

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH

PRACE
INSTYTUTU MASZYN
PRZEPLYWOWYCH

TRANSACTIONS
OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

62-63

WARSZAWA—POZNAŃ 1973

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

PRACE INSTYTUTU MASZYN PRZEPŁYWOWYCH

poświęcone są publikacjom naukowym z zakresu teorii i badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki i termodynamiki przepływów, ze szczególnym uwzględnieniem problematyki maszyn przepływowych

*

THE TRANSACTIONS OF THE INSTITUTE OF FLUID-FLOW MACHINERY

exist for the publication of theoretical and experimental investigations of all aspects of the mechanics and thermodynamics of fluid-flow with special reference to fluid-flow machinery

KOMITET REDAKCYJNY - EXECUTIVE EDITORS
KAZIMIERZ STELLER - REDAKTOR - EDITOR
JERZY KOŁODKO · JÓZEF ŚMIGIELSKI
ANDRZEJ ŻABICKI

REDAKCJA - EDITORIAL OFFICE
Instytut Maszyn Przepływowych PAN, 80-952 Gdańsk,
skr. pocztowa 621, Gdańsk-Wrzeszcz, ul. Gen. Józefa Fiszer 14, tel. 41-12-71

Copyright
by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1973

Printed in Poland

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE - ODDZIAŁ W POZNANIU

Nakład 410+90 egz.	Oddano do składania 19 XII 1972 r.
Ark. wyd. 19,5. Ark. druk. 15,375+2 wkl.	Podpisano do druku 29 IX 1973 r.
Pap. druk. sat. kl. V, 70 g	Druk ukończono w październiku 1973 r.
Nr zam. 814/155	D-15/787 Cena zł 58,-

DRUKARNIA UNIwersytetu im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Czwarte Seminarium poświęcone zagadnieniom
MAGNETOHYDRODYNAMIKI STOSOWANEJ
I GAZODYNAMIKI WYSOKICH TEMPERATUR

Jena, maj 1972

Čtvrtý Seminář o
APLIKOVANÉ MAGNETOHYDRODYNAMICE
A DYNAMICE PLYNU ZA VYSOKÝCH TEPLOT

Jena, květen 1972

Viertes Arbeitsseminar über Fragen
DER ANGEWANDTEN MAGNETOHYDRODYNAMIK
UND HOCHTEMPERATUR-GASDYNAMIK

Jena, Mai 1972

Fourth Seminar on
APPLIED MAGNETOHYDRODYNAMICS
AND HIGH TEMPERATURE GASDYNAMICS

Jena, May 1972

Четвертый Семинар по
ПРИКЛАДНОЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИКЕ
И ГАЗОДИНАМИКЕ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

Ена, май 1972 г.

HANS-BURKHARD VALENTINI

Jena*

Ein analytisch berechenbares Beispiel für die Strömung eines Plasmas durch einen magneto-hydrodynamischen Kanal mit Ringquerschnitt

Für Untersuchungen von Vorgängen in magneto-hydrodynamischen Kanälen ist es nützlich, die Profile der Strömungsgeschwindigkeit und der elektrischen Stromdichte für einige vereinfachte, weitgehend analytisch berechenbare Beispiele zu kennen.

Im folgenden wird die stationäre, axiale Strömung eines schwach ionisierten Gases durch einen Ringkanal mit radialem Magnetfeld behandelt (s. Abb. 1). Die Strömungsgeschwindigkeit soll die halbe Schallgeschwindigkeit nicht übersteigen. Man darf in diesem

