

Pięć wykładów ze współczesnej termomechaniki płynów

Wydanie Drugie, Uzupełnione

skrypt dla studentów IZK

Skrypt dostępny na stronie
www.imp.gda.pl/struktura/O2/Z3/publications
jako plik: pięćwykładów.pdf

Janusz Badur

Zakład Konwersji Energii
Ośrodek Termomechaniki Płynów
Instytut Maszyn Przepływowych
Polskiej Akademii Nauk
jb@imp.gda.pl

Gdańsk 2005

© Copyright by Janusz Badur 2005

Wszystkim współpracownikom, którzy swoimi cennymi uwagami przyczynili się do poprawy i uzupełnienia pierwszego wydania składam, tą drogą, serdeczne podziękowania. W szczególności dziękuję Panom: Michał Karcz, Robert Kucharski, Sebastian Kowalczyk, Marcin Lemański, Adam Wiśniewski, Sławomir Golec, Witold Zakrzewski.

Gdańsk, 14 listopad 2005, J.Badur

Spis treści

1	Wykład pierwszy – Przedmiot TermoMechaniki Płynów	5
1.1	Inżynierskie Zastosowania Komputerów a Termomechanika Płynów	5
1.2	Numeryczna forma równań bilansu masy, pędu i energii	7
1.3	Inżynierskie odpowiedniki lokalnych równań bilansu masy, pędu i energii	11
1.3.1	Bilans masy	11
1.3.2	Bilans pędu	14
1.3.3	Bilans energii	16
1.3.4	3D versus 0D	18
2	Wykład drugi – Sprężyste Własności Płynów Roboczych	21
2.1	Woda, Para, Powietrze, Spaliny jako nośniki energii użytecznej	21
2.2	Diagram pracy Watta $p - v$, diagram ciepła Belpaire’a $T - s$.	23
2.3	Pierwsza Zasada Termodynamiki Płynów Sprężystych	26
2.4	Cztery Szczególne Przemiany	27
2.5	Przemiana Politropowa	35
2.6	Charakterystyczny Diagram Przemian Termodynamicznych (dla gazu doskonałego)	36
3	Wykład trzeci – Przepływy Płynów Roboczych z Cykliczną Wymianą	39
3.1	Sposoby wykorzystania czynnika roboczego	39
3.2	Przepływ z pobieraniem ciepła na grzanej ścianie	43
3.3	Przepływ z pobieraniem pracy na ruchomej ścianie	45
3.4	Rodzaje obiegów czynnika roboczego	47
4	Wykład czwarty – Przepływy z przemianą fazową czynnika roboczego	59
4.1	Praca ukryta i ciepło ukryte przemiany fazowej – sprawny sposób akumulowania energii sprężystej czynnika roboczego . .	59
4.2	Przepływy z przemianą fazową indukowaną termicznie	62

4.3	Obieg Carnota w obszarze dwufazowym	66
4.4	Siłownia Parowa Rankine’a	68
4.5	Metody zwiększania sprawności obiegu Rankine’a	70
4.6	Obieg Lindego w chłodziarce	77
5	Wykład piąty – Przepływy czynnika roboczego ze spalaniem	79
U	Uzupełnienia	93
U.1	Uzupełnienia Wykładu Pierwszego	93
U.1.3	Wyprowadzenie równań bilansu masy, pędu i energii . .	93
U.1.4	Równania konstytutywne i modelowanie cech fizycznych oraz domknięć płynu roboczego	150
U.1.10	Szczegółowe wyprowadzenie bilansu energii w postaci inżynierskiej ($3D \rightarrow 0D$)	198
U.1.11	Bezindeksowy (absolutny) zapis Gibbsa	242
	Literatura i Bibliografia Przedmiotu	251

Wykład 1

Przedmiot TermoMechaniki Płynów

„...Już na samym wstępie muszę was ostrzec, że jeśli nie macie daru jasnowidzenia, wiele się ode mnie nie nauczycie. Książki też daleko was nie zaprowadzą...” Harry Potter i więzień Azkabanu, tłumaczenie: A. Polkowski, Media Rodzina, 2001, str. 112

1.1 Inżynierskie Zastosowania Komputerów a Termomechanika Płynów

Droga Młodzieży.

Wyrażając wdzięczność Dziekanowi Wydziału Mechanicznego za powierzenie mi zaszczytnego zadania zapoznania Państwa z przedmiotem termomechaniki płynów, po raz kolejny staję przed Wami pełen pokory i obaw.

Moja pokora bierze się z faktu, iż przede mną ten przedmiot wykładali niezrównani badacze wśród których *James Clerk Maxwell*¹, *Robert Gustaw Kirchhoff*² i *Władysław Natanson*³ należą do moich ulubionych wzorów. Sto pięćdziesiąt lat temu, być może nawet dokładnie w miejscu, w którym się teraz znajdujemy Termodynamik Wszechczasów, koszalinianin *Rudolf Clau-*

¹J.C. MAXWELL, *Matter and Motion*, London 1876, *Theory of Heat*, London 1877

²R.G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik*, Leipzig, 1876

³W. NATANSON, *Wstęp do Fizyki Teoretycznej*, W-wa , 1890, (patrz. J.BADUR, J. MIKIELEWICZ, Władysław Natanson – prekursor Rozszerzonej Termodynamiki, *Transactions IFFM*, **100**, 177-193, 1996

*sius*⁴ współtworzył epokowe pojęcia takie jak: entropia właściwa i Druga Zasada Termodynamiki.

Moja obawa wypływa stąd, iż do wyłożenia przedmiotu, który jest skodyfikowany w tysiącach monografi, setkach tysięcy skryptów i milionach artykułów mam tylko pięć krótkich godzin. Czego na pewno można się spodziewać to tego, iż w ciągu pięciu godzin nie zdążę państwa zanudzić a jedynie opowiedzieć, w formie prelekcji, o głównych zadaniach naszego przedmiotu.

Trzeba abyście państwo wiedzieli, iż termomechanika, będąc nie polubownym złożeniem mechaniki Newtonowskiej i termodynamiki Clausiusa, dopiero powstaje. Nasz wykład, w pewnym sensie, jest pionierski a państwo jesteście pierwszymi słuchaczami i świadkami *in statu nascendi*. Przymiotnik „nie polubowne” niestety musi być dodany. Bierze się on stąd, iż mechanika (Newtona) i termodynamika klasyczna (Clausiusa), ciągle są widziane jako osobno egzystujące branże wiedzy, mimo, iż badacze przyznają prywatnie, że w większości przypadków występujących w technice, mechaniki (bilansu pędu) od termodynamiki (bilansu energii) oddzielić się nie da. Dopiero komputeryzacja życia codziennego, techniki, przemysłu, niemalże każdego warsztatu pracy wymusiła ujednolicenie pojęć i podejść. Niechciany mariaż mechaniki i termodynamiki, dzięki komputeryzacji, stał się faktem.⁵

Jaka jest, a w zasadzie, jaka za 5-10 lat będzie rola kierunku IZK w Ter-

⁴patrz: A. RASMUS, J. BADUR, *Koszalinianin Rudolf Clausius Termodynamikem Wszechczasów.*, Głos Koszaliński, 1997 str 1-16.

⁵Dla badaczy zajmujących się *Numeryczną Dynamiką Płynów* (angielskie CFD – Computational Fluid Dynamics), która z natury łączy trójwymiarowe (3D) równania bilansu masy, pędu i energii w jeden układ podstawowy, wyjściowy do dyskretyzacji i numerycznego rozwiązania, TermoMechanika jest naturalnym następstwem komputeryzacji. W latach 1970-1980 CFD doznało burzliwego rozwoju. Od początkowo rozwijanej Metody Różnic Skończonych, poprzez jej porzucenie, długi flirt z Metodą Elementów Skończonych, CFD doszło w latach dziewięćdziesiątych do Metody Objętości Skończonych, która dziś opanowała większość kodów komercyjnych.

Dla badaczy zajmujących się *Numeryczną Mechaniką Przepływów* (angielskie CFM – Computational Flow Mechanics), używających bilansu masy, pędu i energii w wersji algebraicznej, zerowymiarowej (0D), TermoMechanika stała się ważna dzięki możliwościom obliczeniowym stworzonym przez komputery PC. Dla CFM posługującego się nieliniowymi równaniami algebraicznymi najważniejsze są techniki szybkiego ich rozwiązywania. Dalsze szczegóły o CFD i CFM w Uzupełnieniu U1.1 i U1.6.

Naszym wzorcem dla wykładu TermoMechaniki Płynów dla IZK są podręczniki prof. TADEUSZA CHMIELNIAKA, które łączą harmonijnie mechanikę, termodynamikę, numerykę i inżynierskie zastosowania (patrz. T. CHMIELNIAK, *Maszyny Przepływowe*, Wyd. P. Śląskiej, 1997, *Turbiny Ciepłne*, II ed. Technologie Energetyczne Wyd. P. Śląskiej 2004.)

moMechamice Płynów. Otóż, siadając do komputera PC w którejś z firm projektowo-usługowej w dowolnym kraju Unii Europejskiej absolwent IZK trafi na kod CFD lub kod CFM znajdujący się w standardowym wyposażeniu firmy. Często jest tak, iż kody te można kupić w przysłowiowym „sklepie za rogiem”. Stajemy wtedy przed dylematem co znaczy np.; LES, $k-\epsilon$, DNS, oraz który z przycisków kliknąć np. <laminar> lub <turbulent> <implicite> or <explicite>, itd. Naszym celem jest wprowadzenie państwa do podstawowych pojęć używanych w standartowych kodach *Numerycznej TermoMechaniki* tak aby inżynier absolwent koszalińskiego IZK wykonywał te same zadanie jak jego kolega absolwent Universität Karlsruhe lub Futuroscope w Poitiers. Będziemy używać oznaczeń i symboli stosowanych w najpopularniejszych kodach używanych w Europie tak, aby uniknąć sytuacji kiedy dyskutujemy o tym samym obiekcie lecz z użyciem innych symboli i różnych zapisów⁶

1.2 Numeryczna forma równań bilansu masy, pędu i energii

Nasze zainteresowania dotyczą przepływu płynów obficie występujących w naturze takich jak woda, para wodna, powietrze i spaliny. Te płyny są chętnie używanym nośnikiem energii w maszynach przepływowych jako płyny robocze w oparciu, o które pracują silniki cieplne i mechaniczne oraz urządzenia i maszyny energetyczne.

Jest dwojakiego rodzaju wiedza na temat płynów roboczych. Pierwsza – podstawowa – bierze się z analizowania pracy urządzenia na poziomie integralnym, który też zwany jest **poziomem inżynierskim**. Urządzenie przepływowe jest wtedy pewnego rodzaju „czarną skrzynką” posiadającą wloty i wyloty oraz wewnętrzne powierzchnie grzane, na których pobiera się (lub oddaje) energię na sposób ciepła oraz powierzchnie ruchome, na których

⁶Większość pojęć oraz notację zaczerpnięto z 17 tomowej instrukcji kodu **Fluent**. Można więc powiedzieć, iż wykładamy tu *TermoMechanikę Fluentą* - za tą nazwą kryje się około 600 najwybitniejszych badaczy całego świata, których modele – dziś opracowywane – jutro znajdą się na półkach sklepowych miast na półkach bibliotecznych. Kod ten wykorzystywany jest obecnie w ponad 9000 ośrodków badawczych, nie licząc tysięcy laboratoriów przemysłowych stosujących go w codziennej praktyce. Globalizacja wkroczyła do nauki frontowymi drzwiami.

Większość pojęć oraz notację CFM zaczerpnięto z wielotomowej instrukcji kodu **Gate Cycle** – za tą nazwą kryje się sztab badawczy koncernu General Electric, który jest właścicielem tego najpopularniejszego na świecie kodu obliczeniowego CFM, dotyczącego obiegów cieplno – przepływowych rzeczywistych urządzeń technicznych.

pobiera się (lub oddaje) energię na sposób pracy. Wieloletnie doświadczenia bezimiennych pionierów i weteranów inżynierii podzieliły się na trzy typy podstawowych bilansów. Dziś nazywa się je integralnymi (algebraicznymi w przestrzeni, 0D) bilansami masy, pędu i energii. Są one podstawą kodów numerycznych wiedzy zwanych CFM. Bilanse te oddają najprościej wiedzę praktyczną o stanach stacjonarnych urządzenia, stąd wyrażane są słownie jako:

(bilans masy) *suma strumieni mas wpływająca do urządzenia jest równa sumie strumieni mas wypływających (I)*

(bilans pędu) *suma sił dynamicznych i sił naporu płynu wpływającego do urządzenia pomniejszona o siły reakcji ścianek i siły ciężkości jest równa sumie sił dynamicznych i naporu płynu wypływającego z urządzenia (II)*

(bilans energii) *strumień energii dysponowanej wpływający do urządzenia powiększony przez strumień energii cieplnej (ciepło) i strumień energii mechanicznej (pracę) pobrany w urządzeniu jest równy strumieniowi energii odpadowej wypływającej z urządzenia (III)*

Drugiego rodzaju wiedza – to wiedza o **lokalnych właściwościach przepływu**, bierze się ona z potrzeby zrozumienia i sterowania zjawiskami przebiegającymi wewnątrz urządzenia przepływowego. Takimi zjawiskami są np. kawitacja wody, skraplanie pary, przejścia laminarno-turbulentne, przepływy z wrzeniem, przepływy ze spalaniem, oderwania, bifurkacje, itd.

Wraz z rozwojem urządzeń i maszyn przepływowych polegającym na doskonaleniu przepływu, zwiększaniu sprawności konwersji jednej postaci energii w inne, zmniejszaniu strat i poziomu hałasu, powstało zapotrzebowanie na wiedzę o szczegółowym lokalnym zachowaniu płynu roboczego w kanałach maszyn przepływowych. Powstało wtedy (Leonardo da Vinci, 1560, Euler, 1755) **podejście lokalne**, którego celem było opisanie trójwymiarowego (3D) rozkładu pól prędkości, ciśnienia, temperatur, gęstości na tym samym poziomie makroskopowym (nazywanym również - fenomenologicznym), na którym eksperymentatorzy mierzyli ciśnienia, temperatury i gęstości płynu.

Aby poziom lokalny (3D) opisać wyobrażano sobie płyn jako kontinuum cząstek płynnych, które w zależności od zagadnienia miały wymiary od 1 mm^3 do 1 cm^3 . Każda taka cząstka płynu była miniaturowym urządzeniem przepływowym, które miało objętość i ścianki, przez które zachodziła wymiana z sąsiadami. Taką objętość często nazywa się objętością kontrolną lub objętością bilansową. Podejście to odniosło wielki sukces głównie dlatego, iż

mogło być weryfikowalne w eksperymentach przeprowadzanych za pomocą czujników o tym samym poziomie subtelności. Było ono również pojemne w sensie możliwości opisu całego spektrum zjawisk np. oceanów i atmosfery gdzie cząstka płynu ma wymiary od 1m^3 do 1km^3 , oraz przepływów mikroskopijnych gdzie cząstka ma wymiar 1nm^3 .

W **ujęciu lokalnym** bilanse masy, pędu i energii wyrażają się następująco:

Bilans masy (D’Alambert, 1752, Euler 1757, Piola 1836, Maxwell 1860)

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.1)$$

Bilans pędu (Newton, 1687, J. Bernoulli 1703, Lagrange 1788, Cauchy 1812)

$$\partial_t(\rho \vec{v}) + \text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \vec{I}) = \text{div}(\vec{\tau}^c) + \rho \vec{b}. \quad (1.2)$$

Bilans energii (Fourier 1823, Kirchhoff 1851, Maxwell 1862, Umov 1877, Volterra 1881, Duhem 1893)

$$\partial_t(\rho e) + \text{div}\left(\rho \left[e + \frac{p}{\rho}\right] \vec{v}\right) = \text{div}(\vec{\tau}^c \vec{v} + \vec{q}) + \rho \vec{b} \cdot \vec{v}. \quad (1.3)$$

Są to równania bilansów masy, pędu i energii w **postaci zachowawczej** (numerycznej).

Równania te powstały na wzór i podobieństwo integralnych równań bilansu (I), (II), (III) z tą różnicą iż bilanse nie dotyczyły całego urządzenia lecz cząstki płynu o objętości np. $1\text{mm} \times 1\text{mm} \times 1\text{mm} = 1\text{mm}^3$. W tym małym sześcianiku bilansujemy te same wielkości co np. w kotle BB-1150 wymiarami przypominający połowę Pałacu Kultury, tzn. masę, pęd i energię, oraz mamy takie same powierzchnie (ścianki) na których wymieniane są z sąsiadami strumienie masy, pędu i energii.

Równania ((1.1)-(1.3)) są zapisane w sposób standardowy używany w krajach Unii Europejskiej. Ten sposób oparty jest na notacji obmyślonej przez Gibbsa (1894) zwanej zapisem bezindeksowym, ważnym we wszystkich układach odniesienia (kartezjańskim, cylindrycznym, sferycznym, krzywoliniowym)⁷. Symbol $\partial_t(\bullet)$ oznacza zmianę w czasie, symbol $\text{div}(\bullet)$ oznacza rozływ (divergencję) strumienia masy, pędu i energii po wszystkich

⁷Szczegóły tego zapisu wyjaśnione są w Uzupełnieniu U1.11

powierzchniach objętości cząstki płynu.

W układzie kartezjańskim równania bilansów przyjmują następującą postać:

Masy:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0, \quad i, k = x, y, z \quad (1.4)$$

Pędu:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k + p \delta_{ik}) = \frac{\partial}{\partial x_k}(\tau_{ik}^c) + \rho b_i \quad (1.5)$$

Energii:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho [e + p/\rho] v_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ik}^c v_k + q_i^c) + \rho b_i v_i \quad (1.6)$$

Bilans masy jest dobrze znany w chemii i fizyce, bilans pędu jest niczym innym jak „kontynuualną” wersją II Zasady Dynamiki Newtona, zaś bilans energii jest dokładnie I Zasadą Termodynamiki. Mimo to, musimy kilka słów przeznaczyć na opis symboli w nich zawartych. Po pierwsze, ponieważ bilansujemy „coś” w jednostce objętości to wielkości te nazwiemy gęstościami objętościowymi, czyli

$$\begin{aligned} \rho & \quad \text{— gęstość masy (masa na jednostkę objętości, [kg/m}^3\text{]);} \\ \rho \vec{v} = \vec{p} & \quad \text{— gęstość pędu (pęd na jednostkę objętości, [(kgm/s)/m}^3\text{]);} \\ \rho e = \rho \left(u + \frac{1}{2} \vec{v}^2\right) & \quad \text{— gęstość energii (energia na jednostkę objętości [J/m}^3\text{]);} \end{aligned}$$

gdzie $\vec{v}$ jest prędkością płynu, u jego energią wewnętrzną, $\frac{1}{2} \vec{v}^2$ jego energią kinetyczną.

Wielkości bilansowe przyłożone są zawsze w środku objętości cząstki płynu. Ich zmiana w czasie może być wywołana albo rozplywem strumieni przyłożonych na ściankach, albo źródłami. W równaniu masy występuje konwekcyjny strumień masy ($\rho \vec{v}$), w równaniu pędu konwekcyjny ($\rho \vec{v} \otimes \vec{v}$), sprężysty $p \vec{I}$ i dyfuzyjny ($\vec{\tau}^c$) strumień pędu, [N/m²], a w równaniu energii konwekcyjny ($\rho e \vec{v}$), sprężysty ($p \vec{v}$) i dyfuzyjny ($\vec{\tau}^c \vec{v} + \vec{q}^c$) strumień energii [W/m²]. Oprócz wielkości bilansowych i strumieni w równaniach bilansu występują źródła (przyłożone w środku objętości) i są to: źródła masy (zawsze zerowe), źródła pędu $\rho \vec{b}$ [N/m³] i źródła energii $\rho \vec{b} \cdot \vec{v}$ w [W/m³]. Dodatkowo, p [Pa] – jest ciśnieniem płynu, $\vec{\tau}^c$ – całkowitym lepkiem naprężeniem, $\vec{q}^c$ – całkowitym strumieniem ciepła⁸.

⁸Szczegóły modelu 3D prezentowane są w Uzupełnieniu U1.3 i U1.4.

1.3 Inżynierskie odpowiedniki lokalnych równań bilansu masy, pędu i energii

Ponieważ inżynierskie (0D, algebraiczne) równania bilansu (I), (II), (III) powstawały w wyniku odrębnego toku rozumowania niż trójwymiarowe równania bilansu (1.1),(1.2),(1.3) to staje się ważne aby pokazać, że równania 3D są powiązane z równaniami 0D. Dla *Numerycznej TermoMechaniki* taki związek jest podstawowy bowiem pozwala on, mając obliczone pola trójwymiarowe przejść do wielkości integralnych, którymi posługują się modele 0D i inżynieria. Symbolicznie ten związek pokażemy jako;

$$0D = \iiint_V (3D) dV.$$

Oznacza on, iż zero-wymiarowe bilanse CFM powstają poprzez scałkowanie równań trójwymiarowych CFD w objętości urządzenia.

Pokażmy jak działa przejście 3D→0D na przykładzie przepływu przez najprostsz kanał w którym nie ma ścianek ruchomych (workless) i nie ma ścianek grzanych (heatless). Kanał pokazany na rys. 1.1 ma jeden wlot oznaczony jako 1-1 i jeden wylot, oznaczony przez 2-2. Wlot 1-1 ma powierzchnię A_1 orientowaną wektorem normalnym $\vec{n}_1$ – podobnie wylot 2-2. W praktyce przekroje te pokrywają się z wlotem i wylotem konstrukcyjnym urządzenia, w naszym przypadku dyfuzora geometrycznego $A_2 > A_1$. Objętość kanału zawartego między wlotem i wylotem wynosi V . Na nieprzepuszczalnych ściankach kanału A_{wall} wektor prędkości jest równy zero $\vec{v}|_{wall} = 0$.

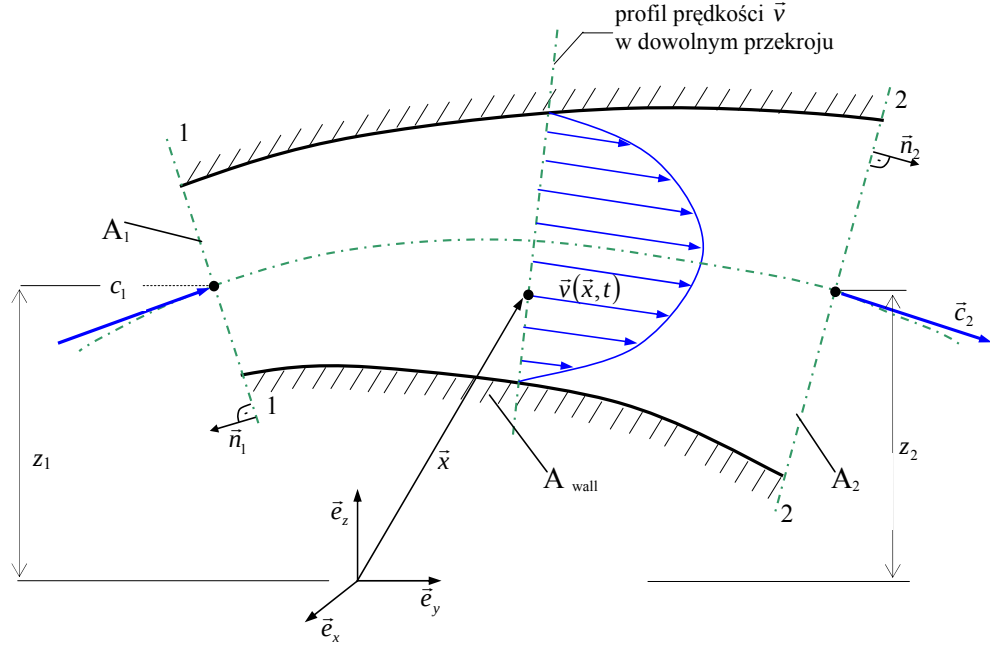
1.3.1 Bilans masy

Całkując równanie bilansu masy (1.1) w całej objętości kanału mamy:

$$\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div}(\rho \vec{v}) \right] V = 0. \quad (1.7)$$

Ponieważ inżynierów w fazie projektowania interesuje **stan ustalony** przepływu (zagadnienia startów i odstawień odkładane są do zagadnień sterowania i regulacji) to rozpatrujemy dalej przypadek przepływów stacjonarnych: $\partial_t \rho \equiv 0$. Rozpływ strumienia masy zastępujemy całką po wszystkich powierzchniach kanału co matematycznie wyraża się jako:

$$\iiint_V \text{div}(\rho \vec{v}) dV = \oint_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA. \quad (1.8)$$



Rysunek 1.1. Schemat najprostszego kanału przepływowego posiadającego wlot 1-1 i wylot 2-2. Pole prędkości na wlocie i wylocie charakteryzowane jest wektorem prędkości średniej $\vec{c}_1$ i $\vec{c}_2$ odpowiednio. Przekroje 1-1 i 2-2 mogą być dowolnie usytuowane, jednak najczęściej wyobrażamy je jako prostopadłe do osi kanału. W inżynierii stosowane są dwa podstawowe typy takich kanałów: kanał przyspieszający (konfuzor) i kanał opóźniający (dyfuzor).

Ponieważ $\partial V = A_1 \cup A_2 \cup A_{wall}$ a prędkość na ścianie A_{wall} jest równa zeru to⁹

$$\begin{aligned}
 \oiint_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA &= \iint_{A_1} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA + \iint_{A_2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \\
 &= \underbrace{\iint_{A_1} \rho v_n dA}_{\dot{m}_1} + \underbrace{\iint_{A_2} \rho v_n dA}_{\dot{m}_2} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 = 0,
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

⁹Przyjmujemy tu notację Fluenty, wg której strumień wlotowy $\dot{m}_1$ jest dodatni, a strumień wylotowy jest ujemny. W przypadku wielu wlotów i wielu wylotów zachodzi $\sum \dot{m}_{wlot} = \sum \dot{m}_{wylot}$. Porównanie masowych strumieni wlotu i wylotu jest pierwszym podstawowym sprawdzianem poprawności obliczeń CFD i w wielu przypadkach, gdy strumień wlotu i wylotu różnią się niewiele 0,2 – 0,5% można obliczenia przerwać mimo, iż residua masy, pędu i energii jeszcze się niezbiegły.

gdzie $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$ jest składową wektora prędkości w kierunku normalnym do powierzchni A . Poprzez scałkowanie ρv_n w całym przekroju powstaje wielkość integralna (inżynierska) nazywana **strumieniem masy** lub **masowym natężeniem przepływu**

$$\dot{m} = \iint_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \iint_A \rho v_n dA \quad [\text{kg/s}]. \quad (1.10)$$

Bilans masy w wersji integralnej (0D, inżynierskiej) dla kanału jak na rysunku 1.1 ma teraz postać:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2, \quad (1.11)$$

którą czytamy jako: **strumień masy wpływający do kanału jest równy strumieniowi masy wypływającemu z kanału.**

Strumień masy ¹⁰ to wielkość podstawowa zarówno dla Stosowanej Numerycznej Mechaniki Przepływów (0D) jak i dla Numerycznej TermoMechaniki Płynów (3D). Numeryka 3D wyraża ją przy pomocy całki (1.10) zaś podejście inżynierskie 0D wyraża ją przez iloczyn średniej prędkości średniej c gęstości $\tilde{\rho}$ pola powierzchni:

$$\dot{m} = \underbrace{\iint_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA}_{\text{podejście 3D}} = \underbrace{\tilde{\rho} c A}_{\text{podejście 0D}} \quad (1.12)$$

Średnia prędkość c , średnia gęstość $\tilde{\rho}$ i powierzchnia A są dobrze określone poprzez całki powierzchniowe z wektora prędkości $\vec{v} \cdot \vec{n}$ i gęstości $\rho = \rho(\vec{x}, t)$. Określamy je następująco:

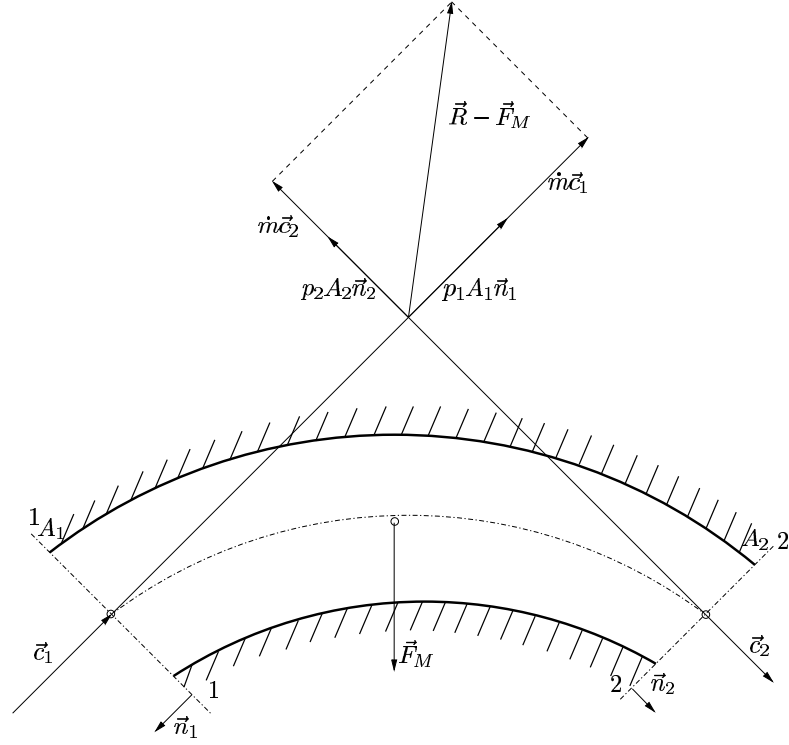
$$\begin{aligned} \dot{m} &= \iint_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \iint_A \rho dA \frac{\iint_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA}{\iint_A \rho dA} = \\ &= \underbrace{\iint_A dA}_A \underbrace{\frac{\iint_A \rho dA}{\iint_A dA}}_{\tilde{\rho}} \underbrace{\frac{\iint_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA}{\iint_A \rho dA}}_c = A \tilde{\rho} c. \end{aligned} \quad (1.13)$$

¹⁰Strumień masy $\dot{m}$ w codziennej praktyce inżynierskiej nazywany jest „przelykiem”, stąd w rozmowach posługujemy się pojęciami typu „przelyk kanału”, „przelyk turbiny”, itd.. Oznaczenie strumienia masy literką $\dot{m}$ ma swoje początki w pracy RANKINE’A (1870) w literaturze niemieckojęzycznej stosowane jest oznaczenie literką „G”.

Średnia prędkość (normalna) c , oznaczana często w literaturze jako prędkość ważoną względem gęstości $c_{(\rho)}$, jest teraz definiowana przy pomocy wielkości lokalnych 3D jako:

$$c = c_{(\rho)} = \frac{\iint_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA}{\iint_A \rho dA}. \quad (1.14)$$

Znak średniej dla gęstości zwykle pomijamy, bowiem w praktyce zawsze wiemy czy posługujemy się opisem 0D czy też 3D, zaś średnie prędkości, zgodnie z tradycją, oznaczamy literą c co nie prowadzi do pomyłek z oznaczeniem lokalnej prędkości $\vec{v}(\vec{x}, t)$.



Rysunek 1.2. Schemat obliczania sił reakcji działających na kanał. Pokazano przypadek szczególny, w którym $\vec{c}_1$ i $\vec{c}_2$ są prostopadłe do przekrojów odpowiednio 1-1 i 2-2.

1.3.2 Bilans pędu

W tym samym kanale, całkujemy bilans pędu (1.2)

$$\iiint_V \left\{ \partial_t (\rho \vec{v}) + \text{div} \left(\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \vec{I} \right) = \text{div} \left(\vec{\tau}^c \right) + \rho \vec{b} \right\} dV. \quad (1.15)$$

Używając formuły Gaussa Ostogradzkiego, zezwalającej na zapis rozbieżności strumienia w objętości przy pomocy całki powierzchniowej (1.8) otrzymujemy następujące całki:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \vec{v} dV}_{\equiv 0} + \iint_{A_1} \underbrace{(\rho v_n \vec{v})}_{-\vec{F}_{D_1}} + \underbrace{p \vec{n}}_{\vec{N}_1} dA + \iint_{A_2} \underbrace{(\rho v_n \vec{v})}_{-\vec{F}_{D_2}} + \underbrace{p \vec{n}}_{\vec{N}_2} dA =$$

$$= \iint_{A_w} \underbrace{(-p \vec{n} + \vec{\tau}^c \vec{n})}_{\vec{F}_{w_{1,2}}} dA + \iiint_V \underbrace{\rho \vec{b}}_{\vec{F}_M} dV, \quad (1.16)$$

poszczególne całki reprezentują: $\vec{F}_{D_1}, \vec{F}_{D_2}$ - siły dynamiczne na wlocie i wylocie, $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ - siły naporu ciśnienia na wlocie i wylocie, $\vec{F}_{w_{1,2}}$ - siła nacisku na ścianki kanału przeciwna do reakcji kanału $\vec{R}_{1,2}$ - oraz siła masowa $\vec{F}_M$.

Stąd:

$$\vec{R}_{1,2} = -\vec{F}_{w_{1,2}} = -(-\vec{F}_{D_1} + \vec{N}_1) - (-\vec{F}_{D_2} + \vec{N}_2) + \vec{F}_M. \quad (1.17)$$

Przekształcając dalej siły dynamiczne, poprzez wprowadzenie wektorów średniej prędkości $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ mamy:

$$\boxed{\vec{R}_{1,2} = \dot{m} (\vec{c}_1 - \vec{c}_2) - \vec{N}_1 - \vec{N}_2 + \vec{F}_M} \quad (1.18)$$

bilans pędu w wersji 0D, który czytamy: **strumień pędu czynnika wpływającego pomniejszony przez strumień pędu czynnika opuszczającego kanał i siłę ciężkości wyznacza reakcję kanału na przepływ czynnika roboczego.**

Jest to podstawowa relacja służąca do wyznaczenia reakcji kanału na przepływ. Wszystkie siły biorące udział w bilansie mają niesprecyzowane punkty zaczepienia stąd rys. 1.2 podaje propozycję zaczepienia tych sił oraz „wielobok sznurowy” służący do wyznaczania reakcji.

Przypomnijmy sposób obliczania wektora średniej prędkości $\vec{c}$ biorącego udział w bilansie sił oraz sposób obliczania wektora naporu $\vec{N}$ (index 1,2 wskazujący numer przekroju opuszczamy). Według równania (1.16) mamy:

$$\vec{J} = \iint_A (\rho v_n \vec{v} + p \vec{n}) dA = \iint_A \rho v_n dA \frac{\iint_A \rho v_n \vec{v} dA}{\iint_A \rho v_n dA} +$$

$$+ \iint_A p dA \frac{\iint_A p \vec{n} dA}{\iint_A p dA} = -\dot{m} \vec{c} + A p_s \vec{n}_s \equiv -\vec{F}_D + \vec{N}. \quad (1.19)$$

Zauważmy, że długość wektora $|\vec{c}| = c_{(p)}$ nie jest równa średniej $c = c_v$ określonej przez równanie (1.14). Aby odróżnić średnie ciśnienie i średnią normalną dodaliśmy indeks s tzn. $p_s, \vec{n}_s$ – w praktyce zakłada się równomierne ciśnienie w przekroju i niezmienny wektor normalny. Gdy przekrój o polu A ma kształt pobocznic walca i gdy ciśnienie jest stałe po obwodzie, wtedy z (1.19) wynika że $\vec{n}_s = 0$. W praktyce indeks średniej opuszczamy i piszemy krótko $p\vec{n}$ (tak samo jak w modelach 3D).

1.3.3 Bilans energii

Nim przystąpimy do scałkowania równania energii (1.3) zauważmy, że źródło energii sił masowych wyraża się poprzez bilans energii potencjalnej ciężenia $\Gamma = -zg$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \Gamma + \text{div}(\rho \Gamma \vec{v}) = \rho \vec{b} \cdot \vec{v}, \quad (1.20)$$

gdzie: $g = 9.81$ – przyspieszenie grawitacyjne w pobliżu ziemi, $\vec{b} = -g\vec{e}_z$ – siła ciężenia. Korzystając z powyższej zależności scałkujemy równanie energii (1.3) w obszarze kanału przedstawionym na rys. 1.1:

$$\iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho e - \rho \Gamma) + \text{div} \left[\rho \left(e - \Gamma + \frac{p}{\rho} \right) \vec{v} \right] = \text{div} \left(\vec{\tau}^c \vec{v} + \vec{q}^c \right) \right\} dV. \quad (1.21)$$

Brzeg obszaru $\partial V = A_1 \cup A_2 \cup A_w$ składa się z wlotu, wylotu i nieruchomych, niegrzanych (adiabatycznych) powierzchni kanału $A_w = A_{wall}$. W kanale na rys. 1.1 brak jest grzanych ścianek A_q , gdzie czynnik roboczy pobiera energię na sposób ciepła $\dot{Q}_{1,2} = 0$ oraz ruchomych ścianek A_u , gdzie czynnik pobiera energię na sposób pracy $\dot{L}_{1,2} = 0$. Ponieważ $e = u + \vec{v}^2/2$ – energia właściwa składa się z energii wewnętrznej [J/kg] i kinetycznej [J/kg] – to dla przepływu ustalonego $\partial/\partial t(\bullet) \equiv 0$ mamy:

$$\iint_{A_1 \cup A_2} \left(u + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + zg \right) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA - \iint_{A_1 \cup A_2 \cup A_w} \left(\vec{v} \vec{\tau}^c \cdot \vec{n} + \vec{q}^c \cdot \vec{n} \right) dA = 0, \quad (1.22)$$

druga całka daje znikome wkłady na powierzchniach wlotu A_1 i wylotu A_2 oraz jest zerem na A_w i jest tradycyjnie pomijana w literaturze¹¹,

$$\iint_{A_1 \cup A_2} \left(\vec{v} \vec{\tau}^c \cdot \vec{n} + \vec{q}^c \cdot \vec{n} \right) dA \approx 0, \quad (1.23)$$

¹¹ W. GUNDLACH *Maszyny Przepływowe*, tom 1, 1970; R. PUZYREWSKI *Podstawy teorii maszyn wirnikowych w ujęciu jednowymiarowym*, Ossolineum, 1992.

natomiast pierwsza całka określa następujące strumienie energii całkowitej na wlocie i wylocie:

$$\begin{aligned}\dot{E}_1 &= \iint_{A_1} \left(u + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + zg \right) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \\ &= \iint_{A_1} (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dA \frac{\iint_{A_1} \left(u + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + zg \right) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA}{\iint_{A_1} (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dA} = \\ &= \dot{m}_1 \left(u_1 + \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + z_1 g \right),\end{aligned}\quad (1.24)$$

$$\begin{aligned}\dot{E}_2 &= \iint_{A_2} \left(u + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + zg \right) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \\ &= \iint_{A_2} (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dA \frac{\iint_{A_2} \left(u + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + zg \right) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA}{\iint_{A_2} (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dA} = \\ &= \dot{m}_2 \left(u_2 + \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + z_2 g \right),\end{aligned}\quad (1.25)$$

ponieważ $\vec{v} \cdot \vec{n}/A_1$ jest przeciwnego znaku niż $\vec{v} \cdot \vec{n}/A_2$ to ostatecznie mamy:

$$\boxed{\dot{m}_1 \left(u_1 + \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + z_1 g \right) = \dot{m}_2 \left(u_2 + \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + z_2 g \right)}, \quad [\text{J/s}] \quad (1.26)$$

bilans energii w postaci 0D który czytamy jako:

strumień energii dysponowanej $\dot{E}_1$ (1.24) niesiony przez czynnik roboczy dopływający do kanału (urządzenia konwertującego energię) jest równy strumieniowi energii odpadowej $\dot{E}_2$ (1.25) opuszczającej kanał.

Dla kanału z jednym wlotem i wylotem bilans energii można przekształcić do bilansu energii niesionej przez jeden kilogram czynnika roboczego (tzw. energia właściwa) – dzieląc bowiem równanie (1.26) przez strumień masy $\dot{m}$ [kg/s] mamy:

$$\boxed{\left(u_1 + \frac{c_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + z_1 g \right) = \left(u_2 + \frac{c_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + z_2 g \right)} \quad [\text{J/kg}] \quad (1.27)$$

Wielkość $i_c = u + \frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} + zg$ nazywamy **entalpią całkowitą właściwą** – czyli entalpią zawartą w jednym kilogramie masy czynnika roboczego. Składa się ona z **czterech rozmaitych form energii**, odpowiednio: energii wewnętrznej, kinetycznej, ciśnienia i ciężenia. Energia wewnętrzna zsumowana z energią ciśnienia nosi nazwę entalpii

$$i = u + \frac{p}{\rho}.$$

Teraz bilans (1.27) przedstawia się krótko jako:

$$i_{c1} = i_{c2} \quad [\text{J/kg}]. \quad (1.28)$$

W równaniach powyższych występują średnie $u_1 = c_v T_1$, c_1 , p_1 , ρ_1 , z_1 oraz $u_2 = c_v T_2$, c_2 , p_2 , ρ_2 , z_2 , które są określone przez energetyczny typ uśredniania (1.24), (1.25). Jeśli dodamy indeksy oznaczające np. średnią prędkość otrzymaną z uśredniania bilansu masy $c_{(\rho)}$, pędu $c_{(p)}$ i energii $c_{(e)}$ to zachodzi [112]:

$$c_{(\rho)} < c_{(p)} < c_{(e)}. \quad (1.29)$$

Stąd, w rzeczywistych obliczeniach urządzeń konwertujących energię należy czasami pamiętać o tych różnicach. W trakcie wykładów i ćwiczeń te niewielkie różnice pomijamy ze względu na brak czasu – stąd wektor prędkości $\vec{c}$ zaczepiamy w osi przewodu, wysokość ciężenia z odnosimy do osi przewodu, ciśnienie i temperaturę przyjmujemy jako stałe w przekroju, itd.,

Uwaga: równanie bilansu energii 0D odniesione do jednego średniego kilograma masy (1.27) ma postać podobną do równania Daniella Bernoulliego, toteż częstokroć w literaturze utożsamiamy te dwa różne równania. Aby różnice utrzymać i podkreślić lokalny charakter równania D. Bernoulliego będziemy inaczej zapisywać energię kinetyczną w obu tych równaniach a mianowicie:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{c}^2}{2} & - \text{równanie energii (0D)} \\ \frac{\vec{v}^2}{2} & - \text{równanie D. Bernoulliego (wzdłuż strugi)} \end{aligned}$$

1.3.4 3D versus 0D

Poniższy rysunek 1.3 przedstawia tabelą zbiorczą wyprowadzonych tu zależności. O wyprowadzeniu i postaci równania D. Bernoulliego, które nie jest

bilansem czegokolwiek, a jest całą pierwszą bilansu pędu, należy przeczytać w Uzupełnieniu U.1.9.

Bilans	Numeryczna postać Równań bilansu 3D (rów. różniczkowe)	Integralna (inżynierska) postać w kanale dla prze- pływu ustalonego 0D (rów. algebraiczne)
Masy	$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$	$\dot{m}_1 = \dot{m}_2, \quad \dot{m} = \rho c A$
Pędu	$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \vec{I}) =$ $= \operatorname{div}(\vec{\tau}^c) + \rho \vec{b}$	$\vec{R} = \dot{m}(\vec{c}_1 - \vec{c}_2) - \vec{N}_1 - \vec{N}_2 + \vec{F}_M$
Energii	$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \operatorname{div}\left(\rho \left[e + \frac{p}{\rho}\right] \vec{v}\right) =$ $= \operatorname{div}\left(\vec{\tau}^c \vec{v} + \vec{q}^c\right) + \rho \vec{b} \cdot \vec{v}$ $e = u + \frac{1}{2} \vec{v}^2$	$\dot{m}_1(i_{c1}) + \dot{L}_{1,2} + \dot{Q}_{1,2} = \dot{m}_2(i_{c2})$ $i_{c1} = u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{c_1^2}{2} + z g_1$ $i_{c2} = u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{c_2^2}{2} + z g_2$

Rysunek 1.3. Zbiorcza tabela bilansów 3D i 0D

Szczegółowe wyprowadzenie bilansu masy 0D dla przypadku niestacjonarnego wraz z przykładami znajdzie czytelnik w Uzupełnieniu U1.7. Podobnie, w Uzupełnieniu U1.8 znajduje się szczegółowe wyprowadzenie bilansu pędu 0D dla ogólnego przypadku oraz przykłady jego wykorzystania. Najbardziej rozbudowane jest Uzupełnienie U1.10, w którym przedstawiono bilans energii 0D i jego pełną dyskusję oraz odniesienia do Pierwszej Zasady Termodynamiki.

W termomechanice oprócz tradycyjnie dobrze umotywowanych narzędzi, jakimi są bilanse masy, pędu i energii używane są również bilanse lub równania ewolucyjne innych wielkości opisujących makroskopowy stan płynu roboczego. Może to, przykładowo, być bilans entropii właściwej, równanie ewolucyjne stopnia zaawansowanej przemiany fazowej, równanie dyfuzji – reakcji poszczególnych składników mieszaniny płynnej, czy równanie opisujące rozwój turbulentnego przenoszenia masy, pędu i energii. Nie wymieniamy ich w Wykładzie Pierwszym, gdyż ich rola jest specyficzna, a ich wyprowadzenie

wymaga różnego tła i bardziej wyczerpującej dyskusji. Można je znaleźć w Uzupełnieniach – między innymi w Uzupełnieniu U2.1 podany zostanie bilans entropii w wersji modelu 0D i 3D, w Uzupełnieniu U4.1 podane zostanie równanie ewolucji stopnia zaawansowanej przemiany fazowej w modelu 3D oraz ich odpowiedniki w modelu 0D. Natomiast w Uzupełnieniu U5.1 podane zostaną równania dyfuzji – reakcji składników mieszaniny podlegającej spalaniu i innym reakcjom chemicznym. Omówione tam też zostaną zerowymiarowe odpowiedniki w postaci podejścia stechiometrycznego i równowagowego.

Podajemy tu dwa sformułowania naszych narzędzi badawczych w modelu trójwymiarowym (3D) i modelu zerowymiarowym (0D). Oba te podejścia są współcześnie używane, rozwijają się i mają swe odnośniki w komercyjnych kodach obliczeniowych. Co więcej, oba te podejścia współdziałają ze współczesnymi metodami pomiarowymi, które można podzielić na te kompatybilne z modelowaniem 3D i te spójne z modelowaniem 0D. Dlatego nie poświęcamy wiele czasu modelowaniu jednowymiarowemu (1D) ani dwuwymiarowemu (2D) bowiem rola tych przedkomputerowych modeli jest już dzisiaj zanikająca.

Krajowa literatura poświęcona zawiązkom modeli 3D z modelami 0D jest obfita. Oprócz wspomnianych tu monografii W. GUNDLACHA [112]–[114] i R. PUZYREWSKIEGO [292] liczne szczegóły i przykłady znajdujemy w monografiach: BADYDA [8], BENNETT i MYERS [11], BROSZKO [22], BUKOWSKI [29], CHMIELNIAK [43],[45], ELSNER [81], GRYBOŚ [106], HOBLER [120], MADEJSKI [197], MIKIELEWICZ [226], MILLER [233], S. OCHĘDUSZKO [253], PERYCZ [275], PROSNAK [286], RUTKOWSKI [314], SIENIUTYCZ [328], SZARGUT [364], TALER [391], TRELA [398], TULISZKA [405],[407], WIŚNIEWSKI [430], ZIĘBIK [453].

Wykład 2

Sprężyste Własności Płynów Roboczych

2.1 Woda, Para, Powietrze, Spaliny jako nośniki energii użytecznej

Czynnikami roboczymi w maszynach przepływowych i silnikach cieplnych są płyny łatwo dostępne w przyrodzie, tanie, bezpieczne dla człowieka i urządzenia, wielokrotnego użycia oraz przyjazne środowisku, gdy stają się przepracowanym odpadem. Jednakże z punktu widzenia sprawności energetycznej urządzenia, najważniejszą cechą fizyczną płynów są ich krzyżowe własności sprężyste, zwane również własnościami odwracalnymi. Bowiem zadaniem płynu roboczego jest pobrać energię (sprężyć i zmagazynować) w jednym urządzeniu, przetransportować ją kanałami i rurociągami, przekształcić w inną formę i oddać w innym urządzeniu. Nie wszystkie czynniki robocze mają jednakową zdolność sprężystego magazynowania energii, np. kilogram powietrza w ciśnieniu 1 MPa i temperaturze 200°C , podgrzany o jeden stopień zwiększa swą energię o 5 kJ , zaś kilogram pary, w tych samych warunkach, zwiększa swą energię sprężystą o 19 kJ . Również nie wszystkie płyny sprężyste mają zdolność konwersji – aby w sposób sprężysty płyn mógł konwertować (zamieniać) jedną formę energii w inną, jest koniecznym aby efekty odwracalne (sprężyste) różnych form były z sobą krzyżowo sprzężone. Przykładowo ogrzewaniu płynu musi towarzyszyć sprężysta zmiana objętości i, odwrotnie, ścisaniu płynu musi towarzyszyć sprężysta zmiana entropii.

Energia sprężysta jednego kilograma płynu roboczego w układzie zamkniętym, nie przepływowym nazywa się **energią wewnętrzną** i oznaczana jest literą u [J/kg]. W układach przepływowych, taką transportowaną energią

jest **entalpia właściwa**, która oznaczana jest literą i [J/kg]. Entalpia właściwa jest również pewnego typu energią wewnętrzną tyle, że powiększoną o **energię przetłaczania** czynnika pv :

$$i = u + pv \quad (2.1)$$

Energia wewnętrzna jest pojęciem fenomenologicznym. Jest formułowana dla 1 kg masy czynnika roboczego i tylko dla tego jednego kilograma ma sens. Oznacza to, iż nie wiemy z jakich form energii mikroskopowej, czy molekularnej się ona składa. Ogólnie, od czasów Rankine’a począwszy (1850), umownie traktuje się energię wewnętrzną jako ukrytą energię kinetyczną chaotycznie poruszających się cząstek płynu oraz ukrytą energię potencjalną oddziaływań międzycząsteczkowych. Przyjmijmy, iż miarą sprężystych własności kontinuuów stałych i płynnych są współczynniki sprężystości, w oparciu, o które określa się u lub i . W liniowo sprężystym ciele stałym najważniejszym jest współczynnik E , zwany **modułem sprężystości Younga**. Podobnie w gazach najważniejszym współczynnikiem określającym sprężystość gazów – jest to stała R , nazywana **stałą gazową** lub **termicznym modułem sprężystości** gazu. Tą analogię pokazuje tab.2.1.

Moduł sprężystości Younga E [N/m^2]	Indywidualna stała gazowa R [$J/kg K$]
definicja	definicja
$E \equiv$ praca jaka jest potrzebna, aby podnieść w 1 kg masy czynnika ciśnienie o jeden Pascal.	$R \equiv$ praca jaka jest potrzebna, aby podnieść w 1 kg masy czynnika temperaturę o jeden stopień Kelvina
mechaniczny moduł sprężystości	termiczny moduł sprężystości

Tablica 2.1. Analogie między stałymi sprężystościami ciał stałych i gazów

Z uwagi na to, że w gazach energia wewnętrzna może się zmieniać na sposób pracy (mechanicznej) i na sposób ciepła, ilość stałych sprężystych jest o wiele większa niż w ciałach stałych¹. Najczęściej używane są **cztery stałe sprężyste**, którymi są:

- R – indywidualna stała gazowa $\left[\frac{J}{kgK} \right]$

¹Ścisłe mówiąc, w ciałach stałych takie stałe również istnieją, ale nie mają tak dużego znaczenia jak w gazach. Nie mniej, z formalnego punktu widzenia, ciała stałe również mają takie stałe sprężyste i również mogą występować jako czynniki robocze.

- c_v – pojemność cieplna właściwa² $\left[\frac{J}{kgK}\right]$
(ciepło właściwe przy stałej objętości)
- c_p – pojemność cieplna właściwa³ $\left[\frac{J}{kgK}\right]$
(ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu)
- κ – współczynnik Poissona $[-]$

W gazie doskonale sprężystym – któremu odpowiada sprężyste ciało stałe Hooke'a – ilość niezależnych czynników sprężystych redukuje się do dwóch tak, że

$$R = c_p - c_v, \quad \kappa = c_p/c_v \quad (2.2)$$

Przy pomocy powyższych stałych sprężystych formuje się **termiczne i kaloryczne równanie stanu** czynnika roboczego.

2.2 Diagram pracy Watta $p-v$, diagram ciepła Belpaire'a $T-s$

Aby wyrazić ilość energii wewnętrznej, jaka została odebrana lub dodana czynnikowi w trakcie jego przepływu przez urządzenie o wlocie 1-1 i wylocie 2-2, nie możemy śledzić zmian energii kinetycznej i potencjalnej każdej molekuly płynu. Robimy to za pomocą fenomenologicznych parametrów zwanych **parametrami stanu**. Tych parametrów jest **cztery**, dwa z nich określają zmianę energii wewnętrznej na **sposób pracy**, a dwa określają zmianę energii wewnętrznej na **sposób ciepła**⁴. Są to:

p – prężność	$[N/m^2]$	} parametry stanu
v – objętość właściwa	$[m^3/kg]$	
T – temperatura termodynamiczna	$[^{\circ}K]$	} parametry stanu
s – entropia właściwa	$[J/Kkg]$	
		} dotyczące pracy
		} dotyczące ciepła

Podczas przepływu jednego kilograma czynnika roboczego między wlotem 1-1 i wylotem 2-2, następuje ciągła zmiana parametrów stanu: p, T, v, s od

² c_v jest ilością ciepła jaka jest potrzebna, aby ogrzać kilogram masy czynnika o jeden stopień (z 14°C do 15°C) przy zachowaniu stałej objętości.

³ c_p jest ilością ciepła jaka jest potrzebna, aby ogrzać kilogram masy czynnika o jeden stopień (z 14°C do 15°C) przy zachowaniu stałego ciśnienia.

⁴Używany w języku polskim określeniom „praca” i „ciepło” w literaturze anglosaskiej odpowiadają nazwy wyprowadzone przez Rankine'a (1851): „working” i „heating”. Polskie odpowiedniki nazw tych procesów np. „wysił” i „grzew” nie przyjęły się, stąd używamy „praca” i „ciepło” jako nazwy procesów przekazywania energii.

stanu na wlocie: p_1, T_1, v_1, s_1 do stanu na wylocie p_2, T_2, v_2, s_2 . Taką zmianę parametrów nazywamy **przemianą sprężystą** (termodynamiczną). Gdy wlot 1-1 jest infinitezymalnie blisko wylotu 2-2 to przemianę stanu w takim przepływie nazywamy **przemianą infinitezymalną**. Wszystkie definicje odnoszące się do przepływającego jednego kilograma czynnika roboczego, odnoszą się również do sytuacji, kiedy ten czynnik jest nieruchomy w układzie zamkniętym – tu również można wyróżnić początek przemiany (indeks 1) i koniec przemiany (indeks 2).

Co więcej, **ustalenie stałych sprężystych** następuje w pomiarach dokonywanych na czynniku nieruchomym, w warunkach doskonałej równowagi mechanicznej i termicznej – zakłada się, iż tak ustalone sprężyste własności, będą dobrze opisywały czynnik roboczy w warunkach przepływu i współistnienia wielu zjawisk niesprężystych (nieodwracalnych).

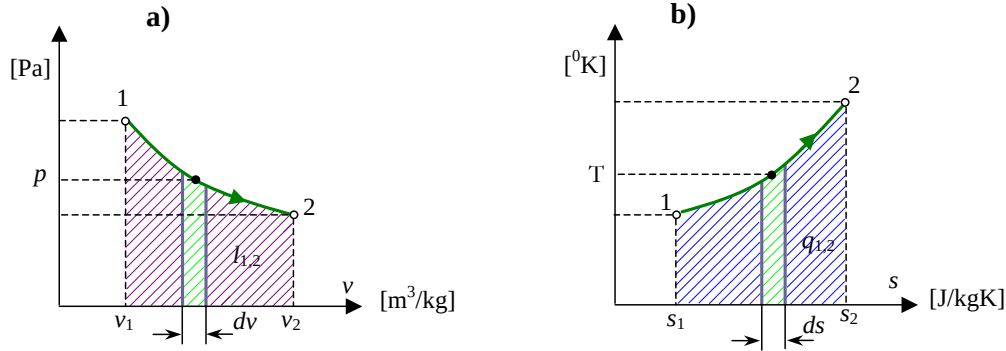
Przyczyną zachodzenia przemian termodynamicznych $1 \rightarrow 2$ badanego przez nas kilograma masy czynnika są oddziaływania z innymi kilogramami czynnika (jeśli nie ma kontaktu ze ściankami), lub oddziaływania z otoczeniem (gdy zachodzi kontakt ze ściankami grzаныmi lub ruchomymi). Mamy tu na myśli oddziaływania energetyczne, które polegają na przekazaniu ciepła na grzanych ściankach, lub przekazaniu pracy na ruchomych ściankach. To przekazywanie energii, w praktyce odbywa się, w specjalnie do tego ukształtowanych urządzeniach (kotły, wymienniki, sprężarki, wentylatory, silniki spalinowe, etc.).

Praca i ciepło przekazane na specjalnie do tego wyznaczonych powierzchniach nazywamy **pracą i ciepłem zewnętrznym**. W urządzeniach przepływowych mówimy o strumieniu pracy $\dot{L}_{1,2}$ i strumieniu ciepła $\dot{Q}_{1,2}$, przekazywanemu czynnikowi podczas przepływu między wlotem 1-1 i wylotem 2-2, w trakcie, którego w czynniku roboczym zaszła przemiana 1 - 2. Ilość pracy, jaką **jeden kilogram czynnika** zdążył w tym czasie pobrać i zmienić w energię sprężystą u nazywamy **pracą kompensowaną** $l_{1,2}$ [J/kg]. Gdyby ta przemiana trwała tylko infinitezymalnie krótko, lub infinitezymalnie mały byłby kanał przepływowy, to pracę kompensowaną oznaczalibyśmy δl . Ilość ciepła, jaką **jeden kilogram czynnika** zdążył w czasie przemiany pobrać i zamienić w energię sprężystą u nazywamy **ciepłem kompensowym** $q_{1,2}$ [J/kg]. Gdy rozpatrywana przemiana trwa infinitezymalnie krótko, lub infinitezymalnie mały, jest kanał przepływowy to ciepło kompensowe oznaczamy δq .

Praca kompensowana $l_{1,2}$ i ciepło kompensowane $q_{1,2}$ są, więc doskonałymi charakterystykami przemiany termodynamicznej (1-2). Ponieważ mówiliśmy o zmianach energii sprężystej (liczbowo wyrażonej przez u lub i) słowo „kompensowany” jest synonimem słowa „sprężysty”. Można przypuszczać, iż z uwagi na liczne zjawiska nieodwracalne, przeszkadzające w idealnym „ładowaniu”, „transportowaniu” i „rozładowywaniu” energii wewnętrznej (sprężys-

tej) tylko część zewnętrznego strumienia $\dot{Q}_{1,2}$ i $\dot{L}_{1,2}$ przekonwertuje w $q_{1,2}$ i $l_{1,2}$.

Obrazem pracy i ciepła kompensowanego w trakcie przemiany są wykresy $p - v$ i $T - s$ (Rys.2.1).



Rysunek 2.1. a) Praca kompensowana przemiany na wykresie $p - v$, b) Ciepło kompensowane przemiany na wykresie ciepła $T - s$.

Pole pod linią przemiany 1-2 odpowiada, odpowiednio **pracy kompensowanej** (absolutnej):

$$l_{1,2} = \int_{v_1}^{v_2} p dv \quad (2.3)$$

oraz **ciepła kompensowanego**

$$q_{1,2} = \int_{s_1}^{s_2} T ds \quad (2.4)$$

co oznacza, że **infinitesimalną pracą** i **infinitesimalnym ciepłem** są:

$$\delta l = p dv, \quad \delta q = T ds. \quad (2.5)$$

W termodynamice przyjęto, że praca kompensowana **wytworzona** podczas wzrostu objętości (ekspansji) jest dodatnia (Rys.2.1a), a praca wytworzona podczas jego kompresji (zmniejszenie objętości właściwej) ujemna. Podobnie, ciepło kompensowane związane z zwiększaniem entropii (Rys.2.1b) jest dodatnia, a ciepło wytworzone podczas zmniejszania entropii jest ujemne.

Szczególną pracą kompensowaną będącą sumą pracy kompensowanej $l_{1,2}$ i pracy przetłaczania pv jest **praca techniczna**, ważna w układach przepływowych.

$$l_{t1,2} = \int_{p_1}^{p_2} v dp, \quad \delta l_t = v dp \quad (2.6)$$

Szczególnym ciepłem kompensowanym będącym sumą ciepła kompensowego $q_{1,2}$ i ciepła przetwarzania Ts jest **ciepło przeistaczania**:

$$q_{t1,2} = \int_{T_1}^{T_2} s dT, \quad \delta q_t = s dT. \quad (2.7)$$

Praca techniczna i ciepło przeistaczania są polami, odpowiednio; $p_1 - 1 - 2 - p_2$ i $T_1 - 1 - 2 - T_2$ na Rys.2.1.

2.3 Pierwsza Zasada Termodynamiki Płynów Sprężystych

Podczas procesu projektowania urządzenia interesują nas odwracalne ilości energii, którymi z uwagi na sprężystość zjawisk, możemy dysponować w każdej chwili. Stąd pomijamy (chwilowo) nieuchronne straty energii, a zjawiska traktujemy jako całkowicie odwracalne, czyli doskonałe. Jeśli tak, to całe ciepło zewnętrzne $\dot{Q}_{1,2}$ przekazywane na grzanych ściankach przekształciło się w ciepło kompensowe $q_{1,2}$ i pytaniem jest, jaki skutek ono wywołało. Odpowiedź na to pytanie daje Pierwsza Zasada Termodynamiki sprężystych płynów roboczych. Zasada ta odniesiona do 1 kg masy mówi, że:

$q_{1,2} = u_2 - u_1 + l_{1,2}$

(2.8)

lub słownie: **ciepło pobrane przez czynnik roboczy, może zostać wykorzystane do zwiększenia energii wewnętrznej, lub do wykonania pracy mechanicznej $l_{1,2}$** . Gdy przemiana jest infinitesimalna otrzymujemy następującą wersję I Zasady Termodynamiki (postać : Carnota (1824), Clausiusa (1850)):

$$\delta q = du + \delta l. \quad (2.9)$$

Gdy pytamy o skutek działania ciepła w układzie przepływowym to na mocy (2.1) i (2.6) otrzymujemy:

$q_{1,2} = i_2 - i_1 + l_{t1,2}$

(2.10)

dla przemiany skończonej 1-2 lub

$$\delta q = di + \delta l_t \quad (2.11)$$

dla przemiany infinitezymalnej⁵.

Używając wzorów (2.5) można przekształcić równanie I Zasady Termodynamiki procesów odwracalnych do postaci zaproponowanej przez Rankine'a (1850), Reecha (1851), Gibbsa (1873):

$$du = \delta q - \delta l = Tds - pdv, \quad (2.12)$$

która mówi, iż wewnętrzna energia sprężysta może być spożytkowana w postaci ciepła i pracy. Zauważmy, że równanie (2.12) jest tylko jednym ze składowych bilansu energii całkowitej (1.21), w przeciwieństwie do innych postaci bilansu energii, postać powyższa zawiera entropię właściwą w jawnej postaci.

Wyrażenie $ds = \delta q/T$ nazywamy infinitezymalną postacią Drugiej Zasady Termodynamiki Płynów Sprężystych, albo od nazwisk odkrywców, drugim r'ownaniem Carnota (1824) - Rankine'a (1851).

2.4 Cztery Szczególne Przemiany

Pomiary stałych sprężystych dowolnej przemiany $1 \rightarrow 2$ są nadzwyczaj trudnym zadaniem. Stąd badania nad sprężystymi własnościami gazów przeprowadza się nie zmieniając jednego z parametrów stanu. Ponieważ parametrów stanu jest cztery, zachodzą cztery możliwości prowadzenia przemian:

$$\begin{aligned} p &= \text{const} && (\text{izobaryczna}), \\ v &= \text{const} && (\text{izochoryczna}), \\ T &= \text{const} && (\text{izotermiczna}), \\ s &= \text{const} && (\text{izentropowa}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Przy założeniu doskonałej sprężystości gazu, z powyższych czterech eksperymentów można wyznaczyć potrzebne cztery stałe R, c_p, c_v, κ . Szczęśliwie dla termodynamiki rzeczywiste przemiany płynów roboczych, które występują w

⁵Właściwe zrozumienie równania bilansu energii (1.21) oraz Pierwszej Zasady Termodynamiki procesów sprężystych (2.10) nie jest automatyczne i wymaga dalszych rozwiązań. Dodatkowe uwagi można znaleźć w uzupełnieniach. Liczne wyjaśnienia i uogólnienia Pierwszej Zasady Termodynamiki można znaleźć, m.in. w pracach: S. OCHEŃDUSZKO [254], B. STEFANOWSKI [342], J. ZAGÓRSKI [445], S. WIŚNIEWSKI [430], J. SZARGUT [362], T. CHMIELNIAK [41].

maszynach cieplnych, mają postać zbliżoną do powyższych przemian szczególnych. Takie przemiany (w pewnym przybliżeniu) zachodzą w silnikach spalinowych, turbinach parowych i gazowych, urządzeniach chłodniczych, pompach ciepła, sprężarkach, wymiennikach ciepła, pompach oraz silnikach odrzutowych. Jeśli w takich urządzeniach odchylenie przemian rzeczywistych od przemian (2.13) jest niewielkie, to można założyć, że czynnikiem roboczym jest gaz doskonały, a przemiany są doskonale sprężyste (odwracalne). Podstawowym równaniem określającym sprężyste własności gazu jest **termiczne równanie stanu** (równanie Clapeyrona):

$$pv = RT, \quad (2.14)$$

które mimo niewystępowania w nim entropii s dobrze przybliża trzy pierwsze przemiany (2.13). Tak, więc, przemiany szczególne służą jako wzorce charakteryzujące urządzenie przepływowe. Równaniu temu w sprężystym ciele Hooke’a odpowiada równanie konstytutywne:

$$\sigma = E(T)\varepsilon$$

łącznie naprężenie z odkształceniem.

Obok termicznego równania stanu używa się **kalorycznego równania stanu** w postaci:

$$u = c_v T, \quad i = c_p T.$$

Przemiana izochoryczna ($v = \text{const}$)

Przemiana ta realizowana jest poprzez ogrzanie gazu w naczyniu zamkniętym o stałej objętości – stąd ma większe zastosowanie w silnikach tłokowych niż wirnikowych lub przepływowych, (Rys.2.2).

