

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

64

WARSZAWA—POZNAN 1974

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPLYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

KOMITET REDAKCYJNY — EXECUTIVE EDITORS
KAZIMIERZ STELLER — REDAKTOR — EDITOR
JERZY KOŁODKO · JÓZEF ŚMIGIELSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA — EDITORIAL OFFICE
Instytut Maszyn Przepływowych PAN
ul. Gen. Józefa Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, skr. pocztowa 621, tel. 41-02-13

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1974

Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 400+90 egz.	Oddano do składania 10 X 1973 r.
Ark. wyd. 11,75. Ark. druk. 9,125	Podpisano do druku 18 V 1974 r.
Papier druk. sat. kl. V, 70 g	Druk ukończono w maju 1974 r.
Nr zam. 689/226.	D-4/448. Cena zł 36,—

DRUKARNIA UNIWERSYTETU IM. A. MICKIEWICZA W POZNANIU

TADEUSZ KORONOWICZ

Gdańsk

Analiza pola prędkości indukowanych przez wybrane układy wirów prostoliniowych*

W pracy rozpatrzono jako przypadek graniczny układu wirów śrubowych pole prędkości indukowanych przez układ złożony z Z nieskończenie długich wirów prostoliniowych o cyrkulacji Γ/Z , rozłożonych równomiernie na walcu kołowym, oraz wiru o cyrkulacji Γ i zwrocie przeciwnym, położonym w osi tego walca. Szczegółowo rozpatrzono kształt osobliwości wirów, zdefiniowano i wyznaczono wartości średnie prędkości indukowanych oraz współczynniki uśredniające kręt i energię przepływu, w oparciu o dokładny i przybliżony kształt osobliwości wirów.

Spis oznaczeń

$b_V = \frac{\Gamma}{4\pi R V_0}$ – bezwymiarowa wielkość cyrkulacji,	$x = \frac{x_P - x_M}{R_M}$ – bezwymiarowa odległość wzdłuż osi, pomiędzy punktami M i P ,
e_x, e_ρ, e_φ – wersory układu cylindrycznego,	Z – ilość wirów wierzchołkowych,
p – ciśnienie,	x_P, R_P, φ_P – współrzędne punktu P w układzie cylindrycznym,
P_u – wielkość charakteryzująca pole ciśnień indukowanych przez układ wirowy,	K, M, N – wielkości całkowite wchodzące w skład P_u ,
$r = \frac{R_P}{R_M}$ – bezwymiarowa wielkość promienia,	Γ – cyrkulacja,
R_M – promień wodzący punktu M wiru wierzchołkowego,	$\delta = \frac{2 b_V}{\sqrt{\sigma_0}}$ – parametr charakteryzujący wielkość osobliwości wirów,
S_W – pole przekroju osobliwości wiru wierzchołkowego,	$\vec{v}$ – wektor prędkości indukowanej przez układ wirowy,
S_r – pole przekroju osobliwości wiru osiowego,	v_x, v_ρ, v_φ – składowe prędkości indukowanej,
V_ρ, V_φ – składowe prędkości indukowanej odniesione do prędkości przepływu niezakłóconego,	λ – współczynnik posuwu,
$\bar{V}_\rho, \bar{V}_\varphi$ – średnie wartości składowych prędkości indukowanej,	ρ – gęstość cieczy,
V_0 – prędkość przepływu niezakłóconego,	σ_0 – liczba kawitacyjna,
	φ_0 – współrzędna kątowa osobliwości wiru,
	ω – prędkość kątowa,
	$d\Omega$ – element wiru,
	β_r, χ_r, ρ_r – współczynniki uśredniające pęd, kręt i energię przepływu indukowanego przez układ wirowy.

* Praca wykonana w ramach problemu resortowego PAN-19, grupa tematyczna 5.

1. Wstęp

Przystępując do analizy pola prędkości indukowanych przez układy wirowe, wyznaczające pole prędkości za pędnikiem śruby, napotkano na zasadnicze trudności wynikające ze skomplikowanej postaci wzorów opisujących to pole [3], gdyż całki wyznaczające składowe prędkości indukowanych nie dają się wyznaczyć inaczej jak tylko metodami numerycznymi. Wykorzystanie szybkoliczących maszyn cyfrowych pozwala na dokładne wyznaczenie pola prędkości w dowolnym punkcie przestrzeni otaczającej układ wirowy, ale szczegółowa analiza tego pola zwłaszcza w pobliżu osobliwości jąder wirowych jest bardzo pracochłonna i praktycznie uniemożliwia dokładne przeprowadzenie obliczeń.

Jednym ze sposobów uniknięcia pracochłonnych i skomplikowanych obliczeń jest przyjęcie obliczeniowego modelu osobliwości jądra wirowego w kształcie walca kołowego oraz poszukiwania układów odniesienia, które pozwoliłyby na ocenę poprawności uzyskanych obliczeń numerycznych, jak również na ewentualne uproszczenie obliczeń przez eliminację niektórych parametrów charakteryzujących układ.

W tej sytuacji przy ocenie poprawności przyjętego założenia upraszczającego (osobliwość kołowa), jak również przy szukaniu odpowiednich układów odniesienia, staje się bardzo pomocny przypadek szczególny układu wirów śrubowych, jakim jest układ wirów o skoku nieskończenie wielkim $\tan \beta = \infty$ (wiry prostoliniowe). Wzory wyznaczające pole prędkości dla wirów prostoliniowych wyrażają się w prostej postaci, umożliwiając szybkie i dokładne obliczenia kształtu osobliwości jąder wirowych, a stąd również analizę pola w oparciu o obliczeniowo ścisły kształt osobliwości.

Sposób rozwiązywania postawionego zadania nie jest może najbardziej optymalny, gdyż układ wirów prostoliniowych, nieskończenie długich można rozpatrywać w układzie płaskim posługując się funkcjami zespolonymi. Zaproponowane podejście do wyznaczenia wzorów na pole prędkości, a następnie jego analiza jest oparta na analogicznym rozpatrzeniu układów wirów śrubowych, których nie da się rozwiązać inaczej jak tylko metodami numerycznymi, wychodząc z równania Biotta-Savarta.

2. Określenie wzorów wyznaczających składowe prędkości indukowanych

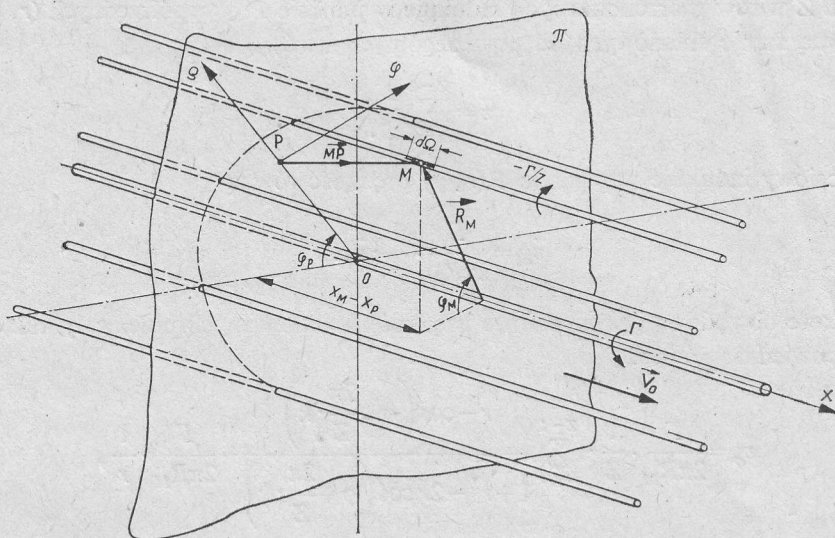
Do rozważań przyjmijmy układ Z wirów wierzchołkowych prostoliniowych nieskończenie długich o cyrkulacji $-\Gamma/Z$, równomiernie rozłożonych na cylindrze osiowym o promieniu R_M oraz wiru osiowego, również prostoliniowego i nieskończenie długiego, o cyrkulacji Γ położonego w osi cylindra (rys. 1).