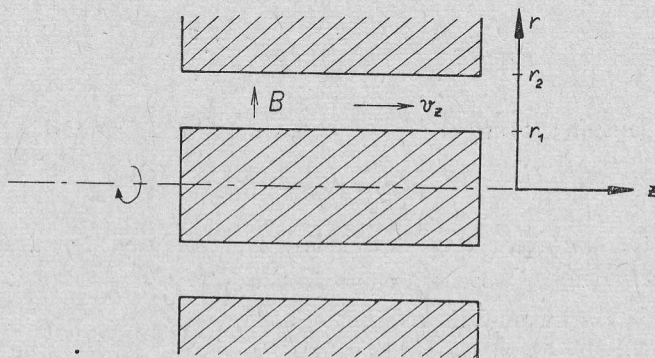


Abb. 1

Fall noch näherungsweise die Kontinuitätsgleichung und die Bewegungsgleichung für ein inkompressibles Medium benutzen [1]. Die magnetische Reynolds-Zahl sei klein gegen Eins, so daß man das durch den im Plasma induzierten elektrischen Strom erzeugte Magnetfeld vernachlässigen darf. Außerdem wird vom Hall-Effekt abgesehen. Die Temperatur, die Zähigkeit η und die elektrische Leitfähigkeit σ des Plasmas werden als räumlich und zeitlich konstant betrachtet. Die Rechnungen vervollständigen die Ergebnisse von [2] und gelten für Abschnitte eines magnetohydrodynamischen Kanals, deren Längen klein bleiben gegenüber den charakteristischen Längen für die Änderungen der Tempera-

* Zentralinstitut für Elektronenphysik der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Institutsteil VI — Magnetoplasmadynamik, Jena

turen von Neutralgas und Elektronengas. Als Ausgangsgleichungen dienen die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

und die Bewegungsgleichung

$$\rho (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v} = -\operatorname{grad} p + \eta \Delta \mathbf{v} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

das Ohmsche Gesetz

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3)$$

und von den Maxwell'schen Gleichungen nur

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

Es sind ρ die Dichte und p der Druck des Plasmas. Die magnetische Induktion $\mathbf{B}$ besitze nur eine radiale Komponente B . Mit den Ausgangsgleichungen ist dann eine Strömung verträglich, in der die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}$ verschwindet, die Strömungsgeschwindigkeit $\mathbf{v}$ nur eine axiale Komponente v_z und die elektrische Stromdichte $\mathbf{j}$ nur eine azimutale Komponente j_ϕ besitzt.

Gl. (4) ergibt $B(r) = B_1 \cdot r_1/r$ mit $B(r_1) = B_1$. Aus (3) folgt $j_\phi = \sigma v_z B$, aus (1) $\partial v_z / \partial z = 0$ und damit $(\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v} = 0$ und aus (2) $\partial p / \partial r = 0$ und

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \sigma B_1^2 r_1^2 \cdot \frac{v_z}{r^2}. \quad (5)$$

Die Differentialgleichung (5) ist in diesem Fall separierbar. Der Druck

$$p(z) = p(0) - \gamma z \quad (6)$$

fällt in dieser Näherung linear längs des Kanals ab, dabei stellen $\gamma = [p(l) - p(0)]/l$ und l die Länge des betrachteten Abschnittes des Kanals dar. Der Ausdruck (6) fehlt in [2].

Führt man die Hartmann-Zahl $a = (\sigma B_1^2 r_1^2 / \eta)^{1/2}$,

die charakteristische Geschwindigkeit $v_0 = \gamma r_1^2 / 4\eta$

und die normierten Größen $x = r/r_1$, $y = v_z/v_0$

ein, so folgt aus (5) eine inhomogene Eulersche Differentialgleichung

$$x^2 y'' + x y' - a^2 y + 4x^2 = 0. \quad (7)$$

Die Randbedingungen für (7) lauten

$$y = 0 \text{ für } x = 1 \text{ und } x = r_2/r_1 = x_2. \quad (8)$$

Für die rein hydrodynamische Strömung, d.h. $a = 0$, ist die Lösung von (7) bekannt [3]. Man erhält durch Integration sofort

$$y(x) = c_0 \cdot \ln x - x^2 + 1 \quad (9)$$

mit

$$c_0 = (x_2^2 - 1) / \ln x_2.$$

Als Lösung im Fall $a > 0$ und $a \neq 2$ ergibt sich

$$y(x) = c_1 \cdot x^a - c_2 \cdot x^{-a} - c_3 \cdot x^2, \quad (10)$$

wobei

$$c_1 = c_3 \cdot \frac{x_2^{2+a} - 1}{x_2^{2a} - 1}, \quad c_2 = c_3 \cdot \frac{x_2^{-a} - 1}{1 - x_2^{-2a}}, \quad c_3 = \frac{1}{1 - (a/2)^2}$$