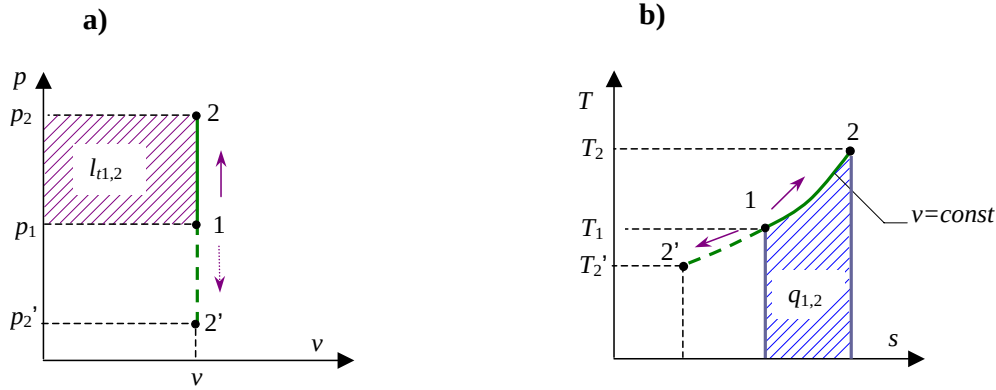
Zakładamy, że parametry stanu 1 są znane. Jeśli doprowadzono $q_{1,2}$ ilość ciepła to parametry stanu 2 łatwo wyrazimy w następujący sposób:

- **ciśnienie** p_2 . Przekształcamy termicznie równanie stanu (2.14), tak aby uwzględnić $v_1 = v_2 = \text{const}$, stąd

$$v = \frac{RT}{p} = \text{const} \quad \rightarrow \quad \frac{T_1}{p_1} = \frac{T_2}{p_2} \quad \rightarrow \quad p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} \quad (2.15)$$

- **przyrost entropii** $s_2 - s_1$. Korzystamy z I Zasady Termodynamiki w wersji (2.12) oraz termicznego (2.14) i kalorycznego równania stanu $u = c_v T$ stąd:

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{pdv}{T} = c_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{v} dv = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v} \quad (2.16)$$

Rysunek 2.2. Wykresy przemiany izochorycznej: a) $p - v$, b) $T - s$

kładąc $dv \equiv 0$ i całkując w przedziale wyznaczonym przez przemianę otrzymujemy

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) \quad (2.17)$$

co oznacza, że krzywa na diagramie $T - s$ (Rys 2.2b) jest krzywą logarytmiczną.

- **praca** (kompensowana, absolutna) **przemiany**. Z definicji (2.3) wynika, że w przemianie izochorycznej gaz nie wykonuje żadnej pracy

$$l_{1,2} = \int p dv \equiv 0 \quad (2.18)$$

- **praca techniczna przemiany**. Z definicji (2.6) wynika, że

$$l_{t1,2} = \int_{p_1}^{p_2} v dp = v (p_2 - p_1) \quad (2.19)$$

- **energia wewnętrzna i entalpia**. Zmianę energii wewnętrznej właściwej $u_2 - u_1$ oraz entalpii właściwej $i_2 - i_1$ obliczamy korzystając ze stałych sprężystych c_v i c_p odpowiednio

$$u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1), \quad i_2 - i_1 = c_p (T_2 - T_1) \quad (2.20)$$

ponieważ dla gazu doskonale sprężystego zachodzi zawsze $c_p > c_v$, stąd entalpia, ma wartość wyższą niż energia u_2 ściśle: $i_2 = \kappa u_2$

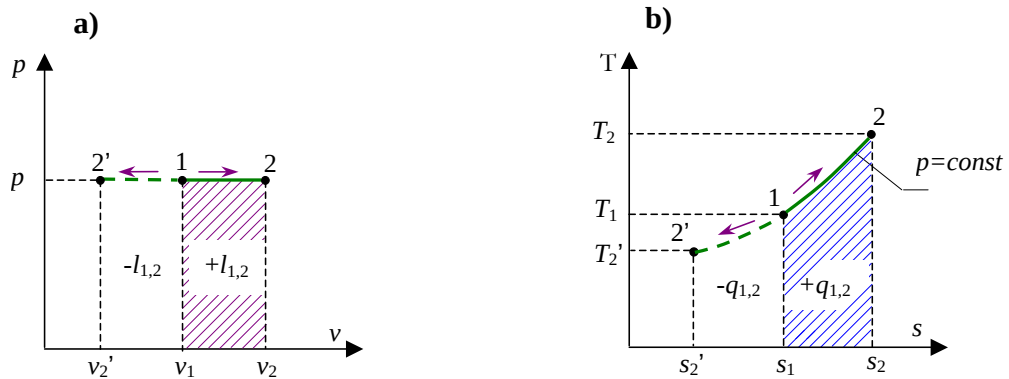
- Nie jest wciąż znana **temperatura** T_2 , bowiem w powyższych równaniach nie występowało zadane ciepło $q_{1,2}$. Wykorzystujemy bilans energii (2.8)

$$q_{1,2} = u_2 - u_1 + l_{1,2} = u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1) \quad (2.21)$$

z którego wyznaczamy T_2

Przemiana izobaryczna $p = \text{const}$

Przemiana ta realizowana jest poprzez ogrzanie gazu zamkniętego w cylindrze pod tłokiem o stałym nacisku. Izobaryczne ogrzewanie czynnika roboczego ma miejsce w wymiennikach ciepła, kotłach, w spalaniu paliwa wtryskiwanego do komory spalania turbiny gazowej. Izobaryczne oziębianie czynnika roboczego ma miejsce w kondensatorach siłowni parowych, pompach ciepła i chłodnicach.



Rysunek 2.3. Wykresy przemiany izobarycznej: a) $p - v$, b) $T - s$

Zakładamy, że parametry stanu 1 są znane. Jeśli doprowadzono ciepło $q_{1,2}$ to parametry stanu 2 wyrażają się w następujący sposób:

- **objętość** v_2 z równania $p v = R T$ mamy

$$p = \frac{R T}{v} = \text{const} \quad \rightarrow \quad \frac{T_1}{v_1} = \frac{T_2}{v_2} \quad \rightarrow \quad v_2 = v_1 \frac{T_2}{T_1} \quad (2.22)$$

- **przyrost entropii** $s_2 - s_1$. Korzystając z (2.16), (2.22) oraz faktu $R = c_p - c_v$ mamy

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + (c_p - c_v) \frac{dv}{v} = c_p \frac{dT}{T} = c_p \frac{dv}{v} \quad (2.23)$$

Po scałkowaniu

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = c_p \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right). \quad (2.24)$$

- **praca przemiany.** Z definicji (2.3) wynika, że

$$l_{1,2} = \int_{v_1}^{v_2} p dv = p(v_2 - v_1) = R(T_2 - T_1) \quad (2.25)$$

- **praca techniczna przemiany.** Z definicji (2.6) wynika, że

$$l_{t1,2} = \int p dv \equiv 0$$

- **energia wewnętrzna i entalpia.** Ze wzorów (2.20) wynika, że

$$u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1), \quad i_2 - i_1 = c_p (T_2 - T_1) \quad (2.26)$$

- Nie jest wciąż znana **temperatura** T_2 , którą obliczymy z bilansu energii (2.10)

$$q_{1,2} = i_2 - i_1 + l_{t1,2} = i_2 - i_1 = c_p (T_2 - T_1) \quad (2.27)$$

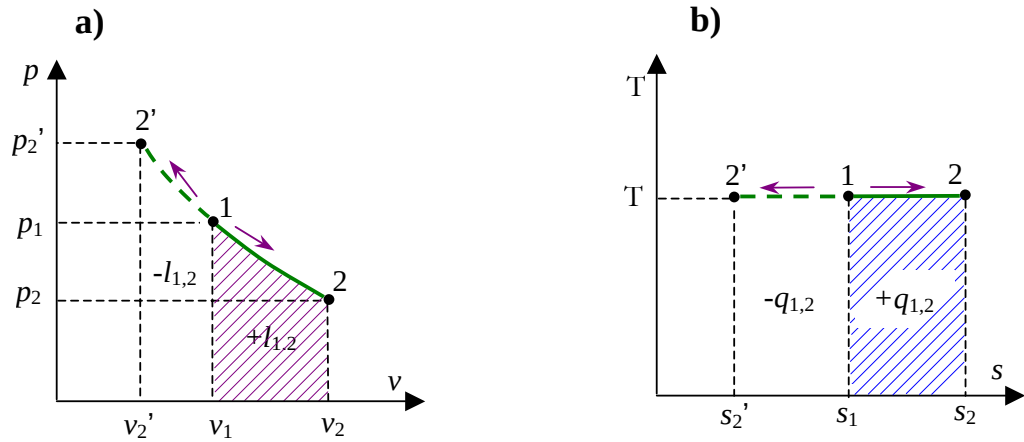
Przemiana izotermiczna $T = const$

Przemiana ta może być realizowana podczas sprężu gazu, przy jednoczesnym, odpowiednim chłodzeniu (dane $l_{1,2}$), lub podczas ogrzewania gazu (dane $q_{1,2}$) przy jednoczesnym wykonywaniu pracy $l_{1,2}$. W gazie doskonałym z uwagi na kaloryczne równanie stanu $u = c_p T$, $i = c_v T$, energia wewnętrzna u i entalpia i pozostają stałe.

Zakładamy, że parametry stanu 1 są znane oraz znana jest $l_{1,2}$ lub $q_{1,2}$. Parametry stanu 2 obliczamy następująco:

- **objętość** v_2 z równania $p v = R T$ mamy

$$p v = const \quad \rightarrow \quad p_1 v_1 = p_2 v_2 \quad \rightarrow \quad v_2 = v_1 \frac{p_1}{p_2} \quad (2.28)$$

Rysunek 2.4. Wykresy przemiany izotermicznej: a) $p - v$, b) $T - s$

- **przyrost entropii** $s_2 - s_1$. Korzystając z (2.16), (2.28) mamy

$$ds = R \frac{dv}{v} = R \frac{dp}{p} \quad (2.29)$$

oraz

$$s_2 - s_1 = R \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) = R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right). \quad (2.30)$$

- **praca przemiany** $l_{1,2}$. Z definicji (2.3) mamy

$$l_{1,2} = \int_{v_1}^{v_2} p dv = RT \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = RT \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) = RT \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \quad (2.31)$$

- **praca techniczna przemiany** $l_{t1,2}$. Z definicji (2.6) mamy

$$l_{t1,2} = \int_{p_1}^{p_2} v dp = RT \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = RT \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = l_{1,2} \quad (2.32)$$

- **energia wewnętrzna i entalpia**. Z definicji (2.20) wynika, że

$$u_2 - u_1 = 0, \quad i_2 - i_1 = 0 \quad (2.33)$$

- Nie jest wciąż znana **ciśnienie** p_2 , które obliczymy z bilansu energii (2.8) lub (2.10)

- Jeśli doprowadziliśmy $q_{1,2}$ jednostek ciepła to z (2.31)

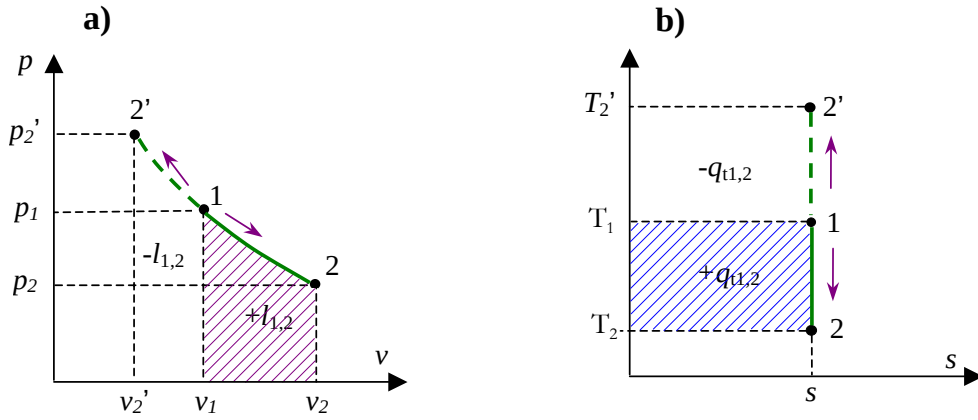
$$q_{1,2} = u_2 - u_1 + l_{1,2} = l_{1,2} = RT \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \quad (2.34)$$

- Jeśli doprowadziliśmy $l_{1,2}$ jednostek pracy to z (2.30) mamy

$$l_{1,2} = u_2 - u_1 + l_{1,2} = q_{1,2} = RT \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \quad (2.35)$$

Przemiana izentropowa $s = \text{const}$

Przemiana izentropowa czynnika doskonałego, to przemiana, podczas której w myśl $\delta q = Tds$, czynnik zmienia swój stan bez wymiany ciepła $\delta q_{1,2} \equiv 0$, lecz z wymianą ciepła przeistaczania $q_{t1,2} \neq 0$. Przemiana taka jest realizowana przez każdy proces sprężania, który zachodzi adiabaticznie ($q_{1,2}$) bez wymiany ciepła z otoczeniem. Do tej przemiany zbliżone są rzeczywiste przemiany sprężania (i rozprężania), które odbywają się w większości maszyn cieplnych, zarówno przepływowych jak i tłokowych.



Rysunek 2.5. Wykresy przemiany adiabaticznej: a) $p - v$, b) $T - s$

Równaniem stanu tej przemiany w gazie doskonałym jest równanie Poissona

$$pv^\kappa = \text{const} \quad (2.36)$$

gdzie $\kappa = c_p/c_v$ - stała Poissona zwana wykładnikiem izentropy.

Zakładamy że parametry stanu 1 są znane oraz zadana jest praca sprężysta $l_{1,2}$. Parametry stanu 2 obliczymy następująco:

- **objętość właściwa v_2**

$$pv^\kappa = \text{const} \quad \rightarrow \quad p_1 v_1^\kappa = p_2 v_2^\kappa \quad \rightarrow \quad \frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad (2.37)$$

- **temperatura T_2**

$$p_1 v_1^\kappa = p_2 v_2^\kappa = p_1 \frac{1}{v_1} v_1^\kappa = p_2 \frac{1}{v_2} v_2^\kappa \quad \rightarrow \quad p_1 v_1 v_1^{\kappa-1} = p_2 v_2 v_2^{\kappa-1} \quad (2.38)$$

po uwzględnieniu $pv = RT$

$$RT_1 v_1^{\kappa-1} = RT_2 v_2^{\kappa-1} \quad (2.39)$$

czyli

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa-1} \quad \text{lub} \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (2.40)$$

- **przyrost entropii $s_2 - s_1 = 0$**
- **praca przemiany $l_{1,2}$.** Jest zadana w tak podstawowym zadaniu stąd, podobnie jak to było w poprzednich zadaniach, może służyć do wyznaczenia nieznanego ciśnienia p_2 (lub objętości v_2). Tak jak poprzednio korzystamy z I Zasady Termodynamiki (2.8)

$$\begin{aligned} l_{1,2} &= q_{1,2} - (u_2 - u_1) = -(u_2 - u_1) = -c_v(T_2 - T_1) = \\ &= c_v(T_1 - T_2) = \frac{R}{\kappa - 1}(T_1 - T_2) = \frac{RT}{\kappa - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

podstawiając (2.40) mamy odpowiednio

$$l_{1,2} = \frac{RT_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa-1} \right] \quad (2.42)$$

lub

$$l_{1,2} = \frac{RT_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \quad (2.43)$$

- **praca techniczna przemiany.** Z bilansu (2.10) wynika, że

$$l_{t1,2} = i_2 - i_1 = \kappa(u_2 - u_1) = \kappa l_{1,2} \quad (2.44)$$

- energia wewnętrzna i entalpia.

$$u_2 - u_1 = l_{1,2}, \quad i_2 - i_1 = l_{t1,2} \quad (2.45)$$

- ciepło przeistaczania

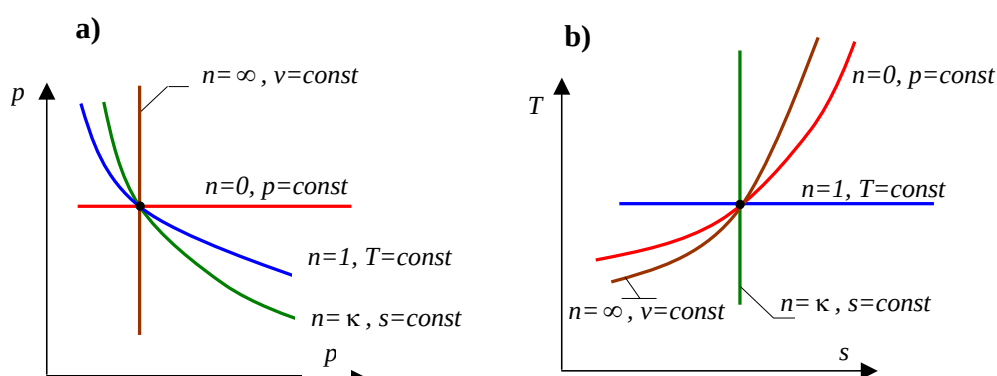
$$q_{t1,2} = \int_{s_1}^{s_2} T ds = s(T_2 - T_1) = sT_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \quad (2.46)$$

2.5 Przemiana Politropowa

Rzeczywiste przemiany adiabatyczne przebiegające bez wymiany ciepła z otoczeniem, nie są odwracalne i w związku z tym nie mogą być izentropowymi $s = \text{const}$. Jeśli dokonamy pomiaru krzywej sprężystej, odpowiadającej przemianie adiabatycznej rzeczywistej to układa się ona wg równania,

$$pv^n = \text{const} \quad (2.47)$$

w którym wykładnik politropy $n \neq \kappa$ zarówno w kierunku $n > \kappa$ oraz $n < \kappa$. Obrazem geometrycznym przemiany politropowej jest politropa (Rys.2.6).



Rysunek 2.6. Politropy o różnych wykładnikach gazów doskonałych o stałym cieple właściwym na wykresach o współrzędnych $p - v$ oraz $T - s$

Okazuje się, że w zależności od wartości n przemiana politropowa może stawać się:

$$\begin{aligned}
n = 0 & \rightarrow \text{izobaryczna,} \\
n = 1 & \rightarrow \text{izotermiczna,} \\
n = \kappa & \rightarrow \text{izentropowa,} \\
n = \pm\infty & \rightarrow \text{izochoryczna.}
\end{aligned}$$

Pozostałe parametry stanu 2 przemiany obliczamy z formuł

$$Tv^{n-1} = \text{const}, \quad Tp^{\frac{n-1}{n}} = \text{const} \quad (2.48)$$

- **Pracę przemiany** obliczamy w analogii do (2.42)

$$l_{1,2} = \frac{RT_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] = \frac{p_1 v_1}{n-1} \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1} \right] \quad (2.49)$$

- **Pracę techniczną** przemiany obliczamy analogicznie do (2.44)

$$l_{t1,2} = n l_{1,2} \quad (2.50)$$

- **Przyrost entropii** właściwej oblicza się poprzez scałkowanie formuły (2.16) stąd

$$s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_n \frac{dT}{T} = c_n \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (2.51)$$

- **Ciepło przemiany** politropowej jest równe

$$q_{1,2} = c_n(T_2 - T_1) = c_v \frac{n - \kappa}{n - 1} = \frac{n - \kappa}{n - 1} (u_2 - u_1) \quad (2.52)$$

zaś równanie

$$c_n = c_v \frac{n - \kappa}{n - 1} \quad (2.53)$$

prowadzi do związku wyznaczającego wykładnik politropy

$$n = \frac{c_n - c_p}{c_n - c_v} \quad (2.54)$$

2.6 Charakterystyczny Diagram Przemian Termodynamicznych (dla gazu doskonałego)

Rodzaj przemiany	Praca kompensowana (absolutna) $l_{1,2}$	Ciepło kompensowane $q_{1,2}$	Praca techniczna przetłaczania $l_{t1,2}$	Ciepło przeistaczania $q_{t1,2}$
Izochoryczna $v = \text{const}$	$l_{1,2} \equiv 0$	$q_{1,2} = u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1)$	$l_{t1,2} = v(p_2 - p_1)$	$q_{t1,2} = ?$
Izobaryczna $p = \text{const}$	$l_{1,2} = p(v_2 - v_1)$	$q_{1,2} = i_2 - i_1 = c_p(T_2 - T_1)$	$l_{t1,2} = 0$	$q_{t1,2} = ?$
Izotermiczna $T = \text{const}$	$l_{1,2} = RT \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$	$q_{1,2} = l_{1,2}$	$l_{t1,2} = l_{1,2}$	$q_{t1,2} \equiv 0$
Izentropowa $s = \text{const}$	$l_{1,2} = \frac{RT_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]$	$q_{1,2} \equiv 0$	$l_{t1,2} = \kappa l_{1,2}$	$q_{t1,2} = s(T_2 - T_1)$

Wykład 3

Przepływy Płynów roboczych z Cykliczną wymianą

3.1 Sposoby wykorzystania czynnika roboczego

Woda, powietrze, para wodna, spaliny, gdy zostają skierowane przez inżyniera do urządzenia przepływowego stają się **czynnikiem roboczym**. Nie są wtedy ważne ich własności optyczne, chemiczne, kulinarne, lecznicze, lecz jedynie ich zdolność akumulowania, transportu i rozładowywania różnych form energii. Czynnik roboczy winien być płynem neutralnym wobec kanałów którymi przepływa, powinien mieć stały skład chemiczny gwarantujący jego długotrwałość. Jego rola w urządzeniach i maszynach przepływowych jest pasywna – ma on być magazynem energii sprężystej, który łatwo jest napełnić, bez strat przetransportować w inne miejsce i sprawnie rozładować. W maszynach przepływowych typu silniki mechaniczne (np. turbiny wodne) decydującą rolę odgrywa energia kinetyczna czynnika, w maszynach cieplnych decydującą rolę odgrywa energia cieplna transportowana przez czynnik. Niniejszy paragraf poświęcony jest, zgodnie z nazwą naszego przedmiotu, maszynom cieplnym, do których należą:

- silniki cieplne
- ziębiarki
- pompy ciepła

Z punktu widzenia **maszyn cieplnych** najważniejsze jest przenoszenie energii sprężystej czynnika roboczego za pomocą jednej z czterech podstawowych przemian:

- izobarycznej ($p = \text{const}$)

- izochorycznej ($v = \text{const}$)
- izotermicznej ($T = \text{const}$)
- izentropowej ($s = \text{const}$)

Aby czynnik roboczy wykonał praktyczne swe zadanie, np. zmienił ciepło pobierane ze źródła ciepła na pracę, potrzeba jest zestawu urządzeń, w których będą zachodziły wyżej wymienione przemiany. W praktyce stosuje się cztery lub więcej maszyn przepływowych połączonych kanałami, poprzez które czynnik przepływa cyklicznie. Droga którą cząstka płynu roboczego musi pokonać w trakcie cyklu ładowania, przeładowania, rozładowania energii jest różna; od kilkunastu centymetrów w silniku tłokowym do kilkunastu kilometrów w bloku parowym elektrowni zawodowej. Stan czynnika roboczego po przejściu cyklu i powrocie w punkt wyjściowy nie zmienia się, posiada on te same parametry termodynamiczne p , T , v , s co oznacza, iż posiada również tę samą energię wewnętrzną. Ta niezmiennosc energii wewnętrznej podkreśla pasywną rolę czynnika roboczego będącego substancją do łatwego przenoszenia energii. Najprostszy obieg elektrowni parowej realizuje dwie przemiany izobaryczne (izobaryczne grzanie w kotle i izobaryczne chłodzenie w kondensatorze) rozdzielone dwiema przemianami izentropowymi (izentropowa ekspansja w turbinie parowej i izentropowa kompresja w pompach).

W 1824 roku Sadi Carnot odkrył, iż maszyny cieplne, aby działać muszą posiadać dwa źródła ciepła: **górne** gdzie czynnik pobiera ciepło q_d (J/kg) i **dolne**, w którym czynnik oddaje ciepło q_w (J/kg). Hipotetyczną maszynę cieplną pracującą tylko z jednym źródłem ciepła nazwano **perpetuum mobile drugiego rodzaju** – w takiej maszynie można by było całe ciepło pobrane ze źródła górnego zamieniać w pracę. Ściśle mówiąc, istnieje możliwość aby ciepło pobrane w źródle górnym całkowicie zamieniać w pracę, ale tylko wtedy gdy temperatura źródła dolnego będzie bardzo niska. Istnienie takiej temperatury zapostulował W.Thompson w 1852 i nazwał ją temperaturą zera absolutnego (-273°C). Warunek istnienia dwóch źródeł ciepła o temperaturach różnych jest dziś prototypem drugiej zasady termodynamiki.

Skoro czynnik roboczy w obiegu utworzonym przez zestaw co najmniej czterech maszyn cieplnych (czterech przemian) powraca cyklicznie do tych samych wartości parametrów termodynamicznych¹ to na diagramach pracy

¹Niezmiennosc energii wewnętrznej i entropii czynnika roboczego po przejściu cyklu nazwał S.Carnot pierwszym i drugim równaniem termodynamiki. We Francji do dzisiaj te warunki nazywane są pierwszym i drugim równaniem Carnota. Równania te stały się prototypem Pierwszej i Drugiej Zasady Termodynamiki.

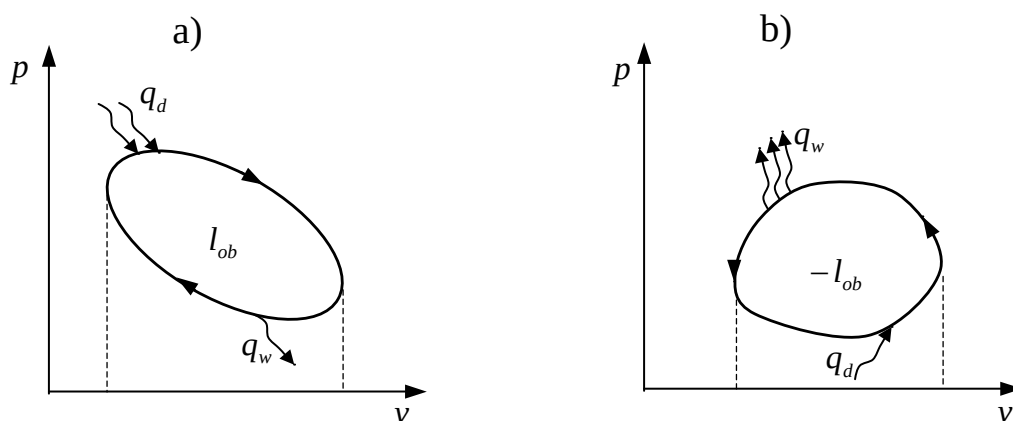
$p-v$ i ciepła $T-s$ powstają **zamknięte krzywe**. Czynnik roboczy posuwając się wzdłuż kanałów zestawu maszyny cieplnej doznaje przemian termodynamicznych, które układają się w:

- **obieg prawobieżny** (silnik cieplny)

albo w

- **obieg lewobieżny** (chłodziarka, pompa ciepła)

Na diagramie 3.2. pokazano schematy działania maszyn cieplnych. Silnik cieplny służy do konwersji części ciepła pobranego w źródle górnym w pracę zewnętrzną. Stąd w obiegach prawobieżnych praca l_{ob} jest oddawana do otoczenia.



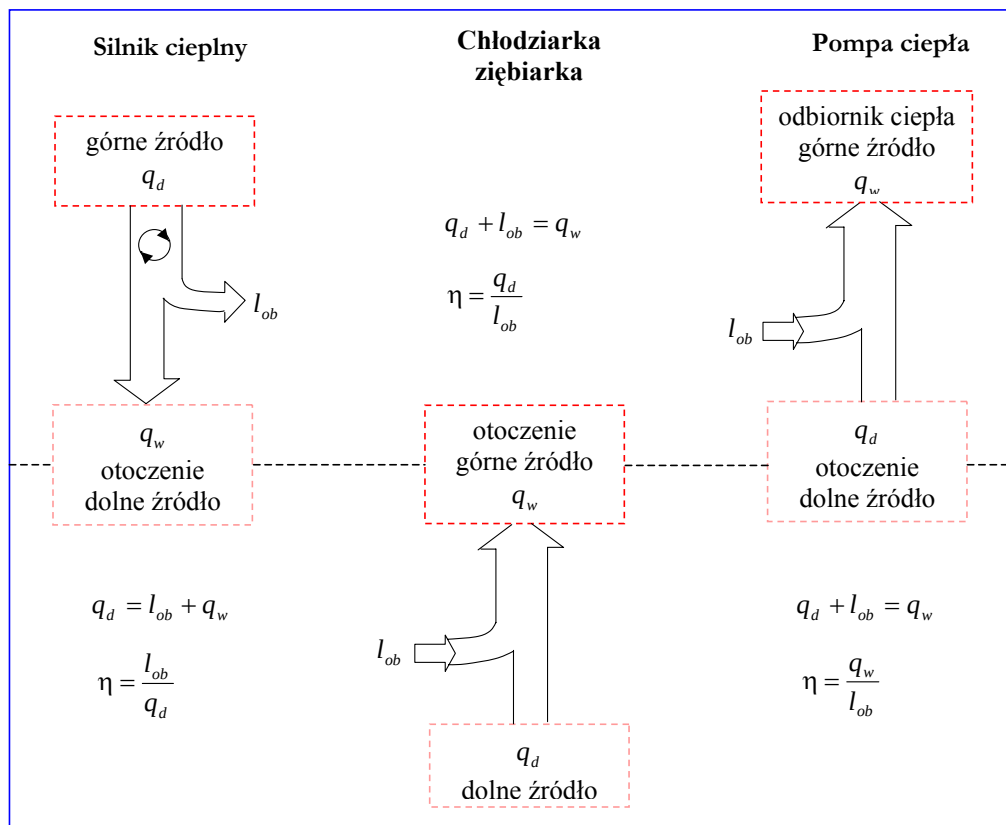
Rysunek 3.1. Szkic prawo - (a) i lewobieżnego (b) obiegu. W obu przypadkach pole objęte krzywą obiegu przedstawia pracę l_{ob} : a) wykonaną przez czynnik $q_d = l_{ob} + q_w$, b) dostarczoną do czynnika $q_d + l_{ob} = q_w$.

$$q_d = l_{ob} + q_w, \quad [J/kg]. \quad (3.1)$$

Natomiast w obiegach lewobieżnych praca l_{ob} musi być włożona do obiegu i dlatego równanie bilansu całego obiegu ma postać:

$$q_d + l_{ob} = q_w, \quad [J/kg]. \quad (3.2)$$

Ciepło wyprowadzane q_w , w obiegu lewobieżnym jest większe od ciepła pobranego q_d o pracę włożoną. Pobranie ciepła dokonuje się w źródle dolnym niskotemperaturowym, zaś oddanie ciepła w źródle wysokotemperaturowym.



Rysunek 3.2. Zasada działania prawo- i lewobieżnych maszyn cieplnych

Urządzenia te należą do kategorii maszyn roboczych, do których napędu potrzebny jest silnik.

* Jeśli temperatura źródła dolnego jest niższa od temperatury otoczenia oraz źródłem górnym pobierającym ciepło od czynnika jest otoczenie to takie urządzenia noszą nazwę **ziębiarek** (chłodnic). Celem takiego urządzenia jest ciągle pobieranie ciepła ze źródła dolnego i przez to utrzymywanie go w temperaturach niższych od temperatury otoczenia.

* Jeśli temperatura źródła dolnego jest temperaturą otoczenia a celem urządzenia jest przekazywanie ciepła źródłu górnemu to takie urządzenie nosi nazwę **pompy ciepła**.

Pierwowzorem obiegów cieplnych jest obieg Carnota składający się z dwóch przemian izotermicznych i dwóch przemian izentropowych. Sprawność obiegu Carnota zależy tylko od stosunku temperatur źródła dolnego i źródła

górnego:

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_d}{T_g}.$$

3.2 Przepływ z pobieraniem ciepła na grzanej ścianie

Ilościowe zamodelowanie strumienia ciepła $\dot{Q}_{1,2}$ pobieranego (oddawanego) na grzanej (chłodzonej) ścianie jest złożone i do końca nierozpoznane. Tabela 3.2 pokazuje cztery możliwości zmiany energii cieplnej czynnika roboczego, z czego dwa dotyczą pośredniego przekazu ciepła przez powierzchnię rozdzielającą, a dwa dotyczą bezpośredniego dostarczenia energii poprzez mieszanie i uwalnianie energii chemicznej.

	Pośrednie (powierzchniowe) za pośrednictwem powierzchni rozdzielającej	Bezpośrednie (objętościowe) z mieszaniem czynników
grzanie	przy pomocy spalin w kotłach, podgrzewaczach powietrza	komory spalania turbin gazowych
chłodzenie	w powierzchniowych wymiennikach ciepła typu kondensator	Chłodzenie czynnika w stanie gazowym poprzez wtrysk zimnego czynnika w stanie płynnym

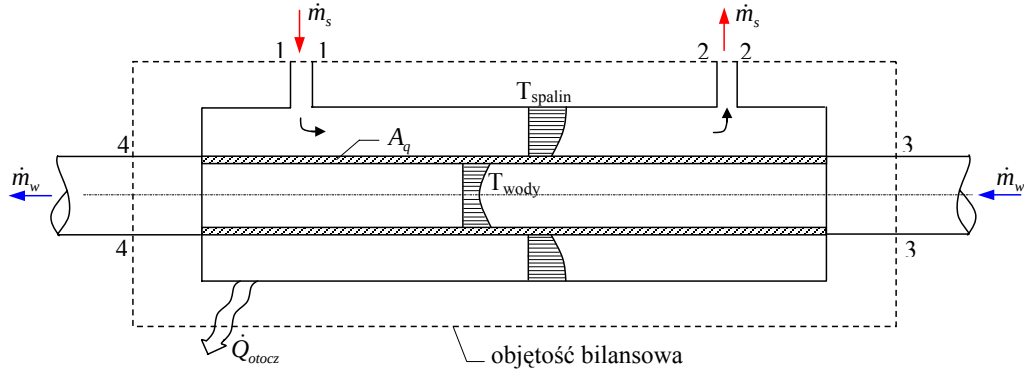
Tablica 3.1. Sposoby doprowadzania ciepła (energii cieplnej) do czynnika roboczego

Transport energii cieplnej, a szczególnie tej przenoszoną drogą radiacyjną, podlega nieco ogólniejszym prawom niż transport energii niesionej z substancją czynnika roboczego (1.26)

$$\dot{m}i_{e1} + \dot{Q}_{1,2} + \dot{L}_{1,2} = \dot{m}i_{e2} \quad (3.3)$$

w kanale przepływowym z wylotem 2 – 2 i wlotem 1 – 1. Na rys 3.3 pokazano wymiennik powierzchniowy, którego zadaniem jest izobaryczne ogrzewanie wody kosztem izobarycznego chłodzenia spalin. W tym przypadku traktujemy ścianki wymiennika A_q jako całkowicie przypuszczalne dla energii cieplnej, stąd bilans energii jest dokonywany nie dla kanału przepływowego, lecz dla objętości bilansowej. Bilans ten wynosi:

$$\dot{m}_s i_{s1} + \dot{m}_w i_{w3} = \dot{m}_s i_{s2} + \dot{m}_w i_{w4} + \dot{Q}_{otocz} \quad (3.4)$$



Rysunek 3.3. Schemat działania powierzchniowego wymiennika ciepła

gdzie: $\dot{m}_s$ – $[kg/s]$ strumień gorących spalin, $\dot{m}_w$ – strumień wody podgrzewanej, i_{s1}, i_{s2} – entalpia całkowita spalin na wlocie 1 – 1 i wylocie 2 – 2, odpowiednio i_{w3}, i_{w4} – entalpia całkowita wody na wlocie 3 – 3 i wylocie 4 – 4.

Słownie bilans ten wypowiadamy: **Strumień energii oddawanej przez spaliny jest równy strumieniowi energii pobranej przez wodę, pomniejszonemu przez straty ciepła do otoczenia.** Z punktu widzenia grzanego czynnika roboczego przepływającego nad grzаныmi ściankami A_q między wlotem 3 – 3 i wylotem 4 – 4 ciepło pobrane q_d przez czynnik roboczy, zgodnie z ogólnym bilansem w kanale (3.3).

$$q_d = q_{3,4} = i_{w3} - i_{w4} \quad (J/kg \text{ wody}) \quad (3.5)$$

Mimo prostego bilansu energii przekazywanej przez spaliny wodzie opis procesu przekazywania ciepła należy do najtrudniejszych zadań numerycznej termodynamiki. Do najtrudniejszych zadań praktycznych należy ustalenie powierzchni wymiennika A_q wystarczającej do wymiany strumienia ciepła, oraz ustalenia temperatury ścianek wymiennika różnych na ogół od T_{spalin} i T_{wody} . W źle zaprojektowanym wymienniku temperatura spalin T_2 jest mniejsza od temperatury wody na wlocie $T_2 < T_3$, co oznacza, że przez jakiś czas woda podgrzewa spaliny a nie odwrotnie.

Znając strumień ciepła pobrany przez czynnik roboczy $\dot{Q}_{3,4} = \dot{m}_w q_d$ można próbować dobrać potrzebną powierzchnię A_q w oparciu o **równanie Newtona (1773)**

$$\dot{Q}_{3,4} = \dot{m}_w A_q \alpha (T - T_{wall}) \quad (3.6)$$

gdzie $A_q [m^2]$ – powierzchnia grzana, α – **średni współczynnik wnika-**

nia ciepła $[W/m^2K]$, T - średnia temperatura czynnika roboczego między przekrojem 3–3 i 4–4, T_{wall} - średnia temperatura ścianki A_q . Wyjaśnienie roli integralnego współczynnika wnikania α wymaga zrozumienia charakteru wymiany ciepła między płynem a ścianką. Współczynnik α wyznaczany jest empirycznie i jego wartości wahają się od $0.1 \div 500 [W/m^2K]$ w gazach, $500 \div 700 [W/m^2K]$ w cieczach oraz $2000 \div 10000 [W/m^2K]$ w cieczach wrzących.

3.3 Przepływ z pobieraniem pracy na ruchomej ścianie

Jeśli rozpatrywane powyżej **pojęcie przekazywania ciepła** w procesie przemiany izobarycznego grzania czynnika roboczego jest skomplikowane i do końca nierozpoznane to podobna sytuacja odnosi się do **pojęcia przekazywania pracy** w procesie izentropowej kompresji czynnika roboczego. **Przekazywanie pracy** do czynnika lub z czynnika roboczego do otoczenia zachodzi na ruchomych powierzchniach (ściankach) o polu A_u .

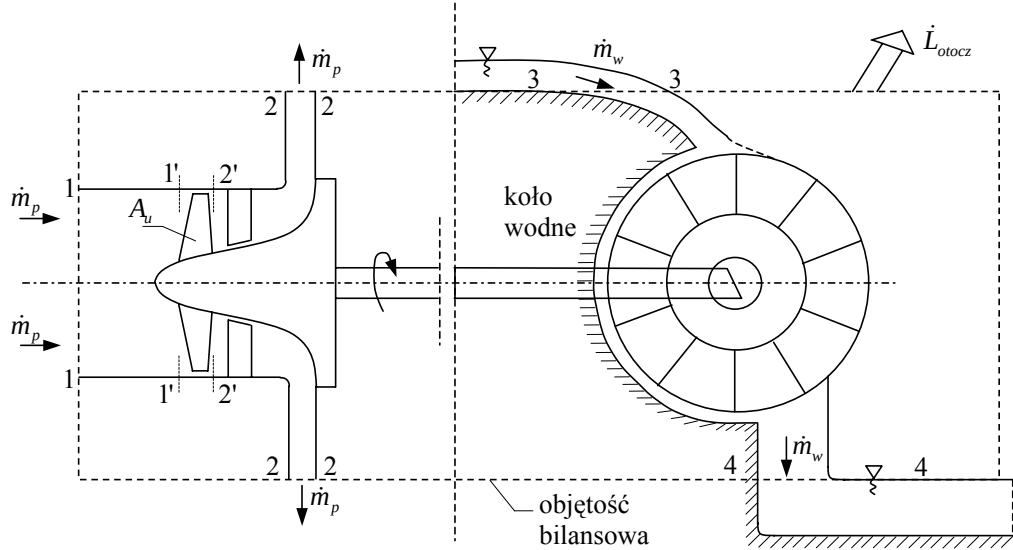
Ze względu na rodzaj urządzenia realizującego przekazanie pracy w przemianie izentropowego sprężu lub izentropowej ekspansji mamy, w pewnej analogii do sposobów przekazywania ciepła pokazanym w tablicy 3.2, dwa sposoby przekazywania pracy czynnikowi roboczemu:

- **bezpośrednie** – w którym praca zewnętrzna zostaje wprost przekształcona w energię wewnętrzną i energię sprężu. Taka forma ma miejsce w silnikach i sprężarkach tłokowych oraz w strumienicach.
- **pośrednie** – w których praca zewnętrzna zostaje najpierw zamieniona na energię kinetyczną czynnika a następnie poprzez odpowiednie jego wyhamowanie w energię wewnętrzną. Taka forma ma miejsce w maszynach wirnikowych typu sprężarki wirnikowe, turbiny, etc.

Pośrednie przekazywanie pracy, podobnie jak pośrednie przekazywanie ciepła, ma swą specyfikę, którą omówimy na przykładzie dmuchawy napędzanej kołem wodnym (Rys.3.4).

Równanie bilansu energii w objętości bilansowej ma identyczną do (3.4) postać wynikającą z faktu, że strumień energii wody przekazywany przez wał do powietrza jest równy strumieniowi energii pobranej przez powietrze oraz pewnym stratom przekazywanej pracy $\dot{L}_{otocz}$.

$$\dot{m}_w i_{w3} + \dot{m}_p i_{p1} = \dot{m}_w i_{w4} + \dot{m}_p i_{p2} + \dot{L}_{otocz} \quad (3.7)$$



Rysunek 3.4. Schemat działania powierzchniowego wymiennika pracy. Czynnik roboczy dmuchawy (powietrze) otrzymuje energię kinetyczną na wirujących łopatkach o powierzchni A_u i konwertuje ją w spręż i energię wewnętrzną. Czynnikiem roboczym napędzającym koło jest woda

gdzie: h_{w3}, i_{w4} - entalpia całkowita wody, i_{p1}, i_{p2} - entalpia całkowita powietrza.

Z punktu widzenia czynnika roboczego podlegającego przemianie izentropowego sprężu w dmuchawie, ilość pracy pobrana na ściankach ruchomych A_u wynosi:

$$\dot{L}_{1,2} = \dot{m}_p(i_{p1} - i_{p2}) = \dot{m}_p l_d \quad (3.8)$$

lub na jeden kilogram ($l_d = l_{1,2} = \dot{L}_{1,2}/\dot{m}_p$)

$$l_d = l_{1,2} = i_{p2} - i_{p1} \quad (3.9)$$

Pomimo iż bilans (3.7) jest zawsze prawdziwy obliczanie pracy przekazywanej czynnikowi robocznemu na wirujących łopatkach o powierzchni A_u jest zadanie niezwykle trudnym i praktycznie nie jest rozwiązane.

Pytaniem głównym jest pytanie o wielkość powierzchni ruchomych A_u wystarczających do przekazania strumienia energii $\dot{L}_{1,2} = \dot{L}_{3,4} - \dot{L}_{otocz}$. Odpowiedź na to pytanie dostarcza **równanie Eulera** (1773), które mówi, iż znając strumień pracy pobierany przez czynnik roboczy $\dot{L}_{1,2} = \dot{m}_p l_d$ można określić potrzebną powierzchnię A_u w oparciu o następujące równanie (patrz (1.18)):

$$\dot{L}_{1,2} \equiv \dot{L}_{1',2'} = \vec{R}_{1',2'} \cdot \vec{u} = \left[\dot{m}_p(\vec{c}_{c1'} - \vec{c}_{c2'} - \vec{N}_{1'} - \vec{N}_{2'} + \vec{F}_M) \right] \cdot \vec{u}, \quad (3.10)$$

gdzie: $\vec{R}_{1',2'}$ - siła naporu wirującej powierzchni A_u na czynnik roboczy, $\vec{u}$ - liniowa prędkość unoszenia punktu wirnika, w którym zaczepiona jest wypadkowa siła naporu $\vec{R}_{1',2'}$, $\vec{c}_{c1'} - \vec{c}_{c2'}$ - średnie prędkości w przekrojach $1' - 1'$ i $2' - 2'$ przed i za łopatkami wirnika, $\dot{m}_p$ - strumień masy czynnika roboczego, $\vec{N}_{1'}, \vec{N}_{2'}$ - siły naporu pochodzące od średniego ciśnienia i pola powierzchni kanału, $\vec{F}_M$ - siła masowa objętości masy zawartej między przekrojem $1' - 1'$ i $2' - 2'$ (zwykle pomijana).²

3.4 Rodzaje obiegów czynnika roboczego

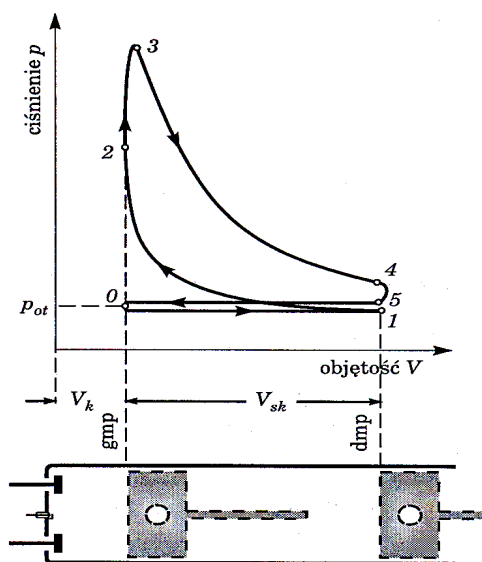
Będziemy zajmować się obiegami, podczas których nie zachodzi przejście fazowe czynnika roboczego. Takie obiegi występują w następujących maszynach cieplnych:

- Silniki spalinowe
 - tłokowe
 - * o spalaniu wybuchowym (obieg Otta)
 - * o spalaniu w stałym ciśnieniu (obieg Diesla, obieg Sieligera-Sabathego)
 - wirnikowe
 - * turbiny gazowe (obieg Braytona)
 - * z tłokami wirującymi (Wankla)
 - odrzutowe
 - * przepływowe
 - * rakietowe
- Chłodziarka powietrzna (obieg Joule'a)
- Pompa ciepła (obieg Joule'a)

²We wzorze Eulera (3.10), w przeciwieństwie do wzoru Newtona (3.6), nie występuje w sposób jawny powierzchnia wymiany pracy A_u , stąd jej wyznaczenie przebiega zwykle w sposób iteracyjny. Założenie zbyt małej powierzchni A_u koniecznej do odbioru mocy koła wodnego spowoduje, iż sprężarka będzie się coraz szybciej obracała aż w końcu ulegnie zniszczeniu konstrukcja najsłabszego elementu układu.

Obieg Otta

Realizowany jest w silniku tłokowym (Rys 3.5) w trakcie czterech suwów tłoka. Podczas ruchu tłoka z położenia g_{mp} do położenia d_{mp} zwiększa się objętość w cylindrze i jest do niego zasysana mieszanka paliwowo-powietrzna (linia 0-1). Podczas powrotnego suwu tłoka z d_{mp} do g_{mp} (krzywa 1-2) mieszanka poddawana jest kompresji i sprężaniu w wyniku, czego zwiększa się temperatura do T_2 . Gdy tłok znajduje się w punkcie „ g_{mp} ” zapala się od iskry mieszanka paliwowo-powietrzna i następuje jej szybkie spalanie (linia 2-3). W wyniku tego następuje gwałtowny wzrost temperatury i ciśnienia. Następnie, podwyższone ciśnienie porusza tłok z pozycji g_{mp} do d_{mp} (linia 3-4) i wykorzystywana jest praca mechaniczna kosztem obniżenia ciśnienia i temperatury. W d_{mp} (punkt 4) temperatura i ciśnienie spalin są na tyle niskie, iż nie mogą być wykorzystywane do wytwarzania pracy. Po otwarciu zaworu wylotowego są usuwane spaliny i następuje spadek ciśnienia (linia 4-5). Podczas powtórnego ruchu tłoka z d_{mp} do g_{mp} (linia 5-0) zawór wylotowy pozostaje otwarty tak, aby została usunięta reszta spalin. Następnie zostaje zamknięty zawór wylotowy a wlotowy otwarty. Podczas suwu tłoka z g_{mp} do d_{mp} następuje ponowne zassanie surowej mieszanki (linia 0-1).

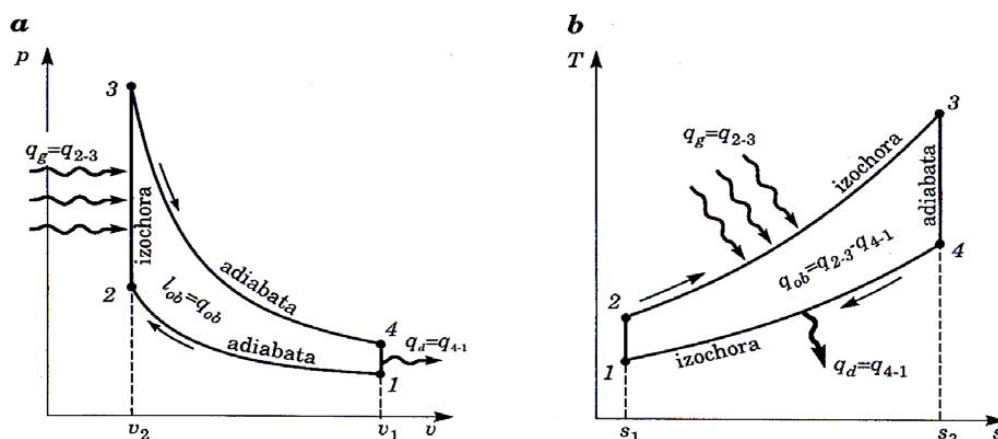


Rysunek 3.5. Wykres indykatorowy silnika spalinyowego czterosuwowego z zapłonem iskrowym: 0 - zamknięcie zaworu wylotowego i otwarcie dolotowego, 1 - zamknięcie zaworu dolotowego i początek kompresji, 2 - zapłon paliwowej mieszanki, 3 - koniec spalania, 4 - otwieranie zaworu wylotowego, 5 - koniec spadku ciśnienia

Obiegiem który modeluje pracę czterosuwowego silnika tłokowego jest obieg Otta (1867), który składa się z dwu izentrop podzielonych dwiema izochorami³.

Na rysunku 3.6 przedstawiono obieg Otta na diagramach pracy i ciepła. Składa się on z następujących przemian sprężystych:

- 1-2 – kompresja izentropowa
- 2-3 – izochoryczne doprowadzanie ciepła
- 3-4 – ekspansja adiabatyczna
- 4-1 – izochoryczne odprowadzanie ciepła



Rysunek 3.6. Wykres obiegu Otta na digramie pracy a) i diagramie ciepła b)

Jeśli ciepło doprowadzane $q_d = q_{2,3}$ podczas przemiany izochorycznej, zaś ciepło wyprowadzane $q_w = q_{4,1}$ oraz stosunek kompresji $\varepsilon = \nu_1/\nu_2 = \nu_3/\nu_4$ to sprawność obiegu określa następująca formuła Witza:

$$\eta_{Otto} = 1 - \frac{q_w}{q_d} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}} \quad (3.11)$$

gdzie $\kappa = c_p/c_v$ dla spalin traktowanych jako gaz doskonały. Sprawność η_{Otto} zależy od stosunku kompresji ε i wykładnika Poissona gazu biorącego udział w obiegu. Dla powietrza, $\kappa = 1.4$, wynosi ona od $\eta_{Otto} = 0.243$ dla $\varepsilon = 2$ do $\eta_{Otto} = 0.602$ dla $\varepsilon = 10$. Doświadczenia wykazują, iż istnieje

³Prototypem silników ze spalaniem wybuchowym jest maszyna gazowa Lenoire'a –Otto (1860 – 1867). Był to silnik bezkorbowy z tzw. tłokiem swobodnym, który był napełniany substratami przy ciśnieniu otoczenia podczas suwu pierwszego. Po wybuchu następowało rozprężenie spalin podczas reszty tego suwu. W czasie drugiego suwu następowało usunięcie spalin na zewnątrz. Maszyna była dwusuwowa bez wstępnego sprężenia [218].

pewna krytyczna wartość $\varepsilon = \varepsilon_{kryt}$, której przekroczenie powoduje szkodliwe dla silnika „stukanie”. Wartość ε_{kryt} zależy od konstrukcji silnika i rodzaju paliwa i np. dla benzyny waha się $\varepsilon_{kryt} = 7 \div 12$.

Spaliny odprowadzane z silnika mają stosunkowo wysokie ciśnienie około $0,3\text{MPa}$ i temperaturę rzędu 600°C . Tej wysokiej energii odpadowej nie można już wykorzystać do wytworzenia pracy w silnikach tłokowych, co wiązałoby się z koniecznością wydłużenia cylindra i suwu tłoka. Aby wykorzystać energię spalin wylotowych należy na wylocie wstawić niewielką turbinę gazową, która będzie wspomagała tłoczenie świeżego powietrza (turbodoładowanie) [12],[74],[146].

Obieg Diesla

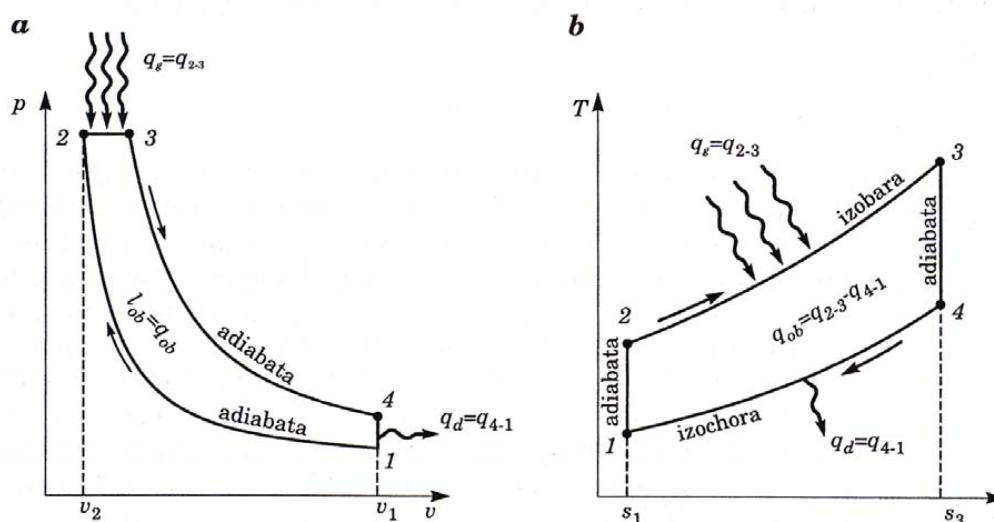
Silniki wtryskowe Diesla (zwane silnikami wysokoprężnymi) różnią się od silników wybuchowych Otta sposobem podawania paliwa. W silnikach wybuchowych używa się mieszanki paliwowo – powietrznej, która po kompresji zapala się od iskry a spalanie odbywa się gwałtownie przy prawie niezmienionej objętości. W silniku wtryskowym Diesla kompresji podlega samo powietrze z resztą spalin. Na krótko przed położeniem zwrotnym otwiera się zawór paliwowy, przez który wtryskuje się ciekłe paliwo pod wysokim ciśnieniem $20 - 60\text{MPa}$, z prędkością $200 - 400\text{m/s}$. Paliwo rozpyla się, odparowuje i zapala bez udziału obcych źródeł ciepła, bowiem temperatura powietrza przy końcu kompresji jest odpowiednio wyższa od temperatury samozapłonu paliwa. Proces spalania w silniku Diesla przebiega izobarycznie. Na rys 3.7. pokazano obieg Diesla składający się z takich przemian sprężystych jak:

- 1 - 2 – kompresja adiabatyczna powietrza
- 2 - 3 – izobaryczne doprowadzanie ciepła
- 3 - 4 – ekspansja adiabatyczna
- 4 - 1 – izochoryczne odprowadzanie ciepła (usunięcie spalin)

O sprawności silnika Diesla decyduje stosunek kompresji $\varepsilon = v_1/v_2 = v_3/v_4$ oraz stopień obciążenia $\varphi = v_3/v_2 = V_3/V_2$. Dla gazu doskonałego o wykładniku adiabaty κ sprawność określa wzór Diesla (1870)

$$\eta_{Diesel} = 1 - \frac{q_w}{q_d} = 1 - \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}} \cdot \frac{\varphi^{\kappa} - 1}{\varphi - 1} \quad (3.12)$$

Wartość stopnia obciążenia waha się od 1 do 3,5. Ponieważ wzrost ε i zmniejszenie φ zwiększają sprawność energetyczną obiegu Sieliger i Sabathi usprawnił proces doprowadzania ciepła tak, aby początkowo odbywało się ono izochorycznie a dopiero później izobarycznie [180],[369].



Rysunek 3.7. Wykres obiegu Diesla

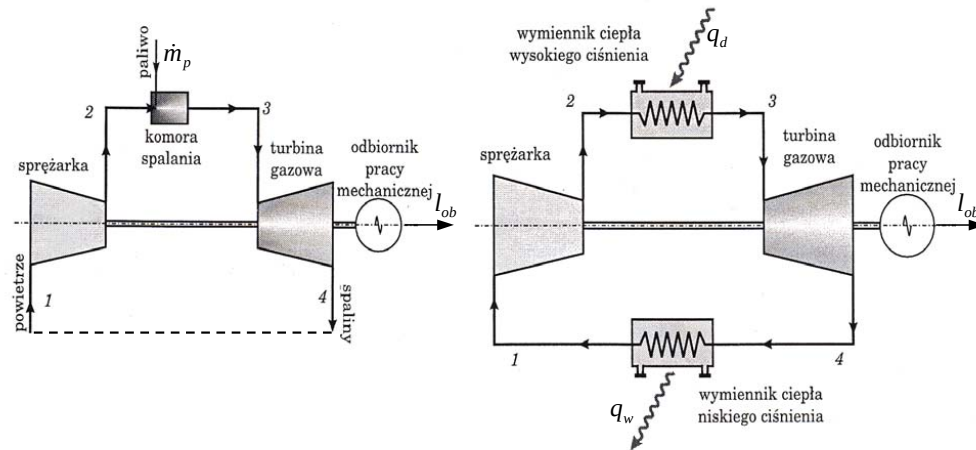
Obieg Braytona turbiny gazowej

W silnikach spalinowych tłokowych duża bezwładność mechanizmu korbowego jest przyczyną strat pracy mechanicznej. Silniki spalinowe wirnikowe pracują w wyniku ciągłego przepływu czynnika roboczego, stąd uzyskać w nich można dużą moc jednostkową ($l_{1,2}$). W turbinach gazowych lepsze jest również wykorzystywanie procesu ekspansji, bowiem proces rozprężania czynnika może być doprowadzony do ciśnienia otoczenia, przez co temperatura spalin odlotowych również spada. Wadą turbin jest to, iż z uwagi na rozłożenie procesu izentropowej ekspansji wzdłuż osi turbiny, łopatki pierwszego i drugiego stopnia narażone są na działanie wysokich temperatur dochodzących, we współczesnych konstrukcjach, nawet do 1500°C . Obecnie na łopatki pierwszego stopnia stosowane są specjalne stopy monokrystaliczne, zaś stopnie drugi i trzeci są chłodzone powietrzem.

Na rys. 3.8 pokazano zestaw aparatów realizujących dwie izentropowe przemiany (sprężarka i turbina) oraz dwie izobaryczne: grzanie (komora spalania) i chłodzenie (wymyennik ciepła lub otoczenie).

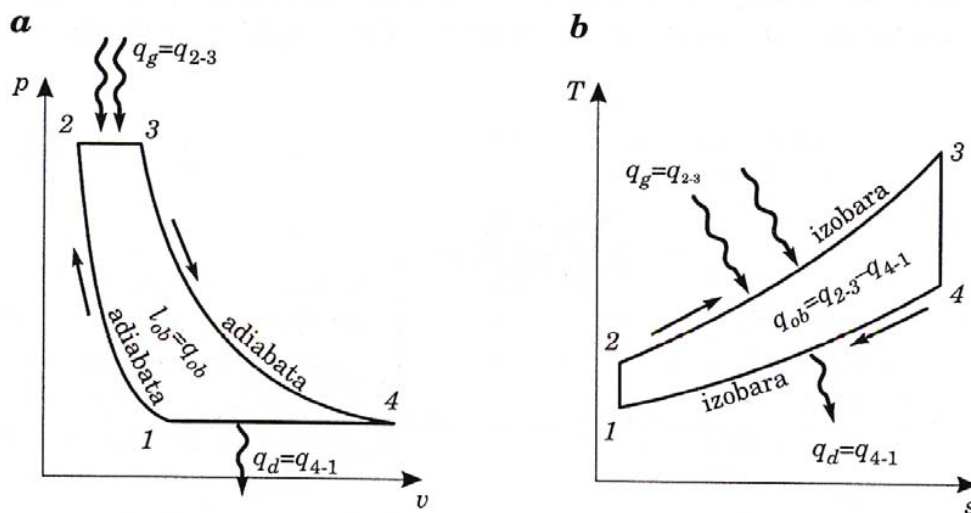
W turbinach gazowych o obiegu otwartym, paliwem jest gaz naturalny lub syntezowany (węglowy – produkt zgazowywania) oraz paliwo ciekłe. W turbinach o obiegu zamkniętym można stosować czynnik roboczy o lepszych właściwościach np. niektóre gazy szlachetne (H_2, Ar).

Obieg Braytona zestawu turbiny gazowej pokazano na rysunku 3.9. Składa się on z następujących przemian:



Rysunek 3.8. Schemat turbiny gazowej; a) o układzie otwartym – brak chłodzenia czynnika roboczego, bowiem spaliny wyrzucane są do otoczenia, b) o układzie zamkniętym – z chłodzeniem czynnika roboczego.

- 1 - 2 – sprężanie izentropowe
- 2 - 2 – izobaryczne doprowadzanie ciepła
- 3 - 4 – rozprężanie izentropowe (adiabaticzne)
- 4 - 1 – izobaryczne odprowadzanie ciepła



Rysunek 3.9. Obieg Braytona: a) wykres pracy $p - v$, b) wykres ciepła $T - s$

W obiegu otwartym chłodzenie spalin 4 – 1 następuje w naturalnym

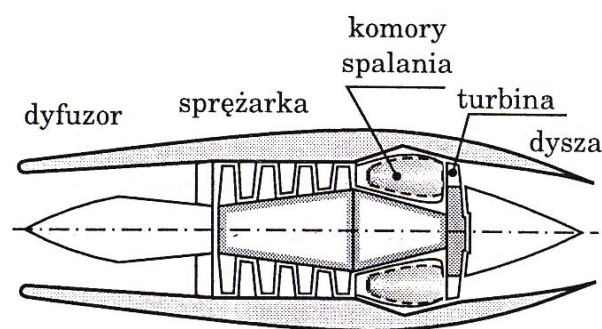
otoczeniu poza obiegiem. Sprawność obiegu Braytona zależy od stosunku sprężania $\xi = p_1/p_2$ i obliczana jest wg formuły G.B. Braytona (1876):

$$\eta_B = 1 - \frac{1}{\xi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \quad (3.13)$$

Rzeczywiste obiegi współczesnych turbin gazowych⁴ są bardziej skomplikowane: stosuje się w nich, bowiem regeneracyjny podgrzew paliwa, chłodzenie międzystopniowe, bezpłomieniowe spalanie w sekwencyjnych komorach spalania, wtrysk pary wodnej oraz inne zabiegi mające na celu podniesienie sprawności, dyspozycyjności i trwałości urządzenia [44],[232],[325].

Silniki odrzutowe

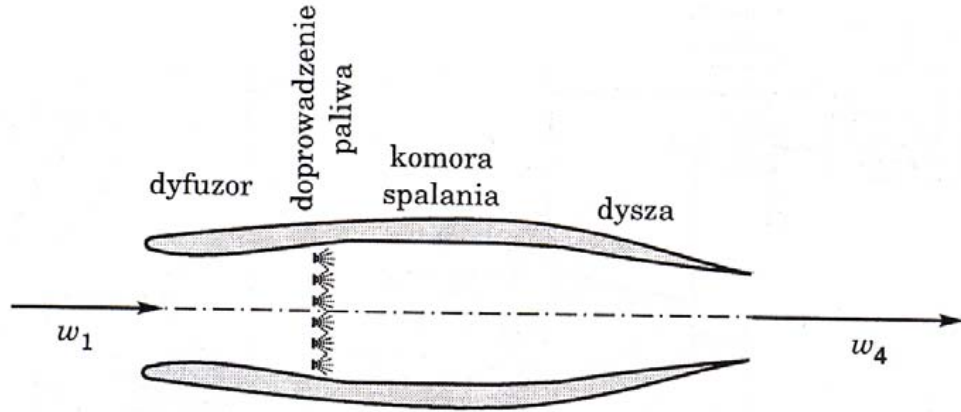
Realizowany jest w nich obieg otwarty Braytona z tym, iż izentropowy spręż dokonyuje się nie w skomplikowanym urządzeniu typu sprężarka, lecz w prostym kanale o kształcie dyfuzora. Z kolei ekspansja zachodzi nie w turbinie, lecz w prostym kanale o kształcie konfuzora, bowiem celem głównym jest osiągnięcie dużej prędkości względnej w_4 . Aby zwiększyć sprawność ruchową stosuje się dziś, oprócz kompresji w dyfuzorze dodatkowy spręż w sprężarce napędzanej turbiną gazową (Rys.3.10).



Rysunek 3.10. Schemat silnika turboodrzutowego

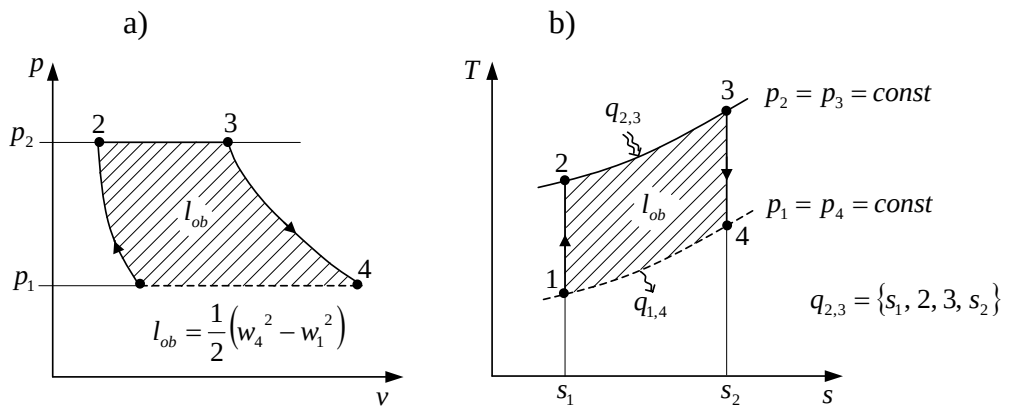
Pierwowzorem silnika turboodrzutowego jest rura Lorina (1913) (Rys.3.11), na którym zaznaczono przekroje odpowiadające charakterystycznym czterem przemianom.

⁴Współczesnymi turbinami stacjonarnymi o największej mocy są:
 GT26 (ABB), $N_e = 265MW$, $\dot{m}_s = 562kg/s$, $T_4 = 640^{\circ}C$
 V94.3A (Siemens), $N_e = 260MW$, $\dot{m}_s = 660kg/s$, $T_4 = 581^{\circ}C$
 501G (Westinghouse), $N_e = 249MW$, $\dot{m}_s = 543kg/s$, $T_4 = 604^{\circ}C$



Rysunek 3.11. Schemat silnika odrzutowego. Prędkość bezwzględna na wlocie $\vec{c}_1 = 0$. Stąd $\vec{w}_1 = -\vec{u}$, prędkość względna jest równa prędkości samolotu.