Zadanie zostanie określone w układzie cylindrycznym $[x, \rho, \varphi]$ związanym z punktem $P[x_P, R_P, \varphi_P]$, w którym chcemy wyznaczyć wektor prędkości $\vec{v}$.

Wektor prędkości od k -tego wiru wierzchołkowego ($k=0, 1, \dots, Z-1$) można wyznaczyć z równania Biotta-Savarta

$$\vec{v}_k = \frac{\Gamma}{4\pi Z} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\vec{\Omega} \times \vec{M}_k P}{|\vec{M}_k P|^3}. \quad (2.1)$$

Zgodnie z przyjętymi na rys. 1 oznaczeniami, wielkości występujące w powyższym wzorze



Rys. 1. Model obliczeniowy układu wirów prostoliniowych z przyjętym układem współrzędnych (x, ρ, φ)

można opisać następująco:

$$\vec{d\Omega} = dx \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{M_k P} = (x_P - x_{Mk}) \vec{e}_x + [R_P - R_{Mk} \cos(\varphi_P - \varphi_{Mk})] \vec{e}_\rho + R_{Mk} \sin(\varphi_P - \varphi_{Mk}) \vec{e}_\varphi.$$

Dla układu wirów nieskończenie długich, można przyjąć początek układu w punkcie przebicia płaszczyzną Π (prostopadłą do osi cylindra i przechodzącą przez punkt P) z osią x :

$$\vec{v}_k = \frac{\Gamma}{4\pi R_{Mk}} \cdot \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{[r \cos(\varphi_P - \varphi_{Mk})] \vec{e}_\varphi - \sin(\varphi_P - \varphi_{Mk}) \vec{e}_\rho\} dx}{[x^2 + 1 + r^2 - 2r \cos(\varphi_P - \varphi_{Mk})]^{3/2}}, \quad (2.2)$$

gdzie

$$r = \frac{R_P}{R_M}, \quad x = \frac{x_P - x_{Mk}}{R_{Mk}}.$$

Całkując względem x , uzyskujemy

$$\vec{v}_k = \frac{\Gamma}{2\pi R_M} \cdot \frac{1}{Z} \cdot \frac{[r \cos(\varphi_P - \varphi_{Mk})] \vec{e}_\varphi - \sin(\varphi_P - \varphi_{Mk}) \vec{e}_\rho}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi_P - \varphi_{Mk})}. \quad (2.3)$$

Jeśli przyjąć $\varphi_P - \varphi_{Mk} = \varphi + \frac{2\pi}{Z} k$, gdzie $k=0, 1, 2, \dots, (Z-1)$, to prędkość indukowana od k -tego wiru wierzchołkowego wynosi

$$\vec{v}_k = \frac{\Gamma}{2\pi R_M} \cdot \frac{1}{Z} \cdot \frac{\left[r \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{Z} \cdot k\right) \right] \vec{e}_\varphi - \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{Z} k\right) \vec{e}_\rho}{1 + r^2 - 2r \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{Z} \cdot k\right)}. \quad (2.4)$$

Układ Z wirów wierzchołkowych indukuje w punkcie P o współrzędnych (r, φ) prędkość równą sumie składowych od poszczególnych wirów

$$\vec{v} = \sum_{k=0}^{Z-1} \vec{v}_k.$$

Wir osiowy indukuje w punkcie $P(r, \varphi)$ prędkość równą

$$\vec{v}_{os} = \frac{\Gamma}{2\pi R_M} \cdot \frac{1}{r} \cdot \vec{e}_\varphi. \quad (2.5)$$

Składowe obwodowa i promieniowa prędkości indukowanych przez cały układ wirów będą odpowiednio równe:

$$v_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi R_M} \cdot \frac{1}{Z} \cdot \sum_{k=0}^{Z-1} \frac{r - \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{Z} \cdot k\right)}{1 + r^2 - 2r \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{Z} \cdot k\right)} - \frac{\Gamma}{2\pi R_M} \cdot \frac{1}{r},$$

$$v_\rho = \frac{\Gamma}{2\pi R_M} \cdot \frac{1}{Z} \sum_{k=0}^{Z-1} \frac{-\sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{Z} k\right)}{1 + r^2 - 2r \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{Z} \cdot k\right)}.$$

Występujące w powyższych wzorach sumy dają się przekształcić w postać znacznie dogodniejszą do dalszych przeliczeń:

$$\frac{1}{Z} \sum_{k=0}^{Z-1} \frac{\sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{Z} k\right)}{1 + r^2 - 2r \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{Z} k\right)} = \frac{r^{(Z-1)} \sin(Z\varphi)}{1 + r^{2Z} - 2r^Z \cos(Z\varphi)},$$

$$\frac{1}{Z} \sum_{k=0}^{Z-1} \frac{r - \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{Z} k\right)}{1 + r^2 - 2r \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{Z} k\right)} = \frac{r - \cos(Z\varphi)}{1 + r^{2Z} - 2r^Z \cos(Z\varphi)}.$$

Powyższe przekształcenia można stosunkowo łatwo udowodnić dla $Z=2, 3$ i 4 oraz ich wielokrotności $Z=6, 8, 9 \dots$. Dla $Z=5$ i $Z=7$ sprawdzono zgodność przekształcenia metodami numerycznymi.

Uwzględniając zależności (2.7) uzyskujemy wzory na składowe prędkości indukowanych od układu wirów prostoliniowych

$$v_\varphi = -\frac{\Gamma}{2\pi R_M} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1 - r^Z \cos(Z\varphi)}{1 + r^{2Z} - 2r^Z \cos(Z\varphi)},$$

$$v_\rho = -\frac{\Gamma}{2\pi R_M} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{r^Z \sin(Z\varphi)}{1 + r^{2Z} - 2r^Z \cos(Z\varphi)}. \quad (2.8)$$

Wprowadzając bezwymiarową wielkość cyrkulacji

$$b_V = \frac{\Gamma}{4\pi R_M V_0}$$

uzyskujemy wzory na bezwymiarowe wielkości składowych prędkości w punkcie $P(r, \varphi)$ od układu Z wirów wierzchołkowych prostoliniowych nieskończenie długich o cyrkulacji $-\Gamma/Z$, rozłożonych równomiernie na walcu osiowym o promieniu R_M oraz wiru osiowego prostoliniowego nieskończenie długiego o cyrkulacji $+\Gamma$

$$\begin{aligned} V_\varphi &= \frac{v_\varphi}{V_0} = -\frac{2b_V}{r} \cdot \frac{1 - r^{2Z} \cos(Z\varphi)}{1 + r^{2Z} - 2r^Z \cos(Z\varphi)}, \\ V_\rho &= \frac{v_\rho}{V_0} = -\frac{2b_V}{r} \cdot \frac{r^Z \sin(Z\varphi)}{1 + r^{2Z} - 2r^Z \cos(Z\varphi)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Znak $(-)$ występujący w powyższych wzorach obowiązuje w przyjętym do obliczeń układzie przedstawionym na rys. 1.