bedeuten. Für den Fall $a=2$ erhält man

$$y(x) = c_4 \cdot (x^2 - x^{-2}) - x^2 \cdot \ln x \quad (11)$$

mit

$$c_4 = x_2^2 \cdot \ln x_2 / (x_2^2 - x_2^{-2}).$$

Die Lösung von (7) für diesen Fall fehlt in [2].

Der Ort des Maximums der Strömungsgeschwindigkeit läßt sich aus $dy/dx=0$ berechnen. Für den gesamten Fluß Q durch den Ringkanal gilt

$$Q = 2\pi r_1^2 v_0 \cdot q(a, x_2) = (\pi/2)(\gamma/\eta) r_1^4 q$$

und für die über den Querschnitt gemittelte Strömungsgeschwindigkeit

$$\bar{v} = v_0 q / (x_2^2 - 1). \quad (12)$$

Das Integral

$$q(a, x_2) = \int_1^{x_2} y(x, a) x dx$$

ergibt sich zu

$$q = \frac{1}{4} \left[x_2^4 - 1 - \frac{(x_2^2 - 1)^2}{\ln x_2} \right] \quad \text{für } a=0,$$

$$q = \left[\frac{(x_2^{2a} + 1)[(2-a)x_2^4 - (2+a)] + 4ax_2^{2+a} - 4(x_2^4 - 1) - x_2^4 - 1}{(x_2^{2a} - 1)(2+a)(2-a)} - \frac{x_2^4 - 1}{4} \right] \cdot \frac{1}{(1 - (a/2)^2)}$$

für $a > 0$, $a \neq 2$ und

$$q = \frac{x_2^4 - 1}{16} - \frac{x_2^4 \cdot \ln^2 x_2}{(x_2^4 - 1)} \quad \text{für } a=2.$$

Die Durchflußmenge wächst danach stark mit wachsendem r_2 und wachsendem r_1 an.

Führt man noch $j_0 = \sigma v_0 B_1$ ein, so folgt für die normierte Ringstromdichte $j_\phi/j_0 = y(x)/x$.

In Abb. 2 ist das Geschwindigkeitsprofil $v_z/v_0 = y(x)$ für $x_2=2$ mit der Hartmann-Zahl a als Parameter dargestellt worden. Die Bremsung der Strömung durch die innere Reibung bewirkt, daß das Maximum der Strömungsgeschwindigkeit für $a=0$ näher an der Innenwand des Ringkanals liegt als an der Außenwand. Die Bremsung der Strömung nimmt mit wachsendem a zu. Das Maximum der Strömungsgeschwindigkeit wandert nach außen, da diese Bremsung nach (9) mit wachsendem Abstand von der Achse schwächer wird. Außerdem nimmt bei gleichbleibendem v_0 die maximale Strömungsgeschwindigkeit und die Durchflußmenge ab.