Ponieważ realizuje się tu obieg Braytona pozostają w mocy zależności tego obiegu, iż praca obiegu zostaje w tym przypadku zużyta na wytworzenie dużej energii kinetycznej opadających spalin (Rys.3.12).



Rysunek 3.12. Przemiany zachodzące w rurze Lorina; a) diagram $p - v$, b) diagram $T - s$

W przypadku silnika odrzutowego sprawność energetyczna obiegu $\eta = l_{ob}/q_{2,3}$ nie jest tak ważna jak ważny jest stosunek pracy wykonywanej $l_{1,4}$ przez siłę ciągu do pracy obiegu l_{ob} .

$$\eta_z = \frac{\dot{L}_{1,4}}{\dot{L}_{ob}} = \frac{l_{1,4}}{l_{ob}} \quad (3.14)$$

Pracę siły ciągu obliczymy w oparciu o równanie bilansu energii między wlotem 1 – 1 i wylotem 4 – 4

$$\dot{m} \left(c_p T_1 + \frac{w_1^2}{2} \right) + \dot{Q}_{2,3} + \dot{L}_{1,4} = \dot{m} \left(c_p T_4 + \frac{w_4^2}{2} \right) \quad (3.15)$$

oraz równanie Eulera (3.10) określające pracę siły ciągu (czyli moc użyteczną ciągu) jako:

$$\dot{L}_{1,4} = \dot{m} \cdot l_{1,4} = \vec{R} \cdot \vec{u} = [\dot{m} (c_1 - c_4) + p_1 A_1 - p_2 A_2] \cdot u \quad (3.16)$$

Prędkość bezwzględna strumienia na wlocie do kanału wynosi $c_1 = 0$, ($\vec{c} = \vec{u} + \vec{w}$) na wylocie zaś $c_4 = w_4 - w_1$. Równanie Eulera dla $p_1 = p_2 = p_{otocz}$ i $A_1 \approx A_2$ ma postać:

$$\dot{L}_{1,4} = Ru = R w_1 = \dot{m} (w_4 - w_1) w_1 \quad (3.17)$$

Natomiast strumień ciepła doprowadzonego $\dot{Q}_{2,3}$ pochodzi od ciepła reakcji spalania paliwa i jest równy:

$$\dot{Q}_{2,3} = \dot{m}_{pal} W_d \quad (3.18)$$

gdzie $\dot{m}_{pal}$ $[kg/s]$ - masowy strumień paliwa, W_d $[J/kg]$ - wartość opałowa kilograma paliwa.

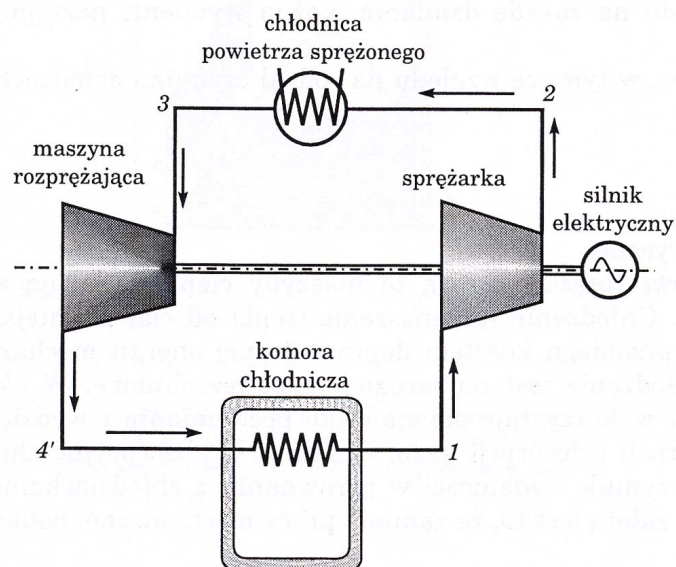
Stosunek określony równaniem (3.14)

$$\eta_z = \frac{\dot{L}_{1,4}}{\dot{L}_{ob}} = \frac{l_{1,4}}{l_{ob}} = \frac{(w_4 - w_1) w_1}{\frac{1}{2} (w_4^2 - w_1^2)} = \frac{2}{1 + \frac{w_4}{w_1}} \quad (3.19)$$

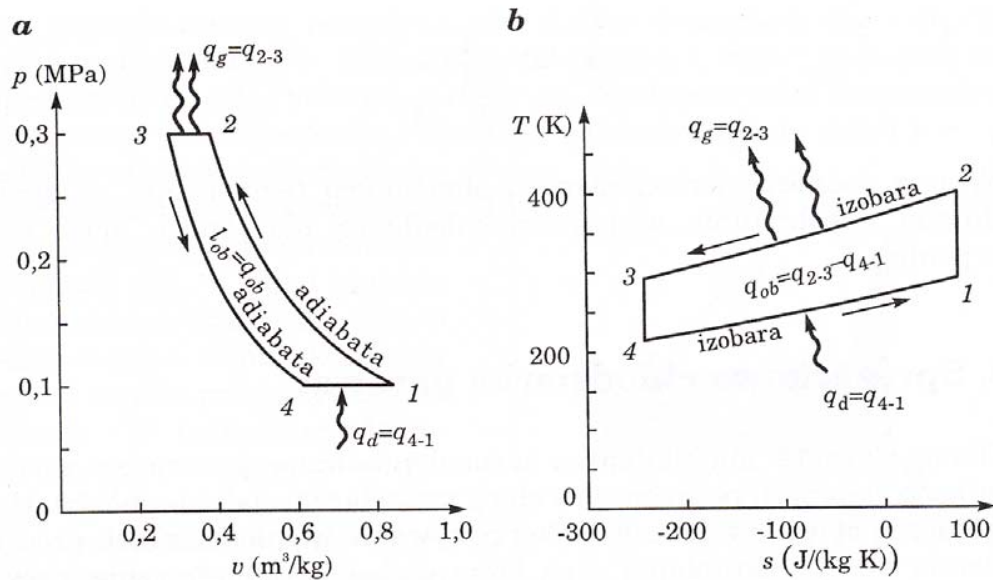
nazywamy sprawnością napędową silnika odrzutowego. Okazuje się, że ta sprawność w dużej mierze zależy od sprężu w dyfuzorze $\varepsilon = p_2/p_1$. Aby spręż zwiększyć w dyfuzor wstawia się sprężarkę (osiową, promieniową) połączoną jednym wałem z jedno-, dwustopniową turbiną umieszczoną w dyszy (Rys.3.10) [362].

Obieg Joule’a w ziębiarce

Powietrze jako czynnik roboczy chłodziarki jest rzadko wykorzystywane – stosuje się je w specjalnych maszynach chłodniczych np. do klimatyzacji samolotów. Jeśli bowiem podczas rozprężania czynnika spadnie poniżej temperatury otoczenia to można pobrać ciepło np. w komorze chłodniczej (ze źródła dolnego). Następnie dokonuje się sprężu czynnika tak, aby jego



Rysunek 3.13. Schemat chłodziarki powietrznej realizującej obieg Joule'a

Rysunek 3.14. Wykres obiegu Joule'a; a) diagram pracy $p - v$, b) diagram ciepła $T - s$

temperatura przewyższała temperaturę otoczenia, następnie dokonuje się izo-

barycznego chłodzenia czynnika w wysokim ciśnieniu. Na Rys.3.13. pokazano schemat chłodziarki, która realizuje obieg lewobieżny Joule’a.

Obieg Joule’a składa się z przemian termodynamicznych:

- 1 - 2 – adiabatyczne sprężanie gazu ($l_{1,2}$)
- 2 - 3 – izobaryczne chłodzenie gazu o wysokim ciśnieniu
- 3 - 4 – izentropowe rozprężanie gazu z wykonaniem pracy $l_{3,4} < l_{1,2}$
- 4 - 1 – izobaryczne chłodzenie gazu o niskim ciśnieniu.

Praca maszyny rozprężającej $l_{3,4}$ jest mniejsza od pracy sprężarki $l_{1,2}$ stąd potrzebny jest dodatkowy silnik napędzający. Na rysunku 3.14 pokazano wykresy obiegu Joule’a, wynika z niego iż $l_{ob} = l_{1,2} - l_{3,4}$ zaś $q_{ob} = q_{2,3} - q_{4,1}$. Sprawność obiegu Joule’a, zgodnie z diagramem (3.2), wynosi:

$$\eta_{Joule} = \frac{q_d}{l_{ob}} = \frac{q_{4,1}}{l_{ob}} = \frac{1}{\xi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1} \quad (3.20)$$

w którym stosunek sprężania $\xi = p_2/p_1 = p_3/p_4$ zaś $\kappa = 1,4$. Sprawność energetyczna obiegu Joule’a jest większa od jedności i zbliża się do jeden, gdy rośnie spręż i osiąga $\xi = 11$ [20],[36].

Wykład 4

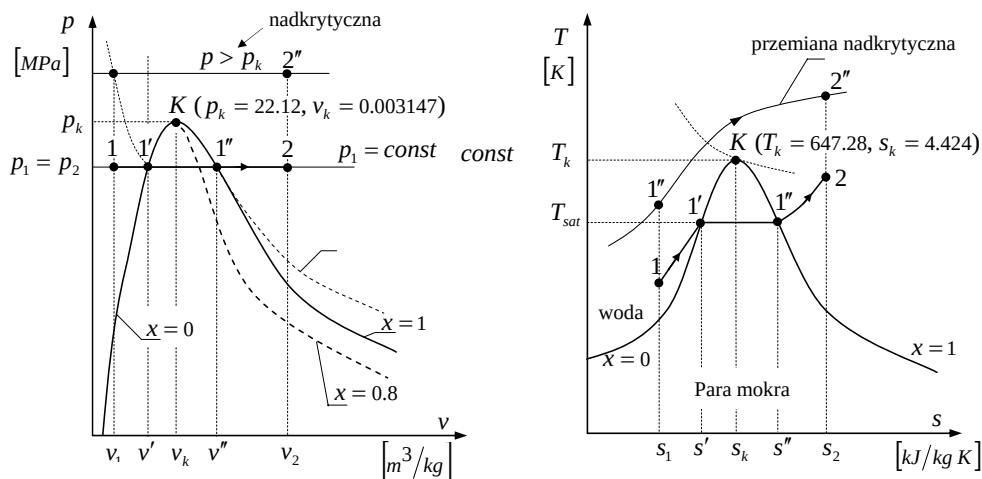
Przepływy z przemianą fazową czynnika roboczego

4.1 Praca ukryta i ciepło ukryte przemiany fazowej – sprawny sposób akumulowania energii sprężystej czynnika roboczego

Z punktu widzenia sprawności silnika cieplnego ważnym jest, aby maksymalnie wykorzystywać możliwości czynnika roboczego do przenoszenia odwracalnej energii sprężystej z jednego miejsca w inne. Okazuje się, że bardzo dużą ilość energii można zmagazynować w **odwracalnych przemianach fazowych** zarówno tych indukowanych naprężeniowo, jak i tych wywołanych termicznie. Podstawowymi, dla silników cieplnych, przemianami fazowymi są:

- **wrzenie** – przemiana zachodząca podczas izobarycznego grzania czynnika roboczego - ma miejsce w kotłach parowych i wymiennikach ciepła,
- **kondensacja** – przemiana zachodząca podczas izobarycznego chłodzenia czynnika roboczego – ma miejsce w kondensatorach i skraplaczach.

Zjawiska związane ze zmianą stanu czynnika można rozpatrywać na charakterystycznych wykresach: pracy $p-v$ i ciepła $T-s$ (rys. 4.1). Na obu wykresach istnieją **charakterystyczne obszary**: wody, pary suchej i pary mokrej, oddzielone od siebie linią graniczną (linią nasycenia), która składa się z dwóch gałęzi, lewej ($x = 0$) i prawej ($x = 1$), połączonych ze sobą w punkcie krytycznym K . Powyżej punktu krytycznego leży obszar nadkrytyczny, w którym nie obserwuje się charakterystycznych zjawisk związanych z przemianami



Rysunek 4.1. Wykres przemiany izobarycznego grzania 1 - 2 przebiegający przez obszar dwufazowy. Bezwymiarowy parametr χ nazywa się stopniem suchości i wyznacza się go jako stosunek masy pary do masy mieszaniny

typu wrzenie i kondensacja. Parę wodną o parametrach nadkrytycznych ($p \approx 30 \text{ MPa}$, $t \approx 600^\circ\text{C}$) lub, ultranadkrytycznych ($p \approx 30 - 40 \text{ MPa}$, $t \approx 700^\circ\text{C}$) wykorzystuje się w wysokosprawnych obiegach parowych na parametry nadkrytyczne. Takie parametry pary wymagają użycia na konstrukcję kotłów i turbin specjalnych martenzytyczno – ferrytycznych stopów żaroodpornych i żarowytrzymałych.

Lewa gałąź linii granicznej jest to linia wody wrzącej, dla której stopień suchości wynosi zero ($x = 0$), a parametry stanu oznaczone są dodatkowym indeksem prim (i' , p' , v' , T' , s' , *etc.*). Prawa gałąź linii granicznej łączy punkty, w których mieszanina wody wrzącej i pary nasyconej staje się parą nasyconą suchą ($x = 1$), a parametry stanu oznaczone są dodatkowymi indeksami bis (i'' , p'' , v'' , T'' , s'' , *etc.*). Na lewo od linii $x = 0$ leży obszar cieczy (jednofazowy), pomiędzy $x = 0$ i $x = 1$ leży obszar pary mokrej (dwufazowy) będący mieszaniną wody wrzącej i pary nasyconej, na prawo od linii $x = 1$ leży obszar pary suchej (pary przegrzanej), której temperatura jest wyższa od temperatury pary nasyconej przy danym ciśnieniu, zwanej temperaturą nasycenia.

Izobaryczne grzanie

Na rys.4.1 pokazano przemianę 1 – 2 (izobaryczne grzanie) przecinającą obszar dwufazowy w punktach 1' i 1''. Ponieważ jest to izobara to $p_1 = p_2 <$

p_k , zaś ze względu na poziom ciśnienia nazywa się izobara podkrytyczną. Na wykresie pracy jest to linia prosta 1 – 2, natomiast na wykresie ciepła $T - s$ ta przemiana ma trzy charakterystyczne zakresy. Pierwszy to odcinek 1 – 1' (związany z izobarycznym ogrzewaniem wody do stanu wrzenia 1' ($x = 0$)). W obszarze cieczy izobara $p_1 = p_2 = \text{const}$ przebiega nieco powyżej linii $x = 0$, ale tak, blisko iż w praktyce przyjmuje się, że te linie 1 – 1' i $x = 0$ niemal pokrywają się. Na odcinku drugim w obszarze pary mokrej izobara pokrywa się z odpowiednią izotermą (przemiana fazowa zachodzi przy stałym p i T) i jest odcinkiem 1' – 1'' prostej poziomej.

Dopiero po wyjściu z obszaru dwufazowego (odcinek trzeci) ciepło grzania przeznaczane jest na podniesienie temperatury i izobara podkrytyczna 1'' – 2 staje się krzywą rosnącą.

Ważnym jest również to, iż na odcinku 1' – 1'' przemiana izobarycznego grzania jest również przemianą izotermiczną, co przybliży obieg do najbardziej sprawnego obiegu Carnota. Tak, więc $q_{1,2}$ ciepło przekazywane izobarycznie do 1 kg masy czynnika, zamienia się w:

- ciepło podgrzania $q_{1,1'} = i' - i_1 \approx c_p (T'_1 - T_1)$,
- ciepło ukryte przemiany fazowej $r_q = i'' - i' = T_{sat}(s'' - s')$,
- ciepło podgrzania $q_{1'',2} = i_2 - i'' \approx c_p (T_{21} - T''_1)$.

Podobnie praca absolutna przemiany 1 – 2 dzieli się na:

- pracę podgrzania $l_{1,1'} = p_1 (v' - v_1)$,
- pracę ukrytą przemiany fazowej $r_l = p_1 (v'' - v')$,
- pracę przegrzania $l_{1'',2} = p_1 (v_2 - v'')$.

Dla materiałów płynnych ciepło ukryte przemiany fazowej jest, w przeciwieństwie do ciał stałych, o wiele większe od pracy ukrytej przemiany fazowej. Przykładowo w charakterystycznym dla wody stanie otoczenia $p_1 = p_2 = p = 0,1013 \text{ MPa}$ i $T_{sat} = 100^\circ\text{C}$, praca ukryta i ciepło ukryte wynoszą odpowiednio ¹;

$$r_l = p_1 (v'' - v') = 0,1013 \cdot (1,6738 - 0,0010437) = 170 \text{ kJ/kg}$$

$$r_q = T_{sat}(s'' - s') = 373 \cdot (7,3564 - 1,3069) = 2257 \text{ kJ/kg}$$

¹dane dla v'', v', s'', s' odczytujemy z tablic pary wodnej [254].

Na rys.4.1 widać, że różnice entropii właściwej ($s'' - s'$) i objętości właściwej ($v'' - v'$) zmniejszają się ze wzrostem temperatury i ciśnienia i równają się zeru w temperaturze krytycznej. Oznacza to, iż powyżej punktu krytycznego nie zachodzi klasyczne rozumiane przejście fazowe pierwszego rodzaju typu woda – para.

Izobaryczne chłodzenie.

Ponieważ rozważania nasze dotyczą przemian odwracalnych, to aby otrzymać **proces kondensacji** należy odwrócić przemianę i wychodząc z punktu 2 osiągnąć w wyniku ochładzania punkt 1. Ciecz wrzącą w punkcie 1' nazywamy wtedy kondensatem, a różnicę $T_{sat} - T_1$ przechłodzeniem kondensatu. Ponieważ kondensat po sprężeniu trafia do ponownego izobarycznego grzania w kotle, to z punktu widzenia oszczędności paliwa należy dbać o jak najmniejsze przechłodzenie kondensatu. Również z punktu widzenia zużycia wody chłodzącej w skraplaczu (ok. 50 litrów na 1 litr kondensatu) niedopuszczanie do przechłodzenia kondensatu prowadzi do oszczędności [49].

4.2 Przepływy z przemianą fazową indukowaną termicznie

W bloku parowym 230 MW_e elektrowni zawodowej o sprawności około 40% uzyskanie mocy mechanicznej $\dot{L}_{1,2} = N_e = 230 \text{ MW}$ wymaga przekazania w źródle górnym strumienia ciepła $\dot{Q}_g \cong 600 \text{ MW}_t$ oraz oddania nieskonwertowanego ciepła źródłu dolnemu w ilości $\dot{Q}_d \cong 370 \text{ MW}_t$. Takie potężne strumienie ciepła przekazywane są w profesjonalnych urządzeniach typu:

- kocioł parowy (izobaryczne grzanie)
- skraplacz pary (izobaryczne chłodzenie)

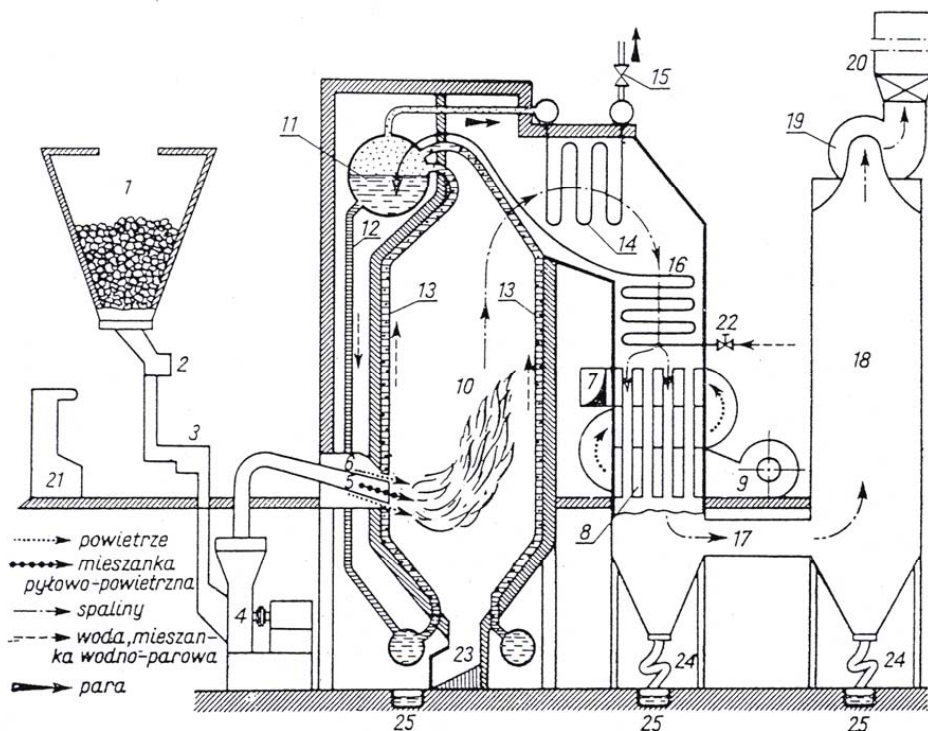
Kocioł parowy

Parę wodną o wysokich parametrach produkuje się w kotłach parowych, które mają złożoną budowę i gabaryty dochodzące do $30 \times 30 \times 150 \text{ m}$. Z punktu widzenia obiegów cieplnych i specyfiki powyżej opisanej przemiany izobarycznego grzania, w kotle parowym wystąpić muszą elementy, których zadaniem będzie:

- izobaryczny podgrzew wody zasilającej ($1 - 1'$) o początkowym ciśnieniu $p \approx 8.0 \div 25 \text{ MPa}$ i temperaturze $t = 200 - 290 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Przepływ ten odbywa się w rurach kotła, których łączna długość waha się od $5 - 180 \text{ km}$, a średnica wewnętrzna wynosi $2,5 - 3,5 \text{ cm}$. W tak trudnych warunkach, z uwagi na tarcie, nie można utrzymać stałego ciśnienia, stąd też czynnik opuszczający kocioł ma straty ciśnienia od $1 - 6 \text{ MPa}$.
- właściwa produkcja pary w parowniku ($1' - 1''$) składającym się z rur opłomkowych, walczaka oraz rur opadowych (kotły na parametry nadkrytyczne nie wymagają walczaka).
- izobaryczny podgrzew pary do stanu pary suchej ($1'' - 2$) w przegrzewaczu pary.
- w układach z tzw. wtórnym przegrzewem pary – izobaryczny podgrzew pary wtórnej (niskociśnieniowej) ($i_2 - i_3$ -na rys.4.11).

Z zasobnika węgla (1) poprzez dozownik (2) i dawkujący podajnik (3) gruz węglowy podawany jest do młyna (4). Przy pomocy gorącego powietrza doprowadzanego kanałem (7) węgiel w młynie jest suszony i mielony, a następnie w postaci mieszanki pyłowo – powietrznej podawane jest do palników (5), gdzie mieszane jest z zasadniczym utleniaczem (6) również doprowadzanym kanałem (7). Powietrze zasysane jest przez wentylator (9), tłoczone przez obrotowy podgrzewacz powietrza (8) i następnie przewodem (7) doprowadzone jest do młyna (4) oraz jako powietrze pierwotne i wtórne do palnika (6). Mieszanka pyłowo – powietrzna uzupełniona powietrzem (z niedomiarem w dolnej warstwie palników) spala się w postaci pochodni o długości $10 - 15 \text{ m}$ w komorze paleniskowej (10). Wszystkie ściany komory paleniskowej wyłożone są rurami parownika (13), w których dokonuje się proces wytwarzania mieszaniny wodno – parowej. Coraz chłodniejsze spaliny płyną drogą zaznaczoną strzałkami, oddając ciepło na wężownicach przegrzewacza pary suchej (14), podgrzewacza wody (16), następnie przepływają kanałami podgrzewacza powietrza (8), po czym przewodem (17) dostają się do elektrofiltra (18), z którego zasysane są wentylatorem ciągu (19) i wydalone przez komin (20) do atmosfery.

Zasadniczym elementem parownika kotła na parametry podkrytyczne jest walczak (11), w którym następuje separacja wrzącej wody i mokrej pary. Zasilanie odbywa się przez zawór regulacyjny (22) i podgrzewacz wody (16). Cyrkulacja wody jest naturalna dzięki różnicy ciężyć właściwych słupów wody w rurach opadowych (12) i mieszanki wodno – parowej w rurach wznoszących



Rysunek 4.2. Schemat konwencjonalnego kotła pyłowego dwuciągowego [444]

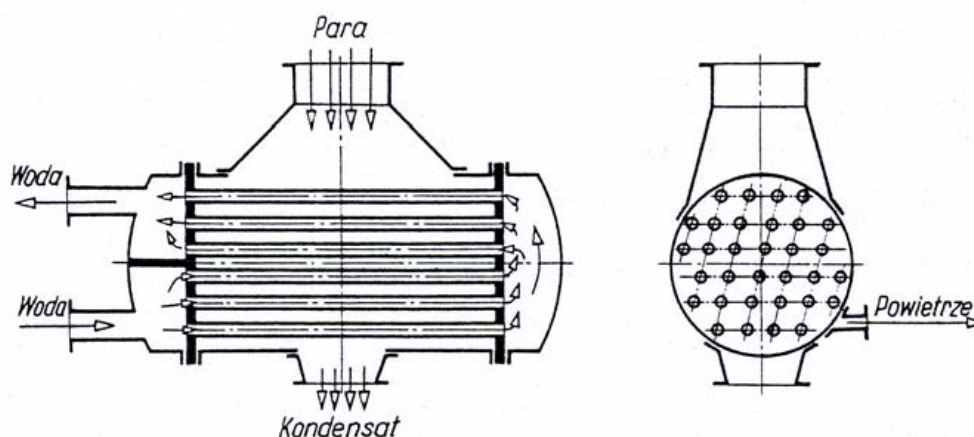
(13). Mieszanka ta rozdziela się w walczaku a uzyskana para mokra prze-grzewa się w prze-grzewaczu (14) skąd zostaje odprowadzona zasuwą (15) i rurociągiem pary suchej do turbiny. Żużel opada do leja żużlowego położonego na dnie komory paleniskowej a z niego do komory żużlowej (23), skąd po opryskaniu wodą usuwany jest hydraulicznie do kanału (25). Podobnie popiół spod podgrzewacza powietrza i odpylacza zostaje odprowadzony do kanałów odpływowych (25).

Para przepływająca przez kocioł zmienia swój stan i podnosi swe parametry tak, że odpowiednie punkty na wykresach rys.4.1 można umiejscowić na schemacie kotła rys.4.2. Stan (1) wody zasilającej rys.4.1 posiada czynnik na wlocie (22) do kotła (rys.4.2). Stan wrzenia 1' osiąga czynnik w rurach (13) i walczaku (11). Stan pary mokrej 1'' osiąga czynnik na wejściu do prze-grzewacza (16). Przemianę 1' – 1'' w parowniku (13), przemianę 1'' – 2 w prze-grzewaczu (14) [63], [230].

Skraplacz pary

Jeśli kocioł parowy modeluje górne źródło ciepła, w którym czynnik roboczy pobiera strumień ciepła $\dot{Q}_g$ to skraplacz pary modeluje dolne źródło ciepła, w którym czynnik oddaje ciepło odpadowe $\dot{Q}_d$. Stałe źródło zimna (o nieskończonej pojemności) w praktyce jest wodą rzeczna lub wodą z chłodni kominowych. Aby schłodzić i skondensować 1 kg pary potrzeba około 30 – 50 kg wody chłodzącej, która jest średnio podgrzewana od 10 – 15 °C.

W skraplaczu przebiega przemiana izobarycznego chłodzenia. Pokazana jest ona na rys.4.1 jako przemiana odwrotna do grzania czyli $2 \rightarrow 1$. Tak więc, w ogólności, para najpierw jest chłodzona do stanu pary mokrej $2''$ następnie podlega właściwej kondensacji $2'' \rightarrow 2'$ oraz później chłodzeniu kondensatu $2' \rightarrow 1$. W praktyce, para po wyjściu z turbiny jest już parą mokrą a ponieważ unikamy niepotrzebnego przechłodzenia kondensatu to w skraplaczu praktycznie zachodzi tylko przemiana fazowa, czyli $\dot{Q}_d = \dot{Q}_{kondens} = 370 MW_t = \dot{m} (i_{3''} - i_{3'})$.



Rysunek 4.3. Schemat kondensatora, czyli skraplacza – ma on postać walca o średnicy 3 – 4 m i długości kilkunastu metrów. Wewnątrz takiego walca znajduje się kilkanaście tysięcy miedzianych rurek o średnicy wewnętrznej ok. 1 – 1,5 cm, którymi przepływa zimna woda. Para skrapla się na zimnych miedzianych powierzchniach i spływa do zbiornika kondensatu a stąd do pompy. Z uwagi na stan próżni w kondensatorze i nieszczelności w konstrukcji do skraplacza przenika powietrze, które musi być odsysane za pomocą smoczków.

Oprócz kondensacji pary w skraplaczu muszą być zachowane parametry pary po ekspansji, czyli ciśnienie dużo niższe od ciśnienia atmosferycznego (0,003 – 0,006 MPa) zwane potocznie próżnią kondensatora. W przeciwieństwie do ciśnienia wlotu do turbiny, niewiele wpływającego na

pracę, nawet niewielkie podniesienie ciśnienia w kondensatorze zmniejsza pracę, którą wykonuje 1 kg pary w turbinie nawet o kilkadziesiąt procent. Przykładowo, zwiększając ciśnienie pary świeżej z 12 do 22 MPa uzyskamy około 16 procentowy wzrost mocy turbiny. Taki sam wzrost mocy – przy niezmiennym ciśnieniu wlotu – uzyskamy, jeśli obniżymy ciśnienie w kondensatorze o 0,005 MPa.

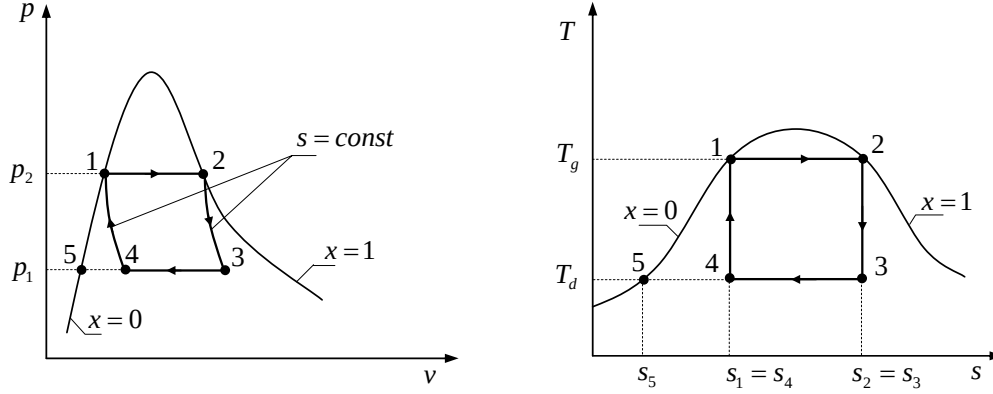
Dla sprawnej pracy skraplacza duże znaczenie ma obecność powietrza wewnątrz urządzenia. Tylko przy całkowitym braku powietrza powierzchnię zewnętrzną rurek omywa kondensująca się para, której ciśnienie nasycenia jest równe temperaturze panującej w skraplaczu. Stąd też, gdy uda się nam za pomocą odpowiednio chłodnej wody utrzymać temperaturę (wokół rurek) np. 29°C to ciśnienie w kondensatorze równe ciśnieniu nasycenia wynosi $p_{\text{sat}} = 0,004 \text{ MPa}$. Mówimy, iż osiągnęliśmy próżnię 96%. Jednakże nawet przy dobrej szczelności kondensatora dostaje się do niego $3 \div 4 \text{ g/s}$ powietrza. Ciśnienie w kondensatorze podnosi się, bowiem jest ono sumą ciśnienia nasycenia pary wodnej i ciśnienia powietrza. Duży udział powietrza będzie prowadził do zerwania próżni i wobec tego niezbędne jest monitorowanie ilości powietrza w kondensatorze oraz jego usuwanie. Do usuwania powietrza stosuje się smoczki (izektory) parowe dwu – lub trójstopniowe. W okresie rozruchu potrzebny jest dodatkowy smoczek większej mocy [398].

Elektrownie parowe buduje się w pobliżu rzek, aby wodę rzeczną wykorzystać jako dolne źródło ciepła, czyli czynnik chłodzący w kondensatorze. Nie mogą to być małe rzeki, gdyż do skroplenia 1 kg pary potrzeba, w zależności od pory roku, od 30 – 50 kg wody zimnej. Jeśli w pobliżu elektrowni zlokalizowanej np. przy kopalni węgla brunatnego nie ma rzeki to realizowany jest dodatkowy obieg wody chłodzącej, w którym, z daleka widoczne chłodnie kominowe, są głównym elementem konstrukcyjnym [127], [183].

4.3 Obieg Carnota w obszarze dwufazowym

Obieg Carnota zbudowany na dwóch przemianach izotermicznych i dwóch izentropowych, jest obiegiem maszyny cieplnej o najwyższej termodynamicznej sprawności. Jednakże praktyczna realizacja izotermicznego grzania w kotle i izotermicznego chłodzenia w skraplaczu nie jest możliwa - za wyjątkiem obszaru dwufazowego gdzie izobary pokrywają się z izotermami (rys.4.4). Oznacza to, iż w obszarze między $x = 0$ i $x = 1$ można przeprowadzić obieg Carnota, w którym przemiana 1 – 2 odbywa się w kotle, przemiana 2 – 3 w turbinie, przemiana 3 – 4 w skraplaczu, zaś 4 – 1 w sprężarce.

Obieg taki ma najwyższą sprawność termodynamiczną dochodzącą do 65% co oznacza, że 65% strumienia ciepła doprowadzonego w kotle (pole $s_1 -$



Rysunek 4.4. Obieg Carnota w obszarze dwufazowym

1–2–s₂) może być zamienione w pracę (pole 1–2–3–4), a ciepło odpadowe wynosi tylko tyle ile ciepło skraplania (pole s₁–4–3–s₂). Sprawność takiego obiegu wynosi:

$$\eta_{carnot} = \frac{\dot{Q}_g - \dot{Q}_d}{\dot{Q}_g} = \frac{\dot{m} [T_1 (s_2 - s_1) - T_3 (s_3 - s_4)]}{\dot{m} T_1 (s_2 - s_1)} = \frac{T_1 - T_3}{T_1} \cong \frac{T_g - T_d}{T_g} \quad (4.1)$$

Powyższy obieg mimo swej doskonałej sprawności nie znalazł zastosowania z przyczyn ekonomicznych. Po pierwsze, ekspansja pary 2–3 w turbinie przebiega w obszarze pary mokrej i na wylocie stopień suchości pary wynosi $x = 0,7 - 0,6$. Tak duża ilość kropli kondensatu będzie wywoływać erozję kropłową łopatek wirnika i krawędzi natarcia kierownic. Konieczne będą układy odsysania kondensatu zmniejszające sprawność turbiny.

Skraplanie w skraplaczu należy prowadzić niecałkowicie, tylko do stanu 4, co jest zadaniem trudnym technicznie. Natomiast sprężanie czynnika od stanu 4 do 1 wymaga olbrzymiej pracy sprężarki większej około 120 razy od pracy pompy pompującej kondensat ze stanu 5 do 1 (rys.4.1a). Sprężarka, podobnie jak turbina, pracuje w warunkach silnej degradacji materiału.

Całkowite skroplenie, punkt 5, wymaga dodatkowego zimna (pole 4–s₁–s₅–5) i wywołuje konieczność doprowadzenia dodatkowego ciepła w kotle (pole 5–1–s₁–s₅). Musimy tu wykonać **analizę ekonomiczną**: czy koszty doprowadzenia tego dodatkowego ciepła są mniejsze od kosztów dodatkowej pracy sprężarki. Okazuje się że ciepło jest znacznie tańsze od pracy sprężarki stąd mimo olbrzymiej przewagi obiegu Carnota zamieniamy go na obieg z całkowitym skraplaniem (obieg Rankine’a).

4.4 Siłownia Parowa Rankine’a

Typowym obiegiem konwencjonalnej siłowni kondensacyjnej, stosowanym w energetyce zawodowej, jest obieg Rankine’a składający się z dwóch przemian izobarycznych (grzanie w kotle i chłodzenie w skraplaczu) oraz dwóch przemian izentropowych (ekspansja w turbinie i spręż w pompie). Na rys.4.5a pokazano ustawienie czterech podstawowych aparatów, w których realizowane są cztery podstawowe przemiany obiegu.

Przemiany obiegu Rankine’a składają się z opisanych uprzednio przemian termodynamicznych:

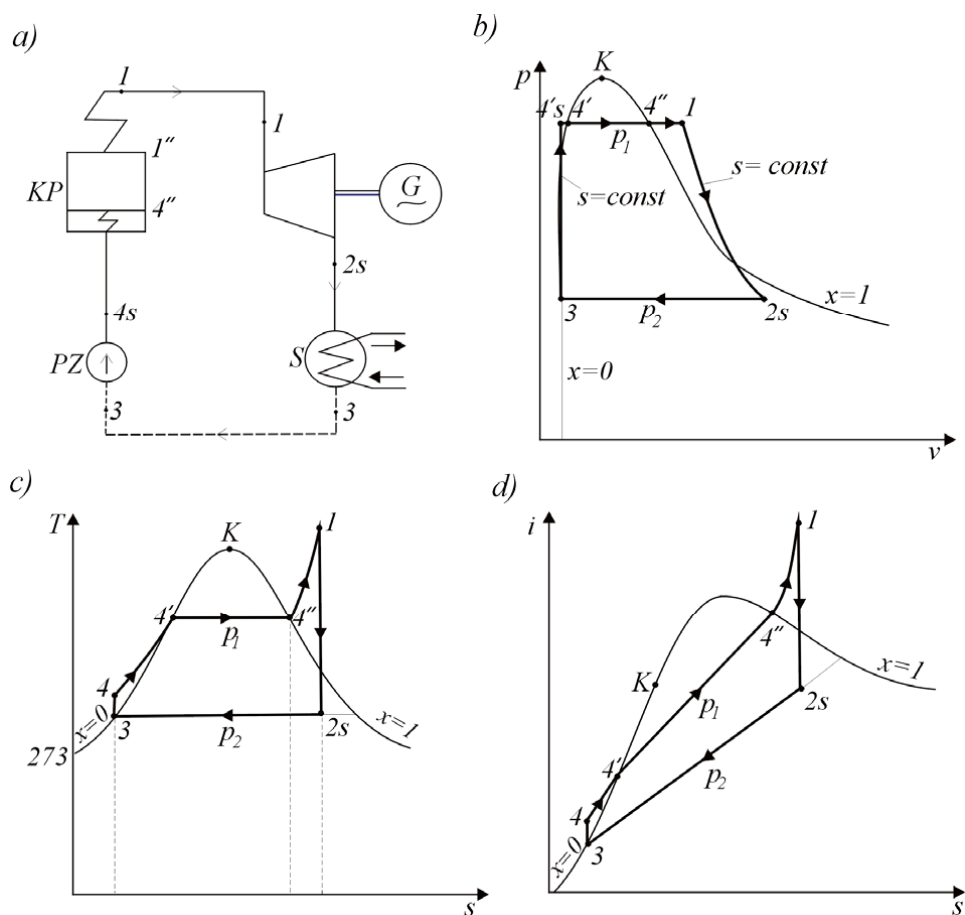
- izobaryczne doprowadzenie ciepła obejmujące podgrzewanie wody zasilającej $4 - 4'$, parowanie wody $4' - 4''$ oraz przegrzanie pary $4'' - 1$
- izentropowe rozprężanie pary w turbinie $1 - 2s$, które w końcowej fazie (część niskoprężna turbiny) przebiega w obszarze pary mokrej
- izobaryczno – izotermiczne skraplanie pary w skraplaczu $2s - 3'$, oraz izobaryczne chłodzenie kondensatu $3' - 3$
- izentropowy (izochoryczny) spręż kondensatu w pompie wody zasilającej $3 - 4s$

Obok schematu siłowni (Rys.4.5a) narysowano obieg Rankine’a na diagramie pracy, ciepła i podstawowym diagramie Molliera $i-s$. Obieg czynnika roboczego, którym jest uszlachetniona woda, jest zamknięty. Ubytki czynnika roboczego są uzupełniane w wymienniku mieszalnikowym usytuowanym przed pompą. Ze względu na niewielki przyrost temperatury i entalpii kondensatu w czasie sprężu w pompie od ciśnienia p_2 do ciśnienia p_1 , we wstępnych rozważaniach pomija się przemianę $3 - 4s$ zachodzącą w pompie zasilającej. Zakłada się wtedy, iż punkty 3 i $4s$ pokrywają się a podgrzew wody w kotle $4s - 4'$ odbywa się niemal wzdłuż linii granicznej $x = 0$. W technicznych obliczeniach rzeczywistych obiegów uwzględnia się przechłodzenie kondensatu $3' - 3$, pracę pompowania, zmiany objętości właściwej kondensatu v_3 i v_{4s} , straty ciśnienia i temperatury w przewodach łączących pompę z elementami kotła, etc.

Sprawność obiegu Rankine’a, podobnie jak innych silników cieplnych, określa się jako stosunek uzyskanej pracy do zaangażowanego ciepła:

$$\eta = \frac{l_{\text{obieg}}}{q_d} = \frac{l_{1,2s} - l_{3,4s}}{q_{4,1}} \cong \frac{q_{4,1} - q_{2s,3}}{q_{4,1}} = \frac{i_1 - i_{2s}}{i_1 - i_3} \quad (4.2)$$

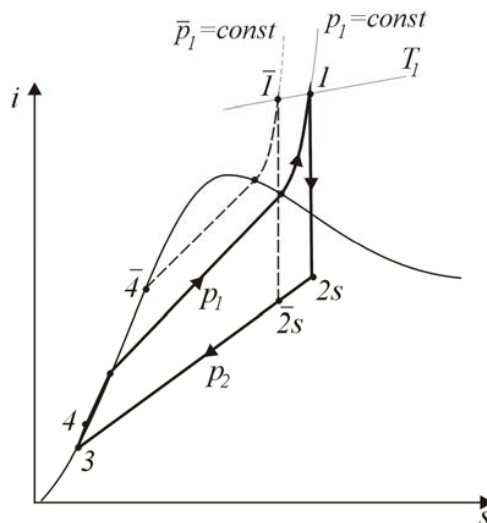
Sprawność siłowni opartych o obieg Rankine'a sięga od 30% dla siłowni małych mocy do $42 \div 48\%$ dla bloków nadkrytycznych z wtórnym przegrzewem i wielokrotną regeneracją ciepła [49], [211], [239].



Rysunek 4.5. Obieg Rankine'a z użyciem pary przegrzanej: a) schemat ideowy układu cieplnego; b) obieg w układzie $p - v$; c) obieg w układzie $T - s$; d) obieg w układzie $i - s$, KP - kocioł parowy ze spalinowym podgrzewaczem wody i przegrzewaczem pary, TP - turbina parowa, G - generator, S - skraplacz, PZ - pompa wody zasilającej

Sprawność silników cieplnych zwiększa się stosując zabiegi i udoskonalenia mające na celu:

- zbliżenie przemian izobarycznych do izotermicznych i tym samym uzyskanie podobieństwa do obiegu Carnota (tzw. karnotyzacja obiegu),
- rozsuniecie skrajnych temperatur obiegu poprzez podwyższenie temperatury źródła górnego i obniżenie temperatury źródła dolnego²,
- zwiększenie pracy obiegu poprzez podwyższenie ciśnienia pary przegrzanej w obszar nadkrytyczny i obniżenie ciśnienia w obszarze pary mokrej.

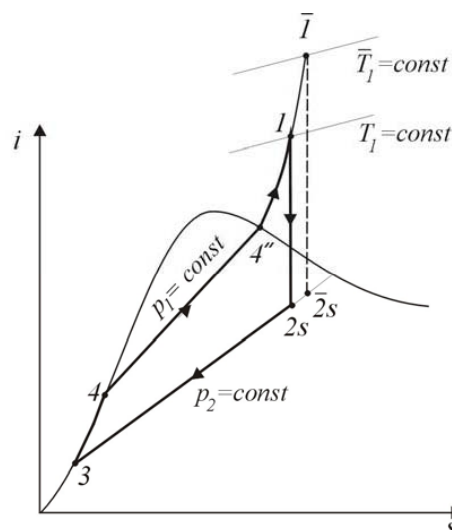


Rysunek 4.6. Wpływ zmiany ciśnienia pary w kotle na sprawność obiegu Rankine’a i parametry pary odlotowej

Na rys.4.7 pokazano wpływ podwyższenia temperatury przegrzewu pary suchej przy ustalonym ciśnieniu, zaś na rys.4.6 wpływ podwyższania ciśnienia

²Analizując wzór (4.1) na sprawność obiegu Carnota, Lord Kelvin doszedł do wniosku (1852), że istnieje temperatura źródła dolnego, w której sprawność $\eta_{carnot} = 1$. Ta temperatura została nazwana *temperaturą zera bezwzględnego* i wynosi ona $-273^{\circ}C$. W warunkach ziemskich dolne źródło ciepła o temperaturze $T_d = 0^{\circ}K$ jest niemożliwe do otrzymania stąd nie można osiągnąć sprawności równej jeden. Maszyna cieplna o sprawności równej jeden nazywana jest *perpetuum mobile drugiego rodzaju*.

przy zachowaniu temperatury przegrzewu. Jeśli zachowuje się stałe ciśnienie a podnosi się temperaturę przegrzania (obieg z linią przerywaną) to do podstawowego obiegu 1-2-3-4 dołącza się obieg dodatkowy (linia przerywana), który powiększa ciepło obiegu i tym samym pracę obiegu.



Rysunek 4.7. Wpływ zmiany temperatury pary świeżej w kotle na sprawność obiegu Rankine'a i parametry pary odlotowej

Wzrasta jednak ciepło dostarczone przez kocioł w warunkach przemiany izobarycznej niekorzystnej z punktu widzenia obiegu Carnota. Natomiast poprawiają się parametry pary odlotowej z turbiny $2s$, bowiem po rozprężeniu w turbinie para jest nadal w obszarze pary suchej, lub, dla mniejszych temperatur przegrzania, osiąga większy stopień suchości. Poziom, do którego można podnieść temperaturę pary przegrzanej zależy od zastosowanych stopów żaroodpornych i żarowytrzymałych.

W przypadku ustalenia temperatury przegrzania a poddawaniu zmianie ciśnienia w kotle, w miarę jego wzrostu, rozbieżności z obiegiem Carnota zmniejszają się, natomiast pogarszają się parametry pary odlotowej, bowiem ekspansja pary w turbinie kończy się głęboko w obszarze pary mokrej ($2s$) (rys.4.6). Ponieważ praca turbiny w zakresie pary mokrej ($x = 0,85 - 0,9$) jest, ze względu na erozję łopatek turbiny, niepożądana, to wzrostowi ciśnienia czynnika roboczego winno towarzyszyć podniesienie temperatury przegrzania nawet do parametrów nadkrytycznych lub supernadkrytycznych. Można jednocześnie stosować **międzystopniowy przegrzew pary**. Turbina jest wtedy dzielona na kilka kadłubów (część wysoko-, średnio- i niskoprężna).

Zamiast jednorazowego rozprężania pary dzieli się go na kilka części, a parę odlotową z każdej części odprowadza się pod niezmiennym ciśnieniem do kotła, gdzie podgrzewa się do temperatury dowolnej, choć zbliżonej do temperatury pary świeżej i kieruje do stopnia następnego. Sposób ten nie tylko prowadzi do zwiększenia sprawności i polepszenia parametrów pary odlotowej, ale również zmniejsza straty ciepłne do otoczenia [157], [275].

Wewnętrzny podgrzew (karnotyzacja źródła górnego)

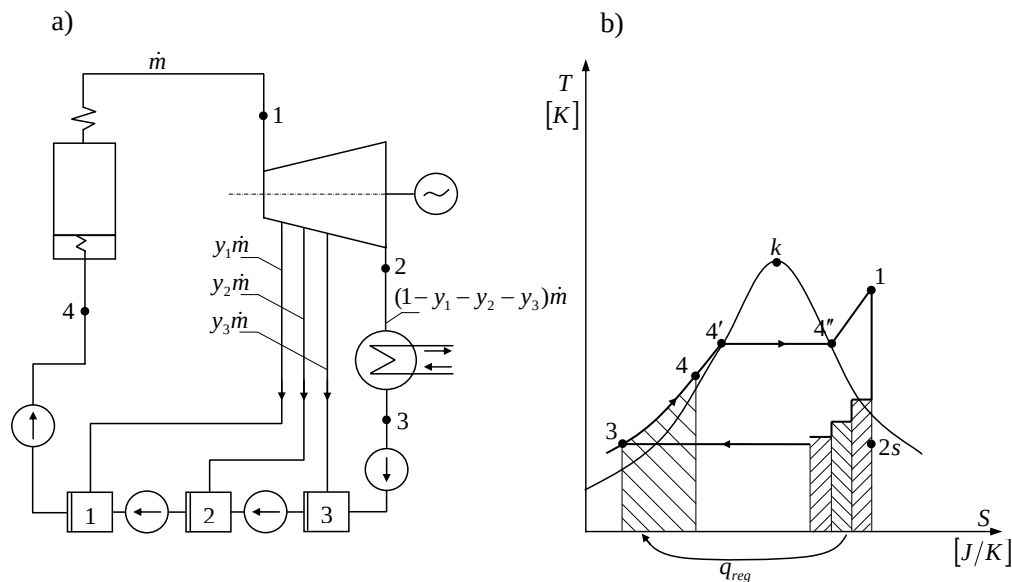
Karnotyzacja polega na stosowaniu zabiegów przybliżających obieg z przemianami izobarycznymi do obiegu Carnota (z przemianami izotermicznymi). Ten proces może dotyczyć górnej przemiany izobarycznej (karnotyzacja źródła górnego) oraz dolnej przemiany izobarycznej (karnotyzacja źródła dolnego). Teoretycznym możliwym sposobem karnotyzacji źródła górnego jest wewnętrzny podgrzew pary części niskoprężnej, przy pomocy pary pobranej z upustu części wysokoprężnej. Ten sposób wymaga dużych powierzchni wymiany ciepła i jak dotychczas nie jest realizowany w praktyce [171], [374].

Regeneracja ciepła (karnotyzacja źródła dolnego)

Innym powszechnie stosowanym sposobem zwiększenia sprawności energetycznej obiegu cieplnego elektrowni kondensacyjnej jest wprowadzenie regeneracyjnego podgrzewania wody zasilającej. Podgrzew ten może odbywać się za pomocą pary pobieranej w turbinie z tzw. upustu regeneracyjnego i wprowadzonej do wymiennika mieszalnikowego lub powierzchniowego, lub też za pomocą ciepła spalin opuszczających urządzenie czyszczące i posiadających znaczną temperaturę przed wlotem do komina usytuowanego w chłodni kominowej.

Na rys.4.8 pokazano uproszczony schemat obiegu z trzema upustami i wymiennikami mieszalnikowymi.

W praktyce ilość upustów regeneracyjnych nie przekracza 9, co pozwala na zwiększenie sprawności o $6 \div 14\%$, zmniejszenie ilości paliwa spalane w kotle, lepiej dostosowaną konstrukcję niskoprężnej części turbiny, zmniejszenie ilości pary doprowadzanej do skraplacza. Regeneracja ciepła stwarza szereg problemów projektowo – obliczeniowych, m.in. ustalenie właściwej ilości pary odbieranych z poszczególnych stopni, ustalenie optymalnych wartości temperatury i ciśnienia pary upustowej. W przypadku stosowania powierzchniowych wymienników ciepła, w których podgrzewająca para skrapla się, należy przewidzieć dodatkową pompę skroplin, która pozwoli podnieść ciśnienie do poziomu zezwalającego na połączenie skroplin upustu z głównym strumieniem wody zasilającej [128], [236].

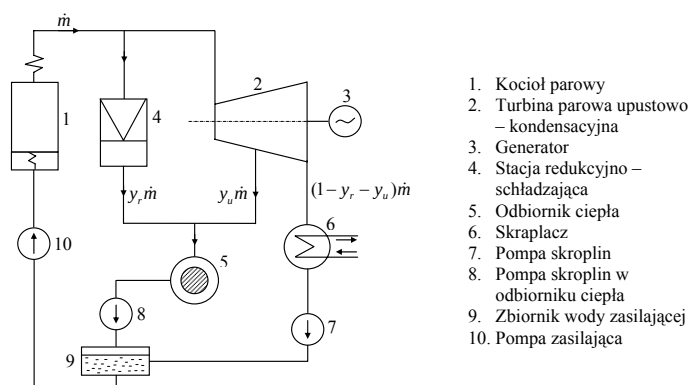


Rysunek 4.8. Schemat siłowni z trzema regeneracyjnymi wymiennikami ciepła (mieszalnikowymi) oraz obraz obiegu na wykresie $T-S$. Ciepło q_{reg} wyraża ilość ciepła odebranego parze i przekazanego na podgrzanie kondensatu. Wielkości upustów y_1 , y_2 , y_3 zwykle nie przekraczają kilku procent w stosunku do głównego strumienia masy $\dot{m}$. Na rys b) występuje entropia całkowita $S = \sum m_i s_i$ wynikająca z faktu nie można dokonać wykresu dla 1 kg masy płynącego przez różne upusty.

Elektrociepłownia parowa

W elektrowni kondensacyjnej około 60 – 70% ciepła otrzymanego w kotle zostaje oddane do otoczenia (źródła dolnego) w postaci tzw. energii odpadowej. Kojarząc dwa urządzenia, **blok parowy i ciepłownię**, z których pierwsze produkuje dużą ilość ciepła odpadowego, można ciepło pobierane przez źródło dolne wykorzystać do celów grzewczych. Koncepcja skojarzenia dwóch urządzeń jest również korzystna z punktu widzenia sprawności ciepłowni. Przypomnijmy, iż w ciepłownictwie czynnik roboczy ma niewielkie nadciśnienia i temperatury rzędu 100 – 180°C. Taki nośnik wytwarzany jest w kotłach wodnych, w których energia spalin o wysokiej temperaturze (około 1700°C) jest przetwarzana w taką samą ilość ciepła o znacznie niższej temperaturze 100 – 180°C. Miast energii spalin do ogrzewania wody ciepłowniczej można użyć energii odpadowej pary, która pozostaje do dyspozycji na wylocie turbiny. Nie może być to jednak para rozprężona do podciśnienia 0,003 – 0,005 MPa i temperatur 50 – 60°C. Aby zapewnić odpowiednie temperatury należy albo stosować turbiny przeciwprężne, albo upusty w turbinie upustowo – kon-

densacyjnej (rys.4.9) Stosowanie turbin upustowo – kondensacyjnych ma tę zaletę, iż w okresie letnim cały strumień pary (zamknięty upust) skierowany jest do produkcji energii elektrycznej. I odwrotnie w okresie zimowym strumień pary przepływający przez kondensator może być zredukowany do zera za pomocą przesłonu w stopniu regulowanym za upustem.



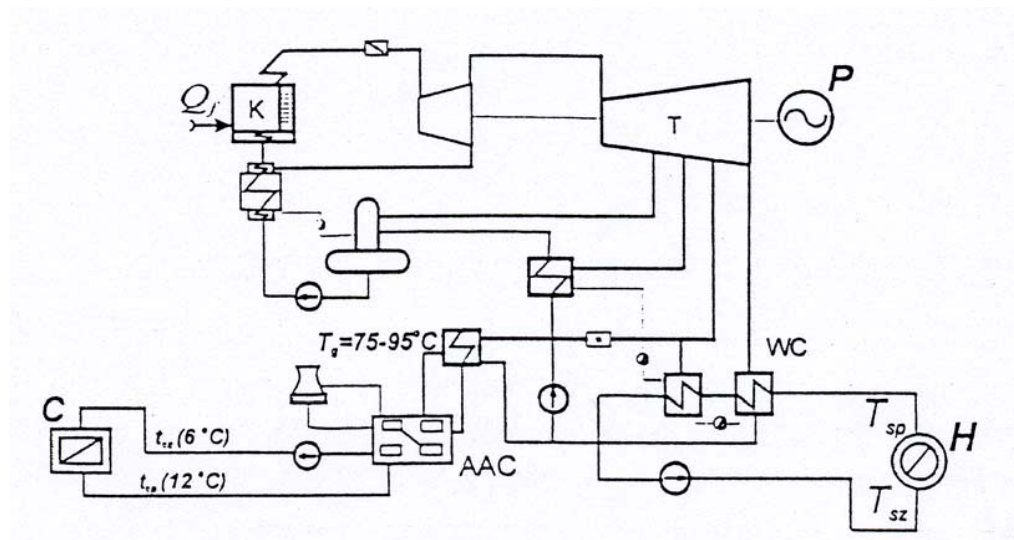
Rysunek 4.9. Schemat układu cieplnego elektrociepłowni upustowo – kondensacyjnej. Zadaniem stacji redukcyjno – schładzającej jest zapewnienie ciągłości w przypadku planowanego lub nieplanowanego wyłączenia turbiny.

Sprawność energetyczna elektrociepłowni jest bardzo wysoka i waha się od 95 – 97%. Sprawności cząstkowe zależą od wielkości strumienia mocy mechanicznej N_e i strumienia mocy cieplnej N_q w stosunku do mocy cieplnej kotła [140], [210].

Trój-generacja

Jednoczesne wytwarzanie energii elektrycznej i ciepła nazywane jest gospodarką skojarzoną lub z angielskiego – **kogeneracją**. Pewną trudnością wynikającą z mniejszego zapotrzebowania na ciepłą wodę latem jest konieczność regulacji upustów turbiny. Taka regulacja prowadzi do pracy turbiny z mniejszą sprawnością niż praca nominalna – często też nadmiar ciepła jest latem wydalaný w postaci zrzutów ciepłej wody. Można temu zapobiec poprzez rozbudowanie układu o dodatkowy człon ciepłowniczy produkujący w okresie letnim wodę lodową ($5 - 7^{\circ}C$) przeznaczoną dla potrzeb klimatyzacji i chłodnictwa. Równoczesne wytwarzanie energii elektrycznej, ciepła i chłodu nazywane jest **trój-generacją**. Produkcja chłodu oparta jest na obiegu pompy ciepła z wykorzystaniem ciepła napędowego, którego nośnikiem jest gorąca woda sieciowa wytwarzana w elektrociepłowni. Woda lodowa wytwarzana

jest w absorpcyjnych bromowo – litowych wytwornicach wody lodowej (AAC) współpracujących ze szczytowymi chłodziarkami sprężarkowymi (SAC). Dzięki takiemu rozwiązaniu elektrociepłownia cały rok pracuje w stanie nominalnym o największej sprawności, z tym iż latem część gorącej wody sieciowej służy do produkcji zimna [366].



Rysunek 4.10. Schemat układu trój-generacji. Oznaczenia: K – kocioł parowy, T – turbina parowa, WC – wymiennik ciepłowniczy, C – odbiorca chłodu, H – odbiorca ciepła, AAC – absorpcyjna centrala chłodu.

Układy kombinowane gazowo – parowe

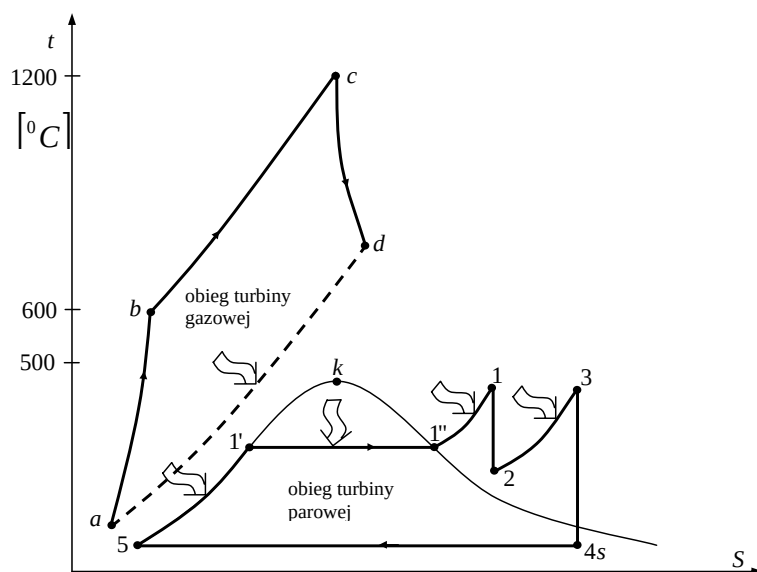
Jeśli maksymalna temperatura spalin paliw ciekłych lub gazowych sięga 1800°C określa temperaturę źródła górnego, zaś temperatura wody chłodzącej w rzece (około 15°C) określa temperaturę źródła dolnego to dla maksymalnej sprawności obiegu należałoby znaleźć czynnik roboczy, który może tworzyć obieg sprawniej wymieniający ciepło między źródłem górnym a źródłem dolnym. W praktyce korzystamy z dwóch czynników roboczych:

- Spaliny przenoszące ciepło w zakresie temperatur $1800 - 580^{\circ}\text{C}$
- Para wodna przenosząca ciepło w zakresie $550 - 15^{\circ}\text{C}$

W układach gazowo – parowych następuje wzajemne powiązanie obiegów termodynamicznych stacjonarnej turbiny gazowej i turbiny parowej poprzez

ciepło odpadowe spalin ($t_{spali} = 560 - 620^{\circ}\text{C}$) używane w kotle odzyskowym do wytworzenia pary wysokoprężnej o temperaturze sięgającej $t_{par} = 530 - 550^{\circ}\text{C}$. Zazwyczaj 10 kg spalin o temperaturze $600 - 610^{\circ}\text{C}$ wystarcza do wyprodukowania 1 kg pary o temperaturze $t_{par} = 535^{\circ}\text{C}$. Sprawność energetyczna układu gazowo – parowego jest wysoka i dochodzić może do 60% dla układów z klasycznym blokiem parowym i do 65% dla układów z nadkrytycznym kotłem odzyskowym. Najczęściej stosowanym układem kombinowanym gazowo – parowym jest układ 2 + 2 + 1, co oznacza dwie turbiny gazowe dużej mocy, dwa kotły odzyskowe (jedno-, dwu-, i trój prężne) oraz jedna turbina parowa.

Na wykresach $p - v$, $T - s$, lub $i - s$ obieg gazowy znajduje się w pewnej nadbudowie nad obiegiem parowym. Na rys.4.11 pokazano wykres ciepła $T - S$, na którym zaznaczono podstawowe przemiany obiegu gazowego i parowego.



Rysunek 4.11. Schematyczny wykres $T - s$ dla obiegu kombinowanego gazowo – parowego. Przekazywanie ciepła spalin do obiegu parowego następuje w dwuciśnieniowym kotle odzyskowym. Wytworzenie pary świeżej $5 - 1' - 1'' - 1$ następuje w wysokociśnieniowym obiegu kotła, zaś wytworzenie pary wtórnie przegrzanej $2 - 2''$ następuje w niskociśnieniowym obiegu kotła odzyskowego.

Układy gazowo – parowe mają wiele zalet jednak poważną przeszkodą jest wysoka cena inwestycji i jej utrzymania. W przypadku, gdy stosujemy gaz syntetyczny, otrzymany w wyniku gazyfikacji węgla, uzyskujemy ze spalin

mniejszy efekt cieplny, co wyrównuje pięciokrotnie mniejszą cenę węgla w stosunku do gazu.

W przypadku układów gazowo – parowych o małej mocy 1 – 3 MW przekazywanie ciepła spalin do pary może nastąpić bezpośrednio w objętości bez potrzeby używania kotła odzyskowego czy innego powierzchniowego wymiennika ciepła. Proces ten polega na wtrysnięciu mokrej pary do strumienia spalin zaraz za komorą spalania. Strumień pary wynosi od 0,1 do 0,3 strumienia spalin, a mieszanina spalin i pary ma ciśnienie 0,3 – 0,6 MPa i temperaturę $500 \div 700^{\circ}\text{C}$. Strumień ten doprowadzony jak do turbiny, która pracuje częściowo jako turbina parowa a częściowo jako turbina gazowa. Woda z części parowej i pary zawartej w spalinach może być odzyskiwana w regeneracyjnym wymienniku ciepła [53], [235].

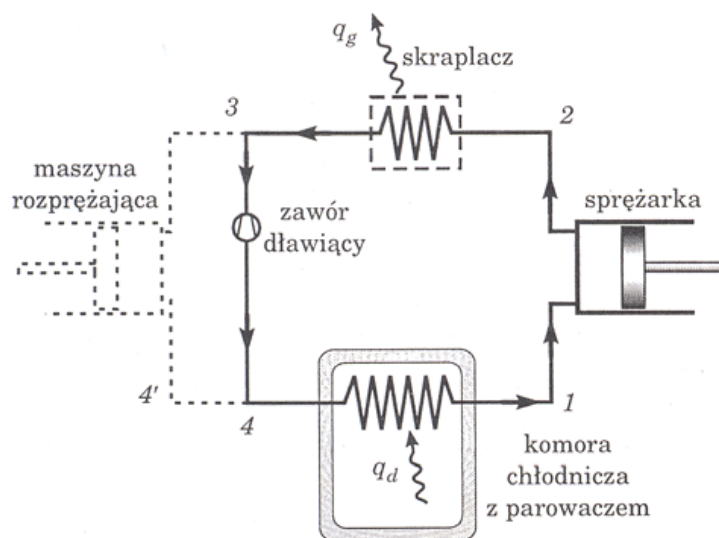
4.6 Obieg Lindego w chłodziarce

Poniżej prezentujemy lewobieżny obieg Lindego realizujący dwie przemiany izobaryczne i dwie przemiany izentropowe w obszarze dwufazowym. Dzięki temu również i obieg lewobieżny może podnieść swą sprawność i zbliżyć się do sprawności obiegu Carnota. Na rys.4.12 pokazano schemat sprężarkowej chłodziarki, w której jedną z przemian izentropowych 3 – 4' zastąpiono przemianę izentalpową ($i = \text{const}$) realizowaną przez zawór dławiący. Tak więc obieg chłodniczy składa się z czterech przemian:

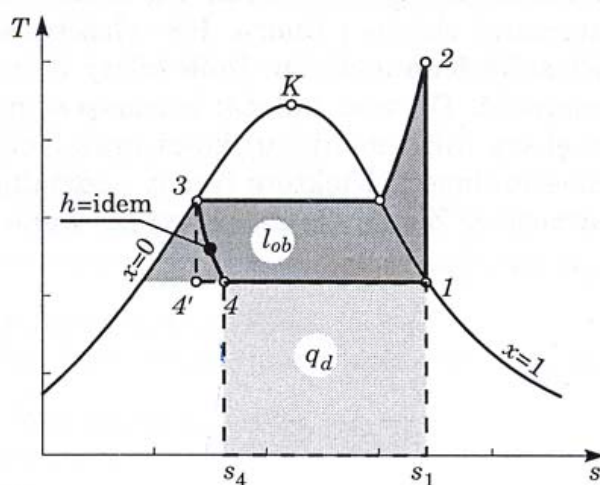
- 1 – 2 sprężanie adiabatyczne,
- 2 – 3 izobaryczne ochładzanie czynnika,
- 3 – 4 dławienie izentalpowe,
- 4 – 1 izobaryczne ogrzewanie czynnika.