3. Wartości średnie składowych prędkości indukowanych

Średnie wartości składowych obwodowej i promieniowej na danym promieniu r , można zdefiniować następująco:

$$\begin{aligned} \bar{V}_\varphi &= \frac{\bar{v}_\varphi}{V_0} = \frac{1}{\frac{2\pi}{Z} - 2\varphi_0} \int_{\varphi_0}^{\frac{2\pi}{Z} - \varphi_0} \frac{v_\varphi}{V_0} d\varphi = \frac{Z}{2(\pi - Z\varphi_0)} \int_{\varphi_0}^{\frac{2\pi}{Z} - \varphi_0} \frac{2b_V}{r} \cdot \frac{1 - r^{2Z} \cos(Z\varphi)}{1 + r^{2Z} - 2r^Z \cos(Z\varphi)} d\varphi, \\ \bar{V}_\rho &= \frac{\bar{v}_\rho}{V_0} = \frac{1}{\frac{2\pi}{Z} - 2\varphi_0} \int_{\varphi_0}^{\frac{2\pi}{Z} - \varphi_0} \frac{v_\rho}{V_0} d\varphi = \frac{Z}{2(\pi - Z\varphi_0)} \int_{\varphi_0}^{\frac{2\pi}{Z} - \varphi_0} \frac{2b_V}{r} \cdot \frac{\sin(Z\varphi)}{1 + r^{2Z} - 2r^Z \cos(Z\varphi)} d\varphi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Wykorzystując własności funkcji trygonometrycznych (parzystość i nieparzystość) wchodzących w skład v_φ i v_ρ można stwierdzić, że dla wszystkich r średnia wartość składowej promieniowej jest równa 0. Nie można tego wprost stwierdzić odnośnie do średniej wartości składowej obwodowej. Wykorzystując parzystość funkcji cosinus można wzór (3.1) przedstawić w dogodniejszej do obliczeń postaci:

$$\bar{V}_\varphi = \frac{Z}{(\pi - Z\varphi_0)} \cdot \frac{2b_V}{r} \int_{\varphi_0}^{\pi/Z} \frac{1 - r^{2Z} \cos(Z\varphi)}{1 + r^{2Z} - 2r^Z \cos(Z\varphi)} d\varphi. \quad (3.2)$$

Całkę występującą we wzorze (3.2) daje się rozwiązać metodami analitycznymi przez pod-

stawienie $X=1+r^{2Z}-2r^Z \cos(Z\varphi)$ ([1] lub [2])

$$\vec{V}_\rho = \frac{b_V}{r} \cdot \frac{1}{\pi - Z\varphi_0} \left\{ \pi - Z\varphi_0 \pm \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{2r^Z - (1+r^{2Z}) \cos(Z\varphi_0)}{1+r^{2Z}-2r^Z \cos(Z\varphi_0)} \right] \right\}. \quad (3.3)$$

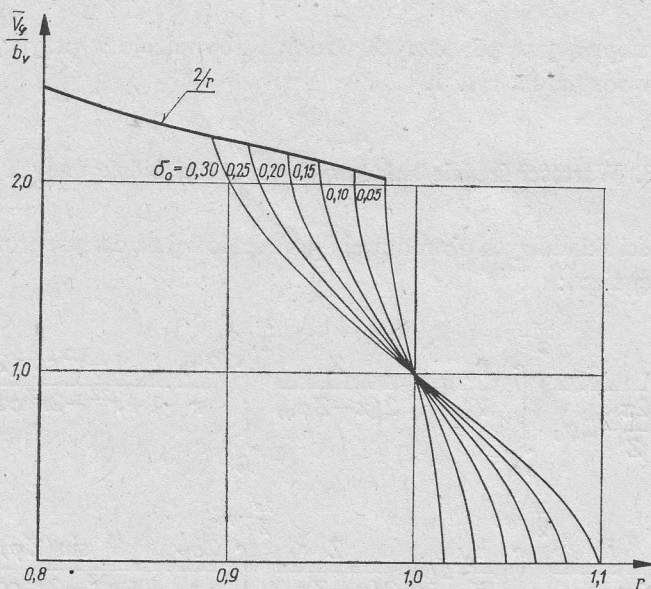
Znak (+) przed nawiasem kwadratowym odnosi się do $r < 1$, a znak (-) do $r > 1$.

Dla linii $r = \text{const}$ nie przecinających osobliwości jąder wirowych, a więc dla których $Z\varphi_0 = 0$, średnia obwodowa prędkości indukowanych wyraża się prostymi zależnościami.

Dla $r_r < r < 1 - r_{w1}$

$$\vec{V}_\varphi = \frac{2b_V}{r}, \quad (3.4)$$

a dla $r > 1 + r_{w2}$, podobnie jak składowa promieniowa, jest równa zero. Przebieg prędkości średniej $\bar{V}_\varphi$ w funkcji promienia r został przedstawiony przykładowo dla $Z=3$ na rys. 2.



Rys. 2. Prędkość średnia $\bar{V}_\varphi/b_V$ w pobliżu osobliwości jądra wirów wierzchołkowych

Składową obwodową prędkości indukowanej dla promienia $r=1$ można wyznaczyć bezpośrednio ze wzoru (2.9)

$$V_\varphi = 2b_V \frac{1 - \cos(Z\varphi)}{2 - 2\cos(Z\varphi)} = b_V. \quad (3.5)$$

A więc dla $r=1$ składowa obwodowa prędkości indukowanych od układu wirów prostoliniowych jest stała i równa b_V (stąd również prędkość średnia $\bar{V}_\varphi = b_V$). Można przyjąć, że również prędkość własna wirów będzie równa $-b_V$ i wiry wierzchołkowe będą się poruszały względem układu nieruchomego ze stałą prędkością kątową $\omega = b_V V_0 / R_M$, a dla uzyskania układu wirów prostoliniowych, należy układowi sił zewnętrznych indukującego

te siły, nadać prędkość kątową $\vec{\omega}_0 = -\vec{\omega}$ (dla układu o $Z \geq 2^*$). Wobec tego współczynnik posuwu dla rozpatrywanego układu wirów prostoliniowych będzie różny od zera i równy

$$\lambda = \frac{V_0}{\omega R_M} = \frac{1}{b_V}. \quad (3.6)$$

Wielkość $(Z\varphi_0)$ występującą we wzorze (3.3) można wyznaczyć wykorzystując własność cieczy rzeczywistych — tworzenie się powierzchni rozdziału w miejscach, w których ciśnienie osiąga wartość ciśnienia krytycznego — p_k .

W przepływie potencjalnym, pole ciśnień jest ściśle związane z polem prędkości. W przypadku pola prędkości indukowanych przez układy wirowe, poza osobliwościami przepływ jest przepływem potencjalnym. Ciśnienie można wyznaczyć porównując moce sił zewnętrznych określonych z zasady krętu i z zasady energii lub z całki Cauchy'ego-Lagrange'a dla przepływu względnego

$$\begin{aligned} \frac{p_0 - p}{\rho V_0^2} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{v_x}{V_0} \right)^2 + \left(\frac{v_\rho}{V_0} \right)^2 + \left(\frac{v_\varphi}{V_0} \right)^2 \right] + \frac{v_x}{V_0} - \frac{r}{\lambda} \cdot \frac{v_\varphi}{V_0} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{v_i}{V_0} \right)^2 + \frac{v_x}{V_0} - \frac{r}{\lambda} \cdot \frac{v_\varphi}{V_0}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Po podstawieniu do wzoru (3.7) wielkości (2.9) oraz zależności (3.6) uzyskujemy równanie wyznaczające pole ciśnień dla układu wirów prostoliniowych:

$$\frac{p_0 - p}{\rho V_0^2} = \frac{2b_V^2}{r^2} \cdot \frac{1 - r^Z + r^{Z+2} \cos(Z\varphi)}{1 + r^{2Z} - 2r^Z \cos(Z\varphi)}. \quad (3.8)$$

Przy ustalonych wartościach $\frac{p_0 - p}{\rho V_0^2}$ i b_V równanie (3.8) wyznacza powierzchnie stałego ciśnienia, a powierzchnia na której ciśnienie p przyjmie wartość ciśnienia krytycznego p_k , wyznacza powierzchnię rozdziału. (Warunki przepływu niezakłóconego można scharakteryzować liczbą kawitacyjną $\sigma_0 = (p_0 - p) / (\frac{1}{2} \rho V_0^2)$.)