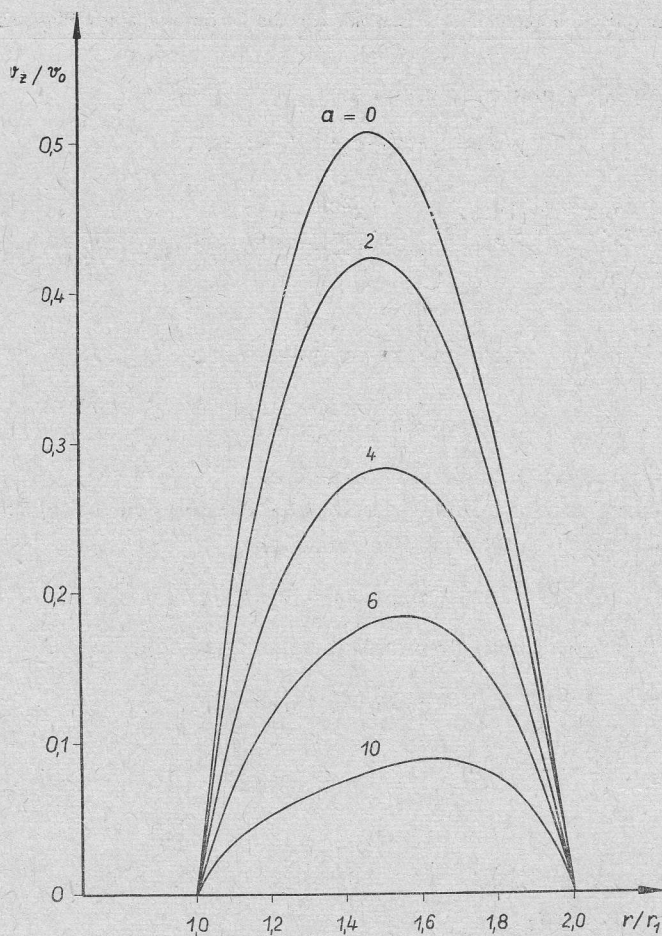


Abb. 2

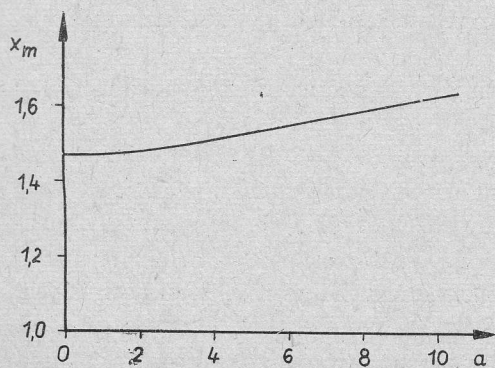


Abb. 3

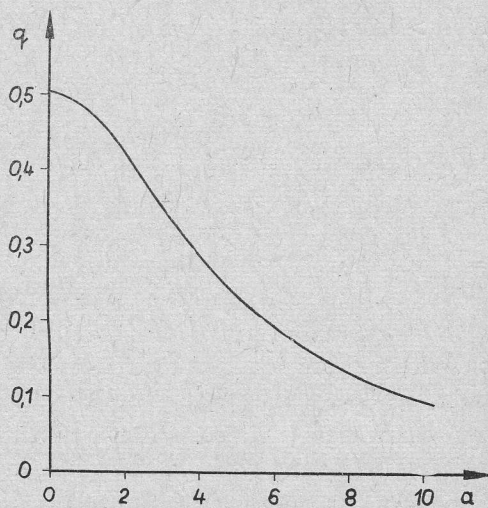


Abb. 4

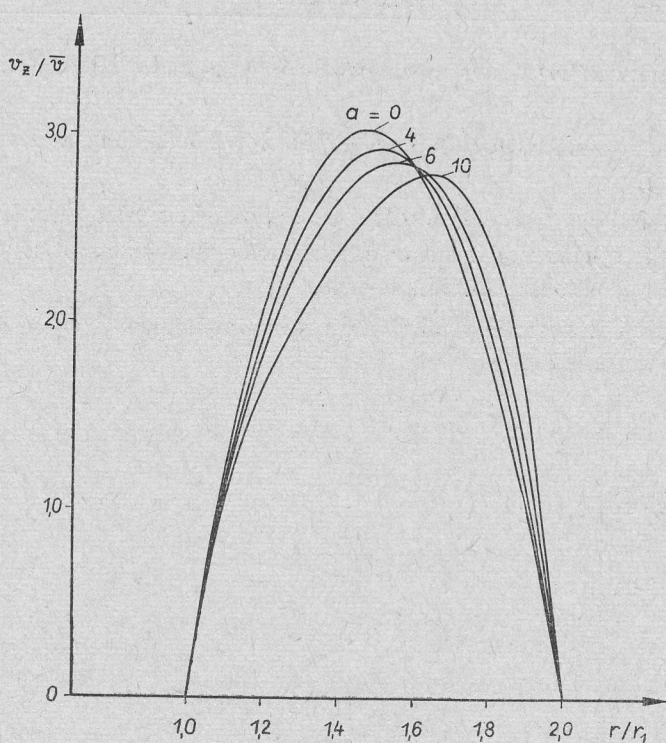


Abb. 5

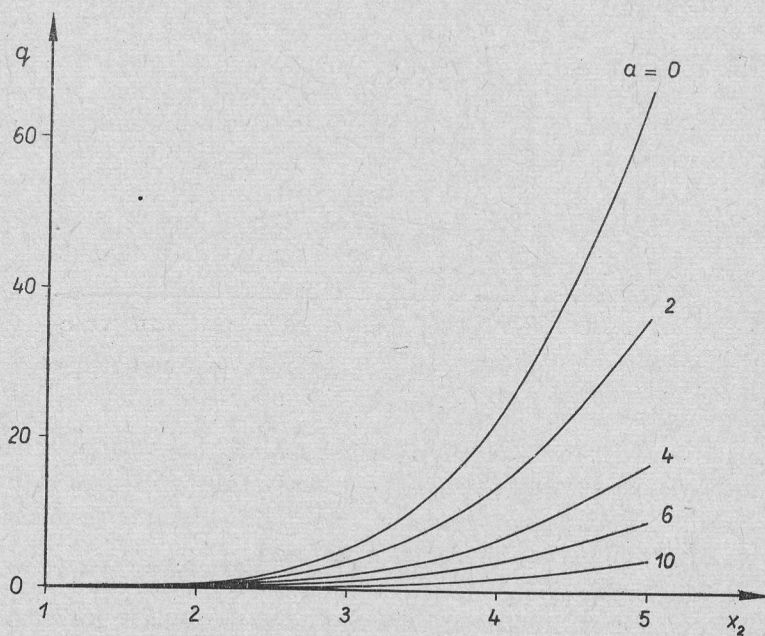


Abb. 6

Abbildung 3 zeigt den Ort x_m der maximalen Strömungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von a für $x_2=2$.

In Abb. 4 ist die normierte Durchflußmenge q für $x_2=2$ in Abhängigkeit von a graphisch dargestellt worden.

Abbildung 5 gibt das auf die mittlere Geschwindigkeit bezogene Strömungsprofil $v_z/\bar{v}=y \cdot (x_2^2-1)/q(a, x_2)$ für $x_2=2$ mit a als Parameter an. Diese Darstellung entspricht dem Fall konstant gehaltener Durchflußmenge.

In Abb. 6 ist die normierte Durchflußmenge q in Abhängigkeit von x_2 mit a als Parameter dargestellt worden.