Do zaworu dławiącego doprowadza się ciecz chłodniczą (proekologiczny freon) o wysokiej prężności i temperaturze otoczenia T_3 . W zaworze następuje dławienie cieczy do ciśnienia p_4 i temperatury T_4 , po czym czynnik zaczyna w komorze chłodniczej gwałtownie wrzeć pobierając z komory ciepło od produktów chłodzonych. Następnie czynnik przepływa przez sprężarkę zmieniając temperaturę T_1 na T_2 i ciśnienie $p_4 = p_1$ na p_2 . Po wyjściu ze sprężarki czynnik przepływa przez wysokociśnieniowy wymiennik, w którym izobarycznie oddaje ciepło do otoczenia tak długo aż stanie się cieczą o temperaturze T_3 równej temperaturze otoczenia [19], [161].

Bardziej zaawansowanym urządzeniem chłodniczym jest chłodziarka absorpcyjna działająca na zasadzie sprężu termicznego czynnika roboczego [310].



Rysunek 4.12. Schemat sprężarkowej chłodziarki parowej: 1–2– sprężanie czynnika chłodniczego, 2–3– odprowadzanie ciepła (skraplanie) czynnika chłodniczego, 3–4– dławienie (rozprężanie) w zaworze dławiącym, 3–4' - rozprężanie w maszynie rozprężającej, 4–1 - doprowadzenie ciepła do czynnika chłodniczego (parowanie).



Rysunek 4.13. Suchy obieg Lindego na diagramie $T - s$

Wykład 5

Przepływy czynnika roboczego ze spalaniem

Rodzaje spalania

Gdy zastanawiamy się, jakie czynności i cechy odróżniają człowieka od innych zwierząt to zauważamy, iż nie są to : stadność, sposób rozmnażania, hierarchiczność, praca zorganizowana, wykorzystywanie narzędzi i sił przyrody, zdolność do uczuć itd. Być może główną cechą wyróżniającą człowieka jest to, iż opanował sztukę spalania paliw pierwotnych. Dziś spalanie paliw, będąc podstawowym źródłem energii, nie wzbudza już strachu, chociaż wciąż może być źródłem nieprzewidzianych emocji.

Spalaniem nazywamy **reakcję chemiczną** polegającą na szybkim „łączeniu” ciał palnych z tlenem połączoną z równoczesnym wydzieleniem dużych ilości ciepła. Ciepło reakcji chemicznej odprowadzane jest częściowo poprzez radiację z obszaru reakcji (płomienia), a częściowo zużyte do podgrzania (podniesienia temperatury) produktów spalania.

Do procesu spalania potrzeba dwóch składników:

- Paliwa, które składa się z substancji palnej i balastu. W skład substancji palnej wchodzi następujące palne pierwiastki: węgiel C , wodór H_2 , siarka S , oraz związki chemiczne tych pierwiastków np. typu: metan CH_4 , tlenek węgla (czad) CO . W skład balastu wchodzi inne składniki, które nie palą się i są wypełnieniem np. popiół zawarty w węglu kamiennym, azot N_2 i hel He w paliwach gazowych. Balastem mogą być również związki chemiczne pierwiastków substancji palnej np. pary wodnej H_2O .
- Utleniacza, którym jest tlen, najczęściej w postaci powietrza lub tlenu paliwowego.

Mieszanie dwóch składników paliwa i utleniacza może odbyć się w przepływie laminarnym lub burzliwym. Proces mieszania może odbywać się wcześniej przed strefą spalania i wtedy tempo procesu spalania zależy tylko od kinetyki reakcji chemicznych. Stąd spalanie wstępne wymieszanej mieszanki paliwowo – powietrznej nazywane jest **spalaniem kinetycznym**. Jeśli mieszanie substratów zachodzi jednocześnie z reakcją, bowiem paliwo i utleniacz podawane są osobnymi kanałami, to o szybkości procesu decyduje głównie szybkość tworzenia się mieszaniny palnej na drodze dyfuzji. Taki rodzaj spalania nosi nazwę **spalania dyfuzyjnego**. Możliwy jest także przypadek mieszany tzw. **spalanie kinetyczno – dyfuzyjne**, z którym spotykamy się, na co dzień w kuchennych palnikach gazowych.

Spalanie kinetyczne występuje, przykładowo, w silnikach spalinowych o zapłonie iskrowym, zaś spalanie dyfuzyjne obserwujemy podczas palenia się świecy lub kropli paliwa ciekłego.

Spalanie jest procesem trudnym do ilościowego i jakościowego zamodelowania. Dzieje się tak, gdyż mechanizm spalania nawet tak prostego paliwa, jakim jest metan CH_4 wymaga określenia ponad 1024 reakcji, w których biorą udział prawie 50 pośrednich związków i rodników [7]. Pełna znajomość procesów chemicznych wymaga uwzględnienia równań bilansu dla wszystkich 50 pośrednich związków, w których udział biorą równania reakcji chemicznych w formie Arrheniusa¹. Obliczenie takiego procesu jest możliwe wraz z jednoczesnym obliczaniem przepływu mieszaniny za pomocą modelu 3D i narzędzia CFD. W przypadku, gdy obliczymy komorę spalania na poziomie integralnym - 0D to interesują nas strumienie paliwa i utleniacza na wejściu i strumienie spalin na wyjściu. W tym przypadku, do obliczeń CFM w modelu algebraicznym 0D wystarczą przybliżone obliczenia strumienia powietrza i przybliżone obliczenia ilości i składu spalin na wylocie z komory spalania.

Okazuje się, że ilościowo dobre przybliżenie daje tzw. **metoda stechiometrycznego spalania**, która rozważa nie chemiczne złożone paliwo (np. C_nH_n), ale proste pierwiastki: węgiel C , wodór H_2 , siarka S , które spalają się w wyniku prostej jednokrokowej reakcji chemicznej dając od razu produkt reakcji, którym jest; dwutlenek węgla CO_2 , para wodna H_2O i dwutlenek siarki SO_2 . Takie hipotetyczne (stechiometryczne) spalanie, w którym wszystkie pierwiastki węgiel zawarty w paliwie spala się na dwutlenek węgla CO_2 , wszystkie wodór na H_2O a cała siarka na SO_2 nazywamy **spalaniem zupełnym i całkowitym**. Oczywiście w rzeczywistości występuje tylko **spalanie niezupełne** (produkty pośrednie i rodniki typu CO , H_2) i **spalanie niecałkowite** (w spalinach są jeszcze pierwiastki substancji

¹Obliczenia takie są wykonywane tylko na drodze numerycznej.

palnej np. żużel zawiera 10% węgla). Ponieważ zamiarem każdego projektanta jest zbudowanie doskonałej komory spalania osiągającej w pracy nominalnej warunki zbliżające się do warunków spalania zupełnego i całkowitego przyjęto, w obliczeniach CFM, wykorzystywać model spalania stechiometrycznego, zaś warunki rzeczywiste osiągać za pomocą korygowania wyników współczynnikami strat (strata fizyczna w spalinach, strata chemiczna w spalinach, strata ciepła do otoczenia, strata fizyczna i chemiczna w produktach stałych).

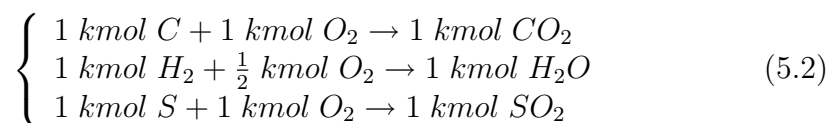
Stechiometryczny model spalania, z uwagi na swą (chemiczną) prostotę nie daje żadnych ilościowych danych o emisji substancji szkodliwych zanieczyszczających środowisko. Należą do nich: tlenki azotu NO_x , tlenki siarki SO_x , tlenek węgla CO , emisja sadzy (C_8H lub C_6H) oraz kancerogenne i mutagenne wielopierścieniowe węglowodory aromatyczne (WWA) [54], [74], [155].

Specyfika obliczeń stechiometrycznych

Bilansowanie w przepływach podlegających reakcjom chemicznym ma swoją specyfikę, musi bowiem uwzględniać fakt, iż każda molekula paliwa wchodząc w reakcję z molekułami utleniacza daje określoną ilość molekul produktów spalania. W praktyce chemicznej używa się jednostki większej, jaką jest *kmol*. Trzy podstawowe reakcje chemiczne [166]:



oznaczają kilomolowy bilans molekul:



Przejście na inne jednostki niż kmole jest możliwe poprzez wykorzystanie mas molowych:

- paliwo $m_{H_2} = 2kg/kmol$, $m_S = 32kg/kmol$, $m_C = 12kg/kmol$
- utleniacz $m_{O_2} = 32kg/kmol$
- produkt spalania $m_{CO_2} = 44kg/kmol$, $m_{H_2O} = 18kg/kmol$, $m_{SO_2} = 64kg/kmol$
- gazu inertnego $m_{N_2} = 28kg/kmol$

W literaturze stosuje się różne sposoby oznaczeń składu paliwa i spalin. Często do stanu przed spalaniem używa się indeksu (') np. T' , a po spalaniu indeksu ("). Większość paliw stałych i ciekłych posiada wyznaczony udział masowy, który oznacza się małymi literami:

c $kg\ C/kg\ pal$ – udział masowy węgla w paliwie
 h $kg\ H_2/kg\ pal$ – udział masowy wodoru
 s $kg\ S/kg\ pal$ – udział masowy siarki
 n $kg\ N_2/kg\ pal$ – udział masowy azotu
 o $kg\ O_2/kg\ pal$ – udział masowy tlenu paliwowego
 p $kg\ popiołu/kg\ pal$ – udział masowy popiołu
 w $kg\ H_2O/kg\ pal$ – udział masowy wilgoci

Udziały masowe oznacza się również literą Y_i np. Y_{H_2} , Y_C , etc. Całkowity skład paliwa wynosi 1.

$$c + h + s + n + o + p + w = 1 \quad (5.3)$$

gdzie $c + h + s$ to substancje palne, zaś $o + n + w + p$ to balast. Dla paliw ciekłych można na ogół pominąć zawartość siarki, azotu i popiołu. Skład suchych paliw gazowych określany jest udziałami objętościowymi [m^3/um^3 paliwa] składników oznaczonymi ich symbolami chemicznymi w nawiasach prostokątnych z indeksem $[]_p$ - oznaczającym paliwo i odróżniającym skład paliwa od składu spalin. Udziały objętościowe w paliwie gazowym, tlenku węgla $[CO]_p$, wodoru $[H_2]_p$, metanu $[CH_4]_p$, etanu $[C_2H_6]_p$, etylenu $[C_2H_4]_p$, acetyleny $[C_2H_2]_p$, tlenu $[O_2]_p$, dwutlenku węgla $[CO_2]_p$, azotu $[N_2]_p$ wynoszą w sumie jedność (w numeryce CFM wygodniejsze jest oznaczenie X_i np. X_{CO} , X_{H_2} , etc.).

$$[CO]_p + [H_2]_p + [CH_4]_p + [C_2H_6]_p + [C_2H_4]_p + [C_2H_2]_p + [O_2]_p + [CO_2]_p + [N_2]_p = 1 \quad (5.4)$$

Spalanie węglowodorów przebiega wg reakcji stechiometrycznej;



ściśle ustalając ile kilomoli $\left(m + \frac{n}{4}\right)$ potrzeba tlenu O_2 oraz ile kilomoli produktów otrzymujemy.

Minimalne zapotrzebowanie na tlen do spalania zupełnego i całkowitego.

Z wzorów (5.2) i (5.5) wynika bezpośrednio odpowiedź na pytanie ile kilomoli tlenu potrzeba aby spalić 1 kmol pierwiastka lub węglowodoru. Ustalenie

zapotrzebowania na tlen w przypadku spalania paliwa stałego lub ciekłego o składzie danym wzorem (5.3) nie jest sprawą trudną. Wystarczy zauważyć, że jeśli do spalenia 1 kmol, czyli 12 kg węgla potrzeba 1 kmol O_2 , czyli 32 kg tlenu, do spalenia 1 kmol, czyli 2 kg wodoru potrzeba $\frac{1}{2}$ kmol O_2 , czyli 16 kg tlenu, a do spalenia 1 kmol, czyli 32 kg siarki potrzeba 1 kmol O_2 , czyli 32 kg tlenu, to do spalenia paliwa, który zawiera $c\%$ węgla, $h\%$ wodoru, $s\%$ siarki i $o\%$ tlenu paliwowego potrzeba:

$$n_{O_2, \min} = \frac{1}{12}c + \frac{1}{2 \cdot 2}h + \frac{1}{32}s - \frac{1}{32}o \quad \left[\frac{\text{kmol } O_2}{\text{kg pal}} \right] \quad (5.6)$$

lub uwzględniając masę molową tlenu:

$$o_{\text{utl}, \min} = m_{O_2} \cdot n_{O_2, \min} = \frac{32}{12}c + \frac{32}{2 \cdot 2}h + s - o \quad \left[\frac{\text{kg } O_2}{\text{kg pal}} \right] \quad (5.7)$$

w przypadku paliw gazowych mamy:

$$n_{O_2, \min} = 0,5 \left([CO]_p + [H_2]_p \right) + 2 [CH_4]_p + \left(m + \frac{n}{4} \right) [C_m H_n]_p - [O_2]_p \quad \left[\frac{\text{kmol } O_2}{\text{kmol pal}} \right] \quad (5.8)$$

lub wykorzystując fakt, iż udziały molowe mieszaniny gazowej pokrywają się z mieszaninami objętościowymi masy:

$$X_{O_2, \min} = n_{O_2, \min} \quad \left[\frac{\text{um}^3 O_2}{\text{um}^3 pal} \right] \quad (5.9)$$

Zapotrzebowanie na powietrze

Udział kilomolowy (objętościowy) tlenu w powietrzu wynosi 0,21, udział masowy wynosi 0,23. Powietrze oznaczamy zwykle literą a (air) lub L (Luft). Używając powietrza jako utleniacza wprowadzamy dużą ilość balastu, jakim jest azot N_2 . Niech $L_{\min}$ $[\text{kg powietrza}/\text{kg pal}]$ oznacza minimalne masowe zapotrzebowanie na powietrze, zaś $n_{a, \min} = X_{a, \min}$ $[\text{um}^3 \text{pow}/\text{um}^3 \text{pal}]$ oznacza minimalne objętościowe zapotrzebowanie na powietrze, wtedy:

$$L_{\min} = \frac{o_{\text{utl}, \min}}{0,23} \quad , \quad X_{a, \min} = \frac{X_{O_2, \min}}{0,21} \quad . \quad (5.10)$$

Współczynnik nadmiaru powietrza

W praktyce trudno jest uzyskać dobre wymieszanie (na poziomie molekularnym) paliwa z utleniaczem. Stąd, aby uzyskać spalanie zupełne i całkowite doprowadza się więcej powietrza niż wynosi minimalne zapotrzebowanie. Stosunek ilości rzeczywiście doprowadzanego powietrza (X'_a lub L') do zapotrzebowania minimalnego ($X_{a,\min}$, $L_{\min}$) będziemy nazywać współczynnikiem nadmiaru powietrza i oznaczać symbolem λ .

$$\lambda = \frac{X'_a}{X_{a,\min}}, \quad \lambda = \frac{L'}{L_{\min}} \quad (5.11)$$

są one spalane przy mniejszym współczynniku nadmiaru powietrza. W praktyce λ wynosi:

$\lambda = 0,8 \div 0,9$ w silnikach spalinowych iskrowych

$\lambda = 1,15$ w silnikach diesla

$\lambda = 3,5 \div 5,0$ w turbinach gazowych i turboodrzutowych

$\lambda = 1,02 \div 1,2$ w paleniskach gazowych

$\lambda = 1,3 \div 1,6$ paleniska na paliwa stałe z rusztem mechanicznym.

Pomiar rzeczywistego współczynnika nadmiaru powietrza jest trudny i zwykle wyznacza się go pośrednio na podstawie składu spalin. Jeśli udział objętościowy tlenu w spalinach suchych wynosi $[O_2]_{sp}$, azotu $[N_2]_{sp}$, a tlenku węgla $[CO]_{sp}$ to wyznacza się z następującego wzoru empirycznego:

$$\lambda = \frac{21}{21 - 79 \frac{[O_2]_{sp} - 0,5[CO]_{sp}}{[N_2]_{sp}}} \quad (5.12)$$

W przypadku spalania zupełnego, $[CO]_{sp} = 0$ i powyższy wzór upraszcza się.

Ilość i skład spalin.

Jak wynika z reakcji (5.1) i (5.5) po spalaniu zupełnym gazy spalinowe zawierają zwykle: dwutlenek węgla CO_2 , parę wodną H_2O , dwutlenek siarki SO_2 oraz gaz inertny N_2 i resztę niespalonego tlenu O_2 . Gazy spalinowe są zawsze gazami wilgotnymi, gdyż zawierają parę wodną powstałą ze spalania wodoru, zawartego w paliwie oraz wilgoci, znajdującej się w paliwie i powietrzu. Udziały objętościowe składników spalin wilgotnych oznaczamy wzorami chemicznymi w nawiasach okrągłych np. $(CO_2)_{sp} = 14\%$, $(H_2O)_{sp} = 11\%$, $(O_2)_{sp} = 2\%$, $(N_2)_{sp} = 73\%$.

Spaliny nie zawierające pary wodnej nazywa się spalinami suchymi i oznacza klamrami np. $[CO_2]_{sp}$. Spaliny suche nie występują w sposób naturalny a jedynie w aparacie Orseta, służącym do pomiaru spalin. Dzieje się tak, gdyż temperatura spalin w urządzeniach technicznych jest na tyle wysoka, aby w spalinach występowała woda w postaci pary wodnej. W przypadku pomiarów zawartości spalin, w każdej pobranej próbce spalin następuje spadek temperatury poniżej punktu rosy i wykroplenie pary wodnej. Aparat Orseta mierzy objętościowy (kilomolowy) skład spalin suchych, czyli spalin po usunięciu H_2O - konieczne jest więc przeliczenie składu spalin suchych na skład spalin wilgotnych.

Posługując się wejściowymi wzorami (5.1) i (5.5) ustalamy, iż **ze spalania 1 kg paliwa stałego lub ciekłego** mamy następujące ilości spalin (molowo i masowo):

- dwutlenek węgla

$$n''_{CO_2} = \frac{c}{12} \left[\frac{kmol CO_2}{kg pal} \right] , \quad Y''_{CO_2} = \frac{44}{12} c \left[\frac{kg CO_2}{kg pal} \right] \quad (5.13)$$

- pary wodnej

$$n''_{H_2O} = \frac{h}{2} + \frac{w}{18} \left[\frac{kmol H_2O}{kg pal} \right] , \quad Y''_{H_2O} = 9h + w \left[\frac{kg H_2O}{kg pal} \right] \quad (5.14)$$

- dwutlenku siarki

$$n''_{SO_2} = \frac{c}{32} \left[\frac{kmol SO_2}{kg pal} \right] , \quad Y''_{SO_2} = 2s \left[\frac{kg SO_2}{kg pal} \right] \quad (5.15)$$

- tlenu

$$n''_{O_2} = (\lambda - 1) \frac{o}{32} \left[\frac{kmol O_2}{kg pal} \right] , \quad Y''_{O_2} = (\lambda - 1) o \left[\frac{kg O_2}{kg pal} \right] \quad (5.16)$$

- azotu

$$n''_{N_2} = 0,79X'_a + \frac{n}{28} = \frac{79}{21} \lambda n_{O_2, \min} + \frac{n}{28} \left[\frac{kmol N_2}{kg pal} \right] \quad (5.17)$$

$$Y''_{N_2} = 0,768L' + n = \frac{769}{232} \lambda o_{utl, \min} + n \left[\frac{kg N_2}{kg pal} \right] \quad (5.18)$$

Ilość spalin wilgotnych powstałych ze spalania 1 kg paliwa stałego lub ciekłego jest równa sumie ilości obliczonych wyżej składników:

$$n_{sp} = \frac{c}{12} + \frac{s}{32} + \frac{h}{2} + \frac{w}{18} + \frac{n}{28} + (X'_a - n_{O_2, \min}) \left[\frac{\text{kmol } sp}{\text{kg } pal} \right] \quad (5.19)$$

Udziały objętościowe $[m^3/m^3]$ składników spalin wilgotnych oznacza się nawiasem okrągłym:

$$\begin{aligned} (CO_2)_{sp} &= \frac{n''_{CO_2}}{n_{sp}}, & (SO_2)_{sp} &= \frac{n''_{SO_2}}{n_{sp}}, & (H_2O)_{sp} &= \frac{n''_{H_2O}}{n_{sp}}, \\ (O_2)_{sp} &= \frac{n''_{O_2}}{n_{sp}}, & (N_2)_{sp} &= \frac{n''_{N_2}}{n_{sp}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

dającym w sumie:

$$(CO_2)_{sp} + (H_2O)_{sp} + (SO_2)_{sp} + (O_2)_{sp} + (N_2)_{sp} = 1 \quad (5.21)$$

Ilość spalin suchych $n_{s,sp}$ otrzymanych z 1 kg paliwa jest mniejsza od ilości spalin wilgotnych o ilość pary wodnej zawartej w spalinach:

$$n_{s,sp} = n_{sp} - \left(\frac{h}{2} + \frac{w}{18} \right) \quad (5.22)$$

Udziały objętościowe składników spalin suchych wynoszą odpowiednio:

$$[CO_2]_{sp} = \frac{n''_{CO_2}}{n_{s,sp}}, \quad [SO_2]_{sp} = \frac{n''_{SO_2}}{n_{s,sp}}, \quad [O_2]_{sp} = \frac{n''_{O_2}}{n_{s,sp}}, \quad [N_2]_{sp} = \frac{n''_{N_2}}{n_{s,sp}} \quad (5.23)$$

w sumie otrzymujemy:

$$[CO_2]_{sp} + [3SO_2]_{sp} + [O_2]_{sp} + [N_2]_{sp} = 1 \quad (5.24)$$

Ze spalania **1 kmol gazu palnego** otrzymujemy następujące liczby kilomoli składników spalin:

- dwutlenek węgla

$$n''_{CO_2} = [CO_2]_p + [CO]_p + [CH_4]_p + m [C_m H_n]_p \left[\frac{\text{kmol } CO_2}{\text{kmol } pal} \right] \quad (5.25)$$

- para wodna

$$n''_{H_2O} = [H_2]_p + [H_2O]_p + 2 [CH_4]_p + \frac{n}{2} [C_m H_n]_p \quad \left[\frac{kmol H_2O}{kmol pal} \right] \quad (5.26)$$

- azot

$$n''_{N_2} = 0,79n'_a + [N_2]_p \quad \left[\frac{kmol N_2}{kmol pal} \right] \quad (5.27)$$

- tlen

$$n''_{O_2} = n_{O_2, \min} (\lambda - 1) \quad \left[\frac{kmol O_2}{kmol pal} \right] \quad (5.28)$$

Wartość opałowa paliwa

Całkowita ilość energii chemicznej uwalniana w trakcie procesu spalania 1 kg paliwa, określana jest jako ciepło spalania. Jednakże w urządzeniu technicznym nie zawsze daje się wykorzystać ciepło kondensacji pary wodnej zawartej w spalinach, stąd też w praktyce interesuje nas **wartość opałowa paliwa** oznaczana przez W_d , wyrażana w jednostkach energii na kilogram. Wartość opałowa W_d paliwa jest wielkością ustaloną eksperymentalnie dla każdego paliwa, nie mniej, ponieważ na tę wartość składają się wartości opałowe czystych pierwiastków substancji palnych, wartość W_d można w zasadzie wyznaczyć znając skład paliwa, i tak się czasami dzieje.

Wartość opałowa paliw pomnożona przez strumień masy paliwa określa strumień energii chemicznej doprowadzonej w urządzeniu (komorze spalania):

$$\dot{Q}_{1,2}^{ch} = \dot{m}_{pal} W_d \quad [J/s = W] \quad (5.29)$$

Wynika stąd, iż W_d używana jest w CFM do obliczeń kotłów, komór spalania na poziomie integralnym 0D. Natomiast w obliczeniach 3D wykonywanych z użyciem CFD wartość opałowa *explicite* nie występuje w równaniu energii, jednakże pojawia się tam efekt energetyczny wszystkich spalanych pierwiastków, który po scałkowaniu w obszarze winien dawać wartość zbliżoną do W_d .

Wartości opałowe węgla wodoru i siarki wynoszą odpowiednio: $33\,900\,kJ/kg$, $120\,000\,kJ/kg$ i $9\,250\,kJ/kg$. Wartości opałowe węgla kamiennego wynoszą $31 - 34\,MJ/kg$, drewna suchego $\sim 17\,MJ/kg$, torfu suchego $15\,MJ/kg$, węgla brunatnego $12\,MJ/kg$. Wartości opałowe paliw ciekłych odpowiednio wynoszą: ropa $40\,MJ/kg$, mazut $41\,MJ/kg$, alkohol $27\,MJ/kg$, benzyna $42\,MJ/kg$. Wartości opałowe paliw gazowych wynoszą: gaz ziemny GZ35 $\sim 780\,MJ/kmol$,

gaz zaazotowany ($N_2 \sim 60\%$) tylko $400 MJ/kmol$, gaz węglowy około $350 MJ/kmol$, gaz czadnicowy $\sim 110 MJ/kmol$.

W literaturze przedmiotu można spotkać wiele formuł empirycznych na obliczanie wartości opałowej. Należy do nich formuła związkowa:

$$W_d = 33900c + 121000 \left(h - \frac{o}{8} \right) + 10500s - 2500 \left(w + \frac{9}{8}o \right) \quad (5.30)$$

w której W_d [kJ/kg], zaś c , h , o , w , s oznaczają odpowiednio masowe udziały; węgla, wodoru, tlenu, wilgoci i siarki.

Znając objętościowy skład gazu palnego można obliczyć jego wartość opałową ze wzoru:

$$W_d = 283180 [CO]_p + 242000 [H_2]_p + 802320 [CH_4]_p + 1256460 [C_2H_2]_p + 1323870 [C_2H_4]_p + 1428780 [C_2H_6]_p \quad (5.31)$$

Wartość ta jest podana w $kJ/kmol$.

Temperatura zapłonu

Najniższą temperaturę otoczenia, w której może rozpocząć się proces spalania nazywa się temperaturą zapłonu. Jeśli temperatura zapłonu dla drewna wynosi około $300^\circ C$, to nie oznacza to, iż taka temperatura powietrza i paliwa musi być np. wokół kominka. Zwykle podgrzewamy substraty spalania tylko w jednym miejscu do temperatury zapłonu, a ciepło wydzielające się podczas rozpoczętego w tym miejscu spalania podgrzewa miejsce sąsiednie i proces rozprzestrzenia się.

Temperatura zapłonu gazu ziemnego wynosi $\sim 900^\circ C$, ropy naftowej $650^\circ C$, wodoru $800^\circ C$, koksu $600^\circ C$, węgla kamiennego $300 \div 400^\circ C$.

Maksymalna temperatura spalania

Ustalenie rzeczywistej temperatury T_{sp} spalin w palenisku nie jest możliwe w ramach CFM – można jedynie oszacować maksymalną temperaturę, jaką można by uzyskać gdyby całe ciepło spalania wywiązujące się w procesie spalania służyłoby wyłącznie do ogrzewania produktów spalania. Jeśli spalanie zachodzi w stałym ciśnieniu to wtedy wartość opałowa jest równa różnicy pomiędzy entalpią spalin i entalpią mieszaniny palnej:

$$W_d = i_{sp} - i_m \quad (5.32)$$

Entalpia mieszaniny palnej wynosi:

$$i_m = (c_{p,pal} + \lambda L_{\min} c_{p,pow}) T_m \quad (5.33)$$

zaś entalpia spalin:

$$i_{sp} = c_{p,sp} T_{sp} \quad (5.34)$$

gdzie: T_m - temperatura początkowa mieszaniny palnej, T_{sp} - poszukiwana temperatura spalin, $c_{p,pal}$, $c_{p,pow}$, $c_{p,sp}$ - średnie ciepło właściwe, odpowiednio; paliwa, powietrza i spalin. Z powyższych wzorów wynika:

$$T_{sp} = \frac{W_d}{(1 + \lambda L_{\min}) c_{p,pow}} + \frac{c_{p,pal} + \lambda L_{\min} c_{p,pow}}{(1 + \lambda L_{\min}) c_{p,pow}} T_m \quad (5.35)$$

lub w uproszczeniu:

$$T_{sp} = \frac{W_d}{(1 + \lambda L_{\min}) c_{p,pow}} + T_m \quad (5.36)$$

Rzeczywista wartość T_{sp} przyjmuje wartość maksymalną dla $\lambda = 1$, stąd należy przeprowadzić modyfikację wzoru (5.36).

Sprawność spalania w urządzeniu

W kotłach, piecach grzewczych, komorach spalania proces spalania odbywa się przy prawie stałym ciśnieniu, zarówno od strony gazów gorących jak i od strony czynnika pobierającego ciepło. Z punktu widzenia obiegu termodynamicznego w urządzeniu takim następuje izobaryczne grzanie czynnika roboczego, w wyniku czego jego entalpia wejściowa (i_{we}) podnosi się znacznie i na wylocie wynosi (i_{wy}). Jeśli strumień czynnika, roboczego ogrzewanego w kotle wynosi $\dot{m}$, to **strumień pobranego ciepła** wynosi $\dot{Q}_{pob} = \dot{m} \cdot (i_{wy} - i_{we})$. Do wytworzenia tego strumienia użyto energii chemicznej dysponowanego paliwa, która mnożona przez strumień paliwa $\dot{m}_{pal}$ daje **dostarczony strumień ciepła** $\dot{Q}_{dost} = \dot{m}_{pal} W_d$.

Oczywiście było oczekiwać, że $\dot{Q}_{dost} = \dot{Q}_{pob}$ bowiem entalpia fizyczna substratów (paliwa i powietrza) jest niższa od entalpii fizycznej spalin. Nawet gdyby tak było, w przypadku użycia spalin do regeneracyjnego podgrzewania powietrza i paliwa, to istnieje szereg strat ciepła mające miejsce w komorze spalania (straty do otoczenia, energia opuszczająca z balastem, niedopał paliwa, etc.).

Parametrem określającym jakość urządzenia grzewczego jest jego sprawność definiowana jako:

$$\eta = \frac{\text{strumień energii uytecznej}}{\text{strumień energii doprowadzanej}} = \frac{\dot{Q}_{pob}}{\dot{Q}_{dost}} = \frac{\dot{m}(i_{wy} - i_{we})}{\dot{m}_{pal}W_d} \quad (5.37)$$

Zanieczyszczanie atmosfery produktami spalania

Spalanie paliw przyczynia się do degradacji środowiska naturalnego głównie poprzez emisję **gazów cieplarnianych** CO_2 i **zanieczyszczeń** takich jak SO_2 , SO_3 , NO_x , CO , WWA oraz węglowodorów (metanu, etanu, benzenu, aldehydów – w skrócie oznaczanych jako HC). Głównym źródłem emisji są **pojazdy samochodowe, transport lotniczy oraz energetyka zawodowa, rozproszona i rozsiana**. Dwutlenek węgla CO_2 , choć jest gazem nietrującym, nie jest gazem obojętnym dla środowiska naturalnego, które jest skomplikowanym systemem w równowadze. Wzrost stężenia dwutlenku węgla w atmosferze jest przyczyną tzw. efektu cieplarnianego, stąd też CO_2 nazywamy gazem cieplarnianym. Szacuje się, że ilość dwutlenku węgla, jaka dostaje się rocznie do atmosfery w wyniku spalania wynosi około $13 \div 15 \cdot 10^9$ ton. Jest to ułamek około 0,25% całkowitej produkcji CO_2 w wyniku procesów biologicznych, nie mniej uważa się, że ta dodatkowa emisja powoduje zaburzenie równowagi radiacyjnej Ziemi i przyczynia się do szybkiego podnoszenia średniej temperatury na Ziemi. Istnieją przesłanki pozwalające przypuszczać, iż w ciągu 30 lat temperatura średnia na Ziemi podniesie się o około $1^\circ C$, co wywoła dziesiątki ważnych zmian klimatycznych.

Spalanie niezupełne objawi się występowaniem w spalinach produktów pośrednich reakcji spalania, wśród których głównym jest tlenek węgla. Emisję tlenku węgla obserwuje się z małych komór spalania, gdzie zdarza się niekorzystna kombinacja; **zbyt krótki czas przebywania i zbyt niska temperatura spalania**. Tlenek węgla jest gazem bezwonny, bezbarwny i silnie toksycznym. Wpływ CO na człowieka zależy od koncentracji i czasu oddziaływania – przy koncentracji $100 ppm$ (ppm – cząstki CO na milion) w powietrzu przez 10 godzin powoduje bóle głowy i ograniczenie zdolności myślenia. Koncentracja $300 ppm$ przez 10 godzin powoduje wymioty i utratę przytomności. Większa koncentracja powoduje śmierć (zaczadzenia).

Innym toksycznym produktem spalania są tlenki azotu, łącznie oznaczane przez NO_x . Prędkość produkcji NO_x silnie wzrasta wraz z temperaturą i nabiera znaczenia powyżej $1600^\circ K$. Roczna emisja NO_x w wyniku spalania jest rzędu 10^8 ton, co nie przekracza naturalnej emisji NO_x ocenianej na około $2 \cdot 10^9$ ton rocznie. W skali lokalnej, w regionach uprzemysłowionych NO_x odgrywa ważną rolę w zanieczyszczeniu atmosfery, bowiem tlenki azotu w obecności pary wodnej przechodzą częściowo w kwas azotowy HNO_3 , który

następnie spada na ziemię w postaci kwaśnych deszczów, niszcząc uprawy, lasy i przyspieszając korozję metali.

Emisja tlenków siarki w wyniku spalania oceniana jest na 200 milionów ton rocznie. Ponieważ jest to ilość porównywalna z ilością związków siarki uwalnianych w procesach naturalnych, redukcja emisji tlenków siarki, zwłaszcza w naszym kraju, staje się ważnym zagadnieniem. Dzięki długiemu czasowi przebywania w atmosferze SO_2 może przemieszczać się na znaczne odległości i wywoływać choroby płuc i uszkadzać liście oraz powodować kwaśne deszcze.

Istotnym składnikiem zanieczyszczeń atmosfery są również emisje popiołu. Popiół jest substancją mineralną występującą w węglu (10 - 60 % wagowo) w postaci minerałów takich jak kadmit (minerał glino – krzemowy), krzemionka SiO_2 , hematyt Fe_2O_3 , kalcyt $CoCO_3$, syderyt $FeCO_3$, dolomit $CaCO_3MgCO_3$, piryt FeS_2 , gips $CaSO_4 \cdot 2H_2O$. Podczas spalania powstaje lotny popiół składający się z drobnych frakcji 0,1 – $50\mu m$ i submikronowych ziaren ($< 0,1\mu m$) powstałych przez odparowanie i kondensację części związanych substancji mineralnych. Podobnym do popiołu zanieczyszczeniem lotnym jest sadza składająca się z czystego skryształizowanego węgla. Rozmiary cząstek sadzy wynoszą od 1 do $100nm$, a ich kształt ma dużo wspólnego z fuleronami i produktami nanotechnologii.

Uzupełnienia U

Janusz Badur

Pięć wykładów ze współczesnej termomechaniki płynów

(skrypt dla studentów IZK)

U.1 Uzupełnienia Wykładu Pierwszego

U.1.3

Wyprowadzenie równań bilansu masy, pędu i energii

Informacje Wstępne – Struktura Równań Bilansu – Wektor Zmiennych Zachowawczych $\mathcal{U}$ – Jak Bilansować? – Twierdzenie o Transporcie Reynoldsa – Analityczne Wyrażenie Bilansu – Lokalna Postać Bilansu – Postać Strumieni $\mathcal{F}^e$, $\mathcal{F}^v$ – Sprężysty (odwracalny) Strumień $\mathcal{F}^e$, – Zachowawcza Postać Bilansów – Zapis i Oznaczenia – **Bilans Masy** – Przepływ Substancji z Położenia Wyjściowego do Aktualnego – Bilans Masy w Formie Lagrange’a – Bilans Masy w Formie Eulera – Postaci Szczególne Bilansu Masy – **Bilans Pędu** – Druga Zasada Dynamiki Newtona – Strumień Pędu w Kontinuum Cząstek – Addytywny Splitting Strumienia Pędu – Bilans Pędu Kontinuum – Zachowawcza Postać Bilansu Pędu – Warunki Brzegowe i Początkowe – Postaci Szczególne Bilansu Pędu – Postać Cauchy’ego – Postaci Wektora Przyspieszenia – Równania Naviera-Stokesa – Postać Crocco-Vazonyi – Bilans Momentu Pędu – Bilans Pędu w Układzie Obracającym się – **Bilans Energii** – Formy Energii – Bilans Energii Kinetycznej – Bilans Energii Ciężenia – Bilans Energii Związanej – Bilans Energii Wewnętrznej – Sumaryczne Bilanse Energii – Bilans Energii Mechanicznej – Bilans Energii Ciepłej – Bilans Energii Całkowitej – Postać Numeryczna Bilansu Energii – Postaci Szczególne – Postać Niezachowawcza – O Jeszcze Jednym Bilansie – **Tabela Zbiorcza i Podsumowanie**

U.1.3.1 Informacje wstępne

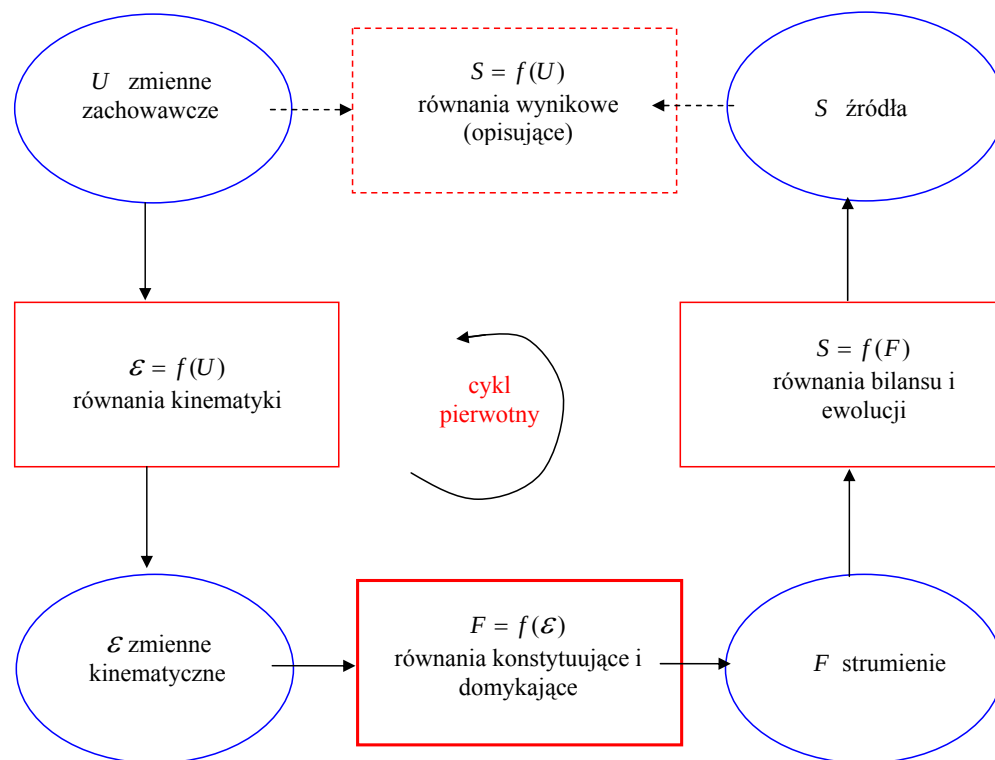
Wśród milionów tysięcy równań każdego dnia wykorzystywanych przez uczniów, studentów, nauczycieli i badaczy, łatwo jest stracić orientację i zgubić sens ich wyprowadzania. Zgnębieni przytłaczającą ilością oznaczeń, indeksów, nadkreśleń, gwiazdek, primów i innych nieznanych symboli „rodem z puszczy afrykańskiej”, tracimy szybko konieczny dystans jaki winniśmy mieć do matematyki – matematyki, która często niepotrzebnie przesłania istotę merytoryczną naszego działania. Stąd też, jeszcze przed przystąpieniem do określenia zasad bilansowania, dobrze jest przypomnieć sobie, iż wszelkie równania jakie spotykamy w termomechanice kontinuum mają z sobą coś wspólnego, a mianowicie, muszą one należeć do któregoś z **trzech podstawowych typów** równań określanych w literaturze jako:

- 1) **równania kinematyki,**
- 2) **równania konstytuujące i domykające,**
- 3) **równania bilansu i ewolucji.**

Równania powyższe określone są na „polach” czyli zmiennych zależnych od położenia i czasu. Wśród zmiennych – **zmiennie** pierwotne (**zachowawcze**) $\mathcal{U}$ odgrywają zasadniczą rolę. Są one traktowane jako podstawowe niewiadome a ich ilość musi być równa ilości równań bilansu i ewolucji. Równania kinematyki łączą zmienne zachowawcze $\mathcal{U}$ ze zmiennymi kinematycznymi $\mathcal{E}$. Równania konstytuujące i domknięcia łączą zmienne kinematyczne $\mathcal{E}$ ze strumieniami $\mathcal{F}$, zaś równania bilansu i ewolucji łączą strumienie $\mathcal{F}$ za źródłami $\mathcal{S}$. Struktura logiczna trzech wyżej wymienionych typów równań może być przedstawiona krótko na następującym diagramie (rys. U.1).

Przedmiotem niniejszego uzupełnienia są **równania bilansu masy, pędu i energii**, które z racji swego „niezależnego pochodzenia” często mają własne, historycznie uzasadnione, nazwy. Często jednak jest tak, iż nadmiar szczegółów i lokalnych, słusznych nazw przesłania strukturę logiczną, której rola w procesie porządkowania materiału i procesie jego nauczania jest podstawowa. Stąd też wiele nazw lokalnych będziemy tu dublować nazwami jednolitymi wziętymi ze struktury logicznej. Należy jednak przestrzec czytelnika – zwłaszcza tego, który spodziewa się łatwego algorytmu uczenia – globalizacja czy unifikacja oznaczeń i pojęć nie zastąpi nigdy lokalnego procesu zrozumienia treści fizycznych tak bardzo różnych, gdy bilansujemy masę, pęd i energię.¹

¹Dalsze informacje o **równaniach kinematyki i równaniach konstytutywnych** można znaleźć w uzupełnieniach U1.4, U2.2. Powyższy diagram może nie być od razu jasny a jego zrozumienie może wymagać kilkukrotnego studiowania po pewnych odstępach.



Rysunek U.1. Usytuowanie równań bilansu i ewolucji wśród innych typów równań występujących w termomechanice i klasycznej teorii pola

pach czasu. Niemniej z punktu widzenia studentów specjalizujących się w CFD i CSD jego zrozumienie jest pożądane, bowiem posiłkując się tym diagramem łatwo jest zrozumieć istotę **Numerycznej Termomechaniki**. Można to uczynić poprzez wykazanie jakich operacji ona nie używa i czym różni się od **Analizycznej Termomechaniki**. Otóż, po pierwsze, celem numerycznej termomechaniki nie jest wyprowadzanie *równań opisujących* (wynikowych), zaznaczonych przerywanymi ramkami, poprzez „zwijanie” wszystkich trzech typów równań w jedno równanie opisujące (np. równanie Naviera-Stokesa, Plancka, Naviera-Lame, Fouriera-Kirchhoffa, etc). *Równania opisujące* nie są używane w CFD i CSD, stąd odrębność równań kinematyki, równań konstytuujących i bilansujących jest, w CFD i CSD, z całą świadomością utrzymana. Po drugie, CFD i CSD nigdy nie dokonuje żadnych, chociażby najmniejszych, uproszczeń w równaniach kinematyki i równaniach bilansu i ewolucji. Jedynymi miejscami w których Numeryczna Termomechanika dopuszcza uproszczenia są równania konstytuujące i domykające. **Obliczać bez żadnych uproszczeń geometrycznych, kinematycznych i bilansowych** – taka jest podstawowa dewiza Numerycznej Termomechaniki. Tym się różnimy od Analizycznej Termomechaniki. Protagoniści Analizycznej Mechaniki i Analizycznej Termodynamiki – są teoretykami, którzy jako jedyni orientują się w gąszczu założeń, uproszczeń, pominięć, wyprostowań, zaokrągleń, obcięć, rozwinięć i dziesiątkach tysięcy innych chwytów śmiało prowadzących do „bicia piany” wzorów.

Struktura Równań Bilansu

Przed przystąpieniem do wyprowadzania bilansu masy, pędu i energii wprowadzimy kilka pojęć, którym z uwagi na pewną powtarzalność we wszystkich równaniach bilansu, nadamy sens pojęć pierwotnych, na których zasadzają się schematy logiczne i paradygmaty myślenia. Dzięki pojęciom takim jak:

- wielkość zachowawcza $\mathcal{U}$,
- strumień konwekcyjny $\mathcal{F}^c$,
- strumień sprężysty $\mathcal{F}^e$,
- strumień dyfuzyjny $\mathcal{F}^\nu$,
- źródło $\mathcal{S}$,

zrozumiemy, że wszystkie równania bilansu zbudowane są w oparciu o ten sam logiczny schemat.

Zajmujemy się ciałami ciągłymi, takimi jak powietrze, spaliny, para wodna, woda, oleje, smary, metale, węgiel kamienny w stanie zmielonym oraz innymi płynami i ciałami roboczymi. Nie śledzimy jednak zachowania się poszczególnych atomów wyżej opisanych substancji, gdyż nie posiadamy do tego odpowiednich narzędzi, a otrzymane rezultaty nie mogły by być szybko przełożone na pożądane integralne dane tak jak np. praca wykonana przez kilogram pary w stopniu turbiny parowej. Stąd też posługujemy się pojęciem **cząstki kontinuum**. Cząstka kontinuum zawiera w sobie coraz to inne atomy i molekuły substancji, a ich ilość nie jest z góry określona. Nie jest również określony wymiar cząstki kontinuum – w zależności od tego jaką informację chcemy uzyskać może to być – w tym samym kotle energetycznym BB1150 (o objętości 160 tys m³) cząstka o objętości 0.001 mm³ lub cząstka o objętości 0.5 m³.

Bilansowanie „ładunków” niesionych przez substancję takich jak **masa**, **pęd**, **energia** polega na zrównoważeniu zmian w czasie zmianami w przestrzeni. Aby określić **zmiany w przestrzeni** stosuje się jedno z trzech możliwych podejść:

- opis Eulera,
- opis Lagrange’a,
- opis Maxwella.

Aby określić **zmiany w czasie** stosuje się cztery rodzaje obserwacji:

- w punkcie nieruchomym,
- w punkcie materialnym,
- w punkcie referencjalnym,
- w punkcie komponencjalnym.

Oznacza to, iż do dyspozycji mamy $3 \times 4 = 12$ możliwych postaci bilansów – w praktyce tylko kilka jest wykorzystywanych, a niektóre dopiero się rozwijają. W niniejszym uzupełnieniu przedstawimy sposób wyprowadzenia bilansu w opisie Eulera w punkcie nieruchomym. Pozostałe wyprowadzenia są podane w Uzupełnieniu U2.3. Naszą podstawową objętością, w której bilansujemy wielkości niesione przez substancję jest objętość cząstki kontinuum, którą często wyobrażamy sobie jako elementarny sześciątlik, np. $dV = dx dy dz = 1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$. Ten **sześciątlik jest objętością punktu kontinuum**. W środku tej elementarnej cząstki zaczepione są „średnie” własności substancji², które nazywamy wielkościami zachowawczymi $\mathcal{U}$. Z matematycznego punktu widzenia wielkości te mogą być:

- skalarem (gęstość, energia wewnętrzna i kinetyczna, entropia, itd.),
- wektorem (pęd, turbulentny i radiacyjny strumień energii),
- tensorem (naprężenie turbulentne Reynoldsa, strumień naprężeń lepkich).

²Są to własności średnie w sensie sformułowania kontynualnego, zwanego również sformulowaniem fenomenologicznym. Trzeba pamiętać, że niektóre średnie nie muszą mieć swego odpowiednika na poziomie mikroskopowym (np. takie pojęcia jak energia kinetyczna, entropia właściwa, ciśnienie, temperatura, etc nie istnieją w mechanice statystycznej i kwantowej) a niektóre pojęcia takie jak np. energia wewnętrzna mogą mieć inne znaczenie na poziomie mikroskopowym, a inne na poziomie makroskopowym (fenomenologicznym).

Fenomenologiczne bilanse masy, pędu i energii można również otrzymać z podejść uwzględniających mikroskopową czy atomową strukturę materii. Najstarszym tego typu podejściem jest kinetyczna teoria gazów oparta na jednym fundamentalnym równaniu bilansu:

$$\rho \frac{d}{dt} \overline{Q} + \text{div} (\rho \overline{Q \otimes c}) = \rho \frac{d}{dt} \overline{Q} + \rho \left(\overline{f \cdot \frac{\delta Q}{\delta u}} \right)$$

gdzie Q reprezentuje dowolną mikroskopową wielkość fizyczną. Alternatywnym podejściem jest rozwijana ostatnio Dynamika Molekularna, łatwo implementowana do analizy numerycznej.

Wielkości $\mathcal{U}$ określone są wewnątrz objętości cząstki i zaczepione w jej środku, stąd też nazywane są **wielkościami intensywnymi**. Zazwyczaj są to wielkości odniesione do **jednego kilograma masy**, czyli są gęstościami masowymi. Natomiast gdy zostają pomnożone przez gęstość ρ stają się gęstościami objętościowymi. Niektóre z wielkości intensywnych nie podlegają bilansom – przykładem energii, która nie jest bilansowana jest energia radiacji – ponieważ nie można jej magazynować w substancji jest ona traktowana jako forma wymiany energii na ścianach objętości cząstki kontinuum. Niejasny sens ma również energia ciężenia $\Gamma = zg$, dla której substancja nie jest siedliskiem.

„Wektor” Zmiennych Zachowawczych $\mathcal{U}$

Aby podkreślić schemat logiczny bilansowania wspólny dla masy, pędu i energii wszystkie zmienne bilansowane intensywnie ustawiamy w tzw. wektor zmiennych zachowawczych ³

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{array}{l} \rho \\ \rho \vec{v} \\ \rho e \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} - \text{ gęstość objętościowa masy } [\text{kg}/\text{m}^3], \\ - \text{ gęstość objętościowa pędu } [(\text{Ns})/\text{m}^3], \\ - \text{ gęstość objętościowa energii } [\text{J}/\text{m}^3]. \end{array} \quad (\text{U.1})$$

Poszczególne cząstki kontinuum oddziałują poprzez powierzchnie ograniczające ich objętość (nazywane również powierzchniami kontrolnymi). W tych oddziaływaniach uczestniczą wielkości zwane **strumieniami** $\mathcal{F}$ [„coś” na sekundę i na pole powierzchni]. Strumienie zaliczamy do kategorii zmiennych ekstensywnych (**zaczepionych na powierzchni a nie w środku**). Od wielkości strumieni wpływających $\mathcal{F}^-$ i wypływających $\mathcal{F}^+$ do objętości cząstki kontinuum zależy zmiana w czasie wielkości $\mathcal{U}$ ⁴

³Historycznie, pierwszym oznaczeniem na „wektor” $\mathcal{U}$ jest literka Ψ wprowadzona przez PIOLA (1849) i używana przez MAXWELLA (1866). A.C. TRUESDELL (1952), z racji trzech składników wektora $\mathcal{U}$, nazywa tę wielkość trydentem Pioli-Maxwella.

W literaturze krajowej (J.Rutkowski, 1975, Z. Wrzeński, 2002) w stosunku do wielkości zawartych w $\mathcal{U}$ używane jest pojęcie „zasób” np.: ρ – objętościowa gęstość zasobu masy, $\rho \vec{v}$ – objętościowa gęstość zasobu pędu, etc. Natomiast w klasycznej teorii pola wielkości bilansowe zawarte w $\mathcal{U}$ nazywa się „ładunkiem topologicznym”.

W niniejszej pracy większość zagadnień ustawiono w kontekście historycznym, Wprawdzie „przedmiotem nauk ścisłych nie są ludzie lecz fakty przyrodnicze” (Marie Curie) niemniej w naukach technicznych, jak dotąd, nie opracowano innego paradygmatu dydaktycznego jak ten w którym sięgamy do historycznie najprostszych rozwiązań, a rozwiązania bardziej złożone wprowadzamy w historycznej kolejności. Historia naszej branży, czy tego chcemy czy też nie, jest obecna w sposobie nauczania studentów.

⁴Strumienie, od angielskiego słowa „Flux” oznaczamy literą „ $\mathcal{F}$ ”.

Jak Bilansować?

Wielkość $\mathcal{U}$ może się zmieniać w dV nie tylko pod wpływem strumieni, lecz również pod wpływem produkcji biorącej się z wewnętrznych źródeł – zaczepionych w środku dV . Wobec tego fundamentalne równanie bilansu ma postać:⁵

$$\begin{array}{rcl} \begin{array}{l} \text{zmiana} \\ \text{w czasie} \\ \text{wielkości} \\ \text{intensywnej} \\ \text{wymiana } \mathcal{U} \text{ w} \\ dV \end{array} & = & \begin{array}{l} \text{wymiana} \\ \text{strumienia } \mathcal{F} \\ \text{przez} \\ \text{powierzchnię} \\ \text{ograniczającą} \\ dV \end{array} + \begin{array}{l} \text{Produkcja } \mathcal{S} \text{ ze} \\ \text{źródeł w } dV \end{array} \end{array} \quad (\text{U.2})$$

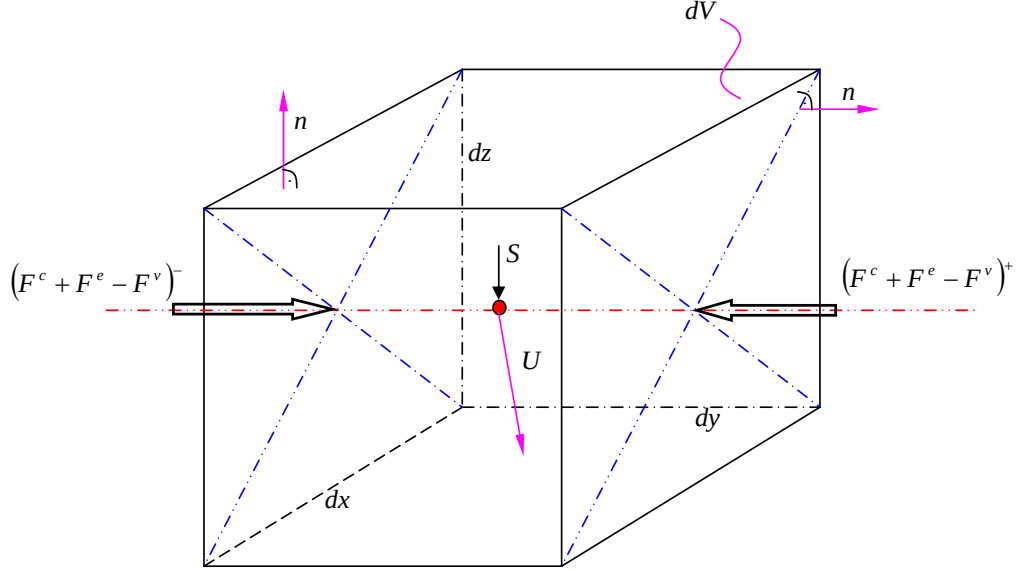
lub, schematycznie:

Zmiana = Wymiana + Przemiana.

Dalsze postępowanie zależy od sprecyzowania sposobu opisu ruchu kontinuum (**materialny, przestrzenny, referencjalny**), bowiem bilanse wielkości intensywnych i odpowiadających im strumieni pól extensywnych dokonuje się w obszarze cząstki kontinuum, które jest elementarną objętością wydzieloną z ośrodka i przestrzeni kanału. Ponieważ część cząstek kontinuum ma tę samą powierzchnię, jaką mają np. nieruchome ścianki kanału albo ruchome powierzchnie substancjonalne albo powierzchnie przypisane czołu fali czy powierzchni międzyfazowej, to wygodnie do każdej z tych sytuacji dobrać opis **przestrzenny, materialny, referencjalny**. W niniejszym rozdziale interesuje nas **opis przestrzenny** w punkcie nieruchomym, bowiem:

- Gdy znamy geometrię nieruchomych ścianek kanału to naturalnym jest opis przestrzenny (eulerowski) zaproponowany przez Eulera (1752). W opisie tym objętość dV jest nieruchoma, zaś powierzchnie boczne ją ograniczające nazywane są powierzchniami kontrolnymi. Oznacza to, iż cząstka kontinuum nie zawiera na stałe określonych atomów substancji, bowiem materia przepływa swobodnie przez elementarną objętość dV .
- W obliczaniu przepływów przez maszyny przepływowe dominuje opis przestrzenny (eulerowski) – w przypadku ruchomych łopatek wykorzystujemy tę dogodność, iż transformujemy cały układ współrzędnych tak, aby obserwator umieszczony w nim widział całą powierzchnię łopatki

⁵Pojęcie fundamentalnego równania bilansu wyprowadził J.Maxwell w pracy: J.C. MAXWELL, On the dynamical theory of gases, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **157**, 49-88, 1866



Rysunek U.2. Schemat bilansu wielkości intensywnej $\mathcal{U} = \{\rho, \rho\vec{v}, \rho e\}$ przypadającej na jednostkę objętości dV . W bilansie biorą udział strumienie $\mathcal{F}^c$, $\mathcal{F}^e$, $\mathcal{F}^v$ oraz źródła $\mathcal{S}$.

jako ściankę nieruchomą. Nie dzieje się to za darmo, musimy zszyć obszary wirujące (ruchome) z nieruchomymi. Problem zszywania obszarów i siatek dyskretizacyjnych Metody Objętości Skończonych i Metody Elementów Skończonych jest oryginalnym problemem Numerycznej Termomechaniki Płynów.

Twierdzenie o Transporcie Reynoldsa

W opisie przestrzennym zmianę w czasie pewnej zmiennej intensywnej niesionej przez 1 kg substancji przepływającej przez elementarną objętość $dx \times dy \times dz$, o środku położonym w punkcie $\vec{x} = x_i \vec{e}_i$, obliczamy następująco. Zmiana ta jest złożona z lokalnej zmiany wielkości intensywnej niesionej przez substancję oraz z wymiany substancji, jaka w ciągu niewielkiego przyrostu czasu zaszła na powierzchniach kontrolnych⁶

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \mathcal{U} dV \equiv \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}|_{\vec{x}=\text{const}} dV + \oint_{\partial V} (\mathcal{U} \otimes \vec{v}) \cdot \vec{n} dA \quad (\text{U.3})$$

⁶OSBORNE REYNOLDS, *The Sub-Mechanics of Universe*, Papers, (1903) Vol III, rów. 15. Równanie to odkrył dla termomechaniki C. TRUESDELL (*Kinematics of Vorticity*, 1954). Clifford Ambroży III Truesdell jest, być może, jedynym badaczem, który nie bez pewnych sukcesów studiował dzieło Reynoldsa.

Pierwszy człon, po prawej stronie, oznacza zmianę w czasie gęstości wielkości intensywnej niesionej przez 1 m^3 substancji chwilowo znajdującej się w nieruchomej objętości dV , drugi człon bierze się z faktu, iż substancja przenika przez powierzchnię kontrolną z prędkością $\vec{v}$ (występuje tu uproszczenie, zakładające, iż wszystkie elementy substancji wewnątrz dV mają tę samą prędkość – stąd prędkość raz występuje jako zmienna intensywna, a raz jako ekstensywna). Wektor normalny $\vec{n}$ orientuje powierzchnię kontrolną na zewnątrz objętości dV . Ten drugi człon definiuje strumień konwekcyjny unoszony przez substancję (wymiana substancjonalna). Różni się on zasadniczo od dwóch pozostałych strumieni $\mathcal{F}^e$, $\mathcal{F}^\nu$, które zdefiniujemy poniżej, wynikających ze sprężystej i dyfuzyjnej wymiany niesubstancjonalnej⁷

Analityczne Wyrażenie Bilansu

Oznaczmy literką

$$\mathcal{F}^c = \mathcal{U} \otimes \vec{v} \quad \left[\frac{\text{coś}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right] \quad (\text{U.4})$$

dodatkowy strumień wymiany substancjonalnej między sąsiednimi punktami płynu. Ponieważ związany jest on z prędkością substancji $\vec{v}$ nazywa się go **strumieniem konwekcyjnym**.

Wprowadźmy również strumienie wyrażające wymianę niesubstancjalną i oznaczmy je przez

$$\oiint_{\partial V} \mathcal{F}^e \vec{n} dA \quad \text{ i } \quad \oiint_{\partial V} \mathcal{F}^\nu \vec{n} dA \quad [\text{coś na sekundę}] \quad (\text{U.5})$$

i nazwijmy, odpowiednio **sprężysty** i **dyfuzyjny strumień** wielkości ekstensywnych oddziaływujący na powierzchni dV oraz przez

$$\iiint_V \mathcal{S} dV \quad [\text{coś na sekundę}] \quad (\text{U.6})$$

⁷Formuła Reynoldsa (U.3) jest kluczowa w procesie zrozumienia zasad bilansowania. Występuje w niej znak d/dt będący matematycznym wyrazem słów „zmiana w czasie” oraz znak $\partial/\partial t$ oznaczający lokalną zmianę w czasie. Słowa „unoszona przez substancję poruszającą się z prędkością $\vec{v}$ ” oznaczono przez znak $\mathcal{U} \otimes \vec{v}$ który nie jest zwykłym mnożeniem wielkości $\mathcal{U}$ przez $\vec{v}$. Jest to iloczyn diadyczny, podnoszący rząd wektora $\mathcal{U}$. Te mnożenie jest źródłem nieliniowości geometrycznej (czyli nieliniowości właściwej tylko dla równań kinematycznych i bilansowych). Ten sam znak iloczynu diadycznego pojawia się w bilansie pędu jako $\text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v})$. Toteż właściwa odpowiedź studenta na pytanie skąd się wziął znak $\otimes$ w równaniu pędu winna brzmieć: **Z Twierdzenia Reynoldsa o Transporcie**.

produkcję ze **źródła przemiany** $\mathcal{S}$. Wtedy, zamieniając zapis słowny w schematycznym równaniu bilansu (U.2) na zapis analityczny i wykorzystując twierdzenie o transporcie (U.3) otrzymamy ogólną postać równania bilansu w opisie przestrzennym ⁸

$$\boxed{\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U} dV + \oiint_{\partial V} (\mathcal{F}^c + \mathcal{F}^e) \vec{n} dA = \oiint_{\partial V} \mathcal{F}^\nu \vec{n} dA + \iiint_V \mathcal{S} dV.} \quad (\text{U.7})$$

Jest to postać równań bilansu integralna w przestrzeni. Nie jest ona zależna bezpośrednio od tego, jaka duża będzie objętość cząstki kontinuum. Postać tą nazywamy zachowawczą *postacią równań bilansu*.

Dla numerycznej termomechaniki jest to **postać podstawowa** – jedynym uproszczeniem, jakie wykonuje numeryka jest zastąpienie objętości cząstki kontinuum objętością skończonego elementu, na jaki dzielimy obszar obliczeniowy. Z praktyki obliczeń inżynierskich wiadomo, iż w jednym obszarze (np. wewnątrz kotła OP-650) występują obok siebie np. objętości skończone małe $V_e = 0.001 \text{ mm}^3$ i duże $V_e = 0.5 \text{ m}^3$. Z punktu widzenia fenomenologicznego modelowania kontinuum, jest to poprawne, bowiem nigdzie w naszym rozumowaniu nie zakładaliśmy że wszystkie cząstki kontinuum mają mieć tę samą objętość.⁹

Lokalna Postać Bilansu

Wykorzystując zależność Gaussa (1821) – Ostrogradskiego (1824) mówiącą o zamianie całki powierzchniowej na całkę po objętości:

$$\oiint_{\partial V} (\text{strumień}) \vec{n} dA = \iiint_V \text{div} (\text{strumień}) dV \quad (\text{U.8})$$

otrzymujemy z (U.7) następującą **lokalną**¹⁰ **postać równań bilansu**:

$$\boxed{\partial_t \mathcal{U} + \text{div} (\mathcal{F}^c + \mathcal{F}^e) = \text{div} \mathcal{F}^\nu + \mathcal{S}.} \quad (\text{U.9})$$

⁸Strumień sprężysty, $\mathcal{F}^e$, wbrew ogólnemu schematowi (U.2), znalazł się po stronie lewej bowiem oparty jest na ciśnieniu p , które ma zwrot przeciwny do strumienia dyfuzyjnych.

⁹Należy przyznać, że na aktualnym etapie rozwoju wiedzy o dyskretyzacji, właściwa dyskretyzacja jest sztuką. Nie mniej, trwają intensywne prace nad procedurami automatycznego zagęszczania i rozgęszczania siatek dyskretyzacyjnych. Należy się spodziewać, iż w ciągu 2-3 lat takie procedury zostaną dołączone do wiodących kodów i tajemnica sztuki dyskretyzacji zostanie odsłonięta. Pionierski wkład w tę dziedzinę wiedzy ma prof. LESZEK DEMKOWICZ z Austin University, którego procedury adaptacyjne są rozkupywane.

¹⁰Określenie „lokalna postać” znaczy tyle co bilans zapisany w środku objętości cząstki kontinuum posiadającej położenie $\vec{x} = x_i \vec{e}_i$. W języku polskim słowo diwergencja znaczy tyle co „rozplyw”, stąd strumień sprężysty zawierający ciśnienie, aby mógł się znaleźć

Poszczególne wyrażenia w równaniu (U.9), zaczynając od lewej strony, oznaczają:

- lokalną zmianę gęstości wielkości intensywnej,
- transport konwekcyjny poprzez powierzchnię ograniczającą objętość,
- transport sprężysty poprzez powierzchnię ograniczającą objętość,
- transport dyfuzyjny poprzez powierzchnię ograniczającą objętość,
- człon źródłowy.

Mimo, iż lokalna forma równań sugeruje, iż bilans wykonany jest w środku objętości dV to należy pamiętać, że diwergencja (rozływ) odnosi się do wielkości ekstensywnych (na zewnątrz), czyli do strumieni $\mathcal{F}^c, \mathcal{F}^e, \mathcal{F}^\nu$. Strumienie te zlokalizowane są na powierzchniach odległych od środka na przykład o $\frac{1}{2}\Delta x, \frac{1}{2}\Delta y, \frac{1}{2}\Delta z$. Wielkości, z których zbudowane są strumienie $\mathcal{F}^e, \mathcal{F}^\nu$ można poznać po tym, że **nie odnoszą się** na 1 kg substancji (czyli substancja nie jest ich siedliskiem). Przykładami są: temperatura, ciśnienie, naprężenie lepkie, potencjał chemiczny, strumień ciepła, strumień radiacyjnej energii, etc..