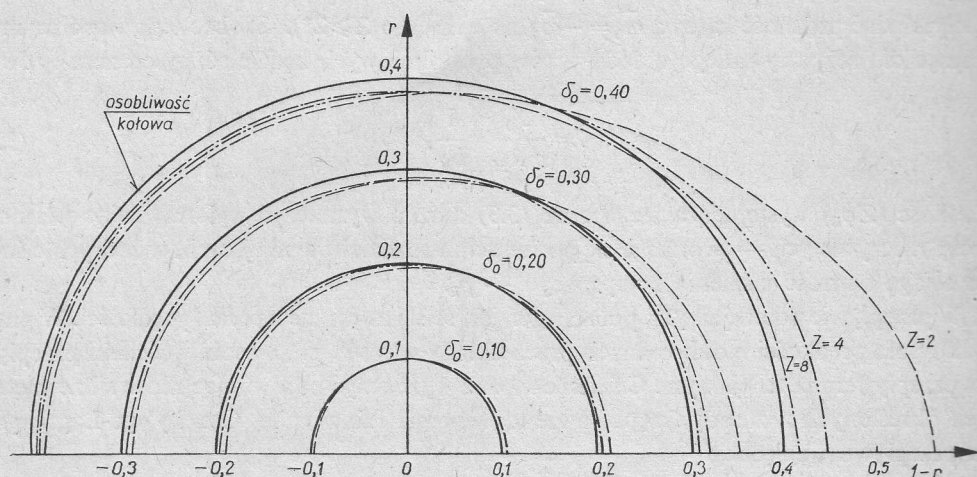
Powierzchnię rozdziału można wyznaczyć z rozpisanego równania (3.8)

$$r^{2(Z+1)} - (2 + \delta_0^2) r^{Z+2} \cos(Z\varphi_0) + r^2(1 + \delta_0^2) - \delta_0^2 = 0. \quad (3.9)$$

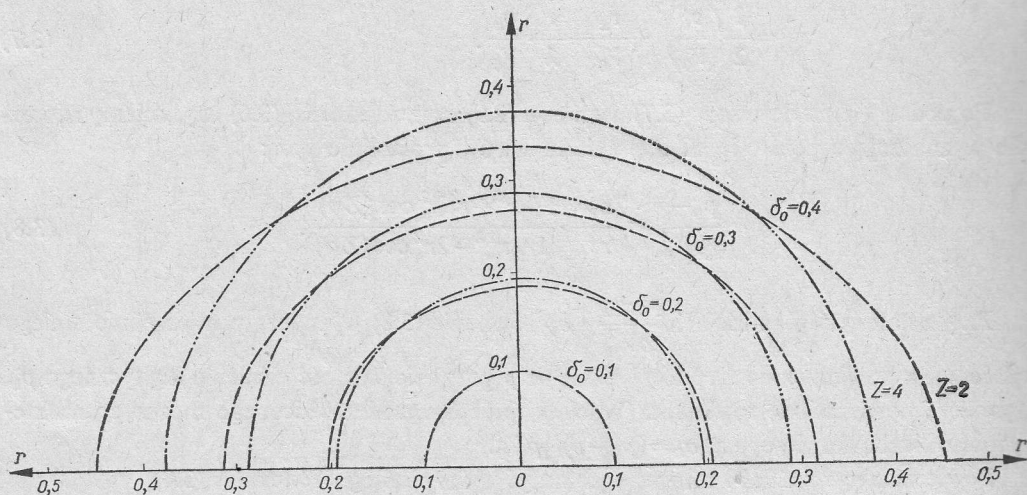
Parametr $\delta_0 = 2b_V / \sqrt{\sigma_0}$ wiążący liczbę kawitacyjną z wirowością układu, charakteryzuje powierzchnię rozdziału i jest pewnego rodzaju miarą osobliwości układu wirowego (dla prostoliniowego nieskończenie długiego wiru odosobnionego, wielkość $\delta_0 R_M$ jest dokładnie równa promieniowi osobliwości jądra wirowego).

Kształt powierzchni rozdziału (przekrój prostokątny do osi) dla kilku wartości δ_0 i Z , przedstawiono na rys. 3 i 4.

* Układ złożony tylko z jednego wiru wierzchołkowego i wiru rdzeniowego ma wspólny środek obrotu położony w nieskończoności i można mu przypisać układ sił zewnętrznych reprezentujący nieruchomy lub poruszający się ruchem prostoliniowym płat o skończonym wydłużeniu.



Rys. 3. Kształt osobliwości jąder wirów wierzchołkowych



Rys. 4. Kształt osobliwości jądra wiru osiowego

Wymiary osobliwości wirów wierzchołkowych pomnożono przez ilość wirów Z — przez co uzyskano lepsze porównanie kształtu osobliwości dla układów o różnej ilości wirów.

Analizując uzyskane wyniki można stwierdzić, że osobliwość wiru wierzchołkowego przyjmuje w przybliżeniu kształt koła o promieniu $r_w = \delta_0/Z$, a osobliwość wiru rdzeniowego, koła o promieniu $r_r = \delta_0/\sqrt{1+\delta_0^2}$.

Kształt osobliwości tym bardziej jest zbliżony do kołowego, im większa jest ilość wirów wierzchołkowych i im mniejsze δ_0 .

W tabeli 1 przedstawiono maksymalne i minimalne wartości osobliwości jąder wirowych oraz pole powierzchni przekroju osobliwości odniesionej odpowiednio, dla wiru wierzchołkowego do wielkości $\Pi(\delta_0/Z)^2$, oraz dla wiru rdzeniowego do wielkości $\Pi\delta_0^2/(1+\delta_0^2)$.

Tabela 1

Wymiary osobliwości układu wirów prostoliniowych

δ_0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40
$Z=2$						
Zr_{w1}	0,0508	0,1032	0,1582	0,2170	0,3534	0,5590
Zr_{w2}	0,0494	0,0980	0,1462	0,1940	0,2898	0,3870
$\frac{Z^2 S_w}{\pi \delta_0^2}$	1,0011	1,0052	1,0125	1,0238	1,0679	1,1690
r_{r1}	0,0501	0,1005	0,1518	0,2045	0,3183	0,4652
r_{r2}	0,0498	0,0986	0,1453	0,1894	0,2687	0,3361
$\frac{S_r(1+\delta_0^2)}{\pi \delta_0^2}$	1,0000	1,0002	1,0012	1,0040	1,0200	1,0692
$Z=3$						
Zr_{w1}	0,0506	0,1020	0,1551	0,2103	0,3300	0,4716
Zr_{w2}	0,0495	0,0987	0,1473	0,1959	0,2925	0,3900
$\frac{Z^2 S_w}{\pi \delta_0^2}$	1,0002	1,0019	1,0047	1,0090	1,0238	1,0526
r_{r1}	0,0499	0,0996	0,1488	0,1976	0,2946	0,3938
r_{r2}	0,0499	0,0994	0,1479	0,1947	0,2813	0,3564
$\frac{S_r(1+\delta_0^2)}{\pi \delta_0^2}$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0001	1,0019	1,0093
$Z=5$						
Zr_{w1}	0,0505	0,1010	0,1530	0,2060	0,3180	0,4345
Zr_{w2}	0,0498	0,9990	0,1485	0,1975	0,2950	0,3925
$\frac{Z^2 S_w}{\pi \delta_0^2}$	0,9997	0,9997	0,9998	1,0000	1,0010	1,0045
r_{r1}	0,0499	0,0995	0,1484	0,1962	0,2879	0,3739
r_{r2}	0,0499	0,0995	0,1483	0,1961	0,2868	0,3690
$\frac{S_r(1+\delta_0^2)}{\pi \delta_0^2}$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0002
$Z=8$						
Zr_{w1}	0,0503	0,1007	0,1520	0,2032	0,3088	0,4192
Zr_{w2}	0,0498	0,0993	0,1490	0,1985	0,2963	0,3964
$\frac{Z^2 S_w}{\pi \delta_0^2}$	0,9994	0,9987	0,9974	0,9956	0,9910	0,9854
r_{r1}	0,0499	0,0995	0,1483	0,1961	0,2874	0,3715
r_{r2}	0,0499	0,995	0,1483	0,1961	0,2873	0,3713
$\frac{S_r(1+\delta_0^2)}{\pi \delta_0^2}$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

4. Współczynniki uśredniające kręt i energię

Analiza pola prędkości indukowanych przez układy wirowe w oparciu o podstawowe równania mechaniki płynów, umożliwia powiązanie tego pola z układem sił zewnętrznych pole to wywołującym. Równania całkowite pędu, krętu i energii, chociaż nie dostarczają danych odnośnie do rozkładu sił, pozwalają jednak scharakteryzować wypadkową sił, moment obrotowy i moc, a stąd również współczynniki obciążenia naporem, momentem i mocą. Przypisanie określonego rodzajowi sił i określonym wartościom współczynników obciążenia, charakterystycznego dla nich pola prędkości i związanego z tym pola ciśnienia, ma duże znaczenie poznawcze i praktyczne. Co prawda przypadek pola prędkości indukowanych przez układ wirów prostoliniowych nie jest typowy dla pracy pędników, ale ma dużą wartość poznawczą, gdyż pozwala na precyzyjniejszą analizę pola w oparciu o dokładne kształty osłobiwości jąder wirowych.