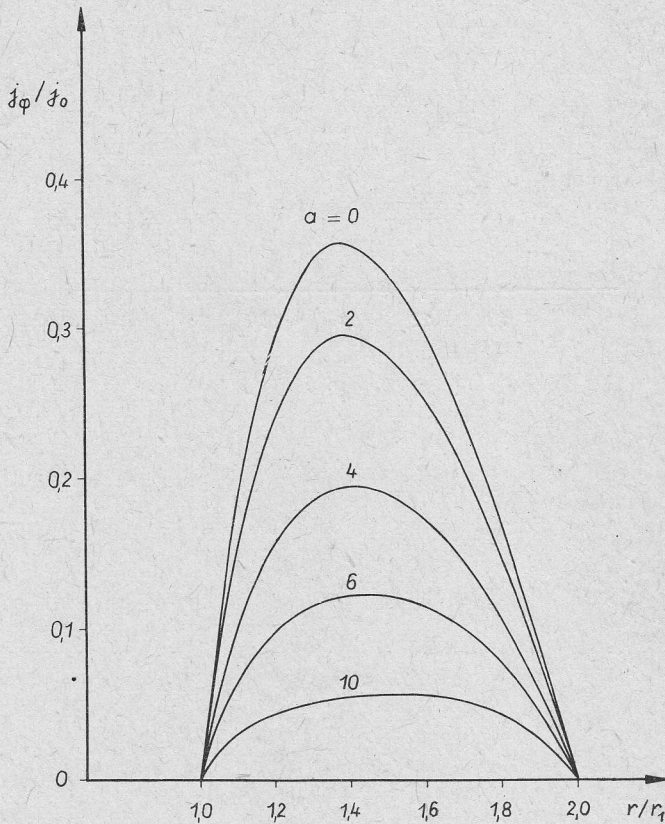


Abb. 7

Abbildung 7 zeigt das Profil für die Dichte des Ringstromes $j_\phi/j_0=y(x)/x$ für $x_2=2$ und konstantes j_0 mit a als Parameter im gleichen Maßstab wie in Abb. 2. Das Profil der Ringstromdichte verläuft etwas flacher und besitzt das Maximum etwas näher an der Innenwand als das Profil der Strömungsgeschwindigkeit.

Die Berücksichtigung des Hall-Effektes in der Berechnung der Strömung durch einen magneto-hydrodynamischen Ringkanal erfordert einen wesentlich größeren mathematischen Aufwand. Der Hall-Effekt, führt zum Auftreten axialer und radialer Kompo-

nenten der elektrischen Feldstärke und der elektrischen Stromdichte und zu einer azimuthalen Komponente der Strömungsgeschwindigkeit. Für konstante elektrische Feldstärke und kleine Hall-Parameter, d.h. $\omega\tau \ll 1$, lassen sich die Rechnungen noch analog zum Fall $\omega\tau = 0$ durchführen. Ergänzt man das Gleichungssystem (1), ..., (4) durch $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, $\text{div } \mathbf{j} = 0$ und auf der linken Seite von (3) durch den Hall-Term $(\omega\tau/B)(\mathbf{j} \times \mathbf{B})$, so läßt sich außerdem noch leicht zeigen, daß Änderungen der azimuthalen Stromdichte und der azimuthalen Strömungsgeschwindigkeit längs des Kanals zu Quellen des elektrischen Feldes im Plasma führen. In [4] ist für einen Hall-Generator im Leerlauf abgeleitet worden, daß eine Ladungstrennung hauptsächlich in einer dünnen Schicht am Eingang und am Ausgang des Kanals auftritt. Die Elektronen gewinnen in dem im Plasma entstehenden elektrischen Feld Energie, wodurch sich die Temperatur und die Dichte des Elektronengases und damit auch die elektrische Leitfähigkeit des Plasmas räumlich ändern und weitere Quellen des elektrischen Feldes auftreten können.

Literatur

- [1] A. Sommerfeld, *Vorlesungen über theoretische Physik*. Bd. II, Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig K. -G., Leipzig 1954.
- [2] W. Rosenbaum, L. Rothhardt, *Prace IMP*, Nr. 46 (1969) 103.
- [3] K. O. Bennett, J. E. Myers, *Momentum, heat and mass transfer*. McGraw-Hill Book Co., New York, London, Toronto 1962.
- [4] G. Helms, W. Ebert, *Prace IMP*, Nr. 34 (1967) 57.

Analitycznie obliczalny przykład przepływu plazmy przez kanał magnetohydrodynamiczny o przekroju pierścieniowym

Streszczenie

Obliczono rozkłady prędkości przepływu i gęstości prądu elektrycznego dla poddźwiękowego przepływu plazmy w pierścieniowym kanale, w obecności pola magnetycznego skierowanego promieniowo.

An Analytically Calculable Example of Plasma Flow through the Magnetohydrodynamic Channel of Annular Cross-Section

Summary

The distributions have been calculated of the flow velocity and electric current density for a subsonic flow of plasma in an annular duct, in the presence of the magnetic field directed radially.

Аналитически определяемый пример течения плазмы через МГД канал кольцевого поперечного сечения

Резюме

Рассчитано распределение скоростей течения и плотностей электрического тока для дозвукового течения плазмы в кольцевом канале в присутствии магнитного поля, направленного радиально.