu cieczy i pary mokrej w dyszy*. Arch. Bud. Masz. 1969, nr 1, s. 23.
- [6] W. G. Steltz, *The Critical and Two-Phase Flow of Steam*. Amer. Soc. Mech. Eng. 1959, No. A-223.
- [7] A. Konorski, *Obliczanie wymiany masy i energii w czynniku dwufazowym, zawierającym duże krople*. Prace IMP, z. 39, 1968, s. 27.
- [8] A. Konorski, *Dynamik der Zustandsänderungen im Naßdampf*. Prace IMP, z. 42 - 44, 1969, s. 479.
- [9] A. Konorski, *Nierównowagowy przepływ wielofrakcyjnych par wilgotnych przez kanały o zmiennym przekroju*. Prace IMP, z. 56, 1971, s. 3.
- [10] A. Konorski, *Rozchodzenie się słabych zaburzeń (fal dźwiękowych) w czynnikach dwufazowych*. Prace IMP, z. 57, 1971, s. 65.
- [11] A. Konorski, *Losses Connected with Thermal Processes in Two-Phase Media*. Prace IMP, z. 57, 1971, s. 117.
- [12] A. Konorski, *Krytyczne i ekstremalne parametry nierównowagowych przepływów czynnika dwufazowego*. Materiały VIII Zjazdu Termodynamików — Krościenko 1972 (nakł. Akad. Gór.-Hutn. w Krakowie).

Критические условия неравновесного течения двухфазных сред

Резюме

Работа посвящена анализу проблемы критических условий течения („блокирования течения”) двухфазных сред, в особенности влажных паров в условиях отсутствия термодинамического равновесия в течении. Целью работы является определение термогазодинамических функций и характеристических параметров, описывающих общие свойства неравновесных течений многофазных сред.

Рассматривается одномерное установившееся течение такой среды, в которой жидкая фаза выступает в форме капель, характеризующихся различными размерами и физическими параметрами (т. е. принадлежит к различным фракциям). Отклонения от состояния внутреннего равновесия в среде описываются формулами (2.1) до (2.3). Основываясь на предыдущих трудах автора, воздействие отклонений от состояния равновесия на течение определяется путем введения величины т. наз. эквивалентных внутренних источников (согл. форм. (3.7) до (3.11)), имитирующих воздействие действительных процессов обмена энергии, массы и импульса между фазами на течение газовой фазы (несущего компонента) смеси.

Определяя критические условия течения двухфазной среды по формуле (4.5) и пользуясь понятием мнимых приростов параметров состояния по (4.6) и (4.7) можно уравнение, описывающее изменяемость условий течения, привести к форме (4.14). Из этого следуют формулы на критическую скорость (4.16) до (4.19). Доказывается, что критическую скорость можно интерпретировать как

скорость звука в фиктивной, неподвижной (однофазной) среде, в которой действуют определенные внутренние источники.

Критическая скорость течения в общем случае не равняется скорости звука в двухфазной среде; единственно в крайних случаях будут они отвечать крайним значениям скорости звука (формула (4.13), рис. 2). Значения критических скоростей в общем случае будут зависеть не только от параметров в критическом сечении, но также и от предыдущего распределения параметров течения („истории течения”).

В разд. 5 дано отличающееся определение критических условий самого газового компонента двухфазной смеси (формула (5.1)) и следующие из него значения критической скорости (5.5) до (5.7). Доказывается, что критическая скорость, определяемая последним способом, достигает меньших значений, чем для предыдущего определения (рис. 1).

В разд. 6 представлена система расчетных уравнений для определения параметров течения среды вдоль пути течения (формулы (6.1) до (6.7)), определяется способ расчета критической скорости (рис. 1 и 2) и вычисляются ее значения (рис. 5 и 6).

Выведены формулы и произведены расчеты, для избранных численных примеров, значения критического отношения давлений (рис. 8), среднего показателя политропы (рис. 9), а также нововведенных понятий: „энтропического коэффициента отклонения от состояния равновесия” (формула (6.19), рис. 12) и „критической частоты звука” (рис. 3 и 7). Значения всех этих параметров сильно зависят от скорости экспансии в течении, а также от степени дисперсности жидкой фазы.

Critical Flow Conditions of Non-Equilibrium Two-Phase Media

Summary

In the paper the occurrence of critical conditions (‘‘flow choking’’) in non-equilibrium two-phase flows (in particular wet steam flows) is analyzed. The aim of the paper is to evaluate methods for determining and calculating the thermogasdynamic functions and characteristic parameters and to use them for description of general properties of such kind of flows.

A one-dimensional stationary flow of wet steam, containing liquid drops of various sizes and physical parameters (i.e. belonging to various fractions) is considered. Deviations from the internal equilibrium are described by formulas (2.1) - (2.3); their influence on the flow is expressed (basing on the author's previous papers) by introducing fictitious functions called ‘‘substitutive internal sources’’ of energy, substance and momentum. These substitutive sources simulate the influence exerted on the gas-phase flow (i.e. flow of the carrier component) by the actual exchange processes with drops of liquid.

The equation (4.4), describing the variation of flow conditions may be transformed into eq. (4.14) which defines the critical flow conditions of the two-phase medium according to definition (4.5) and using a concept of ‘‘apparent increments’’ of thermal state parameters as given by (4.6) and (4.7). As a result the formulas (4.16) - (4.19) for the critical velocity are obtained. It was shown that the critical velocity can be interpreted as the sound velocity in a fictitious, resting (single-phase) gas in which the internal sources act in a predetermined way.

The critical velocity of flow differs in general from the two-phase medium sound velocity; only for the extreme boundary cases it is equal to the adequate extreme values of the velocity of sound (formula (4.31), Fig. 2). The critical velocity values depend in general not only on the parameters existing in the critical cross-section, but also on the earlier values of the parameters of flow (‘‘history of flow’’).

A different definition of the critical flow conditions based on the parameters of the sole gaseous component of the two-phase mixture is presented in formula (5.1) and the resulting values of the critical velocity (5.5) - (5.7) are given in Chapter 5. It is shown that the critical velocity defined in such a way has lower values than that given by the previous formula (4.5) — Fig. 1.

A set of equations for calculating the course of the flowing medium parameters along the path of flow (formulas (6.1) - (6.7)) is given in Chapter 6. A method of critical velocity calculation, based on the idea illustrated in Fig. 1 and 2 is presented and resulting values of critical velocities, calculated for a number of examples of two-phase flows are shown in Figs 5 and 6.

Furthermore formulas determining the values of the critical pressure ratio and the average polytropic exponent are developed and their numerical quantities calculated (Figs 8 and 9, respectively). An entropic factor expressing total deviation from equilibrium is newly introduced and its values are calculated (formula (6.19), Fig. 12) as well as the "critical sound velocity" (Figs 3 and 7).

All those characteristic values depend substantially on the rate of expansion and on the dispersion (droplet size) of the liquid phase.