Przy analizie pola prędkości z punktu widzenia jego powiązania z siłami zewnętrznymi pole to wywołującymi, bardzo przydatne stają się wielkości całkowite — uśredniające niejednorodność tego pola. Takimi wielkościami są prędkości średnie po obwodzie rozpatrzone w poprzednim rozdziale oraz współczynniki wynikające z uśrednienia pędu, krętu lub energii przepływu.

W świetle wcześniej przeprowadzonych prac, najlepiej do analizy pola nadają się wielkości uśredniające kwadraty odchyłek od wartości średnich dla poszczególnych składowych prędkości indukowanych (średnie 2-giego rzędu)

$$\begin{aligned}\bar{z}_r &= \frac{Z}{4b_V^2(\pi - Z\varphi_0)} \int_{\varphi_0}^{\pi/Z} \left(\frac{v_x}{V_0} - \bar{V}_x \right)^2 d\varphi, \\ \chi_r &= \frac{Z}{4b_V^2(\pi - Z\varphi_0)} \int_{\varphi_0}^{\pi/Z} \left(\frac{v_\varphi}{V_0} - \bar{V}_\varphi \right)^2 d\varphi, \\ \rho_r &= \frac{Z}{4b_V^2(\pi - Z\varphi_0)} \int_{\varphi_0}^{\pi/Z} \left(\frac{v_\rho}{V_0} - \bar{V}_\rho \right)^2 d\varphi,\end{aligned}\tag{4.1}$$

gdzie wielkość $\bar{z}_r$ jest związana z pędem, χ_r z krętem a suma $\bar{z}_r + \chi_r + \rho_r$ z energią kinetyczną przepływu.

Wykorzystując wzór definicyjny prędkości średnich (3.1) oraz zależność (2.9) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\chi_r &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{Z}{(\pi - Z\varphi_0)} \int_{\varphi_0}^{\pi/Z} \frac{[1 - r^{2Z} \cos(Z\varphi)]^2 d\varphi}{[1 + r^{2Z} - 2r^Z \cos(Z\varphi)]^2} - \frac{\bar{V}_\varphi^2}{4b_V^2}, \\ \rho_r &= \frac{r^Z}{r^2} \cdot \frac{Z}{(\pi - Z\varphi_0)} \int_{\varphi_0}^{\pi/Z} \frac{\sin^2(Z\varphi) d\varphi}{[1 + r^{2Z} - 2r^Z \cos(Z\varphi)]^2}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Występujące w powyższych wzorach całki, dają się obliczyć podobną metodą jak całka ze wzoru (3.2)

$$\chi_r = \frac{1}{r^2(\pi - Z\varphi_0)|1 - r^{2Z}|} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin A \right) - \rho_r - \frac{\bar{V}_\varphi^2}{4b_V^2}, \quad (4.3)$$

$$\rho_r = \frac{1}{4r^2(\pi - Z\varphi_0)} \left[B - \pi + Z\varphi_0 + \frac{1 + r^{2Z}}{|1 - r^{2Z}|} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin A \right) \right], \quad (4.4)$$

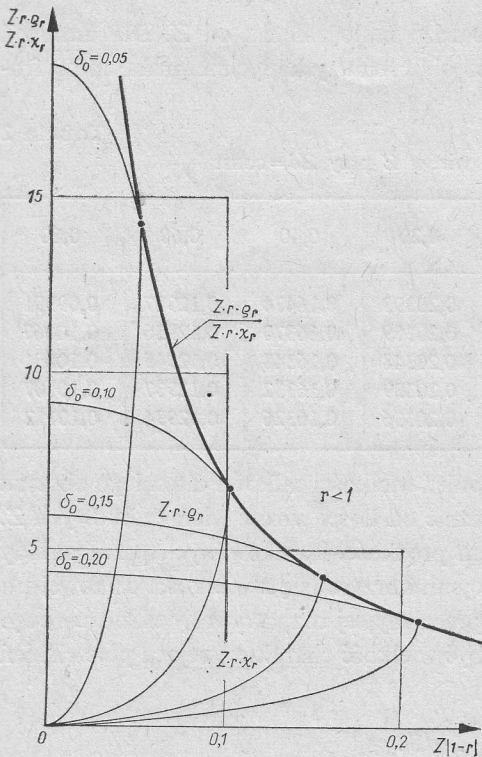
gdzie

$$A = \frac{2r^Z - (1 + r^{2Z}) \cos(Z\varphi_0)}{1 + r^{2Z} - 2r^Z \cos(Z\varphi_0)}, \quad (4.5)$$

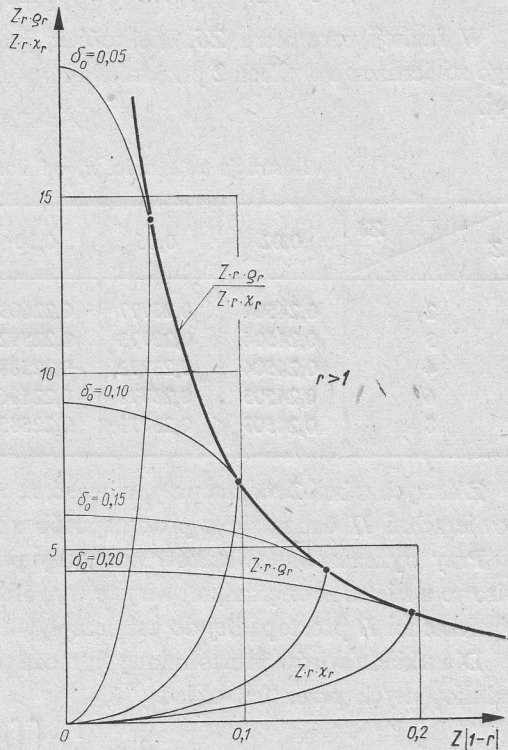
$$B = \frac{2r^Z \sin(Z\varphi_0)}{1 + r^{2Z} - 2r^Z \cos(Z\varphi_0)}.$$

Dla linii $r = \text{const}$ nie przecinających osi, wzory określające χ_r i ρ_r znacznie się upraszczają, a współczynniki χ_r i ρ_r stają się sobie równe: dla $r < 1$

$$\chi_{r1} = \rho_{r1} = \frac{r^{2Z}}{2r^2(1 - r^{2Z})}, \quad (4.6)$$



Rys. 5. Współczynniki uśredniające pole prędkości indukowanych ρ_r i χ_r dla $Z=3$ i $r < 1$



Rys. 6. Współczynniki uśredniające pole prędkości indukowanych ρ_r i χ_r dla $Z=3$ i $r > 1$

dla $r > 1$

$$\chi_{r2} = \rho_{r2} = \frac{1}{2r^2(r^{2Z} - 1)}. \quad (4.7)$$

Na rys. 5 i 6 przedstawiono przebieg wielkości $Z \cdot r \cdot \chi_r$ i $Z \cdot r \cdot \rho_r$ w funkcji parametru $Z\delta = Z|1-r|$, dla kilku wartości δ_0 wyznaczających granicę osobliwości. Rysunki przedstawiają wyniki obliczeń dla $Z=3$, ale w zastosowanym układzie odniesienia dla innych wartości Z krzywe $Z \cdot r \cdot \chi_r$ i $Z \cdot r \cdot \rho_r$ wykazują między sobą minimalne różnice, posiadając identyczny charakter przebiegu.