Natomiast, wielkości zachowawcze (bilansowane) $\mathcal{U}$ są gęstościami objętościowymi i można z nich przejść na **wielkości właściwe** które można odnosić na 1 kg masy substancji płynnej i przykładami tu są: entropia właściwa s [(J/(kgK))], objętość właściwa $v = 1/\rho$ [m³/kg], energia wewnętrzna właściwa u [J/kg], kinetyczna energia właściwa $\frac{1}{2}\vec{v}^2$ [J/kg], udział masowy x [kg składnika/kg mieszaniny], energia całkowita $e = u + \frac{1}{2}\vec{v}^2$.

Postać Strumieni $\mathcal{F}^c, \mathcal{F}^\nu$

W przypadku, gdy „wektor” $\mathcal{U}$ obejmuje masę, pęd i energię to wtedy poszczególne strumienie dotyczące równania masy, pędu i energii również noszą nazwę **strumieni masy, pędu i energii**. W przypadku strumienia

pod wpływem operacji „rozplywu” został przeniesiony na lewą stronę. Zauważmy, że **strumień jest obiektem matematycznym zawsze o rząd wyższym niż wielkości zachowawcze**, stąd w równaniu skalarnym winien wystąpić znak kropki odnoszący się do iloczynu skalarnego w (U.8). Wektor normalny występuje z prawej strony dlatego diwergencja jest brana jaka zwężenie z prawej strony nie zaś z lewej jak to podają podręczniki oparte na zapisie Kryłowa (patrz Uzupełnienie U1.11).

konwekcyjnego są to **konwekcyjny strumień masy**, **konwekcyjny strumień pędu** i **konwekcyjny strumień energii**¹¹:

$$\mathcal{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho \vec{v} \\ \rho e \end{Bmatrix}; \quad \mathcal{F}^c = \begin{Bmatrix} \rho \vec{v} \\ \rho \vec{v} \otimes \vec{v} \\ \rho e \vec{v} \end{Bmatrix}. \quad (\text{U.10})$$

Zauważmy, że strumień jest obiektem o rząd wyższym od wielkości bilansowanej, tzn. jeśli bilansowany jest skalar to strumień jest wektorem, jeśli bilansowany jest wektor to strumień jest tensorem (drugiego rzędu).

Podobne nazwy odnoszą się do dyfuzyjnego strumienia. Są to **dyfuzyjny strumień masy** (zerowy), **dyfuzyjny strumień pędu** i **dyfuzyjny strumień energii**.

$$\mathcal{F}^v = \begin{Bmatrix} 0 \\ \overset{\leftrightarrow}{\tau}^c \\ \overset{\leftrightarrow}{\tau}^c \vec{v} + \vec{q}^c \end{Bmatrix}. \quad (\text{U.11})$$

Sprężysty (odwracalny) Strumień $\mathcal{F}^e$

W ogólnej definicji **strumienia sprężystego** pojawia się tylko ciśnienie. Nie jest to przypadkowe i bierze się z faktu, że ciśnienie odpowiedzialne jest za transport sprężystych własności płynu i nie może być dołączane do strumienia dyfuzyjnego:

$$\mathcal{F}^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ p \overset{\leftrightarrow}{I} \\ p \vec{v} \end{Bmatrix} \quad \text{ciało płynne}, \quad \mathcal{F}^e = \begin{Bmatrix} 0 \\ \overset{\leftrightarrow}{\sigma} \\ \overset{\leftrightarrow}{\sigma} \vec{v} \end{Bmatrix} \quad \text{ciało stałe}, \quad (\text{U.12})$$

gdzie $\mathcal{F}^e$ – **strumień sprężysty**¹².

¹¹Konwekcyjny strumień energii i dyfuzyjny strumień energii wprowadzili PETER UMOV (1874) i VITO VOLTERRA (1899). Konwekcyjny strumień energii zawiera całkowitą energię unoszenia e . Odwracalny (sprężysty) strumień zawiera tylko odwracalny strumień energii mechanicznej. Brak jest w nim odwracalnego strumienia energii cieplnej $\vec{q}^e$. Odwracalny (sprężysty) strumień ciepła pojawia się w przypadku modelowania płynów z ewoluującą mikrostrukturą pochodzącą np. od przejść fazowych. – wyprowadzenie strumienia $\vec{q}^e$ znajdzie czytelnik w pracy: J. BADUR, M. BANASZKIEWICZ, *Model of the ideal fluid with scalar microstructure*. Transaction IFFM, **105**, 115-152, 1999. Dyfuzyjny strumień energii składa się z mechanicznego $\overset{\leftrightarrow}{\tau}^c \vec{v}$ i dyfuzyjnego strumienia ciepła $\vec{q}^c$. Tutaj indeksy „c” oznaczają strumień całkowity będący sumą wszystkich składników przyczyniających się do dyfuzji.

¹²Niniejsza praca preferuje taki niespotykany w literaturze zapis, bowiem wyraźnie pokazuje on że strumień konwekcyjny $\mathcal{F}^c$ nie potrzebuje równań konstytutywnych, a jest je-

Strumienie dyfuzyjne wielkości ekstensywnych obliczane są tylko poprzez pochodne przestrzenne wielkości intensywnych – natomiast ciśnienie, mimo iż zdefiniowane na powierzchniach kontrolnych wyrażane jest przez wielkości intensywne (wewnętrzne, zdefiniowane w środku objętości) poprzez równanie konstytutywne zwane równaniem stanu¹³.

Zachowawcza Postać Bilansów

Powyższe równania mają postać pożądaną i niejako wyjściową zarówno dla Metody Elementów Skończonych (MES) (U.9) jak i Metody Objętości Skończonych (MOS) (U.7). Metodologia postępowania i bilansowania MES i MOS pozostaje ta sama i wręcz identyczna z metodologią bilansowania w objętości cząstki kontinuum. Ta identyczność dotyczy wszystkich trzech opisów tj. opisu przestrzennego, materialnego i referencjalnego. W zależności od intensywności opisywanego zjawiska zachodzącego w danym miejscu, objętość kontrolna cząstki kontinuum może być ta sama jak objętość elementu w MOS i MES lub kilka, kilkanaście a nawet kilkaset razy większa. Z punktu widzenia Numerycznej Termomechaniki jako dziedziny wiedzy specjalizującej się w dyskretyzacji układów ciągłych, oznacza to, iż dyskretyzacja równań różniczkowych i ich zamiana na równania algebraiczne w obszarze objętości skończonej (MOS) lub elementu skończonego (MES) dzieje się według tej samej linii rozumowania, która doprowadziła nas do równań bilansu¹⁴

dyńie źródłem tzw. **geometrycznej nieliniowości** (podział na Geometryczną i Fizyczną Nieliniowość wprowadził V.V. NOVOŻILOV, 1944). Natomiast strumień $\mathcal{F}^e$ potrzebuje sprężystych, odwracalnych równań konstytutywnych, często zwanych równaniami stanu, zaś strumień F^ν potrzebuje równań konstytutywnych opisujących zjawiska nieodwracalne. Postać (U.12) ma znaczenie zwłaszcza wtedy, gdy używany modeli kontinuum bardziej złożonych niż model Cauchy'ego. W literaturze przedmiotu dominuje wspólne oznaczenie dla $(\mathcal{F}^c + \mathcal{F}^e)$. Nie można ignorować siły tradycji, która mimo, że pęta skutecznie proces myślenia, staje się jedyną platformą do wspólnej rozmowy między uczonymi badaczami. Nie można się tu zgodzić z Szekspirem który stwierdza: „**Czymże jest nazwa? To co zwą różą pod inną nazwą równie by pachniało**” (Romeo i Julia, Czytelnik, 1990, tłum. S. Barańczak)

¹³Ośrodek płynny nie ma możliwości przenoszenia sprężystych naprężeń postaciowych (ścinających) stąd sprężysty strumień pędu ma postać sferycznego tensora ciśnienia $p \overset{\leftrightarrow}{I}$. Natomiast ciała stałe z racji swej zwartej lub krystalicznej budowy przenoszą postaciowe naprężenia styczne, a odpowiadający im sprężysty strumień pędu, oznaczany najczęściej literą $\overset{\leftrightarrow}{\sigma} = \sigma_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \sigma^T$ posiada sześć niezależnych składowych.

¹⁴Należy rozróżnić dwa zasadniczo, fizycznie różne zagadnienia dyskretyzacji: **dyskretyzacja względem czasu i dyskretyzacja względem przestrzeni**. Ważniejsza jest dyskretyzacja **względem zmiennych przestrzennych**, w której zamieniamy pola ciągłe $\mathcal{U}(\vec{x}, t)$ wartościami w punktach (węzłach) a operacje grad $(\bullet)$, div $(\bullet)$, $\iiint (\bullet) dV$ aproksymujemy w przestrzeni. Dwoma głównymi technikami dyskretyzacji przestrzennej są MES i

Zapis i Oznaczenia

Zauważmy na koniec, że z matematycznego punktu widzenia **strumienie są obiektem o rząd wyższym niż wektor $\mathcal{U}$** . Stąd w definicjach pojawiają się znaki iloczynu diadycznego Gibbsa ($\otimes$), którego zadaniem jest podniesienie rzędu rozpatrywanych obiektów. Tradycyjnie, z uwagi na szybkość zapisu tablicowego, oraz fakt, że strumienie pędu są tensorami, pomijamy znaczek wektora na strumieniach $\vec{\mathcal{F}}^c$, $\vec{\mathcal{F}}^e$, stąd nie pojawiający się iloczyn skalarny w (U.7) lub divergencja brana na skalarze, budzi dyskomfort u wnikliwego studenta „dzielącego matematyczny włos na czworo”.

Poprawnie więc, aby wziąć dywergencję wektora strumienia konwekcyjnego, sprężystego i dyfuzyjnego należało by zapisać:

$$\vec{\mathcal{F}}^c = \mathcal{F}_i^c \vec{e}_i, \quad \vec{\mathcal{F}}^e = \mathcal{F}_i^e \vec{e}_i, \quad \vec{\mathcal{F}}^\nu = \mathcal{F}_i^\nu \vec{e}_i, \quad i = x, y, z$$

a wtedy równanie (U.9) miałoby postać wyrażoną przez składowe:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathcal{F}_i^c + \mathcal{F}_i^e) = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{F}_i^\nu + \mathcal{S}$$

lub, krótko:

$$\mathcal{U}_{,t} + \mathcal{F}_{i,i}^c + \mathcal{F}_{i,i}^e = \mathcal{F}_{i,i}^\nu + \mathcal{S}.$$

W pracach pionierskich i w starszej literaturze przedmiotu można spotkać szczególne oznaczenia dla składowych kartezjańskich: $\mathcal{F}_x^c + \mathcal{F}_x^e \equiv F$, $\mathcal{F}_y^c + \mathcal{F}_y^e \equiv G$, $\mathcal{F}_z^c + \mathcal{F}_z^e \equiv H$. Pełne wyprowadzenie i pełną dyskusję równań bilansu w postaci zachowawczej znajdzie czytelnik w monografii T. CHMIELNIAKA *Przepływy Transsoniczne*, 1994 [43]. Zauważmy, iż równania lokalne (U.9), lub całkowe (U.7) mają tzw. **postać absolutną** (wolną od indeksów bazy przestrzennej). Jest to postać wygodna nie tylko do zapisu tablicowego, ale jest to również postać wyjściowa do zapisu równań w każdym krzywoliniowym układzie współrzędnych. Przyjmijmy, że w aktualnym stanie rozwoju

MOS. Po dyskretyzacji przestrzennej równanie bilansu staje się równaniem algebraicznym względem przestrzeni, lecz nadal pozostają różniczkowe względem czasu. Istnieją różne techniki dyskretyzacji **względem czasu**, ale w aktualnej chwili dominują metody różnicowe zamieniające pochodne względem czasu w schematy różnicowe. Osobną grupą dyskretyzacji w czasie są tak zwane schematy typu „time marching”, dotyczące zagadnień stacjonarnych, w których czas jest pewnego rodzaju umownym parametrem sterującym rozpędzanie płynu od stanu zerowego do stanu ustalonego. Dużą przyszłość mają czasoprzestrzenne metody MOS i MES, w których buduje się jednolitą dyskretyzację funkcjami rozciągającymi w czasie i przestrzeni. Dalsze szczegóły dotyczące MES i MOS czytelnik znajdzie w Uzupełnieniu U1.5.

metod dyskretyzowanych siatki strukturalne używają równań wyrażonych w układzie krzywoliniowym natomiast siatki niestukturalne używają kartezjańskiego układu odniesienia.

U.1.3.2 Bilans masy (3D)

¹⁵ Konieczność dokonania takiego bilansu oznacza, że gęstość płynu, czyli masa substancji znajdująca się w jednostce objętości, jest w każdym punkcie obszaru (kanału) przepływowego inna. Przykładowo sucha para wodna na wlocie do turbiny typu 200 MW ma gęstość $\rho = 80 \text{ kg}^3/\text{m}^3$ a na wyjściu gęstość $\rho = 0.01 \text{ kg}/\text{m}^3$. Gęstość jest pojęciem fenomenologicznym pokazującym naszą bezradność wobec nieprzeliczalności atomów substancji płynu. Zakres ważności tego pojęcia jest ograniczony umowną liczbą molekuł i atomów składających się na cząstkę płynu. Jeśli umówimy się, że cząstkę płynu tworzy zbiorowiskowo 1 miliona molekuł to w płynie gęstym cząstka ta zajmie objętość około $V = 1 \text{ mm}^3$, zaś w płynie rzadkim objętość $V = 1 \text{ dm}^3$. Gęstość masy jest wielkością mierzalną dość dokładnie na poziomie integralnym, całkowym, oznaczanym jako 0D. Mierzalność gęstości masy na poziomie lokalnym 3D teoretycznie jest możliwa, lecz praktycznie jest sprawą bardzo trudną (patrz uzupełnienie U1.5).

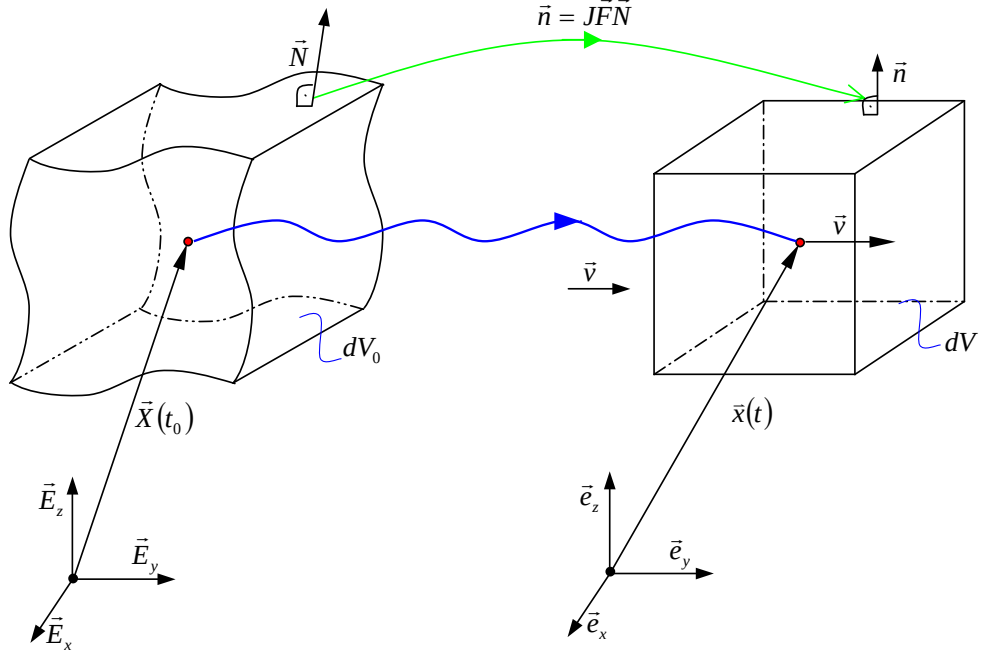
Przepływ Substancji z Położenia Wyjściowego do Aktualnego

Gęstość substancji płynnej dowolnej substancji zależy od położenia i czasu czyli płynu jest funkcją położenia $\vec{x} = x_i \vec{e}_i$ i czasu t , co zapisujemy jako $\rho = \rho(\vec{x}, t) [\text{kg}/\text{m}^3]$. Dowolna cząstka płynu, posiadająca aktualnie objętość $dV = dx dy dz$, jest wypełniona chwilowo substancją wpływającą i wypływającą poprzez powierzchnię boczną tej objętości zwaną powierzchnią kontrolną. Substancja aktualnie wypełniająca (w chwili t) objętość cząstki o położeniu $\vec{x} = x_i \vec{e}_i = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$ przy płynęła do miejsca $\vec{x}$ (w

¹⁵ Źródła pojęcia **masy** giną w mrocznych lochach historii nauk przyrodniczych. W pracach KEPLERA (1590) pojawia się rozróżnienie masy bezwładnej i masy grawitacyjnej. Wskazano w nich, iż oprócz zjawiska grawitacyjnego określonego słowem „ciężar”, materię charakteryzuje jeszcze inna własność, mianowicie „bezwładność”, czyli opór przeciw zmianie ruchu. Oznacza to, że materia z której składają się planety musi być bezwładna, natomiast ciężar może przejawiać się jedynie w przedmiotach znajdujących się na ziemi. W 1698 FURENTHAL udowodnił równość masy bezwładnej i masy grawitacyjnej poprzez porównanie sił:

$$(\text{masa bezwładna}) (\text{przyspieszenie}) = (\text{masa ważka}) (\text{natężenie pola grawitacyjnego}),$$

widać stąd, że jeżeli obie masy są równe to natężenie pola grawitacyjnego jest przyspieszeniem. Bilans masy w postaci lokalnej w przestrzeni i czasie wprowadził MAXWELL (1867).



Rysunek U.3. Substancja płynna zajmująca w aktywnej chwili t objętość $dV = dx dy dz$ w chwili początkowej zajmowała objętość $dV_0 = dX dY dZ$. Wektor normalny $\vec{n}$ do powierzchni aktualnej objętości dV zawiązany jest z wyjściowym wektorem normalnym $\vec{N}$ za pomocą relacji Piola.

którym usadowiony jest nasz eulerowski obserwator) z miejsca wyjściowego $\vec{X} = X_K \vec{E}_K = X \vec{E}_X + Y \vec{E}_Y + Z \vec{E}_Z$ w którym była w czasie t_0 . Substancja ta w chwili t_0 , w położeniu $\vec{X}$ zajmowała pewną objętość dV_0 – na ogół powykrzywianą i nie przypominającą sześcianika dV (rys. U.3).

Inaczej mówiąc, wyobrażamy sobie objętość substancjalną wyjściową dV_0 , stale zajmowaną przez tą samą substancję, która w chwili t dotarła do punktu $\vec{x}$ a jej ścianki wyprostowały się tak, iż objętość substancjonalna pokryła się z naszą nieruchomą objętością dV . Jeśli:

$$m = \iiint_{V_0} \rho_0 dV \quad [\text{kg}] \quad (\text{U.13})$$

jest masą substancji zawartą na początku t_0 w objętości dV_0 to w chwili t ta sama masa znajduje się w objętości dV , czyli masa substancji jest zachowana:

$$\frac{d}{dt} m = \frac{d}{dt} \iiint_{V_0} \rho_0 dV = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = 0, \quad (\text{U.14})$$

gdzie ρ_0 – ta sama ilość masy lecz odniesiona do objętości V_0 .

Zgodnie z zasadą zachowania materii Davy’ego, w zamkniętej (myślowo) objętości zajmowanej przez m kilogramów masy, substancja nie może powstawać ani ulegać anihilacji. Równanie bilansu masy jest (U.14) również **równaniem ciągłości przepływu** bowiem funkcja $\rho(\vec{x}, t)$ winna być ciągła i nie powinna posiadać punktów w których wiele cząstek chce przebywać jednocześnie (fala uderzeniowa) lub punktów w których żadna cząstka nie chce przebywać (kawitacja).

Bilans Masy w Postaci Lagrange’a

Stosunek zmiany objętości dV_0/dV nie jest trudny do obliczenia, gdy wykorzystać miarę zdeformowania objętości. Jeśli zdefiniujemy funkcję $\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t)$ przypisującą w każdej chwili t położenie wyjściowe cząstki to

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\mathbf{f}} = \text{grad } \vec{X} = \text{grad } \vec{\lambda} = \vec{X} \otimes \nabla = \frac{\partial X_K}{\partial x_i} \vec{E}_K \otimes \vec{e}_i = f_{Ki} \vec{E}_K \otimes \vec{e}_i, \\ K = X, Y, Z, \quad i = x, y, z \end{aligned} \quad (\text{U.15})$$

jest gradientem deformacji (mierzącym powyginanie sześcianika dV_0), zaś jego wyznacznik jest równy:¹⁶

$$j = \det \overleftrightarrow{\mathbf{f}}. \quad (\text{U.16})$$

Gdy $j = 0$ zachodzi nieciągłość przepływu polegająca na tym iż nieskończenie wiele cząstek próbuje zająć miejsce o położeniu $\vec{x}$ (fala uderzeniowa), gdy $j = \infty$ to oznacza że żadna cząstka nie chce zająć miejsca o położeniu $\vec{x}$ (kawitacja). Korzystając dalej z relacji (Piola, 1848):

$$dV_0 = j dV \quad (\text{U.17})$$

mamy:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_0} \rho_0 dV_0 = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho_0 j dV, \quad (\text{U.18})$$

¹⁶Dawniej wyznacznik ten oznaczano przez $\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(x, y, z)}$ lub $\frac{\partial(a, b, c)}{\partial(x, y, z)}$. W opisie Eulera znajomość funkcji $\vec{X}$ nie jest konieczna, gdyż podstawową niewiadomą jest prędkość $\vec{v} = \vec{X}^{-1}(\vec{x}, t)|_{\vec{x}=\text{const.}}$. Natomiast w opisie Lagrange’a podstawową niewiadomą jest funkcja przenoszenia $\vec{X}(\vec{x}, t)$ lub $\vec{X}^{-1}(\vec{x}, t)$.

W ogólności, gdy używamy dwóch baz $\vec{E}_K$ i $\vec{e}_i$ to obiekt typu $\overleftrightarrow{\mathbf{f}}$ nazywamy tensorem dwupunktowym, aby zaznaczyć, iż każda z jego składowych należy do innego opisu. W praktyce numerycznej używa się jednej bazy wspólnej, w której różnica między indeksami dużymi (opis Lagrange’a) a małymi (opis Eulera) zanika.

co oznacza że aktualna gęstość masy:

$$\rho = j\rho_o, \quad (\text{U.19})$$

jest funkcją wyznacznika gradientu deformacji. Równanie (U.19) wyznacza algebraiczny przepis na bilans masy w przypadku gdy znana jest wyjściowa gęstość masy. Postać ta zależy od gradientu deformacji (gradientu przemieszczenia) jakie substancja, która aktualnie przepływa przez cząstkę $\vec{x}, t$ przebyła od $\vec{X}, t_0$, $\vec{u} = \vec{X}(\vec{x}, t_0) - \vec{x}$, $\vec{f} = \text{grad } \vec{u} - \vec{I}$. Formuła (U.19) informuje nas również, że gęstość jest funkcją deformacji płynu¹⁷. Różnica między ciałem płynnym a ciałem stałym polega tu na tym, że w ciałach stałych bierze się pod uwagę deformacje we wszystkich możliwych kierunkach, czyli deformację objętościową i postaciową. W przypadku płynów tylko deformacja objętościowa jest uwzględniana i powoduje zmianę gęstości lub objętości właściwej $v = 1/\rho$.

Bilans Masy w Postaci Eulera

Lokalną postać bilansu masy substancji przepływającej przez cząstkę kontinuum o objętości dV zafiksowanej w punkcie $\vec{x}$ można otrzymać korzystając z formuły transportowej Reynoldsa (U.3). Wtedy, wychodząc z (U.18) otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \rho dV + \oint_{\partial V} (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (\text{U.20})$$

lub, ponieważ całka po zafiksowanej objętości cząstki komutuje z lokalną pochodną w czasie, mamy

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \oint_{\partial V} (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n} dA = 0$$

co czytamy: *zmiana m kilogramów masy substancji znajdującej się w objętości dV może być jedynie skutkiem wypływu lub wpływu części masy poprzez powierzchnię ograniczającą dV .*

W powyższym równaniu pojawia się definicja ważnej, zwłaszcza dla stosowanej termodynamiki, wielkości, którą jest:

$$v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$$

¹⁷Ściśle mówiąc, jest to tylko deformacja określona z dokładnością rzędu (pierwsze pochodne). Łatwo sobie wyobrazić przypadki, w których deformacja zależy będzie nie tylko od pierwszych pochodnych lecz również od pochodnych drugich i wyższych.

– składowa normalna wektora prędkości. Należy, bowiem pamiętać, iż to całka z v_n prowadzi do określenia strumienia masy $\dot{m}$, nie zaś całka z całego wektora prędkości $\vec{v}$ jak to zazwyczaj odpowiadają studenci. Gdy przepływ jest ustalony $\partial_t m = 0$ oraz gdy brzeg ∂V składa się z jednego wlotu o powierzchni A_1 i jednego wylotu o powierzchni A_2 , tzn. $\partial V = A_1 \cup A_2$ to powyższa całka redukuje się do:

$$\dot{m} = \iint_{A_1} \rho v_n dA = \dot{m}_1 = \iint_{A_2} \rho v_n dA = \dot{m}_2, [\text{kg/s}].$$

W tym przypadku dyfuzyjne strumienie masy i źródła masy (U.9) są równe zeru. Zastępując całkę powierzchniową całką objętościową mamy lokalną postać bilansu masy

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0.} \quad (\text{U.21})$$

Jest to lokalne równanie bilansu masy kontinuum o gęstości $\rho(\vec{x}, t)$ i prędkości $\vec{v}(\vec{x}, t)$ (na ściankach objętości kontrolnej!). Równanie to nie zależy od własności fizycznych płynu takich jak lepkość, pojemność cieplna, ściśliwość, objętościowy moduł Younga i dotyczy kontinuum ściśliwego (czyli każdego rzeczywistego kontinuum) w przepływie nieustalonym.

Postaci Szczególne Bilansu Masy

Równanie (U.21) jest równaniem skalarnym. We współrzędnych kartezjańskich przyjmuje prostą postać. Gdy $\vec{x} = x_i \vec{e}_i = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$, $\vec{v} = v_i \vec{e}_i = u \vec{e}_x + v \vec{e}_y + w \vec{e}_z$, $i = x, y, z$ to (U.21) wynika

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0. \quad (\text{U.22})$$

W literaturze stosowana jest również niezachowawcza forma bilansu masy. Niezachowawczość bierze się stąd, iż forma ta wykorzystuje pochodną materialną (lagrange’owską) względem czasu d/dt i pochodną eulerowską ($\text{div}(\bullet)$) względem przestrzeni. Ten dychotomiczny zapis otrzymamy, jeśli wykonamy operację rozbieżności ¹⁸ w (U.21):

$$\partial_t \rho + (\text{grad } \rho) \cdot \vec{v} + \rho \text{div } \vec{v} = 0. \quad (\text{U.23})$$

¹⁸Obliczenie dywergencji wymaga najpierw obliczenia gradientu $(\rho \vec{v}) \otimes \nabla$, a następnie dokonania zwiężenia produktu:

$$\begin{aligned} \text{div}(\rho \vec{v}) &\equiv (\rho \vec{v}) \cdot \nabla = C_{12} [(\rho \vec{v})_{,i} \otimes \vec{e}_i] = C_{12} [(\rho v_j)_{,i} \vec{e}_j \otimes \vec{e}_i + (\rho v_j) \vec{e}_{j,i} \otimes \vec{e}] = \\ &= (\rho v_j)_{,i} \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = (\rho v_j)_{,i} \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Zgodnie z definicją pochodnej substancjonalnej (Euler, 1757):

$$\frac{d}{dt}\rho = \frac{\partial}{\partial t}\rho|_{\vec{x}=const} + (\text{grad } \rho) \vec{v},$$

mamy następującą standardową postać:

$$\frac{d}{dt}\rho + \rho \text{div } \vec{v} = 0 \quad \text{lub} \quad \dot{\rho} + \rho \text{div } \vec{v} = 0 \quad (\text{U.24})$$

spotykaną w monografiach i podręcznikach ([5], [8], [10], [15], [22], [29], [47], [49], [50], [60], [64], [65], [84], [93], [98], [116], [162], [191], [225], [226], [227], [244], [250], [251], [321], [337], [338], [344], [359], [373]).

Mamy następujące przypadki szczególne:

- przepływ stacjonarny (ustalony w czasie):

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0, \quad (\text{U.25})$$

- przepływ płynu nieściśliwego (płyn hipotetyczny) $\rho = const$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x_i}(v_i) = \frac{\partial}{\partial x}(u) + \frac{\partial}{\partial y}(v) + \frac{\partial}{\partial z}(w) = 0. \quad (\text{U.26})$$

Równanie bilansu masy w przybliżeniu jednowymiarowym 1D omawiamy w uzupełnieniu U1.12, zaś w U1.7 wyprowadzamy je w wersji zerowymiarowego 0D.

U.1.3.3 Bilans pędu (3D)

Druga Zasada Dynamiki Newtona

¹⁹ Pęd cząstki kontinuum określamy używając formuły Burdina (1327) mówiącej, iż jest to wielkość proporcjonalna do masy i prędkości: $\vec{p} = m\vec{v}$.

Operator $C_{1,2}$ oznacza tu kontrakcję, czyli iloczyn skalarny między pierwszym (1) i drugim (2) wektorem bazowym. W przypadku współrzędnych kartezjańskich pochodna bazy $\vec{e}_{i,j} \equiv 0$, zaś w przypadku krzywoliniowym należy do różniczkowania bazy $\vec{e}_i$ użyć współczynników Lamé'go.

Podobnie będziemy obliczać dywergencję w przypadku, gdy strumieniem jest tensor dowolnego rzędu. Z numerycznego punktu widzenia znajomość obliczania dywergencji **nie jest potrzebna**, bowiem podstawowa dla numeryki forma równania bilansu masy to (U.20), w której występuje całkowanie po powierzchni objętości.

¹⁹Odkrycia, iż wszystko co się porusza niesie „pewien niematerialny ładunek” zapewniający kontynuację ruchu dokonał franciszkanin W. OCKHAM (1301). Nazwał go „ilością

Zmianę pędu w czasie dla cząstki o stałej masie określa przyspieszenie $\dot{\vec{p}} = m\vec{\dot{v}} = m\vec{a}$. Druga Zasada Dynamiki Newtona, wypowiedziana dla izolowanej cząstki płynu o masie m ma postać:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d}{dt}\vec{v} = m\vec{a} = \vec{f},$$

gdzie $\vec{f} = m\vec{b}$ jest siłą ciężenia grawitacyjnego, zaś $\vec{a} = \vec{\dot{v}}$ przyspieszeniem. Natomiast w przypadku nie izolowanej cząstki kontinuum oddziaływującej z sąsiadami, równanie te należy uzupełnić o siłę powierzchniową pochodzącą od przekazywanego pędu na sposób sprężysty i lepki.

$$m\vec{a} = \vec{f} + \vec{f}_{\text{sąsiad}} \quad [\text{N}].$$

Masa jednej cząstki płynu określona jest jako całka z gęstości masy w obszarze $dV = dx dy dz$

$$m = \iiint_V \rho dx dy dz \quad [\text{kg}] \quad (\text{U.27})$$

ruchu” i stwierdził iż ładunek ten ma cechy wektora oraz zachowuje się w trakcie zderzeń dwóch i więcej ciał. J. BURDIN (1327) stwierdził, iż „ilość ruchu” jest proporcjonalna do ciężaru ciała i jego prędkości, zaś G. GALLILEUSZ stwierdził, że „ilość ruchu” jest proporcjonalna do iloczynu masy i wektora prędkości, oraz nadał temu ładunkowi nazwę „pęd”. Bilans pędu dla dwóch zderzających się obiektów przeprowadzony przed i po zderzeniu znany był GASSENDIEMU (1633).

Mechanika Newtonowska ciał sztywnych opiera się na trzech następujących prawach ruchu (Natanson, 1890):

- I. Każde ciało trwa w spoczynku lub w ruchu jednostajnym po linii prostej, dopóki siły przyłożone nie zmuszą ciała do zmiany jego stanu.
- II. Zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i odbywa się w kierunku linii prostej wzdłuż której siła jest przyłożona.
- III. Przeciwdziałanie jest zawsze równe i przeciwne działaniu tj. wzajemne działania dwóch ciał są zawsze równe sobie i posiadają kierunki przeciwne.

Pełne przeniesienie trzech praw mechaniki ciał sztywnych do mechaniki kontinuuów odkształcalnych nie jest sprawą prostą i od wielu lat budzi kontrowersje. Dotyczy to nie tylko drugiej zasady w wersji kontynualnej – równanie (U.27) - (U.31), ale również pierwszej i trzeciej zasady w wersji kontynualnej. Przykładowo: I Zasada przez zaskakująco dużą ilość uczonych badaczy jest traktowana jako szczególny przypadek II Zasady - gdy brak już sił. L. Cooper laureat nagrody Nobla z 1967 r. pisze m.in. w swojej książce „Istota i Struktura Fizyki”, (str. 50, PWN, 1975): „Pierwsze prawo ruchu jest zatem konsekwencją prawa drugiego, przypadkiem szczególnym, w którym siła jest równa zeru. Newton jednak te prawa podał oddzielnie ...” Tę całkowicie błędną interpretację I-go prawa mechaniki, którą zatruwane są nasze dzieci w szkołach podstawowych, próbowano przez wiele lat również błędnie przenieść na grunt mechaniki kontinuuów odkształcalnych. Pełna dyskusja wszystkich kontrowersji wymaga oddzielnej pracy, a pewne informacje czytelnik może znaleźć w pracach autora.

stąd pęd:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \left(\iiint_V \rho dV \right) \vec{v} = \iiint_V \rho \vec{v} dV \quad (\text{U.28})$$

i jego zmiana w czasie – obliczona z wykorzystaniem pochodnej substancjalnej wynosi²⁰:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} \iiint_V (\rho \vec{v}) dV = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dV + \oint_{\partial V} [(\rho \vec{v}) \otimes \vec{v}] \vec{n} dA \quad (\text{U.29})$$

Strumienie Pędu w Kontinuum Cząstek

Strumienie pędu pochodzące od oddziaływań z sąsiadami stanowią o tym, co różni bilans pędu izolowanej cząstki o masie m od bilansu pędu cząstki otoczonej tymi samymi lub zmieniającymi się sąsiadami. Strumienie te, zgodnie z (U.2), winny mieć postać²¹

$$\vec{f}_{\text{sąsiad}} = \oint_{\partial V} \vec{T} \vec{n} dA \quad (\text{U.30})$$

oraz źródła

$$\vec{f} = m \vec{b} = \iiint_V \rho \vec{b} dV, \quad (\text{U.31})$$

²⁰Bilans ten mówił o zachowaniu pędu, czyli dotyczył szczególnego przypadku II Zasady Dynamiki gdy brak jest sił a pęd jest stały. Bilans pędu wprowadził NEWTON w 1687 w dziele „*Podstawy Matematycznej Filozofii Przyrody*” i uzupełnił w drugim wydaniu w 1713. Pojęcie „siły” jako obiektu wektorowego występującego w równaniu bilansu pędu pochodzi ze starożytności – bowiem już wtedy znano szczególną postać II Zasady Dynamiki w formie prawa „Siły działające na ciało w równowadze są równe zeru” (statyka, ARYSTOTELES).

Jednym z założeń modelu kontinuum Cauchy’ego jest stałość wektora prędkości wewnątrz objętości cząstki. Te założenie pozwala raz zaczepić wektor $(\rho \vec{v})$ w środku objętości jako wielkość intensywną a innym razem ten sam wektor traktować jako strumień masy i zaczepić na powierzchni kontrolnej. Jeśli zrezygnujemy z założenia jednorodności wektora prędkości wewnątrz dV i np. założymy liniowy jego rozkład to możemy wtedy sprowadzić średnią do środka + wektor wirowości (tzw. kontinuum Cosseratów (1909)).

²¹J. CAUCHY, Recherches sur l’équilibre et le mouvement des corps solides ou fluides, elastiques ou non elastiques, *Bull. Soc. Philomath.* 177-181, (1823). Zgoda uczonych badaczy, aby przyjąć ten związek jak obowiązujący została osiągnięta dość niedawno, około 40 lat temu. W latach 1823-1970 każdego dnia ukazywały się prace wątpliwe w zasadność związku (U.30), ponieważ nie można go zweryfikować rozstrzygnięciem eksperymentalnym. Zauważmy, iż znaczenie tej, do dziś ważnej hipotezy jest ważne nie tylko dla cząstki otoczonej innymi cząstkami, ale w pierwszym rzędzie dla cząstki, która dotyka ścianki kanału z której to ścianki przekazywana jest do wnętrza płynu siła.

gdzie $\overleftrightarrow{T} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = -p \overleftrightarrow{I} + \overleftrightarrow{\tau}^c = (-p\delta_{ij} + \tau_{ij}^c) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ jest diadą naprężeń Cauchy'ego lub całkowitym niesubstancjonalnym strumieniem pędu, zaś wektor $\vec{b} = -g\vec{e}_z = -9.81 \vec{e}_z$ jest przyspieszeniem ziemskim określającym siłę ciężarzenia.

Addytywny Splitting Strumienia Pędu

Strumień pędu Cauchy'ego $\overleftrightarrow{T}$ **dzielimy myślowo** (gdyż takie są możliwości eksperymentalne) na część, którą można określić za pomocą zmiennych intensywnych (część sprężysta) i część dyfuzyjną, którą można wyrazić przy pomocy gradientów przestrzennych zmiennych intensywnych albo kombinacji innych strumieni dyfuzyjnych (w tym przypadku: naprężenia lepkie, nieodwracalne).²²

$$\overleftrightarrow{T} = -\overleftrightarrow{P} + \overleftrightarrow{\tau}^c. \quad (\text{U.32})$$

Część sprężysta $\overleftrightarrow{P}$, w przypadku płynów, które nie mogą przenosić sprężystych naprężeń ścinania jest diadą kulistą ciśnienia²³, w przypadku ciała stałego $\overleftrightarrow{P}$ jest pełną diadą naprężeń sprężystych:

$$\overleftrightarrow{P} = \begin{cases} p \overleftrightarrow{I} = p\delta_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j & \text{fluid} \\ \overleftrightarrow{\sigma} = \sigma_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j & \text{solid} . \end{cases} \quad (\text{U.33})$$

Będziemy dalej używali diady ciśnienia $p \overleftrightarrow{I}$ w miejsce $\overleftrightarrow{P}$, nie mniej, wyprowadzone tu równanie pędu obowiązuje zarówno dla ciał stałych jak i ciał płynnych.

²²Multiplikatywny splitting strumienia pędu ma postać $\overleftrightarrow{T} = \overleftrightarrow{T}^e \overleftrightarrow{T}^v \overleftrightarrow{T}^d \overleftrightarrow{T}^r \overleftrightarrow{T}^t \overleftrightarrow{T}^{trans}$, gdzie indeksy $e, v, d, r, t, trans$, odnoszą się do, odpowiednio, sprężystego, lepkiego, dyfuzyjnego, radiacyjnego, turbulentnego i transpirowanego sposobu transportu pędu w kontinuum płynnym. Niestety, zwolenników multiplikatywnego splittingu ciśnienia $p = p_e p_v$ miast addytywnego $p = p_e + p_v$ przybywa z każdym dniem. Większość z tych zwolenników idzie za przysłowiową modą nie licząc się a argumentem iż eksperyment dostarcza nam stałych addytywnych. Używają Oni kontrargumentu, iż za 300 lub więcej lat eksperymetatorzy posiadają techniki multiplikatywnej identyfikacji stałych konstytutywnych modelu.

Tylko modele matematyczne uzgodnione i dopasowane do aktualnych narzędzi badawczych Eksperymentalnej Termomechaniki mają sens praktyczny. Wszystkie pozostałe służą, jak słusznie zauważyli studenci, tzw. "biciu piany wzorów" czyli działalności pozbawionej pragmatycznych celów.

²³Znak minus bierze się stąd, iż sprężysty strumień pędu – w przypadku płynu - jest ciśnieniem skierowanym zawsze do środka cząstki i ściskającym substancję.

Część dyfuzyjna (lepka) $\overleftrightarrow{\tau}^c$ jest nieodwracalnym strumieniem naprężeń składającym się z naprężeń lepkich, dyfuzyjnych, turbulentnych, transpiracji, radiacji i innych mających znaczenie w szczególnych warunkach²⁴.

Bilans Pędu Kontinuum

Mając wielkości bilansowane (U.29), strumienie (U.32) i źródła (U.31) zapiszemy równanie bilansu w postaci przedstawionej przez Cauchy'ego (1811)

$$m\vec{a} = \vec{f}_{\text{sąsiad}} + \vec{f},$$

czyli

$$\frac{d}{dt} \iiint_V (\rho \vec{v}) dV = \oint_{\partial V} \overleftrightarrow{T} \cdot \vec{n} dA + \iiint_V \rho \vec{b} dV. \quad (\text{U.34})$$

Zakładając, że bilans masy jest już spełniony

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = 0, \quad (\text{U.35})$$

to z (U.34) otrzymamy tzw. **pierwsze równanie Cauchy'ego**²⁵

$$\iiint_V \rho \frac{d}{dt} \vec{v} dV = \iiint_V \text{div} \overleftrightarrow{T} dV + \iiint_V \rho \vec{b} dV, \quad (\text{U.36})$$

lub lokalnie jako:

$$\rho \vec{a} = \text{div} \overleftrightarrow{T} + \rho \vec{b}, \quad (\text{U.37})$$

²⁴Indeks c w $\overleftrightarrow{\tau}^c$ oznacza całkowity (sumaryczny) tensor nieodwracalnych naprężeń.

²⁵Ponieważ w trakcie wyprowadzania tego równania pędu (U.36) nie zakładaliśmy nic o symetrii strumienia pola $\overleftrightarrow{T}$, to drugie równanie Cauchy'ego wprowadza warunek $\overleftrightarrow{T} = \overleftrightarrow{T}^T$. Strumień pędu Cauchy'ego jest obiektem mniej znanym na gruncie termomechaniki ciał płynnych, a bardziej na gruncie termomechaniki ciał stałych. Osborne Reynolds w 1895 r. wprowadził analogiczny strumień i oznaczył go literą $\overleftrightarrow{p}$

$$\overleftrightarrow{p} = p \overleftrightarrow{I} - \overleftrightarrow{\tau}^c \equiv -\overleftrightarrow{T},$$

stąd $\overleftrightarrow{p}$ jest, od czasu do czasu, nazywany w literaturze tensorem strumienia pędu Reynoldsa – zawiera on w sobie również turbulentne naprężenia Reynoldsa, najczęściej oznaczane $\overleftrightarrow{R}$. Bilans pędu w oznaczeniach Reynoldsa ma więc postać:

$$\rho \vec{a} + \text{div} \overleftrightarrow{p} = \rho \vec{b}$$

gdzie przyspieszenie $\vec{a}$ jest określone pochodną substancjalną (lagrange'owską, materialną)

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\text{grad } \vec{v}) \cdot \vec{v} = (\partial_t v_i + v_{i,j} v_j) \vec{e}_i. \quad (\text{U.38})$$

Równanie (U.37) we współrzędnych kartezjańskich przyjmuje postać:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} + \rho b_i, \quad i, j = x, y, z; \quad (\text{U.39})$$

lub krótko, stosując przecinki zamiast znaków pochodnych:

$$\rho (v_{i,t} + v_{i,j} v_j) = T_{ij,j} + \rho b_i, \quad i, j = x, y, z. \quad (\text{U.40})$$

Postać (U.37) przypomina swoją postacią II zasadę Dynamiki Newtona dla cząstki materialnej, gdzie $\vec{f}_{\text{sąsied}} = \iiint \text{div } \vec{T} dV$ jest ekstra siłą powierzchniową od oddziaływania cząstki z sąsiadami. Jest to postać niezachowawcza, mało przydatna do celów numerycznych. Strumień pędu Cauchy'ego, dopóki nie podamy sposobu powiązania go z polem ciśnienia i naprężeniami lepкими, ma ogólną postać bez żadnych uproszczeń fizycznych. Zauważmy, iż równanie pędu jest nieliniowe ze względu na nieznany wektor prędkości $\vec{v}$. Mamy tu do czynienia z **nieliniowością geometryczną** pochodzącą z pochodnej substancjonalnej (U.38), którą należy odróżniać od nieliniowości fizycznej zawartej w równaniach konstytutywnych na strumień Cauchy'ego $\vec{T}$.

Zachowawcza postać bilansu pędu

Zachowawczą postać bilansu pędu otrzymamy korzystając z twierdzenia o transporcie (U.29) oraz dekompozycji $\vec{T}$ na część sprężystą i lepłą (U.32):

$$\frac{d}{dt} \iiint_V (\rho \vec{v}) dV + \iint_{\partial V} p \vec{I} \cdot \vec{n} dA = \iint_{\partial V} \vec{\tau}^c \cdot \vec{n} dA + \iiint_V \rho \vec{b} dV, \quad (\text{U.41})$$

dalej

$$\boxed{\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dV + \iint_{\partial V} (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \vec{I}) \cdot \vec{n} dA = \iint_{\partial V} \vec{\tau}^c \cdot \vec{n} dA + \iiint_V \rho \vec{b} dV.} \quad (\text{U.42})$$

Jest to podstawowa, wyjściowa dla Metody Elementów Skończonych i Metody Objętości Skończonych, forma bilansu pędu obowiązująca w elementarnej objętości cząstki kontinuum. Poszczególne człony w równaniu bilansu pędu noszą nazwę:

$(\rho \vec{v})$	– objętościowa gęstość pędu,
$\rho \vec{v} \otimes \vec{v} = (\rho v_i v_j) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	– konwekcyjny strumień pędu,
$p \overset{\leftrightarrow}{I} = p \delta_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	– sprężysty strumień pędu,
$\overset{\leftrightarrow}{\tau} = \overset{\leftrightarrow}{\tau} + \overset{\leftrightarrow}{R} + \tau^d + \dots = \tau_{ij}^c \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	– całkowity dyfuzyjny strumień pędu,
$\rho \overset{\leftrightarrow}{b}$	– objętościowa gęstość sił masowych.

Lokalne równanie bilansu pędu ma postać:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \operatorname{div} (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \overset{\leftrightarrow}{I}) = \operatorname{div} \overset{\leftrightarrow}{\tau}^c + \rho \vec{b},} \quad (\text{U.43})$$

a we współrzędnych kartezjańskich:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}^c + \rho b_i \right] \vec{e}_i, \quad i, j = x, y, z. \quad (\text{U.44})$$

Powyższe równie jest równaniem wektorowym (bo pęd jest wielkością wektorową !) stąd zapisując składowe na poszczególne osi x, y, z ($\vec{v} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$) otrzymamy:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u u + p) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u w) = \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}^c) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy}^c) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz}^c) + \rho b_x, \quad (\text{U.45})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v v + p) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v w) = \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{yx}^c) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yy}^c) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{yz}^c) + \rho b_y, \quad (\text{U.46})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho w) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho w u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho w v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w w + p) = \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{zx}^c) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{zy}^c) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zz}^c) + \rho b_z. \quad (\text{U.47})$$

Jest to postać bilansu pędu najczęściej spotykana w literaturze. Inne komplementarne wyprowadzenia tych równań znajdzie czytelnik w monografiach: M. BROSKO [22], T. CHMIELNIAK [43], J. ELSNER [81], R. GRYBOŚ [106], W.J. PROSNAK [286], R. PUZYREWSKI & J. SAWICKI [293], Cz. WITOSZYŃSKI [426].

Warunki brzegowe i początkowe

Równania bilansu pędu należą do najdłuższych równań termomechaniki. Służą one do obliczania wektora prędkości (płyn) lub wektora przemieszczenia (ciało stałe). Równania te uzupełniane są przez **warunki brzegowe** i **początkowe**, które w ogólności, dzielimy na dwa podstawowe typy:

- odnoszące się do brzegu $\partial V_{\mathcal{U}}$ na którym $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{|\partial V_{\mathcal{U}}}^*$ są zadane (tzw. Przemieszczeniowo-prędkościowe warunki brzegowe)
- odnoszące się do brzegu $\partial V_{\mathcal{F}}$ na którym strumienie $\mathcal{F}^e + \mathcal{F}^v = \mathcal{F}_{|\partial V_{\mathcal{F}}}^*$ są zadane (tzw. naprężeniowe warunki brzegowe).

Ważnym jest dla stabilnych rozwiązań CFD oby prędkościowe i naprężeniowe warunki nie pokrywały się i były zadane na różnych powierzchniach kanału obliczeniowego. Przykładowo, poprawnym jest aby określić prędkość na wlocie i ciśnienia statyczne na wylocie. Natomiast gdy na jednym wlocie podajemy zarówno prędkości jak i ciśnienia to można się spodziewać iż nie wszystkie solwery CFD będą w stanie tak postawione zagadnienie rozwiązać.

Praktycznie, do celów numerycznych należy znać tylko postać całkową (U.42) bilansu pędu. Dodajmy, iż równania (U.42) mają postać niezależną od układu współrzędnych (cylindryczny, sferyczny, krzywoliniowy²⁶).

Postaci Szczególne Bilansu Pędu

Z równania bilansu pędu wynikają natychmiast przypadki szczególne takie jak:

- przepływ stacjonarny

$$\operatorname{div} \left(\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \vec{I} \right) = \operatorname{div} \vec{\tau}^c + \rho \vec{b}, \quad (\text{U.48})$$

- przepływ pełzający (zagadnienie geometrycznie liniowe)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \operatorname{div} \left(p \vec{I} \right) = \operatorname{div} \vec{\tau}^c + \rho \vec{b}, \quad (\text{U.49})$$

²⁶Krzywoliniowy układ współrzędnych ξ, η, ζ jest używany w CFD dla krzywoliniowych siatek strukturalnych. Rewindykacji klasycznego sposobu Lamé'go obliczania składowych równania (U.43) w dowolnym układzie współrzędnych, bez konieczności używania symboli Christoffela (1867), składowych ko- i kontrawariantnych oraz sztuki podnoszenia i opuszczania indeksów, podano w pracy:

J. BADUR, T. OCHRYMIUK, *Numeryczne modelowanie turbulentnego spalania gazów z uwzględnieniem zredukowanej i pełnej kinetyki reakcji chemicznych*. Zesz. Nauk. IMP, **491**, 1-165, 1998.

Okazuje się, iż cały wysiłek geometryzatorów mechaniki z chwilą pojawienia się narzędzia obliczeniowego typu komputer straciło sens – a my powracamy do wcześniejszych, bardziej zalgorytmizowanych i łatwych do implementacji sposobów obliczania składowych krzywoliniowych. Wielcy geometryzatorzy Termomechaniki Kontinuum z pozycji postępowych (lata 1890-1915) przeszli na pozycje „wielkich hamulcowych” (lata 1970-1990).

- przepływ płynu nielepkiego ($\vec{\tau}^c = 0$, **Równania Eulera**, 1757)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \vec{I}) = \rho \vec{b}, \quad (\text{U.50})$$

- statyka ($\vec{v} = 0$)

$$\operatorname{div}(p \vec{I}) = \operatorname{grad} p = \rho \vec{b} \quad (\text{fluid}). \quad (\text{U.51})$$

Przypomnijmy, iż temu ostatniemu równaniu, w sprężystości ciał stałych, gdy $\vec{P} = \vec{\sigma}$ odpowiada równanie statyki

$$\operatorname{div} \vec{\sigma} = \rho \vec{b} \quad (\text{solid}). \quad (\text{U.52})$$

Natomiast przepływ pełzający jest geometryczną linearyzacją równania pędu, bowiem dalsza nieliniowość tego równania może być powodowana jedynie nieliniowością fizyczną, czyli poprzez równanie konstytutywne. Pamiętajmy: **Numeryczna Termomechanika (CFD, CSD) nie używa żadnych postaci szczególnych !!!**

Postać Cauchy'ego

W klasycznej literaturze przedmiotu używane są częściej równania bilansu pędu w postaci Cauchy'ego (U.37). Postać (U.37) różni się od postaci zachowawczej (U.43) tym, iż zakłada ona wcześniejsze spełnienie równania ciągłości masy (U.21). Postać zachowawcza nie wymaga wcześniejszego spełnienia bilansu masy, stąd wprowadzając bilans masy do postaci zachowawczej (U.43) i używając pochodnej lagrange'owskiej względem czasu, mamy kolejno

$$(\partial_t \rho) \vec{v} + \rho \partial_t \vec{v} + \vec{v} \operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \rho (\operatorname{grad} \vec{v}) \vec{v} + \operatorname{div}(p \vec{I}) = \operatorname{div} \vec{\tau}^c + \rho \vec{b}. \quad (\text{U.53})$$

Po wykorzystaniu równania bilansu masy (U.21) i definicji pochodnej substancjonalnej (materialnej, lagrange'owskiej) otrzymujemy:

$$\rho \frac{d}{dt} \vec{v} + \operatorname{grad} p = \operatorname{div} \vec{\tau}^c + \rho \vec{b}. \quad (\text{U.54})$$

W literaturze przedmiotu postacią standardową bilansu pędu jest postać kładziona na przyspieszenie:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \vec{b} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{\tau}^c. \quad (\text{U.55})$$

Patrz wyprowadzenia w: [5], [8], [10], [15], [22], [29], [47], [49], [50], [60], [64], [65], [84], [93], [98], [116], [162], [191], [225], [226], [227], [244], [250], [251], [321], [337], [338], [344], [359], [373].

Postaci Wektora Przyspieszenia

W literaturze spotykanych jest wiele form wektora przyspieszenia, z których dwie mają największe historyczne znaczenie²⁷;

$$\vec{a} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \text{grad}(\vec{v}) \cdot \vec{v} & \text{Euler, 1757} \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \text{grad}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) - \vec{v} \times (\text{rot } \vec{v}) & \text{Gromeko, 1870 - Lamb, 1888.} \end{cases} \quad (\text{U.56})$$

Równania Naviera-Stokesa

²⁸ W literaturze przedmiotu, związanej z Analityczną (Ołówkową²⁹) Termomechaniką Płynów, równania Naviera-Stokesa uchodzą za synonim wszechpotężności teorii i matematyki³⁰.

²⁷Dekompozycje

$$\vec{a} = \partial_t \vec{v} + \text{grad}\left(\frac{1}{2} \vec{v}^2\right) + (\text{rot } \vec{v}) \times \vec{v}$$

wprowadził po raz pierwszy Lagrange w pracy: J.L. LAGRANGE, Memoire sur la theorie du mouvement des fluides, *Neuv. Mem. Acad.* Berlin, 151-198, 1781.

²⁸C.L.NAVIER, Memorie sur les lois du mouvement des fluids, *Mem. Acad. Sci. Inst. France*, **6**, 386-440, 1822. G.G. STOKES, On the theories of internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **8**, 287-319, 1845.

²⁹Kolokwialna nazwa naszej branży (Komputerowa TermoMechanika) bierze się od podstawowego narzędzia badawczego, którym jest komputer, stąd, odwzajemniając złośliwość i pogardę, używa się w środowisku pejoratywnego określenia Ołówkowa Termomechanika wskazującego, iż podstawowym narzędziem badawczym jest ołówek. W niniejszej pracy używamy nazw „Numeryczna Termomechanika” i „Analityczna Termomechanika”, które to nazwy budzą mniej emocji.

³⁰Trzeba przyznać, że pod względem rachunkowym wyprowadzenie równania pędu w prędkościach przedstawia pewną trudność. Przykładem jest błąd rachunkowy, który wkraśl się do monografii LANDAUA i LIFSZYCA „Hydrodynamika”, PWN, 1994. Str 67, wzór (15.6). Równania N-S dla tensora naprężeń lepkich w postaci:

$$\vec{\tau} = 2\eta \vec{d} + (\zeta - 2/3\eta) \left(\text{tr } \vec{d} \right) \vec{I}$$

winna mieć następującą kompletną postać:

$$\rho \vec{v}_{,t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} = -\text{grad } p + \eta \nabla^2 \vec{v} + (\zeta - 2/3\eta) \text{grad}(\text{div } \vec{v}) + \eta \text{div}(\text{grad}^T \vec{v}) \quad (*)$$

Źródło błędu rachunkowego tkwi w zasadach rachunku tensorowego, które mówią, iż równania wyprowadzone we współrzędnych kartezjańskich nie mogą być następnie zapisane w sposób absolutny, bowiem tylko częściowo pokrywają się z ogólnym wyprowadzeniem.

Nawet damy, aby dodać sobie tajemniczego uroku, toczą rozmowy o konieczności użycia „Naviera-Stokesa” tam gdzie nie staje (wiedzy) inżynierom.

Przypominamy, że równania Naviera-Stokesa są równaniem pędu wyrażonym poprzez wektor prędkości i jego pochodne (przestrzenne i czasowe) – można je otrzymać dopiero, gdy określmy równania konstytutywne i równania kinematyczne dla płynu Newtonowskiego (patrz U1.4).³¹ Odpowiadają one równaniom opisującym pokazanym na rys. U.1 CFD nigdy nie używał, nie używa i nigdy nie będzie używać równań Naviera-Stokesa. Nazwa „równanie Naviera – Stokesa” jest historyczną pozostałością skutecznie blokującą zmianę paradygmatów myślenia.

Niestety, we współczesnej literaturze i praktyce codziennej występują **dwa nadużycia** pojęcia „równania Naviera-Stokesa”:

1. Nazywanie równaniami Naviera-Stokesa całego układu równań bilansu masy, pędu i energii.
2. Nazywanie równania bilansu pędu w którym obecny jest turbulentny strumień pędu skrótem „RANS” (Reynolds Averaged Navier Stokes). Przypomnijmy, iż w określeniu „RANS” tkwią co najmniej **cztery karygodne nieścisłości**
 - Osborne Reynolds (1895) stosował **uśrednianie objętościowe** i nigdy nie używał uśredniania czasowego.
 - O. Reynolds (1895) nie wyprowadza swego równania na bilans pędu z równań Naviera - Stokesa lecz z **ogólnego bilansu pędu** przy użyciu **całkowitego strumienia pędu Cauchy’ego** oznaczonego literką $\overleftrightarrow{p} = p_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = -T_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$.

W literaturze anglosaskiej dość często używana jest postać równania pędu zaproponowana przez O. Reynoldsa:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + \text{div}(\rho\vec{v} \otimes \vec{v} + \overleftrightarrow{p}) = \rho\vec{b}, \quad (\text{U.57})$$

lub we współrzędnych kartezjańskich:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j + p_{ij}) = \rho b_i, \quad (\text{U.58})$$

Równanie (*) w Numerycznej Termodynamice nie jest nigdy używane, stąd błędy w tym równaniu, nas nie dotyczą i są tylko częścią historii.

³¹Odpowiednikiem równań N-S, ale dla bilansu energii jest równanie Fouriera-Kirchhoffa wyrażające równie energii w funkcji pola temperatury.

gdzie $p_{ij} = p\delta_{ij} - \tau_{ij}^c = -T_{ij}$ jest strumieniem pędu o znaku przeciwnym do strumienia pędu Cauchy'ego T_{ij} .

- O. Reynolds (1895) **nie uśredniał** równania pędu lecz jedynie dokonał **rozdzielenia** (splittingu) na dwa podukłady: średni (mean) i względny (relative). Aby te podukłady mogły z sobą wymieniać pęd wprowadza on **pośrednika** (mediating fields) - turbulentny strumień pędu $\vec{R} = (\rho' \vec{v}' \otimes \vec{v}')''$. Podobny pośrednik – turbulentny strumień energii $\vec{q}^t$ jest dla splittingu równania energii.
- O. Reynolds (1895) **rozdziela** równanie energii kinetycznej ruchu względnego na dwie równe części: *średnią energię kinetyczną ruchu względnego i względną energię kinetyczną ruchu względnego zgodnie z:*

$$\frac{1}{2} \vec{v}' \cdot \vec{v}' = \left(\frac{1}{2} \vec{v}' \cdot \vec{v}' \right) + \left(\frac{1}{2} \vec{v}' \cdot \vec{v}' \right)'.$$

Ta pierwsza część energii kinetycznej, współcześnie jest oznaczana literą k i nazywana jest **energiami kinetyczną turbulencji**. Równanie energii kinetycznej ruchu względnego **rozdziela się** na dwa równia z których pierwsze (ewolucja k służy jako równanie ewolucji na k , zaś drugie służy jako równie określające początek turbulencji.³²

Postać Crocco-Vazonyi

³³ Używając równania Gibbsa $du = T ds - p dv$ lub $\dot{u} = T \dot{s} - p \dot{v}$, które dla dowolnej ścieżki na powierzchni $u = u(s, v)$ spełnia warunek

$$\text{grad } u = T \text{ grad } s - p \text{ grad } v, \quad (\text{U.59})$$

będziemy mogli wyeliminować ciśnienie z bilansu pędu w zamian za wprowadzenie do gry entropii właściwej s . Definiując entalpię właściwą jako $i = u + pv$, przekształcając powyższą relację mamy:

$$T \text{ grad } s = \text{grad } i - v \text{ grad } p. \quad (\text{U.60})$$

³²W koncepcji Reynoldsa, początek turbulencji wyznaczało **kryterium energetyczne** a nie jakaś liczba Re). Równanie na $(1/2 \vec{v}' \cdot \vec{v}')'$ nazywa Reynolds „discriminating equation” (str 557) i jego zadaniem jest zastąpienie szczególnego warunku $Re > 2300$ - (Reynolds używał tej liczby już wcześniej (1883) oznaczając ją literą K przyznając jej autorstwo Darcy i Prony.

³³L. CROCCO, Una nuova funzione di corrente per lo studio del moto rotazionale dei gas, *Rend Lincei*, **6^A**, t23, 115-124 (1936)

A. VAZONYI, On rotational gas flows, *Q. Appl. Math.* **3**, 29-37, 1945

Poprzez eliminację $\text{grad } p$ z równania pędu i użycie reprezentacji Gromeko-Lamba (U.56) dla wektora przyspieszenia, mamy **równanie bilansu pędu** w postaci:

$$\partial_t \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{v} = T \text{grad } s - \text{grad} \left(i + \frac{\vec{v}^2}{2} + zg \right) + v \text{div } \vec{\tau}^c, \quad (\text{U.61})$$

które czytamy jako: *w każdym ustalonym przepływie nielepkiego płynu wirowość $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$ i zmienne termodynamiczne są związane relacją Crocco-Vazonyi:*

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = T \text{grad } s - \text{grad} (i_e), \quad (\text{U.62})$$

gdzie $i_e = i + \vec{v}^2/2 + zg$ jest entalpią całkowitą.

Inne równanie otrzymamy biorąc rotację z nielepkiej części równania pędu (U.50) i zapisując:

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v},$$

$$\frac{d}{dt} \vec{\omega} - (\text{grad } \vec{\omega}) \vec{v} + \vec{\omega} \text{div } \vec{v} = \text{rot } \vec{b} + \frac{1}{2} \rho (\text{grad } \rho \times \text{grad } p).$$

Równanie to nazywane jest równaniem Friedmana. Gdy pole sił masowych ma potencjał $\vec{b} = -\text{grad} (zg)$, a gęstość czynnika jest funkcją tylko ciśnienia ($\text{grad } \rho = \frac{\partial \rho}{\partial p} \text{grad } p$) to człony po prawej stronie powyższego równania zanikają:

$$\frac{d}{dt} \vec{\omega} - (\text{grad } \vec{\omega}) \vec{v} + \vec{\omega} \text{div } \vec{v} = 0,$$

a równanie to można interpretować jako pewien bilans w stosunku do wektora wirowości $\vec{\omega}$ – Jeśli w danym momencie czasu wirowość jest równa zeru to pole przepływu pozostaje bezwirowe w każdym następnym momencie [43].

Natomiast wprowadzając zależności termodynamiczne otrzymujemy ekwiwalentną postać równania wirowości:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \text{grad } T \times \text{grad } s + \frac{\vec{\omega}}{\rho} \text{grad } v. \quad (\text{U.63})$$

Równanie te nazywane jest równaniem Vazonyi.

Bilans Momentu Pędu

³⁴ Z założenie jednorodności pola prędkości w elementarnej objętości cząstki kontinuum i z drugiego prawa Cauchy’ego (tzn ”bilansu momentu

³⁴Zapostulowany przez L. EULER, Formulae generals pro translatione quacunqve corporum origidorum, *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.* **20**, 189-207, 1775.

pędu”) wynika natomiast, że diada naprężeń lepkich jest symetryczna $\vec{\tau}^c = \left(\vec{\tau}^c\right)^T$. Warunek ten jest spełniany tożsamościowo, gdy definiujemy naprężenia lepkie poprzez symetryczne diady, np. prędkości deformacji, diadę gradientu prędkości dyfuzji, stężenia, etc. Warunek symetryczności strumienia pędu Cauchy’ego $\vec{\tau} = \vec{\tau}^T$ z uwagi na (U.32) przechodzi również na naprężenia sprężyste $\vec{P} = \vec{P}^T$.

Bilans pędu w układzie obracającym się

Ta forma bilansu pędu jest ważna w urządzeniach przepływowych odbierających lub przekazujących pracę czynnikowi roboczemu na ściankach ruchomych wirujących z prędkością kątową $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(t)$, silnie zmienną w czasie rozruchów, regulacji i odstawień a stałą w trakcie pracy nominalnej. Kanał przepływowy wiruje wtedy z prędkością kątową $\Omega = |\vec{\Omega}|$ wokół stałej osi obrotu $\vec{e}_\Omega = \vec{\Omega}/|\vec{\Omega}|$, tak że $\vec{\Omega}(t) = \Omega(t)\vec{e}_\Omega$.

Znalezienie formy bilansu pędu w układzie wirującym (w ogólności – nieinercjalnym) polega na znalezieniu postaci przyspieszenia oraz strumienia pędu. Przypomnijmy, iż wektor przyspieszenia w układzie poruszającym się, określonym wektorem położenia $\vec{X}_0$ i obracającym się z prędkością kątową $\vec{\Omega}$ znajdujemy analogicznie do rutynowych, dla mechaniki ciała sztywnego, operacji (rys. U.4)³⁵.

Wychodząc ze związku:

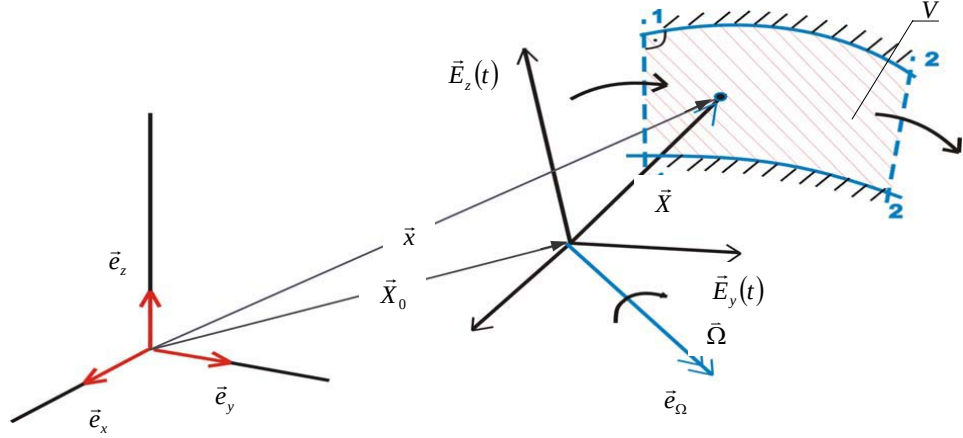
$$\vec{x} = \vec{X}_0(t) + \vec{X}(t), \quad (\text{U.64})$$

mamy najpierw wektor prędkości

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}\vec{x} = \frac{d}{dt}\vec{X}_0 + \frac{d}{dt}\vec{X} \equiv \vec{V}_0 + \frac{d}{dt}|_X \vec{X} + \vec{\Omega} \times \vec{X} \equiv \vec{V}_0 + \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{X} \quad (\text{U.65})$$

składający się z prędkości unoszenia $\vec{U} = \vec{V}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{X}$ i prędkości względnej

³⁵Zgodnie z tradycją mechaniki dotyczącej ciał sztywnych, wielkości w układzie obracającym będziemy oznaczać literami dużymi. Nie mają one tu nic wspólnego z Truesdellowskim systemem oznaczeń przyjmowanych dla opisu Lagrange’a, w którym litery duże oznaczają współrzędne materialne.



Rysunek U.4. Schemat związania układu nieruchomego $\{x, y, z\}$ z wirującym i przemieszczającym się układem odniesienia $\{X, Y, Z\}$. Wirowanie opisane jest wektorem obrotu $\vec{\Omega}(t)$, zaś przemieszczenie początku układu odniesienia wektorem $\vec{X}_0(t)$.

$\vec{V}$. Następnie, w podobny sposób obliczamy wektor przyspieszenia

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{V}_0 + \frac{d}{dt|_X} \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{V} + \left(\frac{d}{dt|_X} \vec{\Omega} \right) \times \vec{X} + \\ + \left(\vec{\Omega} \times \vec{X} \right) \times \vec{X} + \vec{\Omega} \times \left(\frac{d}{dt|_X} \vec{X} + \vec{\Omega} \times \vec{X} \right) \end{aligned} \quad (\text{U.66})$$

i definiujemy go ostatecznie jako:

$$\vec{a} = \vec{A}_0 + \vec{A} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \left(\frac{d}{dt|_X} \vec{\Omega} \right) \times \vec{X} + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{X} \right). \quad (\text{U.67})$$

W maszynach wirnikowych układ wirujący nie doznaje przemieszczeń (na ogół) stąd $\vec{X}_0 = \vec{V}_0 = \vec{A}_0 \equiv 0$ oraz $\vec{x} = \vec{X}$ co pozwala „uwolnić się” od konieczności używania **dużych liter**. Dekompozycję prędkości (U.65) zapisujemy wtedy jako:

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{x} + \vec{w} = \vec{u} + \vec{w} \quad (\text{U.68})$$

sumę: **prędkości unoszenia** $\vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{x}$ i **prędkości względnej**, oznaczanej tradycyjnie w krajowej literaturze, literką $\vec{w}$ (w miejsce dużej litery $\vec{V}$). Ta dekompozycja, łatwa do narysowania w charakterystycznych przekrojach nosi

nazwę **trójkąta prędkości**. Od narysowania trójkąta prędkości rozpoczyna się proces analizy i projektowania wirników maszyn przepływowych. W przypadku stałego położenia osi obrotu, wektor prędkości unoszenia $\vec{u}$ jest styczny do toru ruchomych powierzchni i prostopadły do osi obrotu. Wektor prędkości względnej płynu $\vec{w}$ w kanale „wydłużonym” jest w przybliżeniu równoległy do ścianek wirujących.

Podstawiając $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ do (U.67) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{w} + (\text{grad } \vec{w}) \cdot \vec{w} + \left\{ 2\vec{\Omega} \times \vec{w} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{\Omega} \right) \times \vec{x} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{x}) \right\} = \\ &= \vec{a}_w + \vec{b}_{fict}. \end{aligned} \quad (\text{U.69})$$

Pierwszy człon to przyspieszenie względne $\vec{a}_w = \frac{d}{dt}|_X \vec{w}$, drugi człon w klamrze składa się z: **przyspieszenia Coriolisa** (1840), **przyspieszenia Eulera** (1790) i **przyspieszenia odśrodkowego** (Gallileusz, 1621). Wszystkie te przyspieszenia po zsumowaniu stanowią fikcyjne przyspieszenie grawitacyjne, a pomnożone przez gęstość dają gęstość fikcyjnej siły ciężenia.

Definicja siły ciężkości $\vec{b}$ oraz sił wymiany pędu $\overleftrightarrow{T}$, jeśli posługujemy się zapisem absolutnym, wolnym od indeksów, nie zmienia się, bowiem:

$$\vec{b} = b_i \vec{e}_i = b_M \vec{E}_M \quad \text{oraz} \quad \overleftrightarrow{T} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = T_{MK} \vec{E}_M \otimes \vec{E}_K. \quad (\text{U.70})$$

jak również operacje gradientu $\text{grad}_x(\bullet) = \text{grad}_X(\bullet)$ i divergencji $\text{div}_x(\bullet) = \text{div}_X(\bullet)$. Zachodzi również przeniesienie diady prędkości deformacji, która ma te same wartości bez względu na to czy oparta jest na wektorze prędkości całkowitej $\vec{v}$ czy wektorze prędkości względnej $\vec{w}$:

$$\overleftrightarrow{d}_{(v)} = \frac{1}{2} (\text{grad } \vec{v} + \text{grad}^T \vec{v}) \equiv \frac{1}{2} (\text{grad } \vec{w} + \text{grad}^T \vec{w}) = d_{KM} \vec{E}_K \otimes \vec{E}_M = \overleftrightarrow{d}_{(w)}. \quad (\text{U.71})$$

Natomiast dla diady wirowości takie przejście nie zachodzi³⁶:

$$\omega_{(v)} = \frac{1}{2} (\text{grad } \vec{v} - \text{grad}^T \vec{v}) = \overleftrightarrow{\omega}_{(w)} - (2\vec{\Omega} \times \vec{w}) \times \overleftrightarrow{I}. \quad (\text{U.72})$$

Zazwyczaj nie rozróżniamy prędkości deformacji $\overleftrightarrow{d}_{(v)}$ opartej o $\vec{v}$ od prędkości deformacji $\overleftrightarrow{d}_{(w)}$ opartej o $\vec{w}$. Jednak w przypadku diady wirowości takie

³⁶J.BADUR, Can the Zaremba relaxation model be considered correct, *Archives of Thermodynamics*, **15**, 111-124, 1994.

odróżnienie jest konieczne i oznacza, że $\vec{\omega}_{(v)} \neq \vec{\omega}_{(w)}$. Fakt ten oznacza, iż np. określając domknięcie Baldwina-Lomaxa na wartość turbulentnej lepkości

$$\mu_t = f \left(\vec{\omega}_{(v)}^2 \right), \quad (\text{U.73})$$

po przejściu do układu wirującego liczymy się z tym, że lepkość turbulentna zależeć będzie od prędkości wirowania.

Taka sytuacja **nie jest dopuszczana** w przypadku równań stanu lub równań konstytutywnych, które nie zależą od tego czy materiał wiruje czy też nie. Zezwala to na opuszczenia znaków (x) małe lub (X) duże³⁷.

Ostateczna forma bilansu pędu odnosząca się do przepływu w wirującym kanale ma postać:

$$\rho \vec{a}_w = \rho \frac{d}{dt}|_X \vec{w} = \text{div } \vec{T} + \rho \left(\vec{b} - \vec{b}_{fict} \right), \quad (\text{U.74})$$

lub w formie zachowawczej:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{w}) + \text{div} \left(\rho \vec{w} \otimes \vec{w} + p \vec{I} \right) = \text{div} \left(\vec{\tau}^c \right) + \rho \left(\vec{b} - \vec{b}_{fict} \right), \quad (\text{U.75})$$

gdzie fikcyjne siły ciężenia zdefiniowane są formułą (U.69) jako:

$$\vec{b}_{fict} = 2\vec{\Omega} \times \vec{w} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{\Omega} \right) \times \vec{x} + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{x} \right).$$

W literaturze przedmiotu liczba Rossby określa udział siły Coriolisa $\rho \dot{2}\vec{\Omega} \times \vec{w}$ w całej sile bezwładności [52],[81],[399].

W mechanice teoretycznej wykazuje się ([194],[388]), że przyspieszenie dośrodkowe w układzie wirującym posiada potencjał oznaczony przez Π_u , który zezwala zapisać

$$\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{x} \right) = \Omega^2 \vec{x} = -\text{grad} \left(\frac{1}{2} \Omega^2 \vec{x}^2 \right) = -\text{grad} \left(\frac{1}{2} \vec{w}^2 \right) = -\text{grad} \Pi_u$$

Powyższe wyrażenie pozwala na zapis bilansu pędu w następującej formie zachowawczej $\left(\vec{\Omega} = \text{const} \right)$:

³⁷Więcej uwag na temat dopuszczalnej postaci równań domknięcia dla fenomenologicznych modeli turbulencji można znaleźć w pracy:

M. KARČZ, J. BADUR, Numeryczna implementacja modelu racjonalnej turbulencji, *Zeszyty Naukowe IMP PAN* **531/1490/2003**, str 1-34, 2004

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{w}) + \operatorname{div} \left[\rho \vec{w} \otimes \vec{w} + (p + \Pi_u) \vec{I} \right] = \operatorname{div} \left(\vec{\tau}^c \right) + \rho \left(\vec{b} - 2\vec{\Omega} \times \vec{w} \right) \quad (\text{U.76})$$

Na podstawie równania Vazonyi (U.63) wyprowadza się równanie różniczkowe dla wirowości w wirującym układzie względny.

Jeśli określić $\vec{w}_w = \operatorname{rot} \vec{w} \neq \vec{w} = \operatorname{rot} \vec{u}$ to ma ono postać [43]:

$$\frac{d}{dt} \vec{w}_w = (\operatorname{grad} \vec{w}_w) \vec{w} - \vec{w}_w \operatorname{div} \vec{w} + 2 \left(\operatorname{grad} \vec{\Omega} \right) \vec{w} - 2\vec{w} \operatorname{div} \vec{w} + \operatorname{rot} \vec{b} + \operatorname{grad} T \times \operatorname{grad} s,$$

gdzie zgodnie z (U.70) nie wprowadzamy odrębnych oznaczeń na operacje divergencji, gradientu i rotacji w nieruchomym i ruchomym układzie odniesienia.

Przyjęcie $\operatorname{grad} s = 0$ (przepływ izentropowy $s = \text{const}$) i $\operatorname{rot} \vec{b} = 0$ (zachowawcze pole sił) prowadzi do następującego uproszczonego równania wirowości w układzie wirującym:

$$\frac{d}{dt} \vec{w}_w - (\operatorname{grad} \vec{w}_w) \vec{w} + \vec{w}_w \operatorname{div} \vec{w} = 2 \left(\operatorname{grad} \vec{\Omega} \right) \vec{w} - 2\vec{w} \operatorname{div} \vec{w}.$$

Z prawej strony rozpatrywanego równania wynika, że w ogólnym przypadku, przepływ względny nie może być przepływem bezwirowym. Wynikają z tego ważne, dla modelowania przepływów w maszynach wirnikowych, następstwa o których szczegółowo dane można znaleźć w monografiach: CHMIELNIKA [43],[44], GUNDLACHA [112], PUZYREWSKIEGO ([293]), MILLERA ([232]).

U.1.3.4 Bilans energii (3D)

Formy Energii

Przechodzimy do bilansu energii – najtrudniejszego elementu termomechaniki. Trudność wyprowadzenia lokalnego bilansu energii w postaci zachowawczej bierze się stąd, iż Pierwsza Zasada Termodynamiki – pierwowzór lokalnego bilansu energii – formułowana była w przeszłości w sposób **integralny w czasie i przestrzeni**. Przejście do bilansu lokalnego może być dokonane w dwóch krokach – najpierw poprzez osiągnięcie formy I Zasady Termodynamiki lokalnej w czasie lecz i integralnej w przestrzeni a następnie formy lokalnej w czasie i lokalnej w przestrzeni.

Zakładamy, iż substancja jest nośnikiem kilku form energii, jednak interesować nas będzie bilans tylko tych form, które mogą podlegać konwersji w inne użyteczne formy energii. Należy do nich **energia kinetyczna** (tutaj będzie odróżniana od energii mechanicznej) niesiona przez substancję, oraz **energia wewnętrzna** zmagazynowana sprężystości w substancji dzięki odkształceniom sprężystym, jakimi są zmiana objętości właściwej (odkształcenie

makroskopowe) i zmiana entropii właściwej (odkształcenie mikroskopowe). W ogólności mogą występować również inne mody energii sprężystej np. w mieszaninach – zmiana stężeń.

Ponieważ rozważamy przepływ w grawitacyjnym polu ciężenia, dodatkowo należy brać pod uwagę **energię ciężenia**, której siedliskiem nie jest substancja, lecz bliżej nieokreślony nośnik pola ciężkości. Innym ważnym elementem bilansowanej energii jest bilans **energii związanej**, który ma miejsce, gdy czynnik pobiera i przeistacza energię cieplną. Każde pobierania i przeistaczanie ciepła (energii na sposób ciepła) odbywa się z zyskiem dla energii związanej. Zakładamy, iż suma wszystkich bilansów energii (kinetycznej, wewnętrznej, ciężenia, związanej) przedstawionych w formie zachowawczej, po zsumowaniu również będzie miała formę zachowawczą. Bilans taki nazywać będziemy **bilansem energii całkowitej** lub krótko bilansem energii³⁸.

Literatura dotycząca lokalnego bilansu energii i jego związku z Pierwszą Zasadą termodynamiki jest obfita i łatwo dostępna. Wzorujemy się tu na następujących monografiach: J. RUTKOWSKI [314], S. WIŚNIEWSKI [430],[429], J. SZARGUT [360],[364], B. STEFANOWSKI [341], S. SIENIUTYCZ [328], S. OCHEŃDUSZKO [253], J. MIKIELEWICZ [226], J. MADEJSKI [197],

³⁸W wyprowadzeniu równań energii wzorujemy się na pracy J. RUTKOWSKIEGO, Podstawy Bilansowania Masy, Pędu i Energii, *Wyd. P. Warsz.* 1976, w której koncepcja zsumowania wszystkich form energii została zaproponowana i uzasadniona. Dodajmy, że praca prof. Rutkowskiego jest również pionierskim, na skalę europejską, opracowaniem referencyjnego opisu Maxwella. Referencyjny opis kontinuum z roku na rok nabiera znaczenia i zaczyna pojawiać się nie tylko w analitycznych opracowaniach, ale w praktycznych obliczeniach układów zawierających sprzężenie typu CFD + CSD. Punkt wyjściowy naszej pracy nie różni się od wyjściowego założenia Rutkowskiego i zakłada brak źródeł w bilansie energii całkowitej. Przypomnijmy, że Rutkowski definiuje wymianę energii jako zmianę zapasu energii poprzez strumienie natomiast przemianę energii jako zmianę energii poprzez źródła. Uważa on, że „poszczególne rodzaje energii muszą tworzyć zbiór wielkości wzajemnie przekształcanych”. Dlatego, w odniesieniu do energii całkowitej suma wszystkich członów przemiany musi być równa zero ($s_e = 0$), a zmiana zawartości energii może polegać jedynie na wymianie (wkłady strumieni). W myśl takiego założenia bilans energii całkowitej winien zawierać jedynie pochodne substancjalne określające zmianę zasobu oraz rozbieżności strumieni (wymiana). W niniejszej pracy przyjmujemy, że energia dysypowana podlega przemianie energii w jakąś inną formę energii stąd nie musi explicite występować w bilansie energii. Pewną różnicą jest to, że rozpatrujemy tutaj nie trzy (energia kinetyczna, wewnętrzna, ciężenia) ale cztery typy bilansów energii (energia kinetyczna, wewnętrzna, związana, ciężenia). Ta różnica bierze się stąd iż nie dopuszczamy do występowania dyfuzyjnej wymiany niesubstancjonalnej w równaniu bilansu energii wewnętrznej, bowiem bilans energii wewnętrznej zakładamy w postaci zaproponowanej przez Rankine’a i Gibbsa. Uważamy również, iż siedliskiem energii ciężenia jest bliżej nie sprecyzowane „pole”. Uważamy również, że ciepło jest wielkością dającą się magazynować sprężystości, stąd nie potrzeba zakładać, iż „przechodzi ono od wymiany bezpośrednio do przemiany”. Wynikiem tego założenia jest **równanie energii związanej** zaproponowane przez W. Natansona (1890).

R. DOMAŃSKI [70], T. CHMIELNIAK [42]-[44].

Status bilansu energii, z uwagi na wieloaspektowość konwersji energii z jednych form w inne, nie do końca jest klarowny. Przykładowo wśród dwóch głównych postaci energii jakimi są: energia wewnętrzna całkowicie sprężyste (odwracalna) i energia dysypowa Rayleigha (całkowicie nieodwracalna) tylko ta pierwsza posiada własny bilans. Ten niejasny status podkreślają również metody wariacyjne termomechaniki, które wykorzystują w sposób jawny energię dysypowaną Rayleigha.

Nie do końca znany jest właściwy numeryczny sposób wykorzystania równania energii – wprawdzie w większości przypadków z równania energii określa się pole temperatury, jednak czasami (np. w aeroakustyce) równanie energii ma rolę podrzędną równania definiującego zależności między głównymi strumieniami.

Zaproponowany przez Natanson podział paradygmatów myślenia na mechanicyzm (od równania bilansu pędu) i energetyzm (od równania bilansu energii) nie zawsze jest uznawany przez mechaników. Próbuje oni mianowicie, odmówić bilansowi energii odrębnego statusu i przedstawiają bilanse energii jako automatycznie spełnione tożsamości w opisie ruchu zwanego ciepłem.

Bilans energii kinetycznej

³⁹ Pomnóżmy skalarnie bilans pędu (U.43) przez wektor prędkości $\vec{v}$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \operatorname{div} (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \vec{I}) = \operatorname{div} \vec{\tau}^c + \rho \vec{b} \right] \cdot \vec{v}. \quad (\text{U.77})$$

Ponieważ

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v}^2 = 2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} \right) \cdot \vec{v} \quad (\text{U.78})$$

oraz

$$(\operatorname{div} \vec{\tau}^c) \cdot \vec{v} = \operatorname{div} (\vec{\tau}^c \vec{v}) - \vec{\tau}^c \cdot \operatorname{grad} \vec{v}, \quad (\text{U.79})$$

³⁹Pojęcie pędu samo w sobie nie wystarcza do scharakteryzowania w pełni ruchu. Ilość pracy potrzebna do zatrzymania ciała jest wielkością skalarną, która jest przejawem energii ruchu zwaną energią kinetyczną. Niedługo po odkryciu przez Newtona praw ruchu, LEIBNITZ (1695) zdefiniował siłę żywą – *vis viva* jako iloczyn masy i kwadratu wektora prędkości. Później T. YOUNG w 1802 zdefiniował energię kinetyczną jako połowa *vis viva*. Szczególną postać bilansu energii kinetycznej znano jako zachowanie energii podczas zderzeń dwóch i więcej ciał (GASSENDI 1630). Bilans energii kinetycznej dla ciał sztywnych zaproponował LAGRANGE (1808) i POISSON (1809). Bilans energii kinetycznej dla kontinuum Cauchy’ego zaproponował UMOV (1878), dla kontinuum Cosseratów – COSSERATOWIE (1896), Appel (1903).

to po przekształceniach otrzymujemy:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left(\rho \frac{\vec{v}^2}{2} \vec{v} + p \vec{v} \right) = \operatorname{div} \left(\overset{\leftrightarrow}{\tau}^c \vec{v} \right) + \left\{ - \overset{\leftrightarrow}{\tau}^c \cdot \operatorname{grad} \vec{v} + \rho p \dot{v} + \rho \vec{b} \cdot \vec{v} \right\}. \quad (\text{U.80})$$

Jest to bilans energii kinetycznej w postaci zachowawczej. Podczas mnożenia (U.77) wykorzystano relację (U.24) oraz informację iż objętość właściwa v [m³/kg] jest odwrotnością gęstości:

$$\left(p \overset{\leftrightarrow}{I} \right) \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = p \operatorname{div} \vec{v} = p \rho \dot{v}, \quad v = \rho^{-1}. \quad (\text{U.81})$$

Równanie (U.80) mówi, że na zmianę w czasie energii kinetycznej odniesionej do jednostki objętości: $\partial_t (1/2 \rho \vec{v}^2)$ składa się: konwekcyjne przenoszenie energii kinetycznej poprzez substancję przepływającą przez granice objętości: $\operatorname{div} [(1/2 \rho \vec{v}^2) \vec{v}]$, praca ciśnienia działającego na powierzchnię objętości odniesiona do jednostki objętości i czasu: $\operatorname{div} (p \vec{v})$, praca sił lepkości odniesiona do jednostki objętości i czasu: $\operatorname{div} \left[\overset{\leftrightarrow}{\tau}^c \vec{v} \right]$, oraz praca sił masowych odniesiona do jednostki objętości i czasu: $(\rho \vec{b} \cdot \vec{v})$. Ponadto, część energii kinetycznej przekształca się sprężyste (odwracalnie) w energię wewnętrzną $p \operatorname{div} \vec{v} = \rho p dv/dt$ a część nieodwracalnie: $\overset{\leftrightarrow}{\tau}^c \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = \overset{\leftrightarrow}{\tau}^c \cdot \overset{\leftrightarrow}{d}$, czyli ulega dyssypacji.

Bilans energii ciężenia

Zauważmy, iż bilans energii potencjalnej ciężenia $\Gamma = zg$ w przypadku działania zachowawczych sił masowych, $\partial_t \vec{b} = 0$, ma postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Gamma) + \operatorname{div} (\rho \Gamma \vec{v}) = -\rho \vec{b} \cdot \vec{v}, \quad (\text{U.82})$$

gdzie $\rho \Gamma \vec{v}$ jest gęstością konwekcyjnego strumienia energii ciążenia⁴⁰, zaś $\rho \vec{b} \cdot \vec{v}$ pracą sił masowych odniesioną do jednostki objętości i czasu (moc sił masowych). Powyższe równanie pozwala na eliminację pracy sił masowych z równania energii. Człon źródłowy odpowiada za konwersję energii ciążenia w energię kinetyczną (U.80) i jest szczególnie ważny w siłowniach wodnych.

Bilans energii związanej

⁴¹ Postulujemy, za Natansonem (1890) bilans energii związanej w postaci:

$$T \left[\rho \frac{d}{dt} s = \operatorname{div} \vec{J}_s + \rho \sigma_s \right], \quad (\text{U.83})$$

w którym: T – temperatura absolutna, s – entropia właściwa płynu, $\vec{J}_s$ – dyfuzyjny strumień entropii, σ_s – źródła produkcji entropii pochodzące np. wskutek spalania lub innej reakcji egzo – lub endotermicznej. Równanie to

⁴⁰Pojęcie energii potencjalnej ciążenia pojawia się w pracach JANA BERNOULLIEGO (1760) w jego „zasadzie zachowania sił żywych i ukrytych”. LAGRANGE w swojej „Mecanique Analytique” (1788) zasadę Bernoulliego określa jako $T+V = \text{const}$, gdzie T – semi-vis-viva, V – funkcja potencjału. CARNOT (1803) nazywa potencjał V „force vive latente” (ukrytą siłą żywą). J.W. RANKINE (1855) nazywa ją energią potencjalną.

Konwersja energii kinetycznej w potencjalną obserwowana jest podczas rzutu pionowego ciała w polu siły ciążenia ziemskiego. Jeśli siedliskiem energii kinetycznej jest ciało o masie m to nie wiadomo gdzie mieści się energia potencjalna siły ciążenia. Możemy ilościowo opisać efekty grawitacji, lecz tak naprawdę jej nie rozumiemy. Rzeczy umieszczone w polu siły grawitacji zaczynają się poruszać mimo, że nie widać czegokolwiek co by je popychało. „To czysta magia” – tak określa sytuację B.K. RIDLEY (*Time, Space and Things*, 1978).

⁴¹Bilans energii związanej i bilans energii wewnętrznej w literaturze i nauce francuskiej 19-go wieku i częściowo wieku dwudziestego nazywane były **drugim i pierwszym prawem Carnota**. (energia związana nazywana jest przez Carnota – „kalorykiem”). Upór Francuzów przy swoim Carnocie jest poniekąd słuszny, bowiem prawa te wygłoszone wprowadziły tylko słownie mają do dziś prawdziwą postać:

- **suma zmian energii wewnętrznej czynnika roboczego w pełnym cyklu jest równa zero** (I prawo Carnota)
- **suma zmian energii związanej (kaloryka) w pełnym cyklu jest równa zero** (II prawo Carnota).

Pojęcie ciepłok (kaloryk) jest również używane w piśmiennictwie polskim. Pojęcie „ciepłok” używane było w odniesieniu do energii cieplnej zawartej w entalpii. Pojęcie to pojawia się w pracach Czesława Witoszyńskiego publikowanych w latach 1900-1905 w Lwowskim Czasopiśmie Technicznym. W tych pracach widoczny jest wpływ Christleina, Fluegla, Stodoli, Browna i Boveri’ego. Nazwę „ciepłok” stosują również CHRZANOWSKI [56], STEFANOWSKI [342], SZAWŁOWSKI [367], SZEWAŁSKI [371].

przedstawiamy jako:

$$\rho T \dot{s} = T \operatorname{div} \vec{J}_s + \rho T \sigma_s, \quad (\text{U.84})$$

zaś

$$T \operatorname{div} \vec{J}_s = \operatorname{div} (T \vec{J}_s) - \operatorname{grad} T \cdot \vec{J}_s. \quad (\text{U.85})$$

Bilans energii wewnętrznej

⁴² Energia wewnętrzna u [J/kg] czy też objętościowa gęstość energii ρu [J/m³] jest formą energii sprężystej (odwracalnej) niesionej przez substancję. Zawiera ona energię kinetyczną wszystkich możliwych form ruchu molekularnego ukrytych dla poziomu fenomenologicznego. Jeśli płyn nie podlega dysocjacji ani jonizacji to jego energia wewnętrzna składa się na ogół z trzech ruchów molekularnych: postępowego, rotacyjnego oraz drgającego. Te formy ruchu konwertują w pracę, ciepło, energię chemiczną, etc..

Pierwowzorem równania bilansu energii wewnętrznej w postaci integralnej w czasie i przestrzeni jest Pierwsze Równanie Termodynamiki Carnota⁴³ stwierdzająca, że energia wewnętrzna czynnika roboczego po przejściu przez zmiany w cyklu przemian w obiegu urządzenia przepływowego **nie ulega zmianie**.⁴⁴

Kluczowym dla bilansu energii całkowitej jest bilans energii wewnętrznej, niesiony przez jeden kilogram substancji. Założymy, iż ten bilans ma postać równania Gibbsa (1876)⁴⁵:

$$\rho \dot{u} = \rho \frac{d}{dt} (u) = \partial_t (\rho u) + \operatorname{div} (\rho u \vec{v}) = \rho (-p \dot{v} + T \dot{s}), \quad (\text{U.86})$$

⁴²Pojęcie energii wewnętrznej zostało wprowadzone przez J Rankine'a (1840) w pracy W.J.RANKINE, On the general law of the transformation of energy, *Phil. Mag.* **5**, 106-117 (1853).

⁴³S. CARNOT, Reflexions sur la Puissance Motrice du Feu et sur les Machines Propres a Developper cett Puissance, *Ann Ecole Norm.* **2**, 393-457 (1824)

⁴⁴W uzupełnieniu U2.3. będziemy przedstawiać różne formy energii wewnętrznej zwane ogólnie „kalorycznymi równaniami stanu”. Najpopularniejszym równaniem kalorycznym płynu doskonałego jest $u = c_v T$.

⁴⁵J. GIBBS, On the equilibrium of heterogeneous substances, *Trans. Conn. Acad. Arts Sci.* **3**, 108-248, 343-534, (1875/1877). Nie powołujemy się tu na konkretny wzór, bowiem równania typu:

$$d\varepsilon = \theta d\eta - p d\nu + \mu_\alpha dm_\alpha \quad (\text{płyn})$$

$$d\varepsilon = \theta d\eta + \Pi_{iA} dx_{i,A}/\rho + \mu_\alpha dm_\alpha \quad (\text{ciało stałe})$$

spotykamy wielokrotnie w pracy Gibbsa. Wyjaśnienie oznaczeń Gibbsa można znaleźć w Uzupełnieniu U2.13. Niestety, w żadnej z prac cytowanej w bibliografii [1] - [456] nie znaleziono śladu kontynuacji tego podejścia.

gdzie $u = u(v, s)$ jest energią wewnętrzną właściwą⁴⁶. Bilans ten ma podstawowe znaczenie, gdy rozważamy **przemiany odwracalne**, bowiem, w przypadku pomijania dyssypacji energii wywoływanej nieodwracalnymi zjawiskami, bilans energii całkowitej można uprościć tylko do równania energii wewnętrznej i odpowiadającej mu diagramów $p-v$ (pracy kompensowanej) i $T-s$ (ciepła kompensowanego).⁴⁷

Summaryczne Bilanse Energii

Z fenomenologicznego punktu widzenia materia kontinuum płynnego jest siedliskiem energii łącznej (całkowitej) stanowiącej zespół czterech powyżej wymienionych rodzajów energii a mianowicie;

- energii kinetycznej
- energii ciężenia
- energii wewnętrznej
- energii związanej

Z uwagi na typ procesu przemiany energii, energie te możemy składać z sobą w dowolny sposób, w zależności od tego, jaka forma konwersji energii dominuje w przepływie. Zakładamy, zgodnie z obserwowaną w przyrodzie zasadą mówiącą o nie powstawaniu energii z niczego, że całkowita produkcja energii pozostaje równa zeru, mimo iż jej wymiana (poprzez strumienie) z otoczeniem odbywa się różnymi sposobami.

⁴⁶W roku 1873 J. Gibbs w oparciu o rezultaty eksperymentów T. Andrews podał równanie stanu w postaci $u(s, v)$ dla dwutlenku węgla w stanie gazowym, ciekłym i stałym. Postać ta zaproponowana była przez Jamesa Thomsona (1871) (starszego brata Lorda Kelvina).

⁴⁷W równaniu (U.86) użyto tożsamości, która niezależnie od tego czy pewna wielkość jest skalarem, wektorem lub tensorem np: $\alpha \vec{\alpha} = \alpha_i \vec{e}_i \vec{\alpha} = \alpha_{ij} \vec{v} \otimes \vec{e}_j$ można pokazać że zachodzi (J. BADUR, B. H. SUN, Remarks on the structure of evolution equation, *Appl. Math. Mech.* **16**, 747-7574, (1995)):

$$\rho \frac{d}{dt} \alpha = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \alpha) + \operatorname{div} (\rho \alpha \vec{v});$$

$$\rho \frac{d}{dt} \vec{\alpha} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{\alpha}) + \operatorname{div} (\rho \vec{\alpha} \otimes \vec{v}) : \rho \frac{d}{dt} \overleftrightarrow{\alpha} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \overleftrightarrow{\alpha}) + \operatorname{div} (\rho \overleftrightarrow{\alpha} \otimes \vec{v}).$$

Bilans energii mechanicznej

Powstaje on ze złożenia bilansu energii kinetycznej (U.80) i energii ciężenia (U.82). Złożenie tych dwóch bilansów nie jest przypadkowe, bowiem energia ciężenia może podlegać konwersji (poprzez człon $\rho \vec{b} \cdot \vec{v}$) **jedynie** z energią kinetyczną. Tego typu konwersja ma podstawowe znaczenie w turbinach wodnych, w których praca otrzymana jest w dwóch etapach; najpierw energia ciężenia wody znajdującej się 5-700 m nad turbiną, zamienia się w energię kinetyczną, która następnie zostaje przekazana ruchomym ściankom wirnika. Tego typu konwersja jest konwersją odwracalną i polega na pracy siły ciężkości $\rho \vec{b} \cdot \vec{v}$. Łączny bilans energii kinetycznej (U.80) i energii ciężenia (U.82) nazywamy **bilansem energii mechanicznej**:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\vec{v}^2}{2} + \rho \Gamma \right) + \text{div} \left(\rho \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \Gamma \right) \vec{v} \right) = \text{div} \left(\overleftrightarrow{\tau}^c \vec{v} \right) - \overleftrightarrow{\tau}^c \cdot \text{grad} \vec{v} + \rho p \dot{v}. \quad (\text{U.87})$$

Człon $\rho p \dot{v}$ oznacza odwracalną konwersję energii kinetycznej w energię wewnętrzną zaś człon $\overleftrightarrow{\tau}^c \cdot \text{grad} \vec{v}$ nieodwracalną konwersję energii kinetycznej w energię cieplną.

Bilans energii cieplnej

Powstaje on ze złożenia bilansu energii wewnętrznej (sprężystej) (U.86) z energią związaną (U.84). Ten bilans ma podstawowe znaczenie dla usunięcia entropii właściwej z procedury bilansowania energii, bowiem bilans energii wewnętrznej w **formie integralnej w przestrzeni** i lokalnej w czasie przyjmuje postać „drugiego równania termodynamiki”: $Tds = \delta q$, co pozwala wprowadzić do bilansu ciepło przemiany zamiast zmiennej którą jest entropia właściwa. Bilans energii wewnętrznej (U.86) ma podstawowe znaczenie w procesie projektowania i obliczania obiegów cieplnych w formie integralnej, bowiem doskonale opisuje przemiany odwracalne układów przepływowych oraz ma dobrą wizualizację na diagramie pracy ($p - v$) i ciepła ($T - s$).

Przypomnijmy, że oba bilanse (U.86) i (U.84), mają postać bardziej związaną z opisem Lagrange’a (w którym śledzimy 1 kg substancji przepływający pomiędzy wlotem i wylotem) niż opisem Eulera (w którym dokonujemy chwilowego bilansu względem obserwatora jednocześnie dokonujących bilansów na wlocie i wylocie). W przypadku bilansu energii wewnętrznej użycie pochodnych substancjonalnych, czyli Lagrange’owskich jest zasadne, bowiem rozpatrujemy zmiany w kilogramie masy poruszającym się z prędkością płynu. Takie podejście współgra również z drugim (U.84), integralnym

bilansem energii związanej, zwanym równaniem Carnota-Clausiusa, w wersji integralnej w przestrzeni, w którym rozpatruje się zagadnienie przejmowania ciepła 1 kg masy w ruchu. Przypomnijmy, że równanie Carnota-Clausiusa⁴⁸ mówi, że ciepło pobrane do jednostki masy płynu wywołuje następujące przemiany: zmianę energii wewnętrznej, pracę przemiany i ciepło stracone

$$\delta q = du - p dv + \delta q_{str}, \quad (\text{U.88})$$

co przy pomocy pochodnej substancjalnej wyrażamy jako:

$$\dot{q} = \dot{u} - p\dot{v} + \dot{q}_{str}. \quad (\text{U.89})$$

Wyraz $\dot{u}$ oznacza szybkość zmiany energii wewnętrznej 1 kg (czyli właściwej) poruszającego się płynu, $\dot{q}$ – szybkość dopływu ciepła do powierzchni 1 kg płynu od innych, otaczających go mas (w podejściu integralnym od ścianek adiabatycznych), $p\dot{v}$ prędkość pracy wewnętrznej oraz $\dot{q}_{str}$ szybkość ciepła straconego w wyniku nieodwracalnej konwersji pracy tarcia $\dot{l}_{str}$ w ciepło. O ile wielkość $\dot{l}_{str}$ ma duże znaczenie w bilansie energii mechanicznej, bo powoduje albo straty ciśnienia albo straty energii kinetycznej to $\dot{q}_{str}$ ma niewielki wpływ (za wyjątkiem kilku urządzeń) na wzrost temperatury płynu.

Złożenie równania (U.86) i (U.84) prowadzi do następującego bilansu energii cieplnej:

$$\begin{aligned} \rho \dot{u} &= \rho(-p\dot{v} + T\dot{s}) \\ + \quad \rho T\dot{s} &= T \operatorname{div} \vec{J}_s + T\sigma_s \\ \hline \left[\rho \dot{u} &= \rho(-p\dot{v} + T\dot{s}) - \rho T\dot{s} + T \operatorname{div} \vec{J}_s + T\sigma_s \right]. \end{aligned}$$

Ponieważ $\sigma_s = \left(\overleftrightarrow{\tau}^c \cdot \operatorname{grad} \vec{v} + \vec{J}_s \cdot \operatorname{grad} T \right)$ oraz $\vec{J}_s T = \vec{q}^c$ to ostatecznie uzyskujemy:

$$\boxed{\rho \dot{u} = \operatorname{div} (\vec{q}^c) + \overleftrightarrow{\tau}^c \cdot \operatorname{grad} \vec{v} - \rho p \dot{v}.} \quad (\text{U.90})$$

Jest to **bilans energii cieplnej**. Występują w nim dwa człony konwersji energii wewnętrznej u z energią kinetyczną: pierwszy, w którym konwersja energii zachodzi w sposób nieodwracalny $\left(\overleftrightarrow{\tau}^c \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = \overleftrightarrow{\tau}^c \cdot \overleftrightarrow{d} \right)$ oraz na konwersji w sposób sprężysty $(p\dot{v})$.⁴⁹

⁴⁸Jest ono wyprowadzone w Uzupełnieniu U1.10

⁴⁹Równanie (U.90) w tej postaci ale z wykorzystaniem strumienia pędu Cauchy'ego

Bilans energii całkowitej

Możemy taki bilans uzyskać albo poprzez zsumowanie wszystkich czterech bilansów cząstkowych albo poprzez zsumowanie bilansu energii mechanicznej (U.87) i bilansu energii cieplnej (U.90).

Należy pamiętać, że bilans energii całkowitej „ukrywa” charakter konwersji, jaka zachodzi pomiędzy energią mechaniczną i ciepłą jak również pomiędzy wszystkimi innymi formami energii. Stąd też w niektórych urządzeniach przepływowych wygodniej jest stosować nie sumaryczny, lecz cząstkowy bilans energii. I tak w urządzeniach typu: turbina wodna, pompa hydrauliczna, w których to urządzeniach zachodzi odwracalna konwersja

$$\{\text{energia ciążenia}\} \Leftrightarrow \{\text{energia kinetyczna}\},$$

podstawową rolę odgrywa bilans energii mechanicznej (U.87). W urządzeniach typu silnik cieplny, wentylator, sprężarka, gdzie zachodzi głównie odwracalna konwersja energii

$$\{\text{energia wewnętrzna}\} \Leftrightarrow \{\text{energia kinetyczna}\},$$

podstawową rolę odgrywa zarówno bilans energii cieplnej jak i bilans energii mechanicznej.

Sumaryczny bilans energii otrzymujemy w następujący sposób: sumujemy **równania energii kinetycznej, ciążenia, energii związanej i energii wewnętrznej** odpowiednio stronami. Wszystkie te równania mają postać zachowawczą, stąd też wynik sumowania ma postać zachowawczą.

Zauważmy iż szereg członów upraszcza się. W rów. (U.86) występuje człon $-\rho p \dot{v}$ a w równaniu (U.80) człon $\rho p \dot{v}$. W rów. (U.86) człon $(\rho T \dot{s})$, a w rów. (U.84) $(-\rho T \dot{s})$. Skraca się również człon $(\rho \vec{b} \cdot \vec{v})$ w rów. (U.80) i

$\overleftrightarrow{T} = -p \overleftrightarrow{I} + \overleftrightarrow{\tau}$ wyprowadził i dokonał dyskusji C. Neumann, ma ono następującą postać:

$$\rho \frac{du}{dt} = \text{div } \vec{q} + \overleftrightarrow{T} \cdot \overleftrightarrow{d} \quad (\text{U.91})$$

C. NEUMANN, Über die Bewegung der Wärme in compressiblen oder auch incompressiblen Flüssigkeiten, *Ber. Verh. Ges. Wiss. Leipzig*, **t46**, 1-24, (1894). Specjalne przypadki nielepkiego i nieściśliwego płynu omawiał FOURIER [1833, eq.(3)] i małe ruchy płynu lepkiego R. KIRCHHOFF [1868, §1].

człon $(-\rho \vec{b} \cdot \vec{v})$ w rów. (U.82). Ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(u + \frac{\vec{v}^2}{2} + zg \right) \right] + \operatorname{div} \left[\rho \left(u + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + zg \right) \vec{v} \right] = \\ = \operatorname{div} \left(\vec{J}_s T + \overleftrightarrow{\tau}^c \vec{v} \right) - \left(\overleftrightarrow{\tau}^c \cdot \operatorname{grad} \vec{J}_s \cdot \operatorname{grad} T \right) + \rho T \sigma_s. \end{aligned} \quad (\text{U.92})$$

Podstawiamy za zerowe źródła energii

$$\rho s_e = -D + \rho \sigma_e = - \left(\overleftrightarrow{\tau}^c \cdot \operatorname{grad} \vec{v} + \vec{J}_s \cdot \operatorname{grad} T \right) + \rho T \sigma_s = 0, \quad (\text{U.93})$$

gdzie $D = \left(\overleftrightarrow{\tau}^c \cdot \operatorname{grad} \vec{v} + \vec{J}_s \cdot \operatorname{grad} T \right) [\text{W/m}^3]$ jest objętościową gęstością energii dysypowanej Rayleigha.

Korzystając z domknięcia zaproponowanego⁵⁰ przez Clausiusa (1854) i Jaumanna (1911), łączącego **całkowity strumień ciepła ze strumieniem entropii** $\vec{J}_s T = \vec{q}^c$, mamy ostatecznie następującą zachowawczą postać bilansu energii całkowitej:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(u + \frac{\vec{v}^2}{2} + zg \right) \right] + \operatorname{div} \left[\rho \left(u + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + zg \right) \vec{v} \right] = \operatorname{div} \left(\vec{q}^c + \overleftrightarrow{\tau}^c \vec{v} \right).$$

(U.94)

Całkowa postać bilansu energii jest następująca:

$$\begin{aligned} \iiint \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(u + \frac{\vec{v}^2}{2} + zg \right) \right] dV + \\ + \oint \left[\rho \left(u + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + zg \right) \vec{v} \right] \cdot \vec{n} dA = \\ = \oint \left(\vec{q}^c + \overleftrightarrow{\tau}^c \vec{v} \right) \cdot \vec{n} dA. \end{aligned} \quad (\text{U.95})$$

Powyższa postać bilansu energii całkowitej ma dwie ważne cechy:

- Jest to postać zachowawcza preferowana przez MOS i MES.

⁵⁰R. CLAUSIUS, Über eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie, *Ann. Physik* **93**, 481-506, 1854

G. JAUMANN, Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze, *Sitzsber. Akad. Wiss. Wien (IIa)*, **120**, 385-530, 1911,

- Jest to postać spójna z integralnym bilansem energii 0D. Spójność ta wynika nie tylko z podobieństwa składowych strumienia konwekcyjnego w sformułowaniach 3D i 0D, ale z obecności strat energii w postaci energii dysypowanej Rayleigha, związanej ze stratami energii określonymi w modelu 0D formułą:

$$\Delta \dot{E}_{1,2} = \iiint_V D dV \quad [\text{J/s}]. \quad (\text{U.96})$$

W ten sposób zdefiniowane straty energii zawierają nie tylko straty na skutek tarcia lepkiego, ale również straty na skutek przewodzenia ciepła, dyfuzji składników, ciśnienia lepkiego, etc..

W przypadku **przepływu stacjonarnego** postać całkowa przyjmuje formę wygodną do obliczeń inżynierskich (0D). Jeśli nazwiemy przez

$$i_c = u + \frac{p}{\rho} + \frac{\vec{v}^2}{2} + zg \quad (\text{U.97})$$

entalpię całkowitą (patrz równanie (U.62) występującą jako suma **energii wewnętrznej, przetłaczania, kinetycznej i ciężenia** to równanie (U.95) przyjmie postać:

$$\oint (\rho i_c \vec{v}) \cdot \vec{n} dA = \oint \left(\vec{q}^c + \overleftarrow{\tau}^c \vec{v}^2 \right) \cdot \vec{n} dA, \quad (\text{U.98})$$

którą czytamy jako: *Całkowita wymiana energii za pomocą: strumienia konwekcyjnego i sprężystego ($\rho i_c \vec{v}$), strumienia mechanicznego ($\overleftarrow{\tau}^c \vec{v}$), strumienia cieplnego ($\vec{q}^c$) zachodząca na powierzchniach bocznych elementarnej objętości dV jest równa zeru.*

Inaczej mówiąc, wymiana energii całkowitej (łącznej) musi być skompensowana. Z braku źródeł i warunku stacjonarności wynika, iż **strumień energii wpływającej musi się równać strumieniowi energii wypływającej**. Proporcje między poszczególnymi rodzajami energii, które na jednej powierzchni są doprowadzane a na innej odprowadzane nie muszą być zachowane, ponieważ wewnątrz objętości kontrolnej mogą zachodzić zarówno odwracalne jak i nieodwracalne konwersje jednych form energii w inne.

Objętość kontrolna – pomyślana wewnątrz kanału, daleko do ścianek, na całej swej powierzchni posiada strumienie, poprzez które zachodzi konwekcyjna i niesubstancjalna wymiana energii z innymi sąsiadującymi objętościami. Niektóre z objętości kontrolnych stykać się będą z wlotem a inne

z wylotem urządzenia przepływowego, pewne objętości będą stykać się z grzаныmi ściankami, na których zadany jest strumień ciepła $\vec{q}_*^c$ a niektóre z ruchomymi ściankami, na których istnieje zadany strumień energii mechanicznej $\left(\vec{T}\vec{v}\right)_* = \left(-p \vec{I} + \vec{\tau}^c\right) \vec{v}$. Wobec tego nasza elementarna **objętość kontrolna** dV_* **jest pierwowzorem całego urządzenia przepływowego**, w którym istnieją ścianki grzane (diabatyyczne) i ścianki ruchome (diawityczne).

Równanie (U.95) lub (U.98) będzie punktem wyjścia również dla dużej objętości kontrolnej zawierającej całą maszyną przepływową w której na powierzchniach wlotu i wylotu zadane są strumienie konwekcyjno-sprężyste $\rho i_c \vec{v}$, zaś na innych, z uwagi na zerową prędkość, są równe zeru. Na powierzchniach wlotu i wylotu zwykle pomija się dość małe strumienie $\vec{q}^c$ i $\left(\vec{\tau}^c\right) \vec{v}$. Najczęściej urządzenie posiada sztywną zaizolowaną obudowę o powierzchni A_{wall} , na której nie następuje przekazywanie ani ciepła ani pracy.⁵¹ Są to ścianki adiabatyczne (heatless) oraz ścianki nieruchome (workless). Urządzenie posiada również ścianki o powierzchni A_q , na której przekazywane jest ciepło oraz ścianki ruchome A_u (diawityczne), na których przekazywana jest energia kinetyczna.

Postać numeryczna bilansu energii

Numeryczna TermoMechanika Płynów używa bilansu energii całkowitej będącej sumą bilansu **energii kinetycznej, wewnętrznej i związanej**. Oznacza to, iż praca sił ciążenia $\rho \vec{b} \cdot \vec{v}$ nie jest wyrażona poprzez potencjał ciążenia Γ i pozostaje jako źródło energii. Sumując (U.80), (U.84) i (U.86) otrzymujemy:

$$\partial_t (\rho e) + \operatorname{div} \left[\rho \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \vec{v} \right] = \operatorname{div} \left(\vec{q}^c + \vec{\tau}^c \vec{v} \right) + \rho \vec{b} \cdot \vec{v}, \quad (\text{U.99})$$

gdzie energia całkowita właściwa $e = u + 1/2 \vec{v}^2$ [J/kg].

Równanie bilansu energii w układzie wirującym z prędkością kątową $\vec{\Omega}$ wymaga, aby do siły masowej $\vec{b}$ występującej w (U.99) dodać fikcyjne siły

⁵¹Nie dotyczy to radiacji przed którą nie da się osłonić ścianek wewnętrznych stąd radiacyjna wymiana ciepła odbywa się na całej powierzchni objętości kontrolnej, poprzez wszystkie powierzchnie, również powierzchnie wlotu i wylotu. Przypominamy, iż z punktu widzenia radiacyjnego transportu ciepła powierzchnie dzielą się tylko na powierzchnie „czarne”, „szare” i „białe”.

unoszenia określone przez (U.69). Wtedy

$$\rho \vec{b} \cdot \vec{v} = \rho [-\text{grad}(zg) - 2\Omega \times \vec{w} + \text{grad} \Pi_u] \cdot \vec{w}, \quad (\text{U.100})$$

a wtedy, zauważając dodatkowo, że przyspieszenie Coriolisa nie wykonuje pracy w układzie wirującym $(\vec{\Omega} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0$, oraz wykorzystując relację typu (U.82) mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(u + \frac{\vec{w}^2}{2} + zg - \frac{\vec{u}^2}{2} \right) \right] + \text{div} \left[\rho \left(u + \frac{\vec{w}^2}{2} + zg - \frac{\vec{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \vec{w} \right] = \\ = \text{div} \left(\vec{q}^c + \overset{\leftrightarrow}{\tau}^c \vec{w} \right). \end{aligned} \quad (\text{U.101})$$

Występująca tu pod znakiem dywergencji funkcja

$$i_w = u + \frac{\vec{w}^2}{2} + zg - \frac{\vec{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho} \quad (\text{U.102})$$

nosi nazwę **rotaplii całkowitej** i jest analogiem entalpii całkowitej w przepływie bezwzględny ([45],[113]).

Postaci Szczególne

We współrzędnych kartezjańskich bilans energii całkowitej (U.95) ma postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(u + \frac{\vec{v}^2}{2} + zg \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \left(u + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + zg \right) u \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \left(u + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + zg \right) v \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho \left(u + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + zg \right) w \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial x} (q_x^c + \tau_{xx}^c u + \tau_{xy}^c v + \tau_{xz}^c w) + \frac{\partial}{\partial y} (q_y^c + \tau_{yx}^c u + \tau_{yy}^c v + \tau_{yz}^c w) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} (q_z^c + \tau_{zx}^c u + \tau_{zy}^c v + \tau_{zz}^c w). \end{aligned} \quad (\text{U.103})$$

Szczególne postaci bilansu energii to:

- stacjonarność

$$\text{div} \left[\rho \left(u + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + zg \right) \vec{v} \right] = \text{div} \left(\vec{q}^c + \overset{\leftrightarrow}{\tau}^c \vec{v} \right), \quad (\text{U.104})$$

- płyn nieruchomy – dyfuzyjny przepływ ciepła

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} u = \operatorname{div}(\vec{q}), \quad (\text{U.105})$$

- płyn nieruchomy - radiacyjny przepływ ciepła

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} u = \operatorname{div}(\vec{q}^{rad}). \quad (\text{U.106})$$

Postać niezachowawcza

W literaturze ([30], [81], [96], [143], [197], [253]) stosowana jest następująca niezachowawcza postać bilansu energii wewnętrznej μ , która jest identyczna z bilansem energii cieplnej (U.90):

$$\rho \frac{d}{dt} u = \operatorname{div}(\vec{q}) + \left(-p \vec{I} + \vec{\tau} \right) \cdot \operatorname{grad} \vec{v}. \quad (\text{U.107})$$

Otrzymujemy ją wychodząc z zapostulowanego następującego równania energii całkowitej $e_c = u + 1/2 \vec{v}^2 + \Gamma$:

$$\rho \frac{d}{dt} e_c = \partial_t(\rho e_c) + \operatorname{div}(\rho e_c \vec{v}) = \operatorname{div}(\vec{J}_{ec}) \quad (\text{U.108})$$

w którym całkowity strumień energii jest zapostulowany w postaci wektora Umova-Volterry

$$\vec{J}_{ec} = \vec{q}^c + \vec{\tau}^c \vec{v} \quad (\text{U.109})$$

Postać niezachowawczą (U.107) otrzymamy po odjęciu (nie po zsumowaniu jak w (U.92)) od wyjściowego równania (U.83) równanie energii kinetycznej (U.80) i energii ciężenia (U.82) przy wykorzystaniu formuły na całkowity strumień dyfuzyjny (U.109), czyli:

$$\partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \vec{v}) = \operatorname{div}(\vec{q}^c) + \left(-p \vec{I} + \vec{\tau}^c \right) \cdot \operatorname{grad} \vec{v}. \quad (\text{U.110})$$

Pierwszy człon w rów. (U.110) przedstawia zmianę w czasie energii wewnętrznej odniesionej do jednostki objętości: $\partial_t(\rho u)$, drugi diwergencję gęstości konwekcyjnego strumienia energii wewnętrznej: $\operatorname{div}(\rho u \vec{v})$, następne człony diwergencję (rozbieżność) dyfuzyjnego strumienia ciepła: $\operatorname{div}(\vec{q}^c)$, odwracalny przyrost pracy zmiany objętości odniesiony do jednostki objętości i czasu: $\left(p \vec{I} \right) \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = p \operatorname{div} \vec{v}$, oraz nieodwracalny przyrost energii wewnętrznej wynikający z dysypacji energii kinetycznej na skutek działania strumienia lepkiego odniesiony do jednostki objętości i czasu: $\vec{\tau}^c \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = \vec{\tau}^c \cdot \vec{d} = \tau_{ij}^c d_{ij}$. W literaturze można również spotkać równanie energii (U.99) kładzione

nie na ennergię całkowitą ρe , a na entalpię całkowitą $\rho i_c = \rho \left(e + \frac{p}{\rho} \right)$. Aby to otrzymać należy dodać i odjąć od (U.99) pochodną $\partial_t p$. Pamiętając, że $\partial_t p = \partial_t \left(\rho \frac{p}{\rho} \right)$ mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{\vec{v}^2}{2} + zg \right) \right] + \operatorname{div} \left[\rho \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{\vec{v}^2}{2} + zg \right) \vec{v} \right] = \\ = \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\vec{q}^c + \overleftrightarrow{\tau}^c \vec{v} \right). \end{aligned} \quad (\text{U.111})$$

Ponieważ, zgodnie z tym co powiedziano w stopce 52, zachodzi tożsamość:

$$\rho \frac{d}{dt} i_c = \frac{\partial}{\partial t} (\rho i_c) + \operatorname{div} (\rho i_c \vec{v})$$

to (U.111) wyraża się przy pomocy pochodnej substancjalnej jako:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{\vec{v}^2}{2} + zg \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\vec{q}^c + \overleftrightarrow{\tau}^c \vec{v} \right). \quad (\text{U.112})$$

O jeszcze jednym bilansie

Przedstawione w niniejszym uzupełnieniu podejście do wyprowadzenia i uzasadnienia równań opisujących model matematyczny jest zwięzłe i pragmatyczne. Pragniemy, bowiem przedstawić model w sposób łatwo prowadzący do algorytmizacji i numerycznej implementacji. Z tych pragmatycznych powodów usunęliśmy z rozważań jeden ważny bilans dotyczący wielkości fizycznej zwanej **entropią** i najczęściej oznaczanej literą s [kJ/kg^oK]. W numerycznej termomechanice zarówno ciał stałych jak i ciał płynnych lokalny bilans entropii w objętości kontrolnej, odniesiony już do gęstości objętościowej (ρs) [kJ/m³oK], nie występuje w roli równania należącego do układu równań opisujących (U9). Przyczynę tego stanu rzeczy należy doszukiwać się w fakcie, iż, jak dotychczas, **entropia wewnętrzna** nie jest wielkością fizycznie mierzalną bowiem nie skonstruowano jeszcze entropomierza ⁵².

⁵²Pewną dyskusję o możliwości pomiaru entropii resztkowej (nieodwracalnej) w deformowanym ciele stałym podlegającym przejściom fazowym austenit-martenzyt, można znaleźć w pracach : J. BADUR, T. BRECKO, Modelling of the martensitic transformation in steels of 18.8 type, *Proc of SPAS*, vol 4, pp 34-63, Saint-Petersburg, 2000, J. BADUR, Termodynamika materiałów z pamięcią kształtu, *Seminarium PTMTS* Gdańsk, Opr. Wewn. IMP no 521/2000, str 1-49, 2000.

Jeśli przedstawimy bilans entropii w tej samej formie zachowawczej właściwej również dla innych wielkości fizycznych :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \operatorname{div} \left(\rho s \vec{v} + \vec{J}_s^{rever} \right) = \operatorname{div} \left(\vec{J}_s^{irrever} \right) + \rho(\sigma_{rever} + \sigma_{irrever})$$

to powstaje problem wyrażenia warunków brzegowych i początkowych na niemierzalną wielkość s . Wyrażenie warunków brzegowych na entropię jest w sposób pośredni możliwe, gdy znamy ciśnienie i temperaturę – wystarczy wtedy użyć równania stanu $s = f(p, T)$ patrz rów. (U.149).

Trzeba jednak pamiętać, iż w momencie, gdy wprowadzamy do gry równanie bilansu entropii, inne równanie, mianowicie równanie bilansu energii staje się pewnego rodzaju tożsamością – bowiem nie można wyznaczać niezależnie temperatury z równania energii i entropii z równania bilansu entropii wiedząc, iż związane są one równaniem stanu typu $s = f(p, T)$ lub typu rów. (U.149). Stąd też przyjęło się w praktyce numerycznej **pomijać lokalny bilans entropii** w układzie równań opisujących, a głównym równaniem służącym do wyliczenia pola $s(\vec{x}, t)$ lub $T(\vec{x}, t)$ jest równanie bilansu energii właściwej.⁵³

Przyczyną tego stanu rzeczy są względy praktyczne, pewnego rodzaju tradycja i łatwość konfrontacji wyników modelu z pomiarami temperatury.

Zdarzają się jednak pewne szczególne sytuacje, w których równanie bilansu entropii występuje zamiast równania energii. Taka sytuację mamy w Numerycznej Akustyce Płynów, gdzie entropia właściwa i jej bilans należą do grupy równań opisujących. Również, gdy patrzymy na nieco starsze i czasami pionierskie sformułowania CFD (Numerycznej Termomechaniki Płynów) to można zauważyć, że nie zawsze temperatura jest podstawową (tzw. prymalną) niewiadomą w równaniu energii i czasami w charakterze niewiadomej w równaniu energii występuje albo energia właściwa albo entropia właściwa.

⁵³W przekonaniu autora winno być akurat odwrotnie. Podstawowym równaniem wyznaczającym temperaturę winien być bilans entropii zaś bilans energii winien ograniczać swą ważność do tożsamości wyznaczającej nieuchronną degradację energii. O zasadności takiej opinii świadczy prosty eksperyment myślowy. Załóżmy za Kirchhoffem na moment (lub dłużej), iż entropia i temperatura są wielkościami tensorowymi opisywanymi przez sześć składowych tensora symetrycznego. W związku, z czym równanie stanu między entropią i temperaturą miałooby charakter tensorowy podobny do równań między naprężeniem i odkształceniem w ciele stałym. Również bilans entropii składałby się z sześciu równań kładzionych na poszczególne składowe tensora entropii właściwej. W płynie, taki tensor – podobnie jak ciśnienie – stawałby się tensorem kulistym z tylko jedną istotną składową. Natomiast bilans energii nadal pozostawałby równaniem skalarnym, bowiem energia jest skalarem, mimo iż w jej konwersji uczestniczą wielkości wektorialne i tensorowe. W takim przypadku nie można by było obliczyć tensora temperatury z jednego równania skalarnego energii – widać stąd, iż, w ogólnym przypadku, rola równania energii jest podrzędna.

Parametry i wielkości użyte w powyższym równaniu bilansu entropii wymagają wyjaśnień i szerszego wprowadzenia. Trzeba również dać odpowiedzi na liczne pytania typu: dlaczego bilansujemy (w modelu 3D) entropię właściwą skoro później tego bilansu nie wykorzystujemy praktycznie ?. Jakie były powody tego, iż wprowadzono taki bilans do termodynamiki oraz czy ten bilans ma związek z wcześniejszą formą integralną (zerowymiarową)?. Czy bilans ten wymyślono dla zjawisk całkowicie odwracalnych, czy, przeciwnie, dla zjawisk całkowicie nieodwracalnych? Czy bilans entropii może być zastąpiony bilansem jakiejś innej wielkości fizycznej?.

Autor niniejszego skryptu pragnie dać w miarę uczciwą, pozbawioną matematycznych rozważań, odpowiedź na te pytania zadawane każdego roku przez nowy rocznik studentów. Niestety najkrótsza i najprostsza odpowiedź jaką autor opracował zawiera się na **42 stronach Uzupełnienia U2.2**.⁵⁴ Być może jest to zbyt krótka a przez to zbyt uproszczona odpowiedź, toteż dalsze odpowiedzi na kolejne pytania trzeba uzyskać w oparciu o literaturowe studia. Prezentacja problemu oparta jest na naturalnej historii pojęcia entropia i pojęć towarzyszących. Punktem wyjścia jest obowiązujące w dziewiętnastym wieku sformułowanie zerowymiarowe bilansu entropii, które dla kanału ogrzewanego (z jednym wlotem i wylotem) ma następującą postać Carnota-Clausiusa:

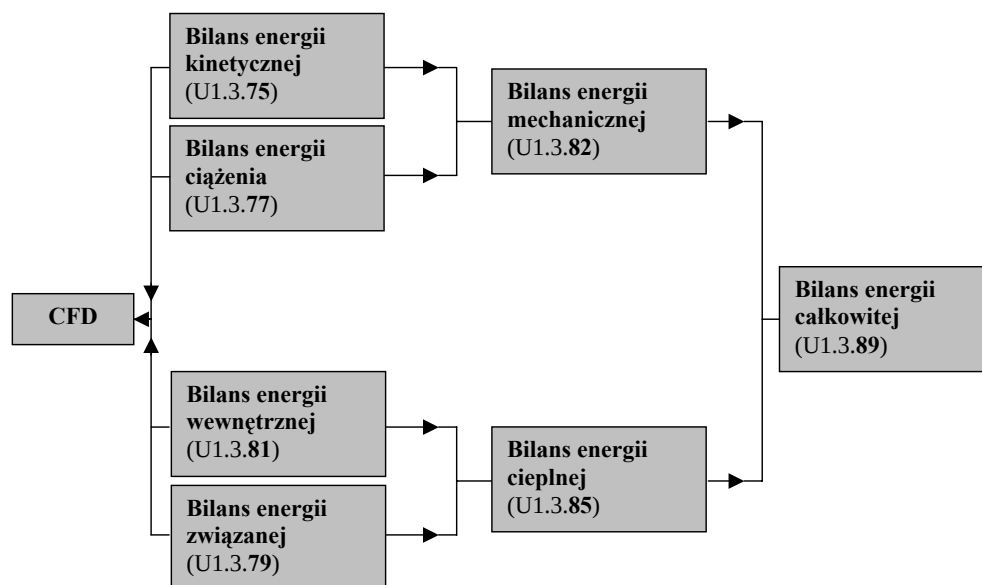
$$\dot{m}_1 s_1 + \frac{\dot{Q}_{1,2}}{T_{1,2}} + \dot{S}_{1,2gen} = \dot{m}_2 s_2$$

w którym $\dot{S}_{1,2gen} > 0$ jest wciąż dodatnią produkcją entropii. Okazuje się, iż równanie zerowymiarowe bilansu entropii ma, w przeciwieństwie do swego trójwymiarowego odpowiednika, wiele interesujących zastosowań (patrz U2.2).

U.1.3.5 Tabela Zbiorcza i Podsumowanie

W niniejszym uzupełnieniu wykładu pierwszego przedstawiono trzy podstawowe bilanse termomechaniki kontinuum jaki są bilanse masy, pędu i energii. Są one podstawowe dlatego, iż wykorzystywane są zarówno w procesie

⁵⁴Przypomina się tu pewne zdarzenie z życia Profesora Kestina. Pewnego razu, gdzieś około roku 1980-go, zwrócił się do Niego utytułowany Prof. Albert Green, wybitny badacz termodynamiki ośrodków ciągłych, z prośbą o najkrótsze, wyjaśnienie co termodynamika klasyczna rozumie przez pojęcie **entropii**. Prof. Kestin chętnie się zgodził pod warunkiem, iż Prof. Green zamówi sobie hotel na dwa tygodnie i przez cały ten czas będzie do dyspozycji wyjaśniającego. Naoczny świadek dyskusji Kestin-Green, która toczyła się w Brown University, profesor Z. Bilicki mówił o codziennym spadku entuzjazmu, z jakim Green słuchał Kestina aż w końcu po czterech dniach ciągłych rozmów prof. Green stwierdził, iż już nic nie rozumie i wyjechał do rodzimego Oxfordu.



Rysunek U.5. Struktura bilansów energii na poziomie lokalnym 3D

numerycznego jak i analitycznego modelowania wszystkich płynów roboczych, niezależnie od tego czy płyn ulega przejściu fazowemu, zachodzi w nim reakcja chemiczna, dyfuzja składników czy turbulentny transport masy, pędu i energii. Ich podstawowość wyraża się również w ten sposób, iż forma tych równań jest jedna, niezależna od rodzaju płynu (kontinuum). Bilanse masy, pędu i energii są dobrze znane i wielokrotnie omawiane w literaturze, toteż w podsumowaniu zwracamy uwagę na oryginalne elementy opracowane przez autora:

Po pierwsze Tradycyjna prezentacja równań bilansu miała zwykle na celu przygotowanie czytelnika do analitycznego rozwiązywania problemów, stąd też układ materiału większości podręczników polegał na prezentacji od uproszczonych szczegółowych równań do równań bilansu w postaci podstawowej, wyjściowej. Ponieważ Numeryczna Termomechanika Płynów (CFD) używa tylko jednej najogólniejszej formy równań bilansu (patrz Tabela U.2) i nigdy nie stosuje równań uproszczonych, prezentacje równań bilansu można by było zakończyć podając jednym tchem trzy równania (U.21), (U.43) i (U.99). Aby wykorzystać wiedzę czytelnika opartą na paradygmacie od szczegółu do ogółu, w niniejszym opracowaniu przyjęto odwrotny kierunek postępowania – od podstawowej wyjściowej dla CFD formy do szczegółowych form używanych przez Analityczną Termomechanikę Płynów.

Bilans	Prędkości zmiany	Wymiana (na powierzchniach)			Produkcja + Konwersja
		Poprzez strumienie konwekcyjne		Poprzez strumienie substancjonalne	
Energii kinetycznej	$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\vec{v}^2}{2} \right)$	$\text{div} \left(\rho \frac{\vec{v}^2}{2} \vec{v} \right)$	=	$\text{div} \left(\vec{T} \vec{v} \right)$	$-\left(\vec{T} \cdot \text{grad } \vec{v} \right) + \rho \vec{v} \cdot \vec{v}$
Energii ciężenia	$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Gamma)$	$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Gamma \vec{v})$	=	—	$-\rho \vec{b} \cdot \vec{v}$
Energii wewnętrznej	$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u)$	$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u \vec{v})$	=	—	$\rho (Ts) - \rho (p\dot{v})$
Energii zewnętrznej	$\rho T \dot{s}$	—	=	$\text{div} \left(T \vec{J}_s \right)$	$-\vec{\tau}_s \cdot \text{grad } T + T \sigma_s$

Gdzie użyto oznaczeń: $\vec{T} = -p \vec{I} + \vec{\tau}^c$, $\vec{J}_s T = \vec{q}^c$, $\rho p \dot{v} = p \cdot \text{div } \vec{v}$

Tablica U.2. Tabela zbiorcza równań czterech form energii

Po drugie CFD korzysta z zachowawczej postaci równań bilansu, dlatego ta postać jest w niniejszym opracowaniu stawiana na pierwszym planie. Podkreślono również jednolitość struktury wszystkich równań bilansu, zarówno poprzez syntetyczny zapis jak i jednolite nazewnictwo.

Po trzecie Ponieważ CFD nie stosuje żadnych uproszczeń w postaciach równań bilansu i równań kinematycznych a jedynym miejscem gdzie użytkownik może upraszczać (jeśli wie dlaczego) i zakładać są równania konstytutywne i domknięcia, to bardzo wyraźnie wyseparowano element równań konstytutywnych (jest opracowany w Uzupełnieniu U1.4). Podkreślono również, iż bilans pędu w postaci Naviera-Stokesa i bilans energii w postaci Fouriera-Kirchhoffa nigdy nie są używane w CFD, bowiem CFD, ze swojej natury, nie korzysta z równań opisujących (Diagram U.2)

Po czwarte Opracowano i przedstawiono cztery bilanse różnych form energii i pokazano sposób sprowadzenia tych czterech form do bilansu energii całkowitej. Takie podejście ma na celu uzyskanie pełnej łączności bilansu energii

w modelu 3D z Pierwszą Zasadą Termodynamiki sformułowaną pierwotnie w języku modeli zero-wymiarowych. Taką łączność uzyskujemy przechodząc z sformułowania lokalnego 3D do bilansów zero-wymiarowych w przestrzeni. Podobnie, równania bilansów masy i pędu są podane w formie która zezwala na uzyskanie, po scałkowaniu w objętości urządzenia, przejście od modeli 3D (CFD) do modeli 0D (CFM). To przejście pokazano w wykładzie pierwszym oraz szczegółowo w Uzupełnieniach U1.7, U1.8, U1.10.

Po piąte Wprowadzono jednolity zapis obowiązujący aktualnie w Unii Europejskiej. Preferuje on zapis absolutny (bezindeksowy) bowiem zezwala on na łatwe przejście do krzywoliniowej siatki dyskretyzacyjnej stosowanej dla siatek strukturalnych (dopasowanych do kształtu kanału, osiowosymetrycznych, etc.). Dla uzupełnienia, podano postaci równań w układzie kartezjańskim, który jest wystarczający do zastosowań w niestrukturalnych siatkach dyskretyzacyjnych. Wprowadzenie do zapisu absolutnego opartego na rachunku Gibbsa znajduje się w Uzupełnieniu U1.11.

Janusz Badur

Pięć wykładów ze współczesnej termomechaniki płynów

(skrypt dla studentów IZK)

U.1.4

Równania konstytutywne i modelowanie cech fizycznych oraz domknięć płynu roboczego

Główne przeszkody – W których miejscach potrzebne są równania konstytutywne – Zakres stosowalności stałych fizycznych – Równania opisujące domknięcia – Zakres prezentacji – Założenia – **Molekularny strumień pędu** – Pierwotny wzór Newtona – Długość drogi swobodnej – Trójwymiarowy model płynu Newtona – Lepkość molekularna – Ciecz nieściśliwa – Modele nie-Newtonowskie – Płyn Maxwella – Płyn Kelvina-Voigta – **Turbulentny strumień pędu** – Domknięcia na turbulentną lepkość płynu – Domknięcia na turbulentny strumień pędu – Standardowy model – **Molekularny strumień ciepła** – Przewodzenie molekularne – Model Fouriera – Liczba Prandtla – **Turbulentny strumień ciepła** – Turbulentny analog modelu Fouriera – Domknięcia na turbulentny strumień ciepła – **Radiacyjny strumień ciepła** – Uproszczony model radiacji P1 – **Równania konstytutywne stanu sprężystego** – Sprężysty strumień pędu – Równania stanu – Cztery główne przemiany – Równanie Clapeyrona – Równanie stanu gazu doskonałego – Odwracalne cykle przemian – Eksperymentalny pomiar równań stanu – Materiał hipersprężysty – Materiał hyposprężysty – **Układ klasycznych równań opisujących** – Równanie Naviera-Stokesa – Równanie Fouriera-Kirchhoffa – **Kryteria podobieństwa przepływów** – Liczby kryterialne – **Odwracalny i nieodwracalny potencjał** – Znaczenie energii wewnętrznej – Znaczenie funkcji dysypacyjnej Rayleigha.

U.1.4.1 Główne Przeszkody

Będąc przedmiotem naszego zainteresowania najpopularniejsze płyny robocze (woda, powietrze spaliny, oleje) opisywane są tymi samymi równaniami bilansu (masy, pędu i energii) i tymi samymi równaniami kinematycznymi. Miejszem, w którym występuje odróżnienie np. wody od powietrza, są równania określające ich fizyczne własności. Równania te nazywane są równaniami konstytutywnymi. Z matematycznego punktu widzenia równania konstytutywne są najczęściej równaniami algebraicznymi łączącymi strumienie $\mathcal{F}$ z zmiennymi kinematycznymi ε (patrz Rys.U.1). Fakt, że

najpopularniejsze w praktyce ciała robocze mają **identyczne równania bilansu** i **identyczne równania kinematyczne** został zauważony przez twórców komercyjnych kodów obliczeniowych CFD i CSD już stosunkowo dawno. Postanowili oni budować swe narzędzia obliczeniowe w ten sposób, aby **blok równań konstytutywnych był wymienny** i łatwo definiowany od nowa przez użytkowników. Stąd też większość firm produkujących programy obliczeniowe skupia się na dyskretyzacji równań kinematycznych (na siatkach strukturalnych, niestructuralnych, ruchomych, deformujących się, adaptujących, etc.) oraz najlepszego całkowania w przestrzeni i w czasie równań bilansu **pozostawiając rozwój równań konstytutywnych użytkownikom**.

Płyny robocze, grzewcze i chłodnicze, różniąc się jedynie własnościami fizycznymi, posiadają różną lepkość, przewodzenie cieplne, różne stałe sprężyste typu współczynnik rozszerzalności cieplnej, pojemność cieplną przy stałej objętości i stałym ciśnieniu, objętościowy moduł sprężystości, etc. Te własności nie odkryto od razu – powstały one w procesie kształtowania się wiedzy o zjawiskach, który wspomagany był coraz to bardziej dokładnymi metodami pomiarowymi. Wielkie znaczenie tych, a nie innych własności bierze się z faktu, że ważne są tylko te wielkości, które mają potwierdzenie zarówno w modelach matematycznych jak i odpowiadających im metodach pomiarowych⁵⁵.

Wyżej wymienione mierzalne wielkości pojawiają się w modelu analitycznym w równaniach konstytuujących materiał, nazywanych w skrócie równaniami konstytutywnymi. Równania te dzielą się na:

- równania konstytuujące strumień sprężysty $\mathcal{F}^e$,
- równania konstytuujące strumień dyfuzyjny $\mathcal{F}^v$,
- równania konstytuujące źródła $\mathcal{S}$,
Strumień dyfuzyjny $\mathcal{F}^v$ dzieli się tradycyjnie na strumień dyfuzyjności molekularnej, radiacyjnej, transpiracji oraz strumień turbulentny $\mathcal{F}^t$. O ile na poszczególne strumienie można położyć równania konstytutywne to **turbulentny strumień** wymaga **domknięć**, które oddają charakter procesu turbulencji niezależnie od tego czy płynem roboczym jest woda czy powietrze. Stąd, oprócz równań konstytutywnych konieczne jest określenie:

⁵⁵Słowo „odpowiadających” użyto tu nie dla literackiej stylistyki lecz po to, aby podkreślić, że stałe modeli trójwymiarowych wymagają trójwymiarowych metod pomiarowych. Przykładem stosowania nieodpowiednich metod pomiarowych jest wyznaczanie współczynnika lepkości w wiskometrze o objętości $20[\text{cm}^3]$ i późniejsze stosowanie tej lepkości do objętości skończonej lub elementu skończonego o wymiarach $20[\mu\text{m}^3]$.

- równań domykających na turbulentny strumień $\mathcal{F}^t$.

Modelowanie równań konstytutywnych i znajdowanie stałych modelu oraz modelowanie domknięć i kalibracja stałych w modelach domknięć to dwie najtrudniejsze części Numerycznej Termomechaniki Płynów. Wymagają one ciągłego kontaktu z Eksperymentalną Termomechaniką Płynów w celu kompromisowych uzgodnień: co właściwie **liczymy** i co właściwie **mierzymy**. Niestety, nie ma takiej „siły sprawczej”, która by była w stanie posadzić do jednego stołu wspólnych rozmów eksperymentatora i numeryka. Stąd Numeryczną Termomechanikę przepełniają modele z najróżniejszymi nigdy nie kalibrowanymi stałymi fizycznymi. Prawdą jest, iż Numeryczna Termomechanika dopuszcza wiele takich modeli, które **nigdy nie będą** skalibrowane i poddane eksperymentalnej weryfikacji z uwagi na ich abstrakcyjny charakter nie liczący się z pomiarowymi możliwościami nawet najlepiej wyposażonych laboratoriów. Jest karygodnym, aby numerycy nie liczyli się z możliwościami pomiarowymi i tworzyli wirtualne rzeczywistości.

Z drugiej zaś strony prawdą jest, iż setki tysięcy ton protokołów pomiarowych dokonywanych w abstrakcyjnych warunkach laboratoryjnych, dotyczących pomiaru wysublimowanych zjawisk nie występujących w praktyce maszyn i urządzeń przepływowych i nie mających swego odniesienia w modelach numerycznych, **nigdy nie będzie**⁵⁶ wykorzystane do kalibracji stałych konstytutywnych i stałych w domknięciach. Sytuacja jest patowa i z pewnością najbliższe dziesięć lat jej nie zmieni. Polega ona, przykładowo, na tym, iż numeryk pragnąc, wykorzystać formuły na lepkość sięga do średniowiecznej formuły Sutherlanda (1871) pomijając milczeniem wyniki setki współczesnych badań eksperymentalnych i vice versa, eksperymentator pragnąc uporządkować wyniki badań nad lepkością sięga po wzory „wytrychy” z siedemnastego wieku, ignorując cały współczesny dorobek badaczy zajmujących się modelowaniem zjawisk lepkości. Jest karygodnym, aby eksperymentatorzy urabiali surowy materiał doświadczenia za pomocą **zmurszałych pojęć** sięgających rodem 18-go wieku.

Tak więc, prawdopodobnie, główne przeszkody leżą w kompletnym braku

⁵⁶Słowo **nigdy** ma wymiar dostosowany do długości życia człowieka i w praktyce oznacza około 50 lat. Większość badaczy pisze swe dzieła dla przyszłości i, cytując ich słowa, można powiedzieć, że dopiero za 200-300 lat ludzkość będzie w stanie zrozumieć ich dzieło. Tymczasem, codzienna praktyka mówi, że nie sięgamy wstecz do prac starszych niż 5-10 lat. W horyzoncie czasowym prac badawczych, globalizacji i pragmatyzmie tkwi główna różnica między Europą i Ameryką. Przesztyniała Europa wciąż każdego dnia tworzy setki ton opracowań wypełniających kilometry kwadratowe półek bibliotecznych, bowiem dla Europejskiego badacza wynikiem jego pracy badawczej jest publikacja. W pragmatycznej Ameryce wynikiem pracy badawczej jest to co inni od niego kupują – tylko czasem jest to publikacja.

organizacji badań naukowych.

W których miejscach potrzebne są równania konstytutywne

Zauważmy, iż w równaniach bilansu

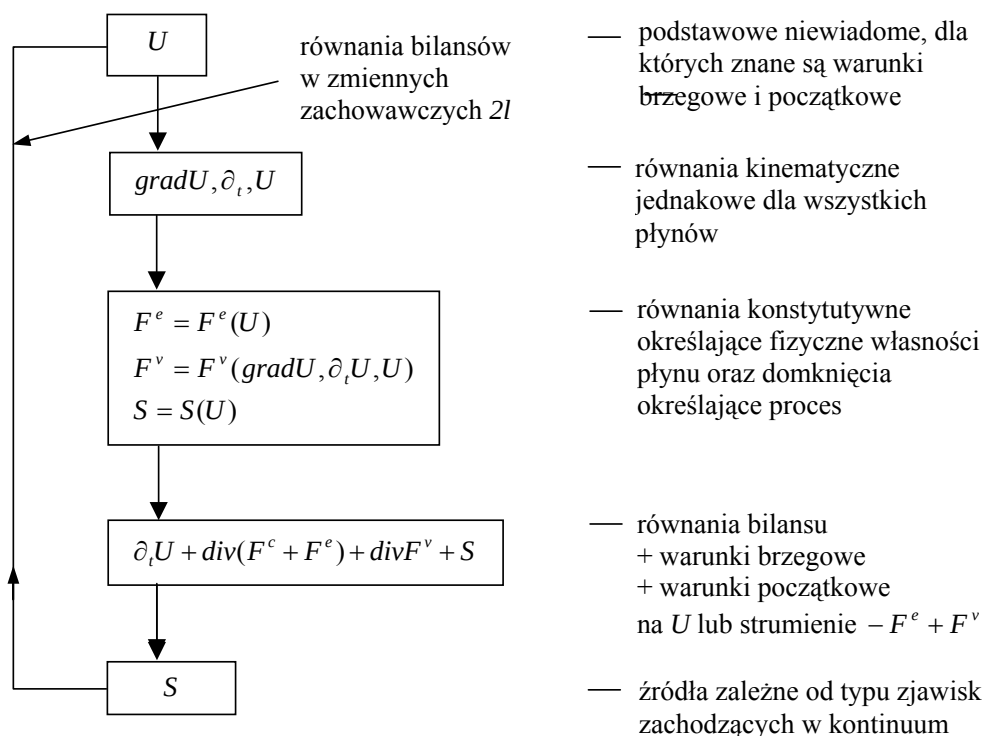
$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U} dV + \iint_{\partial V} (\mathcal{F}^c + \mathcal{F}^e) \vec{n} dA = \iint_{\partial V} \mathcal{F}^\nu \vec{n} dA + \iiint_V \mathcal{S} dV, \quad (\text{U.113})$$

zapisanych dla elementarnej objętości kontrolnej lub nieco większego obszaru Objętości Skończonej (MOS) lub Elementu Skończonego (MES), podstawowymi niewiadomymi są wielkości składające się na **wektor zmiennych zachowawczych** $\mathcal{U} = \{\rho, \rho \vec{v}, \rho e\}$.

W trójwymiarowym przypadku, jest to pięć niewiadomych dla znalezienia, których dysponujemy pięcioma równaniami bilansu. Ponieważ ilość równań musi się zgadzać z ilością niewiadomych, to z matematycznego punktu widzenia, potrzebne są równania konstytuujące strumienie $\mathcal{F}^c$, $\mathcal{F}^\nu$ oraz źródła $\mathcal{S}$ w funkcji niewiadomej $\mathcal{U}$ i $\text{grad} \mathcal{U}$ oraz $\partial_t \mathcal{U}$ ⁵⁷.

Równania definiujące strumienie sprężyste i dyfuzyjne $\mathcal{F}^e$, $\mathcal{F}^\nu$ oraz źródła $\mathcal{S}$ nazywane są równaniami konstytutywnymi. Określają one rodzaj substancji (np. mokre powietrze, sucha para, tłusta śmietana, zasiarzone spaliny, zapowietrzony olej, destylowana woda), z której zbudowane jest nasze continuum płynne. Zadaniem tych równań jest zamodelowanie fizycznych cech rzeczywistego płynu. Czynimy przy tym milczące założenie, że cechy płynu ustalone na gdzie indziej przeprowadzonych eksperymentach będą właściwe dla przepływu, który dopiero obliczamy. Modelujemy rzeczywiste mikroskopowe cechy fizyczne płynu w postaci makroskopowych „wytrychów modelowych” typu: lepkość, stałe termosprężyste, przewodzenie cieplne, radiacja. Opisanie rzeczywistych własności fizycznych płynów (czynników roboczych) takich jak: woda kotłowa o $pH = 7$, zjonizowane spaliny, przepracowany olej, nierafinowana ropa naftowa, zdemineralizowana para wodna, zanieczyszczony gaz ziemny, zapyłone powietrze, jest zbyt trudne i dziś jeszcze praktycznie niemożliwe. Stąd, z konieczności, używa się fenomenologicznych równań konstytutywnych, które są **zgrubnym przybliżeniem** fizycznego zachowania się płynu. Tak, więc równania konstytutywne mogą być źródłem odchylenia od pomierzonej rzeczywistości i nawet przy ścisłym rozwiązaniu równań bilansu

⁵⁷Tzw. materiały proste, które są wystarczające aby wypełnić model Continuum Cauchy’ego nie wymagają wyższego rzędu pochodnych. Materiały, dla których opisanie potrzebne są drugie pochodne przestrzenne i czasowe nazywamy materiałami drugiego rzędu (nieproste, słabo nielokalne, gradientowe) i są szczególnym przypadkiem modeli nielokalnych w czasie i przestrzeni.



Rysunek U.6. Diagram Tontiego (1971) określający pierwotny cykl Termomechaniki Płynów

mogą powodować odchyłki od 5 – 50% w skali integralnej i od 10 – 1000% w skali lokalnej⁵⁸.

⁵⁸Trzeba pamiętać, że ten sam płyn w różnych warunkach przepływu może ukazywać różne swe własności, np. przewodnictwo cieplne płynu będzie słabo zauważalne w warunkach przepływu adiabatycznego. Również lepkość, objawiająca się na ściankach urządzenia przepływowego w warunkach olbrzymich gradientów i obecności fazy stałej może być inna od lepkości w objętości, daleko od ścianki. Dzieje się tak, gdyż faza stała wywołuje operacyjną anizotropię płynu, która objawia się poprzez kilka współczynników lepkości. W pracy J. BADUR, M. BANASZKIEWICZ, Kapilarne własności przepływów z odparowaniem rozprężnym w fenomenologicznym modelu Ginzburga-Landaua, *Zesz. Nauk. IMP PAN*, **485/1444/97**, 1-91, 1997 pokazano, że anizotropowa warstwa płynu dzielącego dwie różne fazy ma w ogólności 5 różnych współczynników lepkości. Obecność tych współczynników, nawet przy liniowej relacji konstytutywnej zmienia całkowicie wyrażenie na naprężenia ścinania lepkiego na powierzchni ścianki urządzenia.

Zakres Stosowalności Stałych Fizycznych

Współczynniki fizyczne występujące w tych równaniach takie jak współczynnik lepkości molekularnej, współczynnik przewodnictwa cieplnego, wykładnik adiabaty, stała gazowa, izotermiczny moduł objętościowej sprężystości określa się w eksperymentach laboratoryjnych. Milcząco zakłada się⁵⁹ i wierzy, że te cechy mogą być przeniesione ze skali laboratoryjnej do rzeczywistych warunków. Zakłada się również, iż współczynniki określające sprężystość gazu i cieczy, pomierzone w warunkach termodynamicznej równowagi, będą dobrze określały sprężystość rzeczywistego płynu znajdującego się daleko od termodynamicznej równowagi i poddanego dużym gradientom i efektom krzyżowym.

Równania opisujące domknięcia

Oprócz równań bilansu masy, pędu i energii, istnieją również innego rodzaju równania, które są równaniami ewolucji zjawisk wewnętrznych płynu, umownie nazywanych mikrostrukturą płynu. Są to takie zjawiska jak: **turbulencja, przejścia fazowe, reakcje chemiczne, spalanie**. Równania ewolucji również zapisujemy w postaci zachowawczej stąd obok podstawowych strumieni $\mathcal{F}^e$ i $\mathcal{F}^v$ pojawiają się dodatkowe strumienie sprężyste i dyfuzyjne związane z ewolucją przemian wewnętrznych płynu roboczego. Te dodatkowe strumienie równań ewolucyjnych również muszą być wyrażane poprzez podstawowe niewiadome modelu w proponowanych zależnościach. Te zależności nie będziemy nazywać już równaniami konstytutywnymi, lecz **równaniami domknięcia**.

Bierze się to stąd, iż współczynników równań domknięć nie można ustalić w eksperymencie tak jak ustala się stałe fizyczne materiału. Przykładowo, nie można eksperymentalnie pomierzyć stałych płynu odpowiedzialnych za rozwój turbulentnego transportu pędu, bowiem stałe równań domknięć mają niejako operacyjny charakter związany bardziej z charakterem przepływu niż z cechą fizyczną materiału. Stąd te same stałe modelu turbulencji można stosować do powietrza i do wody. Stałe w domknięciach określamy poprzez dopasowanie rozwiązania do rzeczywistego przepływu i nie można ich bezkarnie przenosić do innego rzeczywistego przepływu opartego o inną

⁵⁹Profesor Robert Szewalski, pionier i weteran nauki o turbinach w naszym kraju, wielokrotnie podkreślał rolę założeń w procesie myślenia i zdobywania wiedzy o urządzeniu przepływowym. Uważał On, że jeśli nic nie wiemy o zjawisku zachodzącym w urządzeniu, należy pracę rozpocząć od wymyślania założeń które stają się miejscem lokalizacji naszej niewiedzy. Któregoś dnia rozmowę z autorem profesor zakończył następującą puentą „**Każde założenie to przyznanie się do niewiedzy – im więcej mamy założeń w modelu tym mniej rzeczywistości w wynikach**”

geometrię i inne warunki brzegowe. Ta obiektywna trudność jest główną przeszkodą, dla której **używanie modeli turbulencji** czy **przejść fazowych** jest swego rodzaju **pilnie strzeżoną sztuką**.

Zakres prezentacji

W niniejszym rozdziale ograniczymy się do pisania podstawowych najczęściej stosowanych równań konstytutywnych i domknięć. Będziemy omawiali następujące strumienie:

- strumień masy:
 - konwekcyjny strumień masy $\vec{J}_m = (\rho \vec{v})$,
- strumień pędu:
 - konwekcyjny strumień pędu $(\rho \vec{v} \otimes \vec{v})$,
 - sprężysty strumień pędu $\vec{P} = p \vec{I}$,
 - lepki (molekularny) strumień pędu $\vec{\tau}$,
 - turbulentny strumień pędu $\vec{R}$,
- strumień energii
 - konwekcyjny strumień energii $\rho e \vec{v}$,
 - mechaniczny strumień energii $\left(p \vec{I} - \vec{\tau}^c \right) \vec{v}$,
 - molekularny strumień ciepła $\vec{q}$,
 - turbulentny strumień ciepła $\vec{q}^t$,
 - radiacyjny strumień ciepła $\vec{q}^{rad}$.

Pozostałe występujące w literaturze strumienie wymagają szczegółowej analizy – niektóre fakty związane z dyfuzyjnymi i turbulentnymi strumieniami masy można znaleźć również w dalszych rozdziałach.

Założenia

Ograniczymy się do omówienia prostych (jeśli nie prymitywnych) modeli konstytutywnych cieczy i gazów. Ograniczymy się do **algebraicznych równań konstytutywnych**, pomijając własności fizyczne modelowane przez konstytutywne równania różniczkowe i konstytutywne równania całkowe. Nie będziemy się tu zajmować ostatnim elementem grupy równań

- **Równania Bilansu,**
- **Równania Konstytutywne,**
- **Równania Kinematyki,**

którym są równania kinematyki. Dla prostych modeli materiałów **Równania Kinematyki** nie są skomplikowane i zazwyczaj sprowadzają się do definicji dwóch wielkości:

- Prędkości deformacji: $\overleftrightarrow{d} = \frac{1}{2} (\text{grad } \vec{v} + \text{grad}^T \vec{v}) = \frac{1}{2} (\vec{v} \otimes \nabla + \nabla \otimes \vec{v}) = d_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j,$
- Gradientu temperatury $\vec{g} = \text{grad } T = \nabla T = T_{,i} \vec{e}_i.$

Na inne wielkości, spośród $\text{grad } \mathcal{U}$ oraz $\partial_t \mathcal{U}$, zazwyczaj nie kładziemy specjalnych oznaczeń, co jest poważnym błędem metodycznym i skutecznym hamulcem rozwoju kodów komercyjnych. Szczególnie w sytuacji, w której użytkownik sam wstawia **własne równania konstytutywne i własne domknięcia**. Bowiem, w instrukcji obsługi winno być zaznaczone, z jakich zmiennych możemy konstruować równania konstytutywne⁶⁰

U.1.4.2 Molekularny strumień pędu $\overleftrightarrow{\tau}$

Występujący w bilansie pędu rów.(U.43) całkowity strumień naprężeń lepkich składa się, na ogół, z **molekularnego, turbulentnego, dyfuzyjnego** i innych mniej ważnych strumieni

$$\overleftrightarrow{\tau}^c = \overleftrightarrow{\tau} + \overleftrightarrow{R} + \overleftrightarrow{\tau}^d + \text{inne.} \quad (\text{U.114})$$

Te inne strumienie mogą pochodzić od transpiracji, radiacji, przemian fazowych, itd. Litera R w oznaczeniu strumienia naprężeń turbulentnych bierze się od nazwiska pioniera i odkrywcy Osborne'a Reynoldsa⁶¹ (1895). Litera $\overleftrightarrow{\tau}$ oznaczająca lepki strumień pędu pochodzi od Newtona (1726) (przypadek jednowymiarowy) i Stokesa (1845) (przypadek trójwymiarowy).

⁶⁰Problem ten staje się szczególnie drażliwy, gdy chcemy budować równania konstytutywne np. materiałów gradientowych, czy nieliniowych domknięć anizotropowej turbulencji, gdzie potrzebny jest np. spin

$$\overleftrightarrow{\omega} = \frac{1}{2} (\text{grad } \vec{v} - \text{grad}^T \vec{v}) = \frac{1}{2} (\vec{v} \otimes \nabla - \nabla \otimes \vec{v}) = \omega_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = -\overleftrightarrow{\omega}^T.$$

⁶¹O. REYNOLDS, On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of criterion, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A186**, 123-164, 1895

Pierwzór Newtona

⁶² Strumień pędu $\overleftrightarrow{\tau} = \tau_{ij} e_i \otimes e_j$, $i, j = x, y, z$, określa naprężenia lepkie, których obserwowalnym pierwzorem jest siła oporu powstająca na płytce przesuwanej po cieczy. Siła ta zwiększa się gdy zwiększa się gradient prędkości na ścianie co oznacza, że między lepкими naprężeniami ścinania a gradientem prędkości istnieje proporcjonalność (Newton 1726)

$$\begin{array}{ccc} \tau_{xy} & = & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1D) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overleftrightarrow{\tau} & & \overleftrightarrow{d} \quad (3D), \end{array} \quad (U.115)$$

który w języku eksperymentu czytamy jako:

$$\frac{\text{siła}}{\text{powierzchnia}} = \text{lepkość} \frac{\text{różnica prędkości}}{\text{odległość między ściankami}}.$$

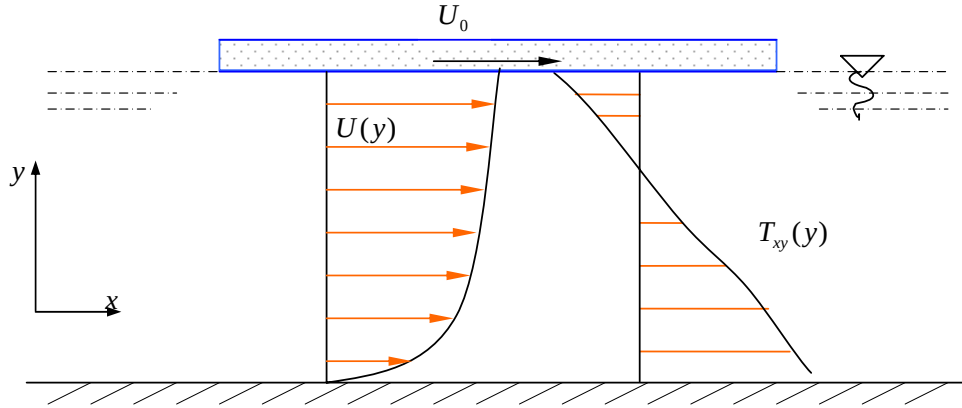
Związek powyższy mówi, iż naprężenia styczne w płynie są przejawem lepkości molekularnej płynu μ oraz reakcją na niejednorodne pole prędkości występujące w pobliżu ścianek z racji faktu, że prędkość $\vec{v}$ jest równa zero na nieruchomych ściankach. Stąd warstwy przyścienne urządzeń i maszyn przepływowych są tymi miejscami gdzie lepkość objawia się intensywnie. Płyn, w którym naprężenia lepkie określone są liniową formułą (U.115) nazywa się płynem newtonowskim.

Diada Prędkości Deformacji

Trójwymiarowym odpowiednikiem gradientu prędkości $\partial u / \partial y$ jest diada prędkości deformacji⁶³ $\overleftrightarrow{d}$ definiowana jako symetryczna część gradientu prę-

⁶²Trzecie wydanie dzieła Newtona z 1726 roku: I. NEWTON, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, London, 3rd, ed: H. Pemberton, tom 1, lib II, sect IX, 1726

⁶³W literaturze stosuje się także oznaczenia: $\overleftrightarrow{D}$, $\overleftrightarrow{S}$, $\overleftrightarrow{E}$. Leonard Euler (L. EULER, Sectio secunda de principiis motus fluidorum, *Novi. Comm. Prtrep.* **T14**, pp 270-386, 1770) pokazał, że ta wielkość jest tensorem (§9-12). Przez wiele lat badacze nie mogli uchwycić w jeden spójny zapis diady prędkości deformacji i stosowali inne oznaczenia do składowych d_{xx} , d_{yy} , d_{zz} (tzn. e_x , e_y , e_z), a inne do składowych postaciowych d_{xy} , d_{xz} , d_{yz} (tzn. $2g_{xy}$, $2g_{xz}$, $2g_{yz}$). Takie rozdzielenie $\overleftrightarrow{d}$ na dwie fikcyjne części było skutecznym hamulcem ewolucji równań konstytutywnych. Stosowali je min: G.G. STOKES, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **8**, p290, 1845, W.VOIGT, *Kompendium der theoretischen Physik*, **Bd 1.u2**, p 462, Leipzig, 1895, P.DUHEM, *Ann.Ec. Norm.* (3), **21**, p. 130, (1904).



Rysunek U.7. Profil prędkości $U(y)$ i naprężeń lepkich $\tau_{xy}(y)$ wzbudzony przez ślizgającą się płytę ze stałą prędkością U_0

kości:

$$\begin{aligned}
 \overleftrightarrow{d} &= \frac{1}{2} (\text{grad } \vec{v} + \text{grad}^T \vec{v}) + \frac{1}{2} (\vec{v} \otimes \nabla + \nabla \otimes \vec{v}) = d_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \\
 &= \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \\
 &= \frac{1}{2} [2u_{,x} \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + (v_{,x} + u_{,y}) (\vec{e}_x \otimes \vec{e}_y + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_x) + \\
 &\quad + (w_{,x} + u_{,z}) (\vec{e}_x \otimes \vec{e}_z + \vec{e}_z \otimes \vec{e}_x) + \\
 &\quad + 2v_{,y} \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + (v_{,z} + w_{,y}) (\vec{e}_z \otimes \vec{e}_y + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_z) + 2w_{,z} \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z] = \\
 &= d_{xx} \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + d_{xy} (\vec{e}_x \otimes \vec{e}_y + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_x) + d_{xz} (\vec{e}_x \otimes \vec{e}_z + \vec{e}_z \otimes \vec{e}_x) + \\
 &\quad + d_{yy} \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + d_{zy} (\vec{e}_z \otimes \vec{e}_y + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_z) + d_{zz} \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z,
 \end{aligned} \tag{U.116}$$

gdzie do obliczenia $\overleftrightarrow{d}$ we współrzędnych kartezjańskich użyto:

$$\vec{v} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z = v_i \vec{e}_i, \quad i = x, y, z, \tag{U.117}$$

$$\nabla = (\cdot)_{,x} \vec{e}_x + (\cdot)_{,y} \vec{e}_y + (\cdot)_{,z} \vec{e}_z = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i. \tag{U.118}$$

Jeśli używamy (na co dzień) konwencji sumacyjnej⁶⁴, to składowe kartezjańskie prędkości deformacji zapisujemy jako:

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} v_i + \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \right) = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad i, j = x, y, z. \quad (\text{U.119})$$

W literaturze można spotkać również mało poprawny lecz czytelny zapis ustanawiający składowe d_{ij} w dwuwymiarową macierz:

$$[d_{ij}] = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{xz} \\ d_{yx} & d_{yy} & d_{yz} \\ d_{zx} & d_{zy} & d_{zz} \end{bmatrix}.$$

Wszystkie powyższe formy zapisu są sobie ekwiwalentne, a prawdziwe różnice tkwią w fizyce molekularnego transportu pędu.

Trójwymiarowy Model Płynu Newtona

U podstaw rozszerzenia wzoru Newtona (U.115) na przypadek trójwymiarowy, leżą następujące założenia co do cech fizycznych płynu (Stokes, 1845)⁶⁵:

- składowe naprężeń lepkich $\vec{\tau}$ są liniowymi funkcjami prędkości deformacji $\vec{d}$,
- płyn jest izotropowy, tzn. ma ten sam współczynnik lepkości we wszystkich kierunkach.
- lepkość objętościowa λ ma szczególną wartość $\lambda = -2/3\mu$.

⁶⁴Konwencji mającej swe źródła w pracach PIOLI (1849), BOGGIO-LERA (1887), ROWLANDA (1880), GIBBSA (1881) CRAIGA (1882), BELTRAMII (1888), SOMIGLIANA (1889), J. FINGERA (1892), RICCI (1893), LEVI-CIVITA (1894), AUTONNE (1894), VEBLENA (1895), APPELA (1896), CISOTTI (1896), TAITA (1900), i setki jak nie tysiąca autorów między 1900 a rokiem 1913, która to data uważana jest wśród profanów za datę wprowadzenia konwencji sumacyjnej. Przykładowo, bez stosowania tej konwencji definicja (U.116) winna wyglądać

$$\vec{d} = \sum_{i=x,y,z} \sum_{j=x,y,z} (d_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j).$$

Dla wygody, oszczędności papieru i atramentu, począwszy od lat 1930, znaki sumy $\sum$ pomijamy.

⁶⁵G.G. STOKES, On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **8**, 287-319, 1845. Postać tych równań łatwo zapamiętać, bowiem jest dokładnie taka sama jak postać związku konstytutywnego materiału Hooke'a.

Równanie konstytutywne naprężeń lepkich dla modelu Newtona ma teraz pełną postać 3D zaproponowaną przez Stokesa (1845):

$$\vec{\tau} = \lambda I_d \vec{I} + 2\mu \vec{d}, \quad (\text{U.120})$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \vec{d}^{\leftrightarrow} = d_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j & - \text{diada prędkości deformacji,} \\ \mu &= \mu(T, p, \dots) & - \text{lepkość molekularna będąca, w ogólności, funkcją wszystkich parametrów stanu,} \\ \lambda &= -\frac{2}{3}\mu & - \text{lepkość objętościowa,} \\ I_d &= \text{tr } \vec{d} = d_{xx} + d_{yy} + d_{zz} = \text{div } \vec{v} & - \text{śląd } \vec{d}, \text{ czyli pierwszy niezmiennik główny diady prędkości deformacji}^{66}, \\ \vec{I} &= \delta_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = & - \text{idemfaktorki Gibbse,} \\ &= \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z & - \text{delta Kroneckera,} \\ \delta_{ij} &= \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} & - \text{delta Kroneckera,} \\ \vec{\tau} &= \tau_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \vec{\tau}^{\leftrightarrow} & - \text{symetryczna diada naprężeń lepkich.} \end{aligned}$$

Składowe kartezjańskie podstawowej relacji (U.120) zapisujemy następująco:

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3}\mu d_{kk} \delta_{ij} + 2\mu d_{ij} = -\frac{2}{3}\mu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (\text{U.121})$$

Druga postać w (U.121) jest mniej ogólna niż pierwsza, bowiem błędnie sugeruje, że nie jest potrzebna definicja diady prędkości deformacji $\vec{d}$. Łatwo

⁶⁶Nazwa *Prędkość Deformacji* bierze się z uwagi na następujący związek między miarą deformacji GREENA $\vec{E}$ a miarą deformacji ALMANSI $\vec{e}$: $\vec{E} = F^T \vec{e} F$. Prędkość zmiany deformacji GREENA wyraża się jako:

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{2} (\dot{F}^T F + F^T \dot{F}) = F^T \vec{d} F,$$

gdzie $\dot{F} = (\text{grad } \vec{v}) F$. Inaczej mówiąc, $\vec{d}$ nie jest prędkością deformacji ALMANSI (1881), a prędkością deformacji GREENA (1821) uniesioną za pomocą operatora gradientu deformacji PIOLA (1841) – F .

sprawdzić, iż związek (U.121) ma sześć niezależnych składowych ⁶⁷

$$\tau_{xx} = -\frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (\text{U.122})$$

$$\tau_{yy} = -\frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (\text{U.123})$$

$$\tau_{zz} = -\frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (\text{U.124})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (\text{U.125})$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (\text{U.126})$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (\text{U.127})$$

oraz, że ślad tego tensora jest równy zeru: $\tau_{ii} = \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 0$.

Porównując równanie (U.125) z pierwowzorem Newtona (U.115), widać w jakich przypadkach dominuje naprężenie lepkie na ścianie τ_{xy} .

Lepkość Molekularna μ

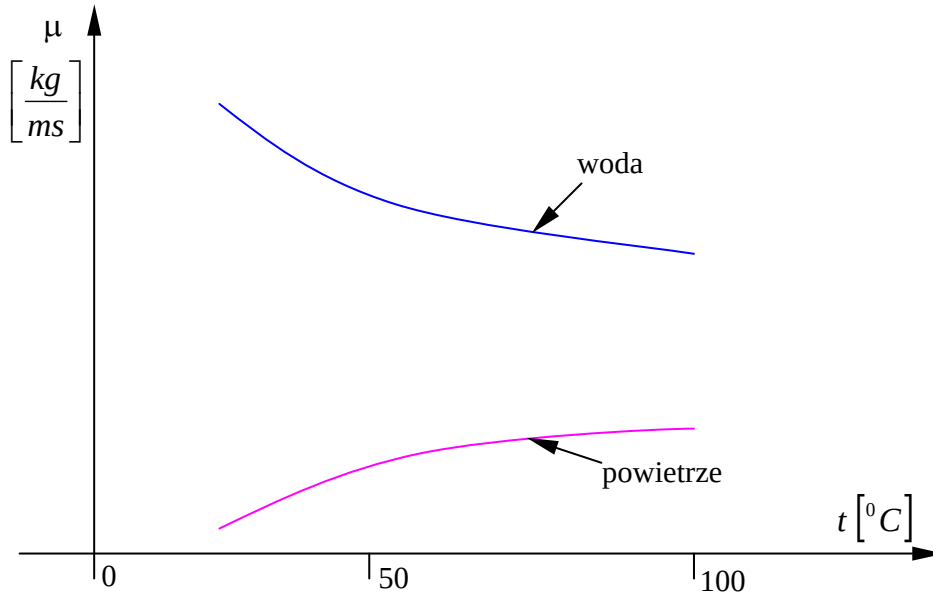
Pomiar lepkości molekularnej jest sztuką i zazwyczaj dokonywany jest przez eksperymentatorów przy pomocy własnych (wciąż kalibrowanych) viskometrów. Dwa podstawowe czynniki robocze – powietrze i woda – mają przeciwną zmienność lepkości od temperatury $\mu = \mu(T)$. Woda wraz ze wzrostem temperatury zmniejsza swoją lepkość, powietrze ze wzrostem temperatury zwiększa swoją lepkość.

Ciecz Nieściśliwa

W przypadku modelu cieczy nieściśliwej (takiej w rzeczywistości nie ma), $\det \mathbf{f} = 1$, $\text{tr } \overleftrightarrow{d} = \text{div } \vec{v} = 0$ i równanie (U.120) upraszcza się do

$$\overleftrightarrow{\tau} = 2\mu \overleftrightarrow{d}. \quad (\text{U.128})$$

⁶⁷Mnemotechnika zapamiętania tych związków jest prosta. Wystarczy odwołać się do definicji odwracalnego strumienia pędu $\overleftrightarrow{\sigma}$ (dla małych deformacji, dla deformacji skończonych jest to II tensor naprężeń Pioli-Kirchhoffa) zdefiniowanego przez Lamé'go następująco: $\overleftrightarrow{\sigma} = \lambda (\text{tr } \overleftrightarrow{\epsilon}) \overleftrightarrow{I} + 2\mu \overleftrightarrow{\epsilon}$, gdzie $\overleftrightarrow{\epsilon} = \overleftrightarrow{d}$, a współczynniki λ , μ są współczynnikami sprężystości Lamé'go.



Rysunek U.8. Zmienność lepkości molekularnej w funkcji temperatury dla powietrza i wody

Większość płynów roboczych, takich jak woda, para wodna, powietrze, spaliny, oleje, mieszczą się w ramach modelu opisywanego przez równanie naprężeń lepkich płynu niutonowskiego. Stąd też w literaturze przedmiotu brak jest doniesień o różnicach większych niż 10–20%, co jest z inżynierskiego punktu widzenia bardzo dobrym rezultatem. Odpowiedzialnym za ewentualne lokalne niezgodności wyników pomiarów i symulacji numerycznych uważa się turbulentny strumień pędu (naprężenie Reynoldsa). Ponieważ istnieje dziesiątki (jak nie setki) modeli naprężeń turbulentnych to właśnie turbulencja „oskarżana” jest o nieścisłości między pomiarem i numeryczną symulacją.

Modele nie-Newtonowskie (nieliniowe)

Niektóre egzotyczne dla nas izotropowe płyny, takie jak śmietana, smoła, płynne ciasto, mają skomplikowaną nieliniową lepkość i stąd wymagają nie-niutonowskich modeli dla naprężeń lepkich (REINER, 1920)

$$\vec{\tau} = k_0 \vec{I} + k_1 \vec{d} + k_2 \vec{d} \vec{d}, \quad (\text{U.129})$$

gdzie współczynniki lepkości k_0 , k_1 , k_2 są funkcjami nie tylko pierwszego niezmiennika podstawowego $I_d = \text{tr } \vec{d}$ prędkości deformacji $\vec{d}$, ale również

niezmiennika drugiego II_d i trzeciego $III_d = \det \overleftrightarrow{d}$.⁶⁸ W ogólności współczynniki k_0, k_1, k_2 wyrażają się jako:

$$k_\alpha = f_{\alpha MNO} \left(\frac{\mu(T)}{p} \right)^{M+2N+2O} I_d^M II_d^N III_d^O, \quad \alpha = 0, 1, 2.$$

Dodajmy, iż rozszerzenie formuły $\overleftrightarrow{\tau} = \lambda I_d \overleftrightarrow{I} + 2\mu \overleftrightarrow{d}$, zaproponowane przez Boussinesq'a⁶⁹

$$\tau_{ij} = \lambda d_{kk} \delta_{ij} + 2\mu d_{ij} + k_2 (d_{ik} d_{kj}) + k_3 (d_{ik} \omega_{kj} + \omega_{ik} d_{kj}),$$

mimo, iż jest symetryczne $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ nie może być obiektywnym równaniem konstytutywnym. Obliczając wg niego naprężenia w płynie nieruchomym umieszczonym w obracającym się walcu, otrzymamy, mimo braku przepływu, naprężenia styczne. Dzieje się to na wskutek obecności wirowości $\overleftrightarrow{\omega} = \omega \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = -\omega^T$ w równaniu konstytutywnym.

Wirowość (w nieobiektywnych kombinacjach) może występować w równaniach domknięcia na turbulentny strumień pędu (tzw. naprężenie Reynoldsa) i turbulentny strumień ciepła, które charakteryzują proces a nie materiał, z którego płyn jest zbudowany⁷⁰.

Jeśli płyn przewodzi ciepło to gradient temperatury jest odpowiedzialny za wzbudzenie „nierównowagowego stanu naprężeń”, które dodatkowo hamuje ruch płynu. Odkrywca tego zjawiska, O. Reynolds, nazwał go termiczną transpiracją, a naprężenie termicznej transpiracji wyraża formuła Reynoldsa-Maxwella⁷¹:

$$\tau_{ij} = \lambda d_{kk} \delta_{ij} + 2\mu d_{ij} + \frac{\mu^2}{\rho T} \left(-3T_{,ij} + \frac{3}{2} T_{,i} T_{,j} \right).$$

⁶⁸Dzieje się tak ponieważ wyższe potęgi w rozwinięciu

$$\overleftrightarrow{\tau} = k_0 \overleftrightarrow{I} + k_1 \overleftrightarrow{d} + k_2 \overleftrightarrow{d} \overleftrightarrow{d} + k_3 \overleftrightarrow{d} \overleftrightarrow{d} \overleftrightarrow{d} + \dots$$

eliminujemy z gry za pomocą twierdzenia Cayley-Hamiltona, mówiącego, że iloczyn $\overleftrightarrow{d}^3$, $\overleftrightarrow{d}^4$ i wyższe wyznaczamy za pomocą $\overleftrightarrow{I}$, $\overleftrightarrow{d}$, $\overleftrightarrow{d}^2$ np.

$$\overleftrightarrow{d}^3 = III_d \overleftrightarrow{I} + II_d \overleftrightarrow{d} + I_d \overleftrightarrow{d}^2.$$

⁶⁹J. BOUSSINESQ, Sur l'influence des forttements dans les mouvements regulier des fluides, *J. Math. Pures et Appl.* **13**, 377-438 (1868)- Szczegóły w pracy:

J. BADUR, B.-H.SUN Remarks on the structure of evolution equation, *Appl. Math. Mech.* **16**, 747-757, 1995.

⁷⁰G.G. SPEZIALE, Turbulence modeling in non-inertial frames of reference, *Theor. & Comp. Fluid Dyn.* **1**, 3-19, (1989).

⁷¹O. REYNOLDS, On certain dimensional properties of matter in the gaseous state, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **170**, 727-845, 1879

Inną klasą równań konstytutywnych są równania opisujące materiały lepko-sprężyste w których własności sprężyste (również postaciowe) są skojarzone z własnościami lepкими. Należą do nich:

Ciecz Maxwella

$$\tau_r \frac{d^\bullet}{dt} \vec{\tau} + \vec{\tau} = 2\mu \vec{d},$$

wykazująca dużą lepkość i sprężystość postaciową zestawioną „szeregowo”. Czas τ_r nazywa się **czasem relaksacji**, zaś $d^\bullet/dt$ jest pochodną czasową zadość czyniącą zasadzie ruchów względnych Galileusza, znanej w wersji szczególnej jako I Zasada Dynamiki Newtona. Pochodną tą Stanisław Zaremba (1903) zdefiniował jako:⁷²

$$\frac{d^\bullet}{dt} \vec{\tau} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\tau} + \left(\text{grad } \vec{\tau} \right) \vec{v} + \left(\vec{\tau} \vec{\omega} + \vec{\omega}^T \vec{\tau} \right).$$

Wśród pierwszych badaczy, którzy wykorzystywali tę pochodną znajdują się: Duhem (1911)⁷³, Jaumann (1918)⁷⁴, Fromm (1933)⁷⁵, Hencky (1929)⁷⁶. Rewindykacji tej pochodnej dokonał C. Truesdell (1952)⁷⁷ a do pierwszych trójwymiarowych obliczeń płynów lepko-sprężystych wykorzystał W. Noll (1955)⁷⁸.

J.C. MAXWELL, On stresses in rarified gases arising from inequalities of temperature, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **170**, 231-256, 1879

Powyższy wzór pamiętany jest również z uwagi na niefortunne posunięcie 49-letniego, chorego Maxwella, który był recenzentem pracy młodego Reynoldsa i wykorzystał jej wyniki podczas wykonywania szczotek swojej ostatniej już pracy. Reynolds zwrócił się ze skargą do G.G. Stokesa, który jednak nie zdążył interweniować przed śmiercią Maxwella.

⁷²S. ZAREMBA, Sur une generalisation de la theorie classique de la viscosite, *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie*, 380-403, 1903.; S. ZAREMBA, Le principe des mouvements relatifs et les equations de la mecanique physique, *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie*, 614-621, 1903. (patrz również:

J. BADUR, Can the Zaremba relaxation model be considered correct?, *Arch. Thermodynamics*, **15**, 111-124, 1994).

⁷³P. DUHEM, *Traite d'Energetique*, Paris, 1911.

⁷⁴G. JAUMANN, Physik der kontinuierlichen Medien. *Denkschr. Akad. Wiss. Wien.*, **95**, 461-562, 1918.

⁷⁵H. FROMM, Stoffgesetze des isotropen Kontinuums, insbesondere bei zühplastischem Verhalten, *Ing-Arch.* **4**, 432-466 (1933).

⁷⁶H. HENCKY, Das Superpositionsgesetz eines endlich deformierten relaxations higen elastischen Kontinuums and seine Bedeutung für eine exakte Ableitung der Gleichungen für die zahe Flüssigkeit in der Eulerschen Form, *Ann der Physik*, **2**, 617-630, 1929.

⁷⁷C. TRUESDELL, The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics, *Jour. Rat. Mech. Anal.* **1**, 125-300 (1952), errata **2**, 593-616 (1953).

⁷⁸W. NOLL, On the continuity of the solid and fluid states, *Jour. Rat. Mech. Anal.* **4**, 323-425, 1955.

Ciecz Kelvina-Voigta

$$\vec{\tau} = 2\mu \frac{d^\bullet}{dt} \vec{e} + G \vec{e},$$

która nie reaguje natychmiastowo na przyłożone obciążenie a powoli przyspiesza przepływ, zaś G/μ ma wymiar czasu i jest **czasem retardacji**. W powyższym równaniu $\vec{e}$ jest diadą deformacji Almansi.

Inną klasą cieczy są płyny wrażliwe nie tylko na prędkość, ale i na przyspieszenie deformacji. Jeśli diada przyspieszenia deformacji jest zdefiniowana jako $\vec{a} = \vec{d} + \vec{l} \vec{d} + \vec{d} \vec{l}$, $\vec{l} = \text{grad } \vec{v} = \vec{d} + \vec{\omega}$ to lepki strumień pędu określony jest jako:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} = & \alpha_1 \vec{d} + \alpha_2 \vec{d}^2 + \alpha_3 \vec{a} + \alpha_4 \vec{a}^2 + \alpha_5 \left(\vec{d} \vec{a} + \vec{a} \vec{d} \right) + \\ & + \alpha_6 \left(\vec{d}^2 \vec{a} + \vec{a} \vec{d}^2 \right) + \alpha_7 \left(\vec{d} \vec{a}^2 + \vec{a}^2 \vec{d} \right) + \alpha_8 \left(\vec{d}^2 \vec{a}^2 + \vec{a}^2 \vec{d}^2 \right). \end{aligned}$$

Omówienie tych równań konstytutywnych oraz właściwych eksperymentów znajdzie czytelnik w pracach: R. KEMBŁOWSKI [145], Z. ORZECOWSKI [262], M. REINER [303], A. SAWICKI [323], J. SAWICKI [324], W. WILKINSON [423].

U.1.4.3 Turbulentny strumień pędu $\vec{R}$

Modelowanie domknięć na turbulentny strumień pędu, zwany często naprężeniem turbulentnym Reynoldsa, dla turbulentnych przepływów przez maszyny i urządzenia przepływowe ma szereg podobieństw⁷⁹ do równań naprężeń lepkich płynu niutonskiego. W najczęściej spotykanym domknięciu forma równań na $\vec{\tau}$ i równania na $\vec{R}$ jest taka sama stąd też sumę $\vec{\tau} + \vec{R}$ często opisuje się jednym wspólnym współczynnikiem lepkości efektywnej będącym sumą lepkości molekularnej i lepkości turbulentnej.

W ogólności, trzeba jednak pamiętać że lepkość turbulentna jest współczynnikiem operacyjnym, zależnym nie od rodzaju substancji, a od rodzaju przepływu. Najpopularniejszym domknięciem na turbulentne naprężenie Reynoldsa jest analog do modelu płynu newtonowskiego (U.120)

$$\vec{R} = - \left(\frac{2}{3} \mu_t I_d + \frac{2}{3} \rho k \right) \vec{I} + 2\mu_t \vec{d}. \quad (\text{U.130})$$

⁷⁹Po wielu bezowocnych próbach opanowania zjawiska, zarówno w sensie możliwości jego modelowania jak i w sensie praktycznego sterowania turbulencją można podejrzewać, iż przyczyną niepowodzeń może być hipoteza o „szeregu podobieństw”. Dodajmy, iż pierwsze prace na temat turbulencji Prony i Darcy’ego proponowały hipotezy nie sięgające do podobieństw.

W tym równaniu $\vec{I}$, $\vec{d}$, I_d mają te same znaczenia co w (U.120), μ_t jest (operacyjnym) współczynnikiem lepkości turbulentnej, k [J/kg] jest energią turbulencji wiążącą średnią z kinetycznej energii fluktuacji prędkości i pełni tu rolę dodatkowego współczynnika turbulentnej lepkości objętościowej. Oznacza to, iż turbulencja płynu nieściśliwego czyni z niego lekko ściśliwy płyn o małej ściśliwości proporcjonalnej do k .

Domknięcia na Turbulentną Lepkość Płynu

W literaturze istnieją setki, jak nie tysiące, domknięć na turbulentną lepkość płynu μ_t występującą w formule (U.130). Można je podzielić na:

- **Algebraiczne (0-równaniowe),**
 - Baldwina-Lomaxa (1978),⁸⁰,
 - Cebeci-Smitha (1974),⁸¹,
 - Smagorinsky (1963),⁸²,
 - Granville'a (1987),
 - Yakhota-Orszaga (1986),⁸³,
- $\frac{1}{2}$ **równaniowe,**
 - Johnsona-Kinga (1985),
- **1-równaniowe (równanie ewolucji na k),**
 - Baldwina Bartha (1991),⁸⁴
 - Spalarta-Allmarasa (1992),⁸⁵
- **2-równaniowe (dwa równania ewolucji),**

⁸⁰B.S. BALDWIN, H. LOMAX, Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows, *AIAA Paper* No 257, 1978

⁸¹J. CEBECI, M.O. SMITH, *Analysis of turbulent boundary layer*, Academic Press, 1974

⁸²J. SMAGORINSKY, General circulation experiments with the primitive equations, *Mon. Weather Rev.* **91**, 99-165 (1963)

⁸³V.YAKHOT, S.A. ORSZAG, Renormalisation group analysis of turbulence, *J. Sci. Comp.* **1**, 3-33, 1986

⁸⁴S.B. BALDWIN, T.J. BARTH, A one-equations transport model for high Reynolds number wall-bounded flows, *AIAA Journal*, **96**, 610-619, 1991.

⁸⁵P.R. SPALART, S.R. ALLMARAS, A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, *AIAA 30th Areospace Sci. Meet.*, Reno, 1992.

- standardowy $k - \varepsilon$, Laundera-Spaldinga (1974),⁸⁶
- Wilcoxa $k - \omega$ (1994),⁸⁷
- Chien $k - \varepsilon$ (1982).⁸⁸

Modele algebraiczne mają swój pierwowzór w koncepcji Prandtla⁸⁹ (1904) opartej o model przyściennej lepkości turbulentnej która zawiera wyrażenie na drogę mieszania l_{Pr} oraz wszystkie niezmienniki podstawowe (I_d, II_d, III_d) prędkości deformacji $\vec{d}$.

$$\mu_t^{Pr} = \rho l_{Pr} f(I_d, II_d, III_d),$$

gdzie droga mieszania $l_{Pr} = \kappa^2 y^2$ jest zależna od stałej κ i odległości od ścianki y . Niestety, nie potrafimy rozszerzyć tego modelu na przypadek trójwymiarowy⁹⁰. W praktyce stosuje się uproszczenia typu;

- model Smagorinski'ego: $\mu_t = l_{Pr}^2 (2d_{ij}d_{ij})^{1/2}$,
- model Cebeci-Smitha: $\mu_t = l_{Pr}^2 (2l_{ij}l_{ij})^{1/2}$, $l_{ij} = d_{ij} + \omega_{ij}$,
- model Baldwina-Lomaxa: $\mu_t = l_{Pr}^2 (2\omega_{ij}\omega_{ij})^{1/2}$.

Natomiast, domknięcie na lepkość turbulentną w standardowym modelu $k - \varepsilon$ wynosi:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (U.131)$$

gdzie: C_μ jest stałą a $k - \varepsilon$ obliczane są wg równań ewolucji.

Domknięcia na Turbulentny Strumień Pędu

⁹¹ Lata osiemdziesiąte i dziewięćdziesiąte XX wieku przyniosły wiele prób pełniejszego modelowania turbulentnego strumienia pędu nie tylko poprzez

⁸⁶B.E. LAUNDER, B.I.SHARMA, Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc, *Lett. Heat Mass Transfer*, **1**, 131-138, 1974.

⁸⁷C.D. WILCOX, Simulation of transition with a two-equation turbulence model, *AIAA Journal* **32 (2)**, 247-255 (1994).

⁸⁸K.Y. CHIEN, Predictions of channel and boundary-layer flows with a low Reynolds number turbulence model, *AIAA Journal*, **20**, 33-38, 1982.

⁸⁹L. PRANDTL, Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, *Verh. III Int. Math.-Kongr. Heidelberg*, 1904

⁹⁰M. KARCZ, J. BADUR, Numeryczna implementacja modelu racjonalnej turbulencji, *Zesz. Nauk. IMP PAN*, **531/1490/2003**, 1-34, 2003

⁹¹Kompletny przegląd modeli turbulencji obejmujący lata 1970-1997 zawarty jest w artykule: CH. SPEZIALE, R.M.SO, Turbulence Modeling and Simulation, *The Handbook of Fluid Dynamics*, pp 1-111, 1998, bibliografia około 2600 pozycji.

współczynnik turbulentnej lepkości ale poprzez ogólne domknięcia i równania ewolucji. Szły one w kierunku uogólnienia formuły (U.130) poprzez dodawanie członów nieliniowych, uwzględnienie anizotropii turbulencji, lub położenie pełnych równań ewolucyjnych na naprężenie Reynoldsa (tzw. podejście rozszerzonej termodynamiki).

Inny ważny kierunek badań wychodzący od nierównowagowej funkcji gęstości prawdopodobieństwa, używanej w kinetycznej teorii gazów przez Boltzmann (1871), prowadzi do modeli turbulencji uwzględniającej na raz wiele skal (LES – Large Eddy Simulation) i w kierunku bezpośredniej symulacji numerycznej pól fluktuacji (DNS – Direct Numerical Simulation).

Ogólnie możemy dokonać podziału modeli $\overleftrightarrow{R} = R_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ na:

- algebraiczne, liniowe (od 1966),
- różniczkowe, jednorównaniowe (od 1976),
- różniczkowe, dwurównaniowe (od 1972),
- z anizotropią turbulencji (od 1956),
- nieliniowe, wielorównaniowe (od 1961),
- nieliniowym powrotem do izotropii (od 1951),
- z równaniami ewolucyjnymi na wszystkie niezmienniki $\overleftrightarrow{R}$ (od 1970),
- z pełną ewolucją na $\overleftrightarrow{R}$ (od 1922),
- z ewolucją funkcji gęstości prawdopodobieństwa (PDF, od 1950),
- z wieloskalową turbulencją (LES – od 1974),
- z bezpośrednią symulacją pól fluktuacji (DNS - od 1987),
- modele gradientowe ⁹²,

⁹²J. BADUR, Z. BILICKI, Some problems of turbulence in two-phase flow, *J. Turbulence*, **4**, 33-54, 1998

Standardowy Model $k - \varepsilon$

Wzorcem odniesienia dla innych modeli jest model dwurównaniowy $k - \varepsilon$, opracowany przez LAUDNERA i SHARMĘ (1974). Jest on dobrze przystosowany do przepływów o wysokim poziomie turbulencji $Tu = 5 - 20\%$ i dużym stosunku powierzchni kanału do objętości kanału. Model ten zapisywany jest w zachowawczej postaci jako dwa dodatkowe równania różniczkowe:

$$\partial_t \mathcal{U}_t + \operatorname{div} \mathcal{F}_t^c = \operatorname{div} \mathcal{F}_t^\nu + \mathcal{S}_t, \quad (\text{U.132})$$

gdzie dodatkowy indeks t odnosi się do turbulencji a poszczególne wyrazy są zdefiniowane następująco:

$$\mathcal{U}_t = \begin{Bmatrix} \rho k \\ \varepsilon \end{Bmatrix}, \quad \mathcal{F}_t^c = \begin{Bmatrix} \rho k \vec{v} \\ \rho \varepsilon \vec{v} \end{Bmatrix}, \quad \mathcal{F}_t^\nu = \begin{Bmatrix} \frac{\mu + \mu_t}{\sigma_k} \nabla k \\ \frac{\mu + \mu_t}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \end{Bmatrix}, \quad \mathcal{S}_t = \begin{Bmatrix} \rho s_k \\ \rho s_\varepsilon \end{Bmatrix}$$

gdzie człony źródłowe są zależne nie tylko od wektora zmiennych zachowawczych $\mathcal{U}$ ale również od jego gradientów:

$$s_k = (R_{ij} v_{i,j} - \epsilon) - \frac{\mu_t}{\rho^3} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial \rho}{\partial x_i},$$

$$s_\varepsilon = \frac{\epsilon}{k} \left(C_1 R_{ij} v_{i,j} - C_2 \varepsilon \frac{\mu_t}{\rho^3} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right).$$

W modelu tym występuje pięć stałych: $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $C_\mu = 0.09$, $C_1 = 1.44$, $C_2 = 1.92$. Nie zależą one od rodzaju przepływu (stacjonarny, nies-tacjonarny), rodzaju płynu (ściśliwy nieściśliwy, woda, powietrze, spaliny) i opisują rozwój turbulencji objętościowej w całym kanale począwszy od początkowej turbulencji (k^* , ϵ^*) zadanej na wlocie.

Dokładne omówienie modeli dwu-równaniowych znajdujemy w monografiach: T. CHMIELNIAK [42], [43], S. DROBNIAN [75], J. ELSNER [81], R. GRYBOŚ [106], Z. KAZIMIERSKI [144], TULISZKA [403].

U.1.4.4 Molekularny strumień ciepła $\vec{q}$

Przewodzenie Molekularne

Większość płynów roboczych przewodzi ciepło – jest to sprzyjająca okoliczność zezwalająca na proces pobierania ciepła na ściankach grzanych przez omywający je czynnik roboczy. Jeśli lepkość ma zasadnicze znaczenie w procesie przejmowania pracy od ścianek ruchomych i przenoszenia jej do wnętrza

płynu tak przewodzenie (częściowo połączone z konwekcją i radiacją) ma podstawowe znaczenie w procesie pobierania ciepła w trakcie przepływu czynnika roboczego nad ścianką grzaną.

Przewodnictwo cieplne jest cechą fizyczną substancji zezwalającą na przekazywanie energii cieplnej z miejsca cieplejszego do miejsca chłodniejszego. Gdy gorącą herbatę mieszamy srebrną łyżeczką czujemy niebawem, że metal ogrzewa się stopniowo w całej długości. Natomiast przewodnictwu ciepła w płynach towarzyszy zwykle konwekcja polegająca na wzbudzaniu niejednorodnego pola sił masowych $\rho(T(\vec{x}, t))$ poprzez fakt, iż nagrzane elementy jako mniej gęste podnoszą się do góry, a zimne (gęściejsze) opadają w dół. Przewodnictwo cieplne metali jest duże w porównaniu z przewodzeniem wody i olbrzymie w porównaniu z przewodnictwem powietrza. Miarą liniowego przewodnictwa ciepła jest współczynnik λ . Mówi on ile ciepła na sekundę przenika przez powierzchnię 1 m^2 przez czynnik o grubości 1 m . przy różnicy temperatur $1K$

Model Fouriera

Najpopularniejszym i eksperymentalnie uzasadnionym modelem izotropowego przewodzenia ciepła jest model Fouriera (1822), w którym molekularny strumień ciepła jest wprost proporcjonalny do gradientu temperatury

$$\vec{q} = \lambda \text{grad } T \quad (\text{U.133})$$

Gdy przewodzący materiał umieszczony jest między nieskończonymi płytkami o stałej różnicy temperatur, to w analogii do Newtonowskiego przepływu pędu (??) możemy powyższą formułę wypowiedzieć w języku sytuacji pomiarowej

$$\frac{\text{przepływ ciepła}}{\text{powierzchnia}} = \text{przewodzenie} \frac{\text{różnica temperatur}}{\text{odległość między ściankami}}.$$

Odpowiada on sytuacji pomiarowej, gdy przewodzący materiał jest umieszczony między nieskończonymi płytkami o stałej różnicy temperatur.

Współczynnik przewodzenia $\lambda \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}} \right]$ nazywany jest molekularnym przewodzeniem ciepła. Współczynnik ten zależy od temperatury, stąd najczęściej przedstawiany jest w postaci wielomianu względem temperatury. Dla materiałów anizotropowych (jakimi są ciała stałe) współczynniki λ są różne w różnych kierunkach, toteż aby opisać anizotropię należy współczynnik ten zastąpić symetryczną diadą $\vec{\lambda} = \lambda_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$.

W analogii do nie-newtonowskiego transportu pędu (U.129) nie-fourierowski transport ciepła można zapisać jako:

$$\vec{q} = [\lambda_i + \lambda_{ik}\partial_k T + \lambda_{ikm}\partial_k T\partial_m T + \lambda_2 T_{,ij} T_{,i}] \vec{e}_i,$$

w której $\lambda_i = 0$ z racji braku odwracalnego strumienia ciepła, zaś pozostałe współczynniki mogą zależeć od parametrów stanu.

Liczba Prandtla

W przypadku powietrza, przewodzenie ciepła jest proporcjonalne do przewodzenia pracy stąd współczynnik przewodzenia i współczynnik lepkości są do siebie proporcjonalne

$$\lambda = \frac{c_p \mu}{Pr} \quad (\text{U.134})$$

gdzie μ [kg/(ms)] – molekularna lepkość, c_p [J/(kg°K)] – ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, Pr – tzw. liczba Prandtla⁹³ - synonim bezwymiarowego współczynnika przewodzenia.

U.1.4.5 Turbulentny Strumień Ciepła

Turbulentny strumień ciepła $\vec{q}$ jest jednym ze strumieni, które trudno fenomenologicznie domknąć, a jeszcze trudniej pomiarowo zweryfikować. Ponieważ ten strumień jest odpowiedzialny za wymianę ciepła między grzaną ścianką i płynem roboczym to jego rola jako strumienia wspomagającego molekularną wymianę ciepła jest duża jak nie główna. Wiele eksperymentów ustawionych na pomiary wymiany ciepła z i bez dodatkowej turbulizacji przepływu wskazuje, iż wymiana turbulentna może być wielokrotnie większa niż wymiana molekularna.

Turbulentny analog modelu Fouriera

W modelowaniu turbulentnego transportu ciepła kluczową rolę dogrywiają fluktuacje pola prędkości, następnie fluktuacje pola gęstości i na koniec fluktuacje pola temperatur. Taka hierarchia ważności nie musi być zachowana na grzanej (lub chłodzonej) ściance, gdzie być może, fluktuacje pola gęstości temperatur mają większe znaczenie. Stąd też pierwszeństwo, które bezwzględnie daje się zawsze zjawisku turbulentnego transportu pędu w tym przypadku nie musi być oczywiste. Najczęstszym modelem turbulentnego

⁹³L. PRANDTL, Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, *Verh. III Int. Math.-Kongr.* Heidelberg, 1904, L. PRANDTL, Über die ausgebildete turbulenz, *ZAMM*, **5**, 136-139 (1925).

strumienia ciepła jest model wzorowany na molekularnym strumieniu ciepła tzn.

$$\vec{q}^t = \lambda_t \nabla T, \quad \lambda_t = \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \quad (\text{U.135})$$

w którym c_p , μ_t , Pr_t to odpowiednio, ciepło właściwe płynu, lepkość turbulentna i turbulentna liczba Prandtla która jest silnie zmienną w pobliżu grzanej ścianki. Związek (U.135), z uwagi na udział lepkości turbulentnej μ_t , daje silne pierwszeństwo fluktuacjom prędkości. Miejsce, gdzie mogą pojawiać się wkłady od fluktuacji temperatury lub fluktuacji gęstości jest turbulentna liczba Prandtla Pr_c - stąd też modelowanie domknięć na Pr_t jest przedmiotem wielu prac.

Do sprawdzonych domknięć na turbulentną liczbę Prandtla należy algebraiczne domknięcie Kaysa (1994)⁹⁴

$$\begin{aligned} Pr_t &= 1.1 & y^+ &\leq 7.0 \\ Pr_t &= 1.85 - \tanh(0.05(y^+ - 7.0)) & y^+ &\geq 7.0, \end{aligned} \quad (\text{U.136})$$

gdzie $y^+ = y u_\tau / \nu$ jest bezwymiarową odległością mierzoną od ścianki. Przeglądu ponad pięćdziesięciu modeli, jakie powstały do roku 1975, dokonano w pracy A.J. Reynolds⁹⁵ - przegląd dalszych prac, ze względu na ilość jest, dla pojedynczego autora, niemożliwy do wykonania w rozsądnym terminie.

Domknięcia na Turbulentny Strumień Ciepła

Modelowanie turbulentnej liczby Prandtla jest tematem badawczym, traktowanym, w porównaniu z modelowaniem turbulencji pędu, drugoplanowo. Istniejące modele można podzielić na następujące trzy grupy [7]:

- fenomenologiczne⁹⁶
 - algebraiczne, ze stałą liczbą Pr_t ,
 - algebraiczne, z domknięciem na liczbę Pr_t ,
 - czterorównaniowe $k - \epsilon - k_\theta - \epsilon_\theta$,
- statystyczne,

⁹⁴W.M. KAYS, Turbulent Prandtl number – where are we? *ASME J. Heat Trans.* **116**, 284-295, 1994.

⁹⁵A.J. REYNOLDS, The prediction of Turbulent Prandtl and Schmidt numbers, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **18**, 1055-1069, 1975.

⁹⁶M. KARCZ, Analiza pracy dyfuzorów termicznych w aspekcie chłodzenia turbin gazowych, *Rozprawa Doktorska IMP PAN*, Gdańsk 2003,
M. KARCZ, J. BADUR, An alternative two-equation turbulent heat diffusivity closure, *Int. Journal Heat and Mass Transfer*, **48**, 2013 - 2022 (2005)

- PDF,
- Grupy Renormalizacyjnej,
- mieszane,
 - LES – Large Eddy Simulation,
 - DNS – Direct Numerical Simulation.

U.1.4.6 Radiacyjny Strumień Ciepła

Radiacyjny strumień ciepła $\vec{q}^{rad}$ jest określony w niejawniej formie równania różniczkowo-całkowego (Modest, 1993)⁹⁷

$$\operatorname{div} \vec{q}^{rad} = \alpha (4e_b - g), \quad (\text{U.137})$$

gdzie:

- | | | |
|----------|-------------------------|---|
| α | $[\text{m}^{-1}]$ | – współczynnik absorpcji |
| e_b | $[\text{W}/\text{m}^2]$ | – moc emisyjna ciała doskonale czarnego |
| g | $[\text{W}/\text{m}^2]$ | – właściwa energia radiacji zdefiniowana zależnością: |

$$g = \oint_{4\pi} i' d\bar{\omega}',$$

w której i' $[\text{W}/\text{m}^2\text{sr}]$ jest intensywnością radiacji, $\bar{\omega}'$ $[\text{sr}]$ jest kątem bryłowym.

Intensywność radiacji nie jest z góry znaną wielkością i jej wyznaczenie wymaga rozwiązania różniczkowo-całkowego równania domknięcia (Modest, 1993)

$$\frac{\partial}{\partial t} i + \operatorname{div} (\vec{\Omega} i) = -\kappa i + \alpha i_e + \frac{\sigma}{4\pi} \oint_{4\pi} i' d\bar{\omega}', \quad (\text{U.138})$$

gdzie:

- | | | |
|----------------|----------------------------------|---|
| i | $[\text{W}/\text{m}^2\text{sr}]$ | – intensywność radiacji, |
| $\vec{\Omega}$ | | – kierunek propagacji $ \vec{\Omega} = 1$, |
| i_b | $[\text{W}/\text{m}^2\text{sr}]$ | – intensywność radiacji ciała doskonale czarnego, |
| σ | $[\text{m}^{-1}]$ | – współczynnik rozpraszania. |

Znanym domknięciem na moc emisyjną ciała doskonale czarnego jest

⁹⁷M.F. MODEST, *Radiative Heat Transfer*, Mc. Graw-Hill, 1993

domknięcia Kirchhoffa

$$e_b = kT^4, \quad (\text{U.139})$$

gdzie k [W/m²K⁴] jest stałą Stefana-Boltzmannna.

Uproszczony Model Radiacji P1

Równanie różniczkowo-całkowe (U.138), ze względów numerycznych nie może być dołączone do kompletu równań bilansu mających postać zachowawczą. W literaturze popularne jest uproszczenie Chenga (1964) – znane jako model P1. Polega on na rozwinięciu intensywności radiacji w szereg harmoniczny, obliczeniu całki z (U.138) i obcięciu wyrażenia do pierwszego członu na parametr radiacji G . Pozwala to zdefiniować następujące równanie transportu na G (Cheng, 1964)⁹⁸:

$$\text{div}(\Gamma \text{grad } G) = aG - 4\alpha T^4, \quad (\text{U.140})$$

gdzie

$$\Gamma = \frac{1}{3(a + \sigma) + C\sigma}, \quad (\text{U.141})$$

zaś a , C to tzw. współczynnik absorpcji i współczynnik radacji zwykle przyjmowany jako $C = 10^{-8}$. Z powyższego uproszczenia wynika również, że

$$\vec{q}^{rad} = \Gamma \nabla G, \quad (\text{U.142})$$

co prowadzi do tego, iż w miejsce $\text{div} \vec{q}^{rad}$ w równaniu energii, możemy podstawić dodatkowe źródło (U.140). Model radiacji P1 wymaga dołączenia do układu równań dodatkowego równania różniczkowego na G (U.140).

U.1.4.7 Równania Konstytutywne Stanu Sprężystego

Sprężysty Strumień pędu

Przechodzimy do pojęciowo najtrudniejszej części modelowania własności kontinuum płynnego, jakimi są własności odwracalne, czyli sprężyste. Słowo sprężyste odnosi się również do ciepła, bowiem płyn roboczy może akumulować, przenosić i oddawać ciepło w sposób sprężysty (odwracalny), tak samo jak ściskana sprężyna może akumulować, przenosić i oddawać pracę bez żadnej straty.

⁹⁸P.CHENG, Two-dimensional radiating gas flow by a moment method, *AIAA Journal*, **2**, 1662-1664, 1964

Ta część energii na sposób pracy i ciepła, która może być sprężyscie zmagazynowana w czynniku roboczym nosi nazwę **pracy kompensowanej** i **ciepła kompensowanego**. W przypadku traktowania obiegów termodynamicznych jako obiegów idealnych, odwracalnych, nie występuje żaden inny rodzaj pracy i ciepła niż praca kompensowana i ciepło kompensowane. W takim przypadku bilans energii upraszcza się do bilansu energii wewnętrznej⁹⁹.

Termodynamika Techniczna skoncentrowała swój wysiłek na uchwyceniu wszystkich detali obiegu termodynamicznego, zwłaszcza tam gdzie można popełnić największe błędy, stąd problem nieodwracalności obiegów termodynamicznych traktowany był w formie współczynnika empirycznego zmniejszającego ilość użytecznej pracy (w silnikach cieplnych) lub współczynnika zmniejszającego sprawność obiegu. Bilans energii wewnętrznej wizualizuje się na dwóch podstawowych diagramach:

- diagramie pracy $p - v$ (Watt, 1720),
- diagramie ciepła $T - s$ (Belpaire, 1788).

Cztery wielkości p , v , T , s zwane w termodynamice **parametrami termodynamicznymi** lub **parametrami stanu** grają podstawową rolę w formułowaniu równań konstytutywnych stanu sprężystego. Sytuację utrudnia fakt, iż nie potrafimy mierzyć entropii właściwej bowiem jak dotąd nie znaleziono entropomierza. Potęgą termodynamiki płynów sprężystych bierze się z faktu, iż istnieje konsensus pomiędzy modelami numerycznej termomechaniki i eksperymentatorami co do tego, że tego samego ciśnienie i tej samej temperatury używają obie strony¹⁰⁰.

⁹⁹J. KESTIN, On local-equilibrium formalism applied to mechanics of solids, *Int. J. Solids Struct.* **29**, 1827-1836, 1992. Pierwsza i Druga Zasada Termodynamiki, zredukowane do zjawisk odwracalnych noszą nazwę I-go i II-go Równania Termodynamiki.

¹⁰⁰W praktyce sporządzając wykresy pracy $p-v$ i ciepła $T-s$ dopuszczamy, aby były to diagramy dla całkowitych ciśnień (odwracalne + nieodwracalne), całkowitych objętości właściwych, całkowitych temperatur i całkowitych entropii właściwych.

Równania stanu

Wyjściową postacią równań konstytutywnych płynu sprężystego są następujące równania zwane również równaniami stanu¹⁰¹

$$\begin{aligned}\vec{p} &= p(v, s) \quad (\text{Fluid}), \quad \vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\vec{e}, \vec{s}) \quad (\text{Solid}), \\ \vec{T} &= T(v, s) \quad (\text{Fluid}), \quad \vec{T} = \vec{T}(\vec{e}, \vec{s}) \quad (\text{Solid}).\end{aligned}\tag{U.143}$$

Substancja płynna lub stała posiadająca równanie konstytutywne w powyższej postaci nazywa się materiałem sprężystym¹⁰². Ośrodki płynne nie przenoszą sprężystych deformacji postaciowych (ścinięcia), a jedynie przenoszą sprężyste zmiany objętości. W takim przypadku wystarcza jedynie jedna miara deformacji płynu, którą jest objętość właściwa $v = jv_0$. Ponieważ $j = \det \vec{f}$, oznacza to, iż z całego gradientu deformacji (potrzebnego dla określenia i zmierzenia deformacji ciała stałego) w płynach roboczych ważna jest jedynie zmiana objętości czyli wyznacznik j . Ciało stałe, mające wstępną sprężystość i wstępny moduł sprężystości może przenieść sprężyste deformacje postaciowe i objętościowe, stąd sprężysty strumień pędu ma formę diady naprężeń sprężystych

$$\vec{P} = \begin{cases} p \vec{T} = p(v, s) \vec{T} & \text{ciało płynne} \\ \vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\vec{e}, \vec{s}) & \text{ciało stałe,} \end{cases}\tag{U.144}$$

gdzie miara deformacji Almansi $\vec{e}$ (symetryczna, ponieważ symetrii wymaga model kontinuum Cauchy'ego) określona jest przy pomocy gradientu deformacji jako:

$$\vec{e} = \frac{1}{2} \left(1 - \vec{f}^T \vec{f} \right) = e_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j.\tag{U.145}$$

O tensorze entropii właściwej $\vec{s}$, w ślad za Kirchhoffem (1858)¹⁰³ zakładamy, iż jest, podobnie jak ciśnienie w płynie, tensorem kulistym

$$\vec{s} = s \vec{I} = (s\delta_{ij}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j.\tag{U.146}$$

¹⁰¹J.W. GIBBS, Graphical methods in the thermodynamics of fluids, *Trans. Connecticut Acad.* **2**, 309-342, 1873

¹⁰²Podział materiałów o cechach odwracalnych na materiał hipersprężysty (nad-sprężysty), sprężysty i hypo-sprężysty (pod-sprężysty) dokonał C.A. TRUESDELL, The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics, *J. Rational Mech. Anal.* **1**, 125-300, 1952, errata **2**, 593-616, 1953.

¹⁰³R.G. KIRCHHOFF, Pogg Ann. CIII, p206, 1858.

Analizę termodynamiczną w ciele stałym również można wykonywać za pomocą diagramu pracy (Watta) i diagramu ciepła (Belpaire'a). Najprostszy przypadek otrzymujemy dla jednoosiowego rozciągania pręta i wtedy:

$$\vec{\sigma} = \sigma_{xx} \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x, \quad \vec{\epsilon} = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l^2} \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x = \vec{\epsilon}_{xx} \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x. \quad (\text{U.147})$$

Cała trudność modelowania sprężystych własności ciał płynnych bierze się stąd, iż w przeciwieństwie do ciał stałych nie posiadają one olbrzymiej wstępnej sprężystości i wstępnego modułu Younga. Moduł Younga płynu (zarówno izotermiczny jak i izentropowy) jest równy lub zbliżony do ciśnienia statycznego płynu.

Cztery główne przemiany

Inną trudnością stojącą przed eksperymentalnym wyznaczeniem równania stanu jest duża (aż cztery) ilość zmiennych, stąd też najłatwiej otrzymać jest wykresy w warunkach, gdy dwa spośród czterech parametrów p, v, T, s są stałe. W zależności od tego czy ustalone były p, v, T, s – odpowiednio otrzymujemy związki konstytutywne **przemiany izobarycznej, izochorycznej, izotermicznej i izentropowej**¹⁰⁴. Pokrycie badaniami wszystkich przypadków pośrednich jest zadaniem beznadziejnie trudnym nawet dla najbardziej pomysłowego eksperymentatora¹⁰⁵.

Równanie Clapeyrona

W literaturze znamy tylko jedno równanie – zwane równaniem gazu idealnego, odnoszące się do wszystkich pośrednich sytuacji między przemianą izobaryczną, izotermiczną i izochoryczną. Dla tego samego gazu doskonałego równanie to nie opisuje już przemiany izentropowej. Mimo, iż równanie stanu gazu doskonałego

$$pv = RT \quad (\text{U.148})$$

zawiera tylko jedną stałą R ($R = 287 \text{ [J/(kg}^\circ\text{C)]}$ dla powietrza), zwaną indywidualną stałą gazową¹⁰⁶ równanie to bez żadnych uproszczeń opisuje stany pośrednie dla dowolnych p, v, T . Chociaż rów. (U.148) zawiera tylko pięć

¹⁰⁴przemianę równego ciśnienia Gibbs nazywa przemianą *izopiesticzną*, zaś przemianę równej objętości- przemianą *izometryczną*. (izochoryczne wg Ramsay'a i Younga). Zjawiskom dla których nie zachodzi wymiana ciepła Rankine nadał nazwę *adiabatycznych*, zjawiskom przebiegającym przy stałej entropii Gibbs nadał nazwę *izentropowych*.

¹⁰⁵Szczęśliwie dla nas większość urządzeń przepływowych zbudowana jest tak aby w nich zachodziła któraś z dobrze pomierzonych przemian.

¹⁰⁶Znana również jako stała Boyle'a

znaków, jest to najbardziej skomplikowane równanie konstytutywne termomechaniki, stąd w dyskusji nad tym równaniem winniśmy nie żałować ani czasu ani atramentu¹⁰⁷.

Równanie (U.148) nazywamy równaniem stanu gazu doskonałego a dokładnie termicznym równaniem stanu gazu doskonałego. Zostało ono wyprowadzone przez Clapeyrona (1834)¹⁰⁸. Równanie to sumuje w jedną uniwersalną formułę równania konstytutywne:

- Boyle’a (1666) i Mariotte (1676) ($T = \text{const}$),
- Gay-Lussaca (1802) i Daltona (1803) ($p = \text{const}$),
- Charlesa (1728) ($v = \text{const}$).

Występująca w równaniu stanu indywidualna stała gazowa jest jednym z kilku parametrów określających sprężystość gazu. Może ona być interpretowana jako praca potrzebna, aby w 1 kg gazu podnieść temperaturę o jeden stopień Kelvina. Jeśli moduł Younga gazu rozumiany jest jako praca potrzebna aby w 1 kg gazu podnieść ciśnienie o jeden Pascal, to, przez analogię, stała R może być traktowana jak **termiczny moduł sprężystości** gazu.¹⁰⁹

Równanie stanu gazu doskonałego

Zauważmy, iż termiczne równanie stanu (U.148) nie ma pożądanej postaci równania (U.143). Jest to, bowiem równanie stanu odniesione do zmiennych ekstensywnych (p, T) (mierzonych na ściankach powierzchni kontrolnej), których zadaniem jest wyznaczenie zmiennych intensywnych (zaczepionych w środku objętości kontrolnej odnoszonych do jednostki masy zawartej w elemencie płynu). W ogólności są to równania:

$$v = v(p, T), \quad s = s(p, T) \quad (\text{U.149})$$

¹⁰⁷doskonale wprowadzenia znajdzie czytelnik w wielu dziełach polskich uczonych (min: Cz. BURACZEWSKI [32], T. CHMIELNIAK [37, 41], W. GUNDLACH [112]-[114], W. JUNGOWSKI [136], E. KALINOWSKI [139], J. KOZACZKA [169], S. MAC [196], J. MADEJSKI [198], J. MARECKI [211], J. MIKIELEWICZ & A. RASMUS [229], S. OCHĘDUSZKO [253], J. RUTKOWSKI [314], B. STANISZEWSKI [341], J. SZARGUT [362], E. TULISZKA [404], J. ZAGÓRSKI [446])

¹⁰⁸E. CLAPEYRON, Memoire sur la puissance motrice de la chaleur, *J. Ecole Polytech.* **14**, 153-190, 1834

¹⁰⁹Ściśle mówiąc, powinniśmy podawać w jakich warunkach ta praca się odbywa – czy przy stałej objętości czy stałej entropii.

oparte o temperaturę i ciśnienie które lokalnie można pomierzyć w przepływie. Z pomiarem objętości właściwej w przepływie są duże kłopoty, zaś pomiar entropii właściwej nie jest, na współczesnym etapie rozwoju sztuki pomiarów, możliwy. Nie są znane entropomierze, stąd entropia właściwa, jedna z podstawowych wielkości dla sprężystego kontinuum (płynnego i stałego) jest określana w sposób wtórny.

Objętość właściwa v mierzona jest tylko dla układów zamkniętych przy założeniu równowagi i jednorodności w całym zbiorniku¹¹⁰. Entropia, z dokładnością do stałej, określana jest przy pomocy bilansu energii. Dla **gazu doskonałego** równania stanu typu (U.149) (odwrócone w stosunku do wyjściowych równań (U.143)) mają postać:

$$v = \frac{RT}{p}, \quad (\text{U.150})$$

$$s = c_p \ln \frac{T}{T_0} - R \ln \frac{p}{p_0} + C_0, \quad (\text{U.151})$$

gdzie T_0 , p_0 , C_0 są pewnymi wartościami stanu odniesienia,¹¹¹ lub w stanie względnym

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (\text{U.152})$$

W powyższych równaniach stanu gazu doskonałego występują **dwie stałe sprężyste**: R i c_p (odpowiednio, termiczny moduł sprężystości gazu i cieplny moduł sprężystości gazu w stałym ciśnieniu). W odróżnieniu od ciśnienia zewnętrznego (pomierzonego) ciśnienie używane w równaniach stanu nazywa się **prężnością**, zaś temperatura, w odróżnieniu od temperatury zewnętrznej (pomierzonej) nazywa się **temperaturą czynnika**.

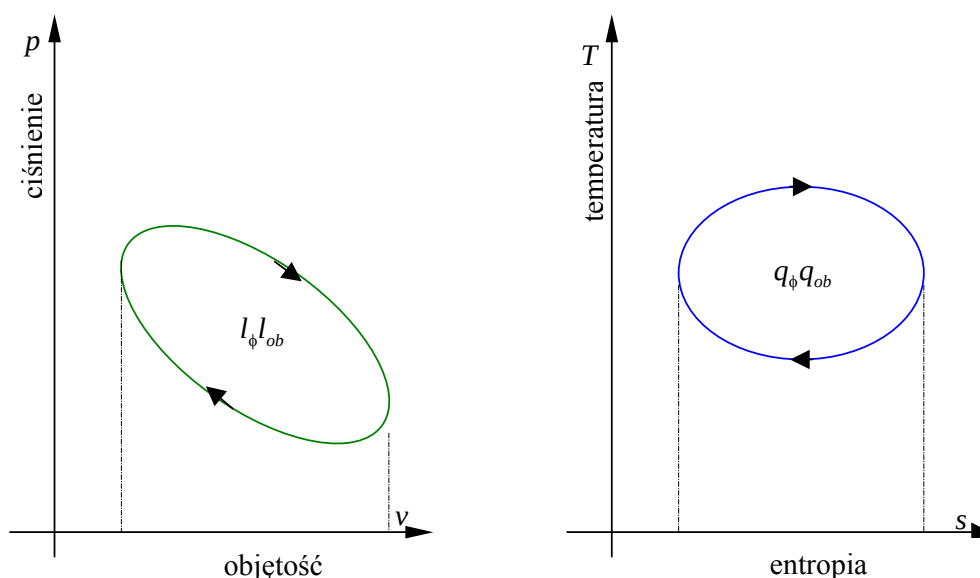
Odwracalne cykle przemian

Gdy stan ciała zmienia się w ten sposób, że po przejściu szeregu zmian stanu ciało przyjmuje na powrót tę samą objętość właściwą, entropię właściwą

¹¹⁰W pewnym sensie, pomiar objętości właściwej jest równie trudny jak pomiar entropii właściwej i może jedynie odbywać się „poza przepływem”. W ciele stałym można mierzyć odkształcenie objętościowe resztkowe i entropię resztkową. Czy jednak w ciałach płynnych istnieje entropia resztkowa (pozostałość po nieodwracalnej entropii)?

¹¹¹Znajomość bezwzględnych wartości entropii jest ważna w tych układach termodynamicznych, w których zmienia się liczba moli składników nie z powodu wymiany masy z otoczeniem, lecz z powodu reakcji chemicznych przebiegających w układzie. Problem bezwzględnych wartości entropii rozwiązuje Trzecia Zasada Termodynamiki, która stwierdza, że niezależnie od przemiany w której układ zdąża do zera temperatury bezwzględnej – entropia zmierza również do zera bezwzględnego.

ciwą, prężność i temperaturę czynnika mówimy o ciele, że wykonało ono obieg zamknięty lub zamknięty cykl przemian. Punkty, wyznaczające wykreślnie stan ciała na obu diagramach – pracy i ciepła - przy wykonywaniu przez ciało obiegu zamkniętego powrócą wtedy do położenia początkowego. Czyli, wszelkie obiegi zamknięte, wykonywane przez ciało przedstawiają wykreślnie na diagramach $p - v$ i $T - s$ krzywe zamknięte. Ciało (stałe, płynne),



Rysunek U.9. Obiegi zamknięte dla cyklu odwracalnych prawobieralnych przemian. Z doświadczeń Joule'a wynika $q_{ob} = l_{ob}$.

które wykonuje przemianę, nazywamy w termodynamice ciałem czynnym lub czynnikiem. Zmiana stanu, dokonywana przez czynnik według równań (U.150) i (U.151), jest wymuszana przez działania zewnętrzne którymi są: zewnętrzna energia mechaniczna (praca zewnętrzna) i zewnętrzna energia cieplna (ciepło zewnętrzne). Mówimy, że praca zewnętrzna i ciepło zewnętrzne jest **doprowadzane** lub **pobierane** od czynnika. Proces doprowadzania/odprowadzania pracy i ciepła zewnętrznego do czynnika jest niezwykle skomplikowany i wieloetapowy. W procesie tym tylko część energii przemiana się w pracę i ciepło kompensowane, czyli energię wewnętrzną czynnika. Pewna część energii zewnętrznej zostaje zdegradowana. Ciała zewnętrzne, doprowadzające lub pobierające od czynnika energię mechaniczną i cieplną w przemianach termodynamicznych nazywamy źródłami pracy lub źródłami ciepła. W tym procesie płyn ma rolę bierną, dlatego nazywamy

go **czynnikiem roboczym**. Należy podkreślić, iż **wykresy Watta i Bel-paire'a** będą zamknięte niezależnie od tego czy proces jest odwracalny czy też nie, procesy nieodwracalne poznamy po tym iż zmienia się z cyklu na cykl kształt obszaru którego powierzchnia, przy niezmiennych się wymuszeniach pozostaje ta sama.

Eksperymentalny Pomiar Równań Stanu

Równania stanu eksperymentalnie wyznaczamy w przemianach równowagowych, podczas których czynnik znajduje się w **równowadze termomechanicznej**. Pojęcie równowagi termodynamicznej jest trudne, złożone i oznacza wiele więcej niż pojęcie równowagi mechanicznej, dla której potrzeba, aby siły zewnętrzne działające na ciało były w równowadze. Warunki równowagowej przemiany określił Gibbs (1873) jako¹¹²:

- 1 prędkość każdej części czynnika roboczego jest równa zeru,
- 2 ciśnienie zewnętrzne wywierane na ciało jest równe prężności wewnętrznej ciała,
- 3 temperatura źródeł zewnętrznych jest równa temperaturze czynnika.

Inaczej mówiąc: przemiana równowagowa (przy pomocy której będziemy eksperymentalnie identyfikować sprężyste własności czynnika roboczego) musi być tak przeprowadzona, aby w każdym momencie przemiany zachodziła równość ciśnienia źródeł zewnętrznych z prężnością i równość temperatury źródeł zewnętrznych z temperaturą czynnika (przy zerowej prędkości). Wtedy i tylko wtedy, będziemy mogli temperaturę źródła i ciśnienie źródła podstawić do równania stanu i wyliczyć z niego stałe sprężyste.

W formie elektronicznej, wygodnej do przywoływania jako procedury, istnieje wiele stablicowanych równań stanu różnych czynników roboczych w tym: pary wodnej, wody, powietrza i spalin. Firmy oferujące solwer, dysponują całym wachlarzem tablic, różniących się od siebie zakresem parametrów, sposobem obliczania pochodnych, czy też grafiką.¹¹³

¹¹²W oryginale występuje jeszcze **czwarty warunek**:

4. potencjał chemiczny źródeł zewnętrznych jest równy potencjałowi chemicznemu czynnika.

¹¹³Niemniej, księgarnie oferują papierowe tablice Wukałowicza, wciąż licząc na klienta.

Materiał Hipersprężysty

W roku 1873 Gibbs¹¹⁴ w oparciu o rezultaty eksperymentów Andrews¹¹⁵ zaproponował bardziej podstawowy związek, z którego można obliczyć równania stanu. Był to związek

Energii wewnętrznej – objętości właściwej – entropii właściwej
analitycznie zapisywany jako

$$u = u(v, s). \quad (\text{U.153})$$

Ponieważ wszystkie trzy parametry tworzące tę powierzchnię są parametrami intensywnymi (na kilogram czynnika roboczego, grzewczego, chłodniczego), Gibbs nazwał swoją powierzchnię powierzchnią pierwotną (a primitive surface)¹¹⁶. Z matematycznego punktu widzenia energię wewnętrzną nazywa się potencjałem a równania stanu otrzymuje się poprzez następujące definicje¹¹⁷:

$$p = -\frac{\partial u}{\partial v}|_{s=\text{const}}, \quad T = \frac{\partial u}{\partial s}|_{v=\text{const}}. \quad (\text{U.154})$$

Energia wewnętrzna gazu doskonałego została wyznaczona przez Gibbsa i wynosi

$$u(v, s) = \frac{1}{\kappa - 1} \left(\frac{1}{v}\right)^{\kappa-1} \exp\left(\frac{s}{c_v}\right), \quad (\text{U.155})$$

gdzie dwie stałe c_v i κ związane są ze stałymi płynu sprężystego doskonałego c_p i R następującymi związkami:

$$R = c_p - c_v, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}, \quad (\text{U.156})$$

gdzie R – stała gazowa (Boyle, 1669), κ – wykładnik Piossona (1811), c_p – ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, (Clapeyron, 1834), c_v – ciepło właściwe przy stałej objętości (Rumfold, 1781).

¹¹⁴I.W. GIBBS, *Trans. Connecticut. Acad.* **2**, 1873, p 382

¹¹⁵J. ANDREWS, *Phil. Trans. Royal Soc. London*, **159** (1869), p 575.

¹¹⁶Oryginalne oznaczenia Gibbsa są inne min. $u \equiv \epsilon$, $s \equiv \eta$, $T \equiv \theta$. Clerk Maxwell – podówczas 45-letni profesor fizyki eksperymentalnej w Cavendish Laboratory, był pod takim wrażeniem pracy Gibbsa, iż wykonał gipsowy model powierzchni dla energii wewnętrznej wody dla stanu gazowego, ciekłego i stałego, który następnie przesłał Gibbsowi do Yale. Model ten można obejrzeć w muzeum Yale University. Wzajemne relacje między równaniami stanu (U.143) a równaniami (U.154) są trudne do wytłumaczenia. Równe trudności napotykamy tłumacząc powody, dla których energia u winna być bilansowana.

¹¹⁷Znak minus bierze się z faktu, iż powiększanie objętości właściwej powoduje spadek ciśnienia (znak plus zostawiamy dla naprężeń rozciągających)

Każdy materiał hipersprężysty jest również materiałem sprężystym. Dalsze informacje o sprężystych własnościach czynnika roboczego zawiera uzupełnienie U2.3 i U2.4¹¹⁸

Materiał Hyposprężysty

Materiały hyposprężyste (pod-sprężyste) mają równania stanu w formie przyrostowej (prędkościowej) w czasie. W termodynamice klasycznej noszą one nazwę **materiałów półdoskonałych**. Stosowanie tych równań dla przemian między stanem (1) i (2) zawsze wymaga wycałkowania przyrostowych równań stanu w czasie rzeczywistym (dynamika) lub w czasie obliczeniowym trwania przemiany równowagowej z (1) do (2).

W literaturze Termodynamiki **hyposprężyste** równania stanu dominują nad **sprężystymi** i **hipersprężystymi**. Bierze się stąd, że termodynamika techniczna preferuje zapis w przyrostach dp , dT , dv , ds , stąd jest wiele liter "d" w każdym podręczniku termodynamiki klasycznej¹¹⁹.

Przykładem materiału hyposprężystego jest materiał określony dwoma przyrostowymi równaniami stanu, którymi są odpowiednio:

$$c_v dT + p dv = 0 \quad \text{ i } \quad c_p dT + v dp = 0. \quad (\text{U.157})$$

Równania te po podzieleniu stronami prowadzą do

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{v dp}{p dv}, \quad (\text{U.158})$$

czyli

$$\kappa \frac{dv}{v} = \frac{dp}{p}. \quad (\text{U.159})$$

Jest to przyrostowe, hyposprężyste równanie przemiany adiabatycznej gazu doskonałego, które po scałkowaniu otrzymuje formę równania materiału sprężysto-izentropowego

$$pv^\kappa = \text{const} \quad (\text{U.160})$$

¹¹⁸Najczęściej w praktyce obliczeniowej używa się równania (U.152) jako **kalorycznego równania stanu** typu $u = c_v T$, zezwalającego bilans energii wyrazić poprzez temperaturę. Nazwa *kaloryczne* wywodzi się od stosowanej dawniej jednostki ilości energii – kalorii. Nazwa ta oznacza że do określenia tego równania stanu konieczny jest pomiar ilości ciepła w kalorymetrze. W polskim słownictwie używano słowa: **ciepłostka**.

¹¹⁹Litery *d* występują z różnymi przekreśleniami, daszkami, kółeczkami, i innymi symbolami rodem z puszczy afrykańskiej. W niniejszej pracy przedstawiamy wersję termodynamiki „oczyszczoną” z tego rodzaju matematycznych wytrychów myślowych.

w którym stała nie jest określona, co możemy czytać: nie każdy materiał hyposprężysty jest materiałem sprężystym.

U.1.4.8 Układ Klasycznych Równań Opisujących

Po określeniu równań bilansu, zdefiniowaniu równań konstytutywnych, oraz określeniu równań kinematycznych, mamy wszystkie elementy diagramu Tontiego U.113, stąd jeśli zachodzi taka potrzeba (nie występuje ona w Numerycznej Termomechanice) możemy wyrazić podstawowy układ równań bilansu, w formie zwartej, w zmiennych zachowawczych. Pierwowzór takiego postępowania to równania Naviera-Stokesa i Fouriera-Kirchhoffa, które są oparte na modelu płynu lepkiego Newtona i liniowego prawa przewodności cieplnej Fouriera. Tradycyjne, równanie Naviera-Stokesa jest pewnym synonimem równania bilansu pędu, a równanie Fouriera-Kirchhoffa synonimem równania bilansu energii. Używanie tych nazw oznacza również, iż rozwiązywany problem trójwymiarowy.

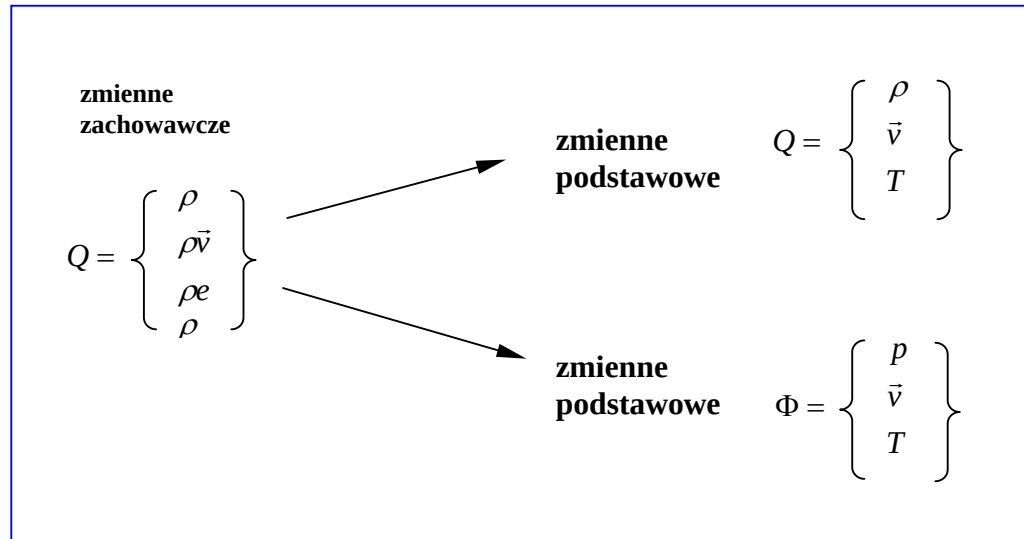
Wyprowadzenie tych równań i późniejsze ich używanie, ma dziś już znaczenie tylko historyczne i służy jako ćwiczenie dla wnikliwego studenta – przypomnijmy, że narzędzia numerycznej Termomechaniki mają strukturę diagramu Tontiego, stąd numeryka, oparta o rachunek macierzowy, nie wykorzystuje "przekształconych równań". Jedynym przekształceniem równań jest przejście z podstawowego wektora zmiennych niewiadomych u na wektor zmiennych podstawowych Q lub Φ , który przedstawia diagram poniżej. Zmienne Q , Φ nazywamy **zmiennymi podstawowymi** (obliczeniowymi). Ich wybór zależy od rodzaju stosowanej metod całkowania równań bilansu, oraz od typu równań stanu, które posiadamy dla konkretnego materiału. Oprócz zmiennych Q , Φ stosowane są również **zmienne charakterystyczne** W (związane z wektorami własnymi macierzy Jacobiego strumieni konwekcyjnych – jest to trójwymiarowy odpowiednik jednowymiarowej „metody charakterystyk”) oraz **zmienne entropijne** V (związane z symetryzacją równań bilansu)

Przypomnijmy podstawowy układ równań:

I. Równania kinematyki

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{d} &= \frac{1}{2} (\text{grad } \vec{v} + \text{grad}^T \vec{v}) = \frac{1}{2} (\vec{v} \otimes \nabla + \nabla \otimes \vec{v}) = d_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \\ \vec{g} &= \text{grad } T = \nabla T = T_{,i} \vec{e}_i \end{aligned}$$

II. Równania konstytutywne



Rysunek U.10. Trzy podstawowe zmienne używane w Numerycznej Dynamice Płynów.

Zjawiska niesprężyste:

Płyn niutonowski $\vec{\tau} = \lambda I_d \vec{I} + 2\mu \vec{d} \quad \vec{R} = 0.$

Przewodzenie Fouriera $\vec{q} = \lambda \vec{g}, \quad \vec{q}^t = 0, \quad \vec{q}^{rad} = 0.$

Zjawiska sprężyste:

Termiczne równanie stanu $p = p(\rho, T)$

Kaloryczne równanie stanu $u = u(T, p) \quad \text{lub} \quad u = u(T, \rho)$

Równanie stanu $\rho = \rho(p, T)^{120} \quad \text{oraz} \quad e = u + 1/2 \vec{v}$

¹²⁰Przykładem takiego równania jest równanie dla suchej pary wodnej H.L. CALLANDERA i R. MOLLIERA:

$$\frac{1}{\rho} = 0.04611 \frac{T}{p} - \frac{1.45}{\left(\frac{T}{100}\right)^{3.1}} - \frac{6031 p^2}{\left(\frac{T}{100}\right)^{13.5}}$$

gdzie ciśnienie p w barach, temperatura T w stopniach Kelvina a gęstość w kg/m^3 . Dla wody obowiązują równania R.PLANCKA:

$$2\rho^3 = \frac{a - bT}{c} + \left[\left(\frac{a - bT}{c} \right)^2 + \frac{4p}{c} \right]^{1/2}$$

gdzie $a = 10630$, $b = 0.02375$, $c = 8350$, p w atm, T w $^\circ\text{C}$, gęstość w $[\text{g/cm}^3]$.

III. Równania bilansu

masy

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0,$$

pędu

$$\partial_t(\rho \vec{v}) + \left(\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \vec{I} \right) = \operatorname{div} \left(\vec{\tau}^c \right) + \rho \vec{b},$$

energii

$$\partial_t(\rho e) + \operatorname{div} \left(\rho \left[e + \frac{p}{\rho} \right] \vec{v} \right) = \operatorname{div} \left(\vec{\tau}^c \vec{v} + \vec{q}^c \right) + \rho \vec{b} \cdot \vec{v}.$$

Dokonajmy teraz kilku przykładowych podstawień wg schematu $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{II} \rightarrow \mathbf{III}$ dążąc do wyrażenia układu równań bilansu w zmiennych podstawowych Q lub Φ .

Bilans Masy w zmiennych $\Phi = (p, \vec{v}, T)$

Podstawiając do równania bilansu masy wyrażenie na $\rho = \rho(p, T)$ otrzymujemy bezpośrednio:

$$v_{pT} \frac{\partial p}{\partial t} + v_{Tp} \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot [v_{pT} \nabla p + v_{Tp} \nabla T] + \rho(p, T) \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (\text{U.161})$$

gdzie $v_{pT} = (\partial \rho / \partial p)|_T$, $v_{Tp} = (\partial \rho / \partial p)|_p$ są zmiennymi współczynnikami¹²¹.

Równanie Naviera – Stokesa czyli Bilans pędu w zmiennych $Q = (\rho, \vec{v}, T)$

W znalezieniu tego równania najważniejszy jest człon z dywergencją naprężeń lepkich:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\tau} &= \operatorname{div} \left[\lambda I_d \vec{I} + 2\mu \vec{d} \right] = \lambda \left[\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) \vec{I} + \operatorname{div}(\vec{v}) \operatorname{div} \vec{I} \right] + \\ &+ \mu \operatorname{div} \left[\operatorname{grad} \vec{v} + \operatorname{grad}^T \vec{v} \right] = \lambda \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) + \mu \nabla^2 \vec{v} + \mu \operatorname{div}(\operatorname{grad}^T \vec{v}), \end{aligned} \quad (\text{U.162})$$

¹²¹Takie równania są wykorzystywane do rozwiązywania zagadnień przepływów dwufazowych przy użyciu metody SIMPLE lub Runge-Kutty, gdzie same współczynniki są stabilizowane w postaci podprogramów. (patrz: M. BANASZKIEWICZ, Zjawiska powierzchniowe w nierównowagowych przepływach wody z heterogenicznym odparowaniem rozprężnym, *ZN IMP* **506/1465/99** str 1-157, 1999 (Praca Doktorska), D.KARDAŚ, Z. BILICKI, Zbiór funkcji termodynamicznych dla obszaru metastabilnego wody i pary, *ZN IMP*, **449/1399/95**, 1-136, 1995)

we współrzędnych kartezjanskich powyższe wyrażenie upraszcza się:

$$\operatorname{div} \overleftrightarrow{\tau} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} \right) \vec{e}_i = \left[\lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \vec{v}_j \right) + \mu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v_j \right) \right] \vec{e}_i. \quad (\text{U.163})$$

Pamiętając, iż w myśl założenia Stokesa $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ po podstawieniu do równania pędu otrzymujemy równanie Naviera-Stokesa:

$$\partial_t (\rho \vec{v}) + \operatorname{div} (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) + \operatorname{grad} p = \lambda \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{v}) + \mu \nabla^2 \vec{v} + \mu \operatorname{div} (\operatorname{grad}^T \vec{v}) + \rho \vec{b}, \quad (\text{U.164})$$

które dla płynu nieściśliwego $\rho = \text{const}$, $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ sprowadza się do :

$$\rho \partial_t (\vec{v}) + \rho (\operatorname{grad} \vec{v}) = -\operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \mu \operatorname{div} (\operatorname{grad}^T \vec{v}) + \rho \vec{b}. \quad (\text{U.165})$$

Zaś po podzieleniu przez gęstość i wykorzystaniu definicji pochodnej materialnej mamy:

$$\frac{d}{dt} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu = \mu/\rho \nabla^2 \vec{v} + \nu \operatorname{div} (\operatorname{grad}^T \vec{v}) + \vec{b}, \quad (\text{U.166})$$

gdzie $\nu = \mu/\rho$ jest współczynnikiem chętnie używanym w analitycznych przekształceniach i obliczeniach. Nadano mu nazwę **współczynnika lepkości kinematycznej**. Po podstawieniu równań stanu $p = p(\rho, T)$ równanie pędu jest całkowicie wyrażone tylko przy pomocy wektora zmiennych podstawowych Q .

Równanie Fouriera-Kirchhoffa, czyli Bilans energii w zmiennych
 $Q = (\rho, \vec{v}, T)$

¹²² Zauważmy, że pochodna materialna energii sprężystej, z uwagi na $u = u(T, v)$ wynosi

$$\rho \frac{d}{dt} u = \partial_t (\rho u) + \operatorname{div} (\rho u \vec{v}) = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial T} \Big|_v \dot{T} + \frac{\partial u}{\partial v} \Big|_T \dot{v} \right), \quad (\text{U.167})$$

ponieważ (patrz U2.3)

$$\frac{\partial u}{\partial v} \Big|_T = \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right) \Big|_v - p \right] \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial u}{\partial T} \Big|_v = c_v, \quad (\text{U.168})$$

¹²² J. FOURIER, *Theorie Analytique de la Chaleur*, Paris, 1822 G. KIRCHHOFF, Ueber den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung, *Ann Physik* **134**, 177-193, 1868

to równanie energii całkowitej przybierze **postać Fouriera-Kirchhoffa** na pole temperatury:

$$\begin{aligned} \rho c_v \frac{d}{dt} T + \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \Gamma \right) \right] + \operatorname{div} \left[\rho \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \Gamma + \frac{p}{\rho} \right) \vec{v} \right] = \\ = -\rho \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right) \Big|_v - p(v, t) \right] \frac{d}{dt} v + \lambda \operatorname{div} (\operatorname{grad} T) + \\ + \operatorname{div} \left[-\frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \vec{v}) \vec{v} + \mu (\nabla \otimes \vec{v} + \vec{v} \otimes \nabla) \vec{v} \right]. \end{aligned} \quad (\text{U.169})$$

Jest to równanie energii wyrażone tylko poprzez zmienne podstawowe $Q = (\rho, \vec{v}, T)$. Można je dalej przekształcać wykorzystując równanie ciągłości, bowiem:

$$\rho \frac{d}{dt} v = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \operatorname{div} \vec{v}. \quad (\text{U.170})$$

Dla gazu doskonałego termiczne równanie stanu ma postać $pv = RT$ stąd człon:

$$T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right) \Big|_v - p(v, t) \equiv 0 \quad (\text{U.171})$$

upraszcza się. Dla płynów nieruchomych, nie umieszczonych w polu ciężenia równanie Fouriera-Kirchhoffa przybiera klasyczną postać

$$\rho c_v \frac{\partial}{\partial t} T = \lambda \Delta T. \quad (\text{U.172})$$

Inną postać równania Fouriera-Kirchhoffa uzyskamy wychodząc z bilansu energii cieplnej (U.75) lub (U.80):

$$\rho \frac{d}{dt} u = \operatorname{div} \vec{q} - \left(\vec{\tau}^c - p \vec{I} \right) \cdot \operatorname{grad} \vec{v}. \quad (\text{U.173})$$

Korzystając z (U.167), (U.168), (U.170) otrzymujemy

$$\rho c_v \frac{d}{dt} T = \operatorname{div} \vec{q} - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right) \Big|_v \operatorname{div} \vec{v} - \left(\vec{\tau}^c \cdot \operatorname{grad} \vec{v} \right). \quad (\text{U.174})$$

Jest to równanie bilansu energii cieplnej wyrażone w zmiennych $Q = (\rho, \vec{v}, T)$. Upraszczając równanie konstytutywne na $\vec{q}$ do równania Fouriera, a dyfuzyjny strumień pędu do strumienia lepkiego wyrażamy (U.174) jako:

$$\rho c_v \frac{d}{dt} T = \lambda \operatorname{div} [\operatorname{grad} T] - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right) \Big|_v \operatorname{div} \vec{v} + 2D_v, \quad (\text{U.175})$$

gdzie $D_v = -\vec{\tau} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = -\vec{\tau} \cdot \vec{d} = -\tau_{ij} d_{ij}$ jest tą częścią funkcji dysypacyjnej Rayleigha która odnosi się do lepkości płynu.

U.1.4.9 Kryteria Podobieństwa Przepływów

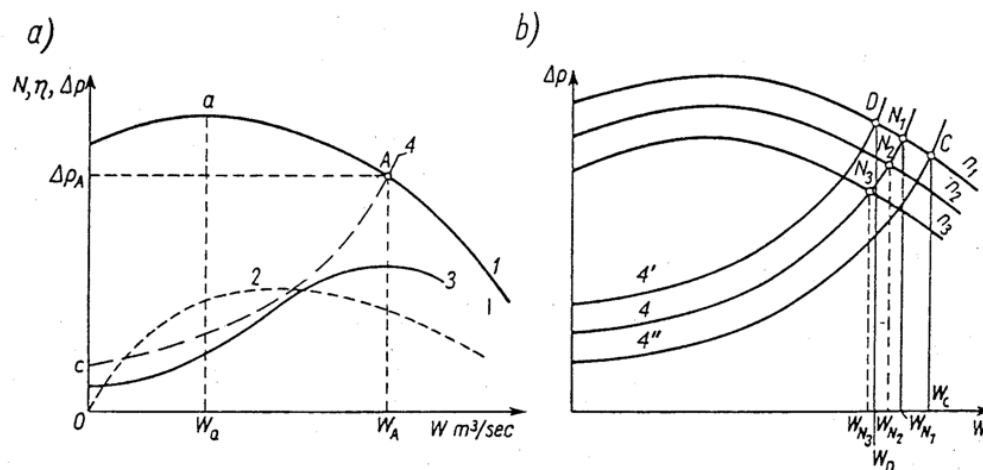
Producent urządzenia przepływowego, wprowadzając swój wyrób na rynek musi podać w sposób zwarty jego charakterystyki integralne, potrzebne z kolei nabywcy-inwestorowi do obliczenia pracy całości inwestycji. Przykładowo, producent wentylatora promieniowego, przeznaczonego do celów odpylania stanowiska roboczego winien dołączyć do urządzenia jego charakterystyki w oparciu, o które projektant dobiera pozostałą część instalacji. Podstawowymi charakterystykami wentylatora (podobnie innych urządzeń przepływowych) są (Rys.U.11):

- krzywa spiętrzenia w funkcji objętościowego wydatku $\Delta p = f(\dot{V})$ (nr 1)
- krzywa sprawności w funkcji objętościowego wydatku $\eta = f(\dot{V})$ (nr 2)
- krzywa zużycia mocy $N_u = f(\dot{V})$ (nr 3)
- krzywa oporów urządzenia i instalacji $\Delta p_{op} = f(\dot{V})$ (nr 4)

Z powyższych wykresów wynika że zakres pracy $0 < \dot{V} < \dot{V}_0$ jest niestateczny oraz że punkt przecięcia się krzywej spiętrzenia z krzywą oporów (A) jest **nominalnym punktem pracy**. Sposób pomiaru powyższych krzywych opisany jest stosownymi normami i stanowi on poważne¹²³ zadanie dla eksperymentalnej termodynamiki. Producent opracowuje również rodzinę krzywych spiętrzenia w zależności od dławienia przepływu poprzez ograniczenie przekroju klapami umieszczonymi w przewodach (krzywe 4', 4, 4''). Ten wykres charakteryzuje możliwości regulacyjne wentylatora i podaje jego maksymalne możliwości regulacji dławieniowej (ilościowej) $\dot{V}' < \dot{V} < \dot{V}''$ lub przez zmianę obrotów ($V_{n1} > V_{n2} > V_{n3}$). Charakterystyki takie dołączone są do sprzedawanego urządzenia w postaci elektronicznej wygodnej do użycia w obliczeniach projektowych 0D.

Pomierzenie i opracowanie charakterystyk dla wentylatora przetłaczającego powietrze atmosferyczne o maksymalnym sprężu dochodzącym do 1000 Pa i wydatku objętościowym do 5 m³/s nie przedstawia większych trudności dla laboratorium badawczego posiadanego przez producenta. Ale opracowanie charakterystyk dla wentylatora przetłaczającego gorące gazy produkowane w ilości 50 m³/s stanowi olbrzymi problem techniczny i finansowy. Podobne problemy napotykają producenci innych urządzeń przepływowych np. producent zaworów odcinających pary świeżej o parametrach $T=600^\circ\text{C}$

¹²³Zadanie to na ogół zlecane jest wyspecjalizowanej firmie badawczej. Słowo „poważnie” dobrze oddaje wagę i skalę problemów technicznych i finansowych.



Rysunek U.11. Podstawowe charakterystyki wentylatora

i $p=30$ MPa pracującym nominalnie dla wydatku $\dot{m} = 180 \text{ kg/s}$, lub producent pompy wysokociśnieniowej (80 MPa) w której czynnikiem roboczym jest woda z piaskiem.

Liczby Kryterialne

Z uwagi na olbrzymie gabaryty urządzenia i koszt jego budowy i badań, pomiary charakterystyk przeprowadza się na prototypach w skali od 1:2 do 1:20. Często zmienia się rodzaj czynnika roboczego, zastępując drogi czynnik oryginalny tańszą podróbką. Zmienia się również parametry pracy, ciśnienie nominalne, temperaturę i masowy wydatek kierując się tu tańszymi urządzeniami pomiarowymi. Powstają **dwa podstawowe pytania**:

- Jakie warunki należy spełnić aby przepływ w modelu fizycznym był podobny do przepływu w obiekcie rzeczywistym?
- Jak przejść z charakterystyk otrzymanych na modelu fizycznym do charakterystyk rzeczywistych?

Odpowiedzi na powyższe pytania daje **Teoria Podobieństwa Przepływów** będąca jedną z głównych branż **Eksperymentalnej Termomechaniki Płynów**.¹²⁴ Eksperymentatorzy chętnie sięgają do opracowanych przez siebie

¹²⁴Patrz: M. TRELA, *Wymiana ciepła i masy w przepływie mgłowym*, Zesz. Nauk. IMP PAN, **154/1069/83**, 1983

I.L. SEDOV, *Analiza wymiarowa i teoria podobieństwa w mechanice*, WNT, Warszawa,

bezwymiarowych „Liczb Kryterialnych”. Są one obmyślane w celu utrzymania podobieństwa przepływów. Inaczej mówiąc dwa przepływy będą podobne, jeśli będą miały identyczne liczby kryterialne typu liczba Macha, Reynoldsa, Prandtla, Nusselta, Eulera, etc.

Głównym zadaniem technicznym, jakie ma przed sobą Teoria Podobieństwa Przepływów polega na zagwarantowaniu w miarę pełnego podobieństwa przepływów. Podobieństwo geometryczne (dokładnie wykonany model w skali) jest podstawowym warunkiem i pierwszym wymaganym podobieństwem. Wykonanie modelu ze ściankami o podobnej od oryginału chropowatości jest, na ogół, najtrudniejszą częścią zadania.

Innym podstawowym warunkiem podobieństwa przepływu jest takie dobranie lepkości modelowego płynu roboczego, aby otrzymać te same opory przepływu i te same siły tarcia. Trzeba pamiętać, że z oporami związana jest również odpowiednia chropowatość powierzchni modelu. Gdyby opory ruchu w dwóch geometrycznie podobnych przepływach spowodowane były wyłącznie lepkością czynnika to posiadanie przez oba przepływy tej samej bezwymiarowej lepkości gwarantowałoby podobieństwo sił tarcia i oporów. Bezwymiarowa lepkość nazywana jest również **liczbą Reynoldsa** (Re). Liczba ta, mimo iż lepkość w przepływie niewiele się zmienia (w zależności od temperatury), jest wielkością lokalną zmieniającą swą wartość od punktu do punktu. W języku potocznym, przyjęło się jednak mówić o liczbie Reynoldsa jako o liczbie integralnej określonej w odniesieniu do warunków na wlocie do urządzenia.

Podobnym będą te przepływy, które mają podobne pola prędkości. Bezwymiarową liczbą, która zapewnia podobieństwo pola prędkości (tylko długości wektora prędkości nie kierunku) jest **liczba Macha**, która określa stosunek długości wektora prędkości do lokalnej prędkości dźwięku. Liczba ta jest określona albo jako lokalna liczba w każdym punkcie przepływu albo jako globalna liczba odniesiona do warunków integralnych na wlocie do urządzenia.

Podobnym będą przepływy, które mają podobne pola gęstości płynu roboczego. Gęstość występuje w różnych aspektach, jednak najczęściej objawia się w wielkości sił bezwładności. Siły te odniesione do ciśnienia defini-

ują bezwymiarową **liczbę Eulera**. Bezwymiarowy związek gęstości i przyspieszenia ziemskiego nosi nazwę **liczby Froude’a**.

Musimy zapewnić również warunki podobieństwa sprężystych cech płynu, typu ciepło właściwe przy stałej objętości i stałym ciśnieniu. Bezwymiarową liczbą pojemności cieplnej jest **liczba Gertza**.

Oba porównywane płyny muszą mieć podobną rozszerzalność cieplną. Bezwymiarowym współczynnikiem rozszerzalności cieplnej jest **liczba Grashofa**.

W płynach barotropowych, zmianę gęstości cieczy w zależności od ciśnienia określa termiczne równanie stanu. Oba porównywane płyny będą więc miały tę samą zależność konstytutywną, jeśli będą miały identyczną **liczbę Archimedes**a.

Aby oba porównywane płyny były podobne muszą mieć podobne przewodnictwo cieplne. Bezwymiarowym współczynnikiem przewodzenia ciepła jest **liczba Prandtla**.

Jeśli w porównywanych przepływach mamy do czynienia z mieszaninami w których zachodzi dyfuzja jednego ze składników to aby zapewnić podobieństwo należy zapewnić równość bezwymiarowego współczynnika dyfuzji zwanego **liczbą Schmidta**.

Powyższy proces rozumowania rozciągamy na wszystkie inne stałe konstytutywne definiujące własności materiału. Przykładowo, w płynie newtonowskim posiadającym trzy lepkości k_1, k_2, k_3 (U.129) występować będą trzy bezwymiarowe współczynniki lepkości, które są nazywane **pierwszą, drugą i trzecią liczbą Reynoldsa**. Oznacza to, iż różne zjawiska fizyczne mają różne stałe w modelu matematycznym – te stałe wyrażone w sposób bezwymiarowy tworzą różne liczby kryterialne. Jeśli stała bezwymiarowa tego samego współczynnika otrzymywana jest w różny sposób to otrzymane w ten sposób liczby kryterialne są od siebie zależne. Przykładem takiego związania są **liczby Nusselta i Stanton**a określające bezwymiarowy współczynnik przejmowania ciepła.

Poniżej podajemy tabelę, w której przedstawiamy liczby kryterialne i zjawiska im odpowiadające.

Wrzenie

Liczba Jakoba,

Wypór

Liczba Archimedes, Russela

Kapilarność

Liczba Webera, Levertta, Kossovicha

Siły Ośrodkowe

Liczba Ekmana, Taylora, Rossby

Reakcje Chemiczne

Liczba Arrheniusa, Damköhlera

Kondensacja

Liczba Mc Adamsa, Jacoba, Gukhmana

Konwekcja

Liczba Grashoffa, Rayleigha, Marangoni

Dyfuzja masy

Liczba Lewisa, Darcy

Przewodnictwo cieplne

Liczba Prandtla, Nusselta, Stanton, Plecleta

Siły Ciężkości

Liczba Froude, Galileusza, Stokesa

Radiacja

Liczba Boltzmanna, Stefana.

Napięcie powierzchniowe

Liczba Webera

U.1.4.10 Odwracalny i nieodwracalny potencjał

Oprócz przedstawionego tu klasycznego podejścia opartego na fenomenologicznych bilansach masy, pędu i energii w termomechanice stosowane jest podejście wariacyjne, w którym nie są wymagane jakiejkolwiek informacje o bilansach masy, pędu i energii a całość informacji o równaniach modelu tkwi w postaci funkcjonału energetycznego, którego minimalizacja jest związana z rozwiązaniem kompletu równań bilansu masy, pędu i energii. Oprócz energii kinetycznej, potencjalnej funkcjonał taki zawiera zwykle

- energię wewnętrzną u – zwaną potencjałem zjawisk odwracalnych,
- energię dyssypowaną D – zwaną funkcją dyssypacyjną Rayleigha.

W podejściu wariacyjnym może się zmienić status równania energii, które może stać się tylko pewną tożsamością, zaś jego rolę zaczyna przejmować równanie bilansu entropii właściwej. Podejście używające u i D , ma dużo wspólnego z oryginalnymi zasadami wariacyjnymi Gilberta, jest ostatnio coraz częściej używane w literaturze zwłaszcza, gdy stosujemy modele opisowe bardziej

złożone czynniki robocze (np. ciekłe kryształy). Wstęp do metod wariacyjnych termomechaniki płynów znajdzie czytelnik w monografii Stanisława Sieniutycza oraz w licznych jego artykułach ¹²⁵.

Znaczenie energii wewnętrznej

O energii wewnętrznej właściwej u [J/kg] wspomniano już przy okazji równań bilansowych i hipersprężystych równań konstytutywnych stan płynu roboczego. Wielkość ta jest trudna do sprecyzowania, nie jest bezpośrednio mierzalna, zakłada się o niej, że magazynuje sprężyste różne formy energii, które w niewidocznym, nierozpoznawalnym dla nas sposobie ulegają ciągłej konwersji. Energia wewnętrzna nabrała znaczenia, jako pojęcie pierwotne termomechaniki, od momentu gdy Carnot w 1824 roku uznał ją za najważniejszą cechę czynnika roboczego- cecha, która musi być zachowana w cyklu termomechanicznych przemian.

Znaczenie funkcji dysypacyjnej Rayleigha

Obok energii wewnętrznej u , drugim ważnym potencjałem na którym zasadza się modelowanie przepływów jest potencjał Rayleigha ¹²⁶ Φ . Jeśli potencjał energii wewnętrznej jest odpowiedzialny za zjawiska całkowicie odwracalne (sprężyste) to potencjał dysypacyjny Rayleigha odpowiada za całkowicie nieodwracalne zjawiska. Potencjał dysypacyjny Φ , interpretowany jest jako wydajność źródła dysypującego (degradującego) energię dysponowaną (wewnętrzną, związaną (przetłaczania), kinetyczną i ciężenia). Ma on stosunkowo przejrzystą strukturę. Jeśli bowiem w różnych równaniach bilansu i ewolucji mikrostruktury występują zjawiska nieodwracalne to w równaniu bilansu energii całkowitej wszystkie składniki dysypujące mają swe odpowiedniki wymiany i konwersji tak że w efekcie finalnym zanika źródło energii całkowitej w myśl zasady iż energia z niczego nie powstaje lecz zmienia tylko

¹²⁵S.SIENIUTYCZ, *Conservation Laus in Variational Thermo-Hydrodynamics*, Kluwer Academic Pub. Dordrecht, 1994.

S. SIENIUTYCZ, *From a least action principle to mass action law and extended affinity*, Chem Eugug Sci. **42** 2697-2711, 1987

S. Sieniutycz, *The variational principle replacing the principle of minimum entropy production for coupled nonstationary heat and mass transfer processes with convective motion and relaxation*, lut. J. Heat Mass Transfer, **23**, 1183-1193, 1980

S. SIENIUTYCZ *Podejście wariacyjne w termodynamice nierównowagowej*, Współczesne kierunki w Termodynamice, eds. Z.Bilicki, T Mihelewa, S. Sieniutycz, wyd. IMP PAN, H9-156,2001

¹²⁶J. S. RAYLEIGH, *Some general theories relating to vibrations*, Proc. Lond. Math. Soc. **4**, 357-368, 1873

swoje postaci. Wymiarem Φ jest objętościowy strumień energii $[J/m^3]$.

Będą w funkcji dysypacyjnej występować strumienie dyfuzyjne $\mathcal{F}^\nu$ (wektory – strumień ciepła i tensory – lepki strumień pędu) pomnożone przez gradienty wielkości podstawowych (bilansowanych) oraz iloczyny nieodwracalnych źródeł i wielkości podstawowych. Z matematycznego punktu widzenia „wnętrze” funkcji dysypacyjnej Φ składa się ze skalarów, wektorów i tensorów drugiego a czasami nawet i wyższego rzędu.:

$$\Phi = \sum_a^{n_a} J_a X_a + \sum_b^{n_b} \vec{J}_b \cdot \vec{X}_b + \sum_c^{n_c} \overleftrightarrow{J}_c \cdot \overleftrightarrow{X}_c \geq 0, \quad (\text{U.176})$$

gdzie sumy rozciągają się po indeksach a, b, c .

Nauką, która szczególnie zajmuje się badaniem zjawisk nieodwracalnych (nierównowagowych) jest **Termodynamika Nierównowagowa**. Nazywa ona strumienie i nieodwracalne źródła ($J_a, \vec{J}_b, \overleftrightarrow{J}_c$) uogólnionymi strumieniami termodynamicznymi, zaś występujące w iloczynach siły ($X_a, \vec{X}_b, \overleftrightarrow{X}_c$) nazywa bodźcami termodynamicznymi. Wyrażając słownie (U.176) mówimy, że funkcja dysypacyjna Rayleigha jest sumą iloczynów bodźców termodynamicznych $X_\alpha \equiv (X_a, \vec{X}_b, \overleftrightarrow{X}_c)$ i skoniugowanych z nimi uogólnionych strumieni $J_\alpha = (J_a, \vec{J}_b, \overleftrightarrow{J}_c)$. Dobór bodźców termodynamicznych i uogólnionych strumieni termodynamicznych jest taki iż w stanie równowagi termodynamicznej, tzn. wtedy gdy zanikają bodźce $X_\alpha = 0$, jest równa zero również funkcja dysypacyjna.

Uogólnione strumienie J_α , rozumiane jako skutki działania bodźców termodynamicznych są, w ogólnym przypadku funkcjami wszystkich bodźców X_β , $\alpha \neq \beta$ i ich gradientów przestrzennych $\text{grad} X_\alpha$ i czasowych $\partial_t X_\alpha$. Dlatego postulowane równanie konstytutywne między $\text{grad} X_\alpha$ i J_α mają najczęściej następującą postać:

$$J_\alpha = \frac{\delta \Phi}{\delta X_\alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial X_\alpha} - \text{div} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nabla X_\alpha} \right) - \partial_t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \partial_t X_\alpha} \right), \quad (\text{U.177})$$

gdzie przez $\frac{\delta \Phi}{\delta X_\alpha}$ oznaczono uogólnioną pochodną wariacyjną Volterry która dopuszcza różniczkową postać równania konstytutywnego i jego nieliniowość.

Klasycznymi związkami fenomenologicznymi są liniowe związki Onsagera¹²⁷

$$J_{\alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial X_{\alpha}} = \mathbf{L}_{\alpha\beta} X_{\beta}, \quad (\text{U.178})$$

opartej na klasycznej, oryginalnej funkcji dysypatywnej Rayleigha mającej postać kwadratową

$$\Phi = \frac{1}{2} \mathbf{L}_{\alpha\beta} X_{\alpha} X_{\beta}. \quad (\text{U.179})$$

Macierz współczynników fenomenologicznych $\mathbf{L}_{\alpha\beta}$ dopuszcza efekty krzyżowe między strumieniami i bodźcami, ale tylko tego samego rzędu oraz rzędu o dwa mniejszego i dwa większego (np. skalar i tensor drugiego rzędu, wektor i tensor trzeciego rzędu). Dla kontinuu isotropowych efekty krzyżowe ogranicza tzw. **Zasada Symetrii** opracowana przez P. Curie (1894), która mówi, że w ośrodku isotropowym nie mogą na siebie wpływać wielkości tensorowe różniące się o nieparzystą liczbę rzędów¹²⁸. Efekty krzyżowe najczęściej występują między zjawiskami opisywanymi bodźcami wektorowymi takimi jak:

- liniowe prawo Fouriera przewodzenia ciepła,
- liniowe prawo Ohma przewodnictwa prądu elektrycznego,
- liniowe prawo Ficka dyfuzji składników.

Lars Onsager (1931) zauważył, że współczynniki fenomenologiczne spełniają prawo symetrii

$$\mathbf{L}_{\alpha\beta} = \mathbf{L}_{\beta\alpha}. \quad (\text{U.180})$$

W analogii do zjawisk sprężystych dla których istnieje potencjał (hipersprężystych) w postaci energii wewnętrznej u , można powiedzieć, iż materiał dla którego istnieje potencjał dysypatywny w postaci funkcji Rayleigha jest **materiałem hiper-dysypującym**.

¹²⁷L. ONSAGER, Reciprocal relations in irreversible processes, *Phys. Rev.* **37**, 405-426, **38**, 2265-2279 (1931)

¹²⁸P. CURIE, Sur la symetrie dans les phenomenes physiques symetrie d'un champ electrique et d'un magnetique, *J. Physique*, **3**, 393-415, 1894

Janusz Badur

Pięć wykładów ze współczesnej termomechaniki płynów

(skrypt dla studentów IZK)