Dla promieni nie przecinających osobliwości wirów wierzchołkowych współczynniki χ_r i ρ_r tworzą wspólną krzywą zgodnie ze wzorami (4.6) i (4.7), rozdzielając się dla promieni przecinających osobliwości. Współczynnik χ_r szybko maleje przyjmując dla linii $r=1$ wartość minimalną równą 0, a ρ_r rośnie, przyjmując dla r bliskich jedności wartość maksymalną dla danego δ_0 .

Ciekawą własność wykazuje wielkość zdefiniowana jako średnia arytmetyczna współczynników χ_r lub ρ_r , dla odpowiadających sobie promieni równo położonych od środka osobliwości wirów wierzchołkowych ($r=1$), pomnożona przez ilość wirów Z i wartość promienia r oraz dla likwidacji osobliwości punktu $r=1$ przez wielkość $\delta = |1-r|$

$$\kappa_r = \frac{1}{2} Z\delta [(1-\delta)\rho_{r1} + (1+\delta)\rho_{r2}] = \frac{1}{2} Z\delta [(1-\delta)\chi_{r1} + (1+\delta)\chi_{r2}]. \quad (4.8)$$

W funkcji parametru $Z\delta$, wielkość κ_r jest bardzo mało zależna od Z . Dla ilustracji tego stwierdzenia w tabeli 2 przedstawiono wyniki obliczeń uzyskanych na maszynie cyfrowej.

Tabela 2
Ilustracja zależności κ_r od ilości wirów Z przy $Z\delta = \text{const}$

$Z \backslash Z\delta$	0,02	0,05	0,10	0,20	0,40	0,60	0,80
2	0,24504	0,23777	0,22603	0,20393	0,16434	0,12987	0,09991
3	0,24504	0,23773	0,22592	0,20359	0,16370	0,12956	0,10067
4	0,24504	0,23772	0,22588	0,20348	0,16348	0,12945	0,10091
6	0,24503	0,23771	0,22586	0,20339	0,16332	0,12937	0,10107
8	0,24503	0,23771	0,22585	0,20336	0,16326	0,12934	0,10112

Z danych tabeli 2 można przypuszczać, że również wielkości całkowite dla całego obszaru powierzchni Π dadzą się w prosty sposób uzależnić od ilości wirów wierzchołkowych Z .

Przy wyznaczaniu związków pomiędzy polem prędkości indukowanych przez układy wirowe a siłami zewnętrznymi wiry te wywołującymi, korzysta się z wielkości całkowitej po powierzchni Π prostopadłej do osi przepływu i przecinającej rozpatrywany układ wirowy.

Dla układu wirów prostoliniowych może to być wielkość charakteryzująca pole ciśnień indukowanych przez ten układ

$$P_u = \frac{1}{\pi R_M^2} \iint_S \frac{p_0 - p}{\rho V_0^2} dS.$$

Wykorzystując równanie (3.3) oraz wzory definicyjne prędkości średnich i współczyn-

ników uśredniających 2-giego rzędu, po przekształceniach uzyskujemy dla rozpatrywanego układu wirów prostoliniowych wzór

$$P_u = 4b_V^2 \int_{r_r}^{\infty} \left(1 - \frac{Z\varphi_0}{\pi}\right) (\chi_r + \rho_r) r dr + \int_{r_r}^{\infty} \left(1 - \frac{Z\varphi_0}{\pi}\right) \bar{V}_\varphi^2 r dr - 2b_V \int_{r_r}^{\infty} \left(1 - \frac{Z\varphi_0}{\pi}\right) \bar{V}_\varphi r^2 dr. \quad (4.9)$$

Całkowanie w powyższym wzorze należy przeprowadzić z pominięciem osobliwości jąder wirowych i wobec tego wygodnie jest płaszczyznę S rozdzielić na 4 pierścieniowe obszary, których granice wyznaczają osobliwości jąder wirowych:

obszar 1 — ujęty największym i najmniejszym promieniem osobliwości wiru rdzeniowego ($r_{r2} < r < r_{r1}$),

obszar 2 — pomiędzy osobliwościami wiru rdzeniowego i wirów wierzchołkowych ($r_{r1} < r < 1 - r_{w1}$),

obszar 3 — objęty granicami osobliwości wirów wierzchołkowych ($1 - r_{w1} < r < 1 + r_{w2}$),

obszar 4 — pozostała część płaszczyzny S rozciągająca się do nieskończoności ($1 + r_{w2} < r < \infty$).

Granice osobliwości ($Z\varphi_0$) można wyznaczyć z równania (3.8)

$$(Z\varphi_0) = \arccos \frac{r^{2(Z+1)} + r^2(1 + \delta_0^2) - \delta_0^2}{(2 - \delta_0^2)r^{Z+2}}. \quad (4.10)$$

Całki występujące po prawej stronie równania (4.9) dla obszarów nie zawierających osobliwości, dają się rozwiązać w sposób ścisły metodami analitycznymi:

— dla obszaru 2

$$\begin{aligned} \chi_2 = \rho_2 &= 4b_V^2 \int_{r_{r2}}^{1-r_{w1}} \left(1 - \frac{Z\varphi_0}{\pi}\right) \chi_r r dr = 4b_V^2 \int_{r_{r2}}^{1-r_{w1}} \frac{r^{2Z} dr}{2r(1 - r^{2Z})} = \\ &= -\frac{b_V^2}{Z} \ln \left[\frac{1 - (1 - r_{w1})^{2Z}}{1 - r_{r2}^{2Z}} \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

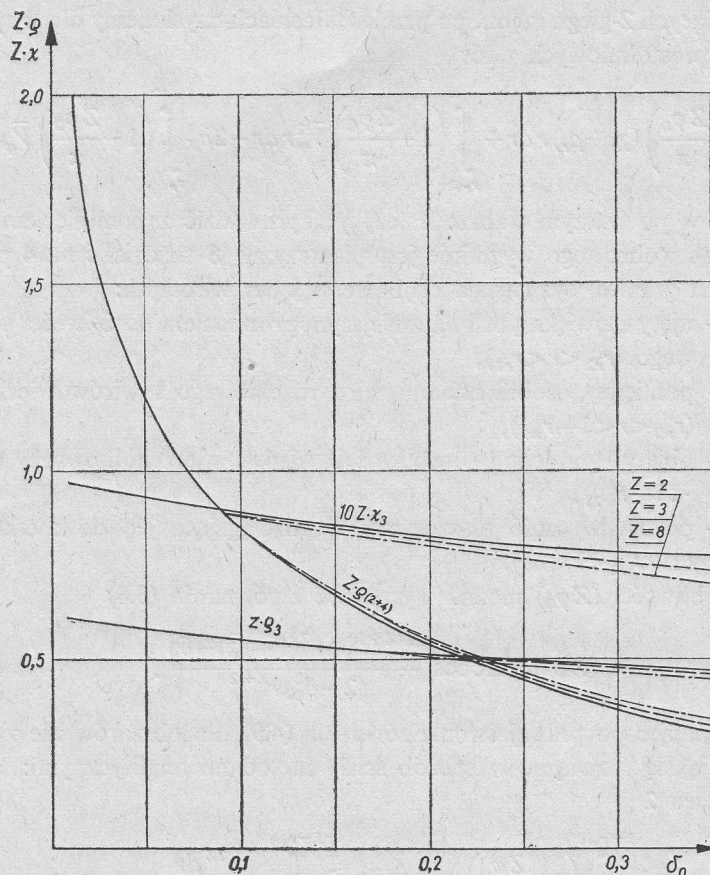
$$\mu_2 = \int_{r_{r2}}^{1-r_{w1}} \left(1 - \frac{Z\varphi_0}{\pi}\right) \bar{V}_\varphi^2 r dr = 4b_V^2 \int_{r_{r2}}^{1-r_{w1}} \frac{dr}{r} = 4b_V^2 \ln \left(\frac{1 - r_{w1}}{r_{r2}} \right), \quad (4.12)$$

$$v_2 = 2b_V \int_{r_{r2}}^{1-r_{w1}} \left(1 - \frac{Z\varphi_0}{\pi}\right) \bar{V}_\varphi r^2 dr = 4b_V^2 \int_{r_{r2}}^{1-r_{w1}} r dr = 2b_V^2 [(1 - r_{w1})^2 - r_{r2}^2], \quad (4.13)$$

— dla obszaru 4

$$\chi_4 = \rho_4 = 4b_V^2 \int_{1+r_{w2}}^{\infty} \left(1 - \frac{Z\varphi_0}{\pi}\right) \chi_r r dr = 4b_V^2 \int_{1+r_{w2}}^{\infty} \frac{dr}{2r(r^2 - 1)} = -\frac{b_V^2}{Z} \ln \left[\frac{(1 + r_{w2})^{2Z} - 1}{(1 + r_{w2})^{2Z}} \right]. \quad (4.14)$$

Pozostałe całki zawierające prędkości średnie, dla obszaru 4 są równe 0.



Rys. 7. Współczynniki uśredniające pole prędkości indukowanych ρ i χ dla obszarów wyznaczonych osłabiwościami jąder wirowych

Na rys. 7 są przedstawione wyniki obliczeń wielkości $Z\chi$ i $Z\rho$ dla obszaru 3 i łącznie dla obszaru 2 i 4. Dla obszaru 1 wielkości $Z\chi$ i $Z\rho$ przyjmują pomijalnie małe wartości, istotne jedynie dla równocześnie dużych δ_0 i małych Z .

Wyniki obliczeń poszczególnych całek występujących po prawej stronie równania (4.9) odpowiednio zmodyfikowane przedstawiono na rys. 8. Są to wielkości:

$$K = Z \int_{r_r}^{\infty} \left(1 - \frac{Z\varphi_0}{\pi}\right) (\chi_r + \rho_r) r dr, \quad (4.15)$$

$$M = \frac{1}{4b_V^2} \int_{r_r}^{\infty} \left(1 - \frac{Z\varphi_0}{\pi}\right) \bar{V}_\varphi^2 r dr, \quad (4.16)$$

$$N = \frac{1}{2b_V^2} \int_{r_r}^{\infty} \left(1 - \frac{Z\varphi_0}{\pi}\right) \bar{V}_\varphi r^2 dr. \quad (4.17)$$

Z przebiegu krzywych na rysunku 8 można stwierdzić, że w układzie związanym z parametrem δ_0 , wielkości K i M mają charakter krzywych logarytmicznych, a N — słabo malejącej funkcji δ_0 .

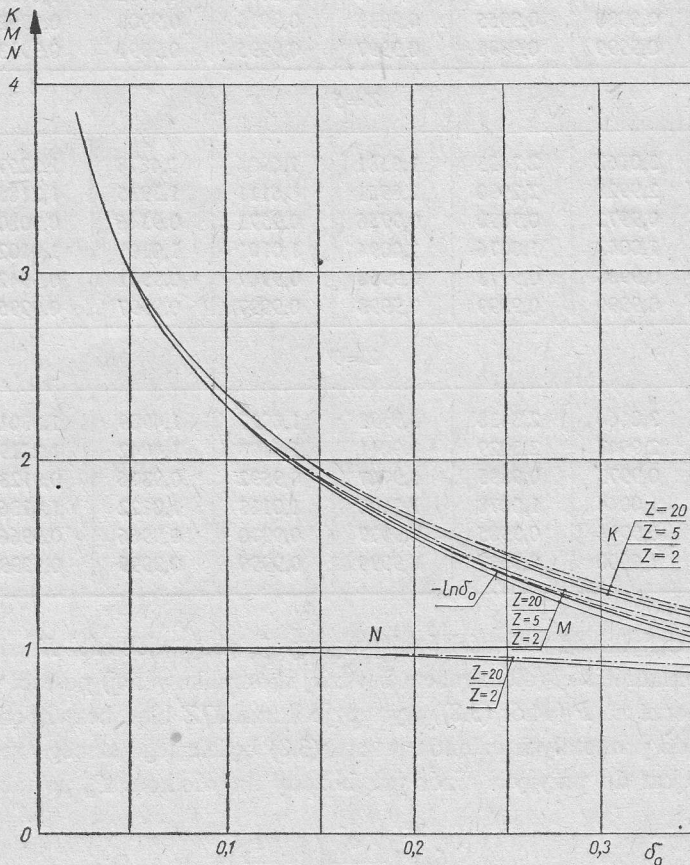
Starano się znaleźć przybliżone postacie wzorów zależnych od δ_0 i Z najlepiej oddających wartości K , M i N , a równocześnie zachowujących charakter zależności ścisłych dla przypadku granicznego $Z = \infty$. Po wielu próbach ustalono postacie wzorów przybliżonych

$$K^* = -(1 + \delta_0^2) \ln \delta_0, \quad (4.18)$$

$$M^* = -\ln \left[\frac{\delta_0 \left[1 + \frac{\delta_0^2}{Z} \left(\frac{1}{1 + \frac{\delta_0^2}{Z}} \right) \right]}{\sqrt{1 + \delta_0^2}} \right], \quad (4.19)$$

$$N^* = \left(1 - \frac{\delta_0^2}{1 + \delta_0^2} - \frac{\delta_0^2}{2Z} \right). \quad (4.20)$$

Dla oceny poprawności powyższych wzorów, w tabeli 3 przedstawiono wyniki obliczeń wykonanych według wzorów ścisłych oraz stosunek wartości ścisłej i przybliżonej.



Rys. 8. Wielkości charakteryzujące pole ciśnień indukowanych przez układy wirów prostoliniowych

Tabela 3

δ_0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
$Z=2$							
K	3,0154	2,3407	1,9524	1,6803	1,4708	1,2992	1,1510
M	2,9864	2,2852	1,8723	1,5769	1,3444	1,1193	0,9757
N	0,9968	0,9873	0,9718	0,9503	0,9228	0,8887	0,8469
K/K^*	1,0041	1,0065	1,0065	1,0039	0,9986	0,9900	0,9767
M/M^*	0,9971	0,9936	0,9900	0,9863	0,9820	0,9757	0,9639
N/N^*	0,9999	0,9997	0,9994	0,9987	0,9970	0,9931	0,9845
$Z=3$							
K	3,0159	2,3421	1,9559	1,6869	1,4820	1,3173	1,1800
M	2,9900	2,9981	1,8857	1,5977	1,3756	1,1949	1,0424
N	0,9970	0,9883	0,9740	0,9544	0,9299	0,9009	0,8675
K/K^*	1,0042	1,0072	1,0083	1,0078	1,0062	1,0038	1,0014
M/M^*	0,9980	0,9955	0,9933	0,9918	0,9908	0,9902	0,9901
N/N^*	0,9999	0,9998	0,9997	0,9995	0,9991	0,9983	0,9932
$Z=5$							
K	3,0162	2,3433	1,9581	1,6906	1,4878	1,3257	1,1918
M	2,9928	2,2990	1,8951	1,6111	1,3935	1,2185	1,0733
N	0,9972	0,9890	0,9756	0,9573	0,9346	0,9080	0,8780
K/K^*	1,0043	1,0076	1,0094	1,0101	1,0101	1,0102	1,0114
M/M^*	0,9988	0,9973	0,9958	0,9947	0,9941	0,9942	0,9953
N/N^*	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9997	0,9995	0,9993
$Z=9$							
K	3,0164	2,3438	1,9593	1,6927	1,4909	1,3301	1,1977
M	2,9947	2,3029	1,9011	1,6193	1,4042	1,2319	1,0895
N	0,9973	0,9895	0,9767	0,9592	0,9376	0,9123	0,8839
K/K^*	1,0044	1,0078	1,0100	1,0113	1,0122	1,0136	1,0164
M/M^*	0,9994	0,9985	0,9977	0,9970	0,9966	0,9966	0,9968
N/N^*	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998

Największe odchyłki od wartości ścisłej występują przy wielkości K , ale zaniechano poszukiwania dokładniejszej (ale zarazem bardziej skomplikowanej) postaci wzoru na K^* . Ponieważ we wzorze na P (wzór (3.8)) występuje iloraz K/Z błąd bezwzględny przybliżenia w stosunku do pozostałych członów wzoru (3.8) będzie tego samego rzędu.

Reasumując, jest do przyjęcia wzór przybliżony na wielkość P_u postaci

$$P_u \approx -\frac{4b_v^2}{Z} (1 + \delta_0^2) \ln \delta_0 - 4b_v^2 \ln \frac{\delta_0 \left[1 + \frac{\delta_0^2}{Z} \left(1 + \frac{1}{Z} \right) \right]}{\sqrt{1 + \delta_0}} - 2b_v^2 \left(1 - \frac{\delta_0^2}{1 + \delta_0^2} - \frac{\delta_0^2}{2Z} \right), \quad (4.21)$$

który dla warunku granicznego $Z = \infty$ sprowadza się do wzoru

$$P_{u_{Z=\infty}} = -4b_V^2 \ln \frac{\delta_0}{\sqrt{1+\delta_0^2}} - \frac{2b_V^2}{1+\delta_0^2}, \quad (4.22)$$

ślusznego również dla układu $Z = \infty$ wirów śrubowych.

Jak można sądzić z rysunków 2 i 3 zastąpienie rzeczywistych kształtów osłobiwości wirów, osłobiwościami w kształcie odpowiednich walców kołowych nie powinno wpłynąć zasadniczo na wielkości całkowite K , M i N . Zabieg taki ma duże znaczenie praktyczne dla przypadku układów, gdzie wyznaczenie dokładnego kształtu osłobiwości wymaga bardzo pracochłonnych obliczeń.

Jak stwierdzono w rozdziale 2, osłobiwości wirów wierzchołkowych można zastąpić walcem kołowym o promieniu $r_w = \delta_0/Z$, a wir rdzeniowy walcem kołowym o promieniu $r_z = \delta_0/\sqrt{1+\delta_0^2}$.

Wzory wyznaczające wielkości K , M i N pozostają te same, zmienia się w nich jedynie wielkość $Z\varphi_0$ wyznaczona dla kształtu ścisłego wzorem (4.10). Dla osłobiwości wiru wierzchołkowego o kształcie kołowym wzór na wielkość $Z\varphi_0$ będzie wynikał z zależności geometrycznych

$$Z\varphi_0 = Z \arccos \frac{1+r^2 - \left(\frac{\delta_0}{Z}\right)^2}{2r}. \quad (4.23)$$

Tabela 4

δ_0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
$Z=2$							
$K/K_{\text{koł}}$	0,9998	0,9992	0,9977	0,9953	0,9913	0,9849	0,9740
$M/M_{\text{koł}}$	1,0000	0,9997	0,9987	0,9961	0,9903	0,9786	0,9560
$N/N_{\text{koł}}$	0,9997	0,9985	0,9970	0,9943	0,9904	0,9835	0,9750
$Z=3$							
$K/K_{\text{koł}}$	0,9999	0,9997	0,9991	0,9983	0,9972	0,9954	0,9930
$M/M_{\text{koł}}$	1,0000	1,0000	0,9997	0,9991	0,9981	0,9958	0,9913
$N/N_{\text{koł}}$	0,9999	0,9995	0,9987	0,9976	0,9962	0,9945	0,9918
$Z=5$							
$K/K_{\text{koł}}$	1,0000	1,0000	1,0001	1,0002	1,0004	1,0007	1,0013
$M/M_{\text{koł}}$	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9996	0,9985
$N/N_{\text{koł}}$	0,9999	0,9998	0,9995	0,0001	0,0087	0,0081	0,9975
$Z=9$							
$K/K_{\text{koł}}$	1,0000	1,0002	1,0007	1,0013	1,0023	1,0038	1,0056
$M/M_{\text{koł}}$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9996
$N/N_{\text{koł}}$	1,000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9995	0,9992	0,9991

Wyniki porównawcze pomiędzy kształtem naturalnym a kołowym są przedstawione w tabeli 4. Można z nich sądzić, że przyjęcie osłowności w kształcie walca kołowego dla wielkości całkowitych odnoszących się do całego pola przekroju poprzecznego K , M i N wpływa minimalnie na wyniki dając błędy większe od 1% jedynie dla równocześnie małych Z i dużych δ_0 ($Z=2$ i $\delta_0>0,25$).

Przedstawione wyżej wyniki analizy posiadają dużą wartość użytkową przy szczegółowej analizie pola prędkości indukowanych przez układy wirów odpowiadające przepływowi za pędnikiem śrubowym, dostarczając wartości granicznych ($\tan \beta = \infty$) odnośnie do wartości średnich, współczynników uśredniających oraz danych odnośnie do dokładnego kształtu osłowności wirów i możliwych w tym względzie uproszczeń modelu obliczeniowego.

Praca wpłynęła do Redakcji w styczniu 1973 r.

Literatura

- [1] Bronsztein, Semiendiajew, *Sprawocznik po matematyce*. Izd. „Nauka”, Moskwa 1964.
- [2] I. M. Ryżyk, I. S. Gradsztejn, *Tablice całek, sum szeregów i iloczynów*. PWN, Warszawa 1964.
- [3] T. Koronowicz, *Określenie pola prędkości wiru o kształcie prawidłowej linii śrubowej*. Biuletyn IMP PAN, nr 581, 1968.
- [4] T. Koronowicz, *Analiza pola prędkości układu wirów śrubowych*. Biuletyn IMP PAN, nr 642, 1969.

Анализ поля скоростей, индуцированных избранными системами прямолинейных вихрей

Резюме

В работе проведен анализ поля скоростей и давлений, индуцированных системой бесконечно длинных прямолинейных вихрей, состоящей из $Z > 2$ вершинных вихрей с циркуляцией Γ/Z , равномерно расположенных на кольцевом цилиндре, и из единичного аксиального вихря с циркуляцией Γ , противоположного направления, расположенного в оси этого цилиндра.

Эту систему можно считать предельным случаем систем винтообразных вихрей, представляющих поле скоростей и давлений, индуцированных за винтовым двигателем, т.е. случаем, когда шаг винтовой линии принимает бесконечно большое значение.

В работе определяются подробные формулы, описывающие поле скоростей и давлений, индуцированных вихревой системой и формулы, описывающие форму особенностей вихревых ядер. Форма особенностей вихревых ядер определяется с использованием свойств реальных жидкостей, т.е. образование поверхностей раздела в местах, в которых давление достигает значения критического давления.

Произведен подробный анализ поля скоростей и давлений на основе точной формы особенностей вихревых ядер, а также на основе упрощенной формы (кольцевое сечение).

Результаты анализа, относящегося к форме особенностей вихревых ядер и возможных в этом отношении упрощений расчетной модели, доставляют оригинальные данные, особенно пригодные при анализе поля скоростей, индуцированных за винтовым двигателем.

Analysis of the Velocity Field Induced by a Selected Straight-Lined Vortex System

Summary

Analysis of the velocity and pressure field induced by a system of infinitely long straight-lined vortices was carried out, the system of vortices consisting of $Z \geq 2$ top vortices of Γ/Z circulation, distributed evenly over a circular cylinder, and a single axial vortex of Γ circulation and opposite rotation direction, located on the cylinder axis.

The above system can be regarded as a limit case of the helical vortex system representing a velocity and pressure field induced behind a helical propeller, this limit being attained when the pitch of the helix becomes infinite.

Detailed formulas describing the velocity and pressure field induced by the vortex system were derived together with formulas describing the shape of the vortex kernel singularities, this shape being determined on the base of the real liquid behaviour—formation of a dividing surface in spots where the pressure value becomes critical.

Based on the exact shape of vortex kernel singularities as well as on a simplified shape (circular cross-section), a detailed analysis of the velocity and pressure field was carried out.

Results of the analysis regarding the shape of the vortex kernel singularities and possible simplifications of the model for calculations give genuine data which are particularly useful when analyzing the velocity field induced behind a helical propeller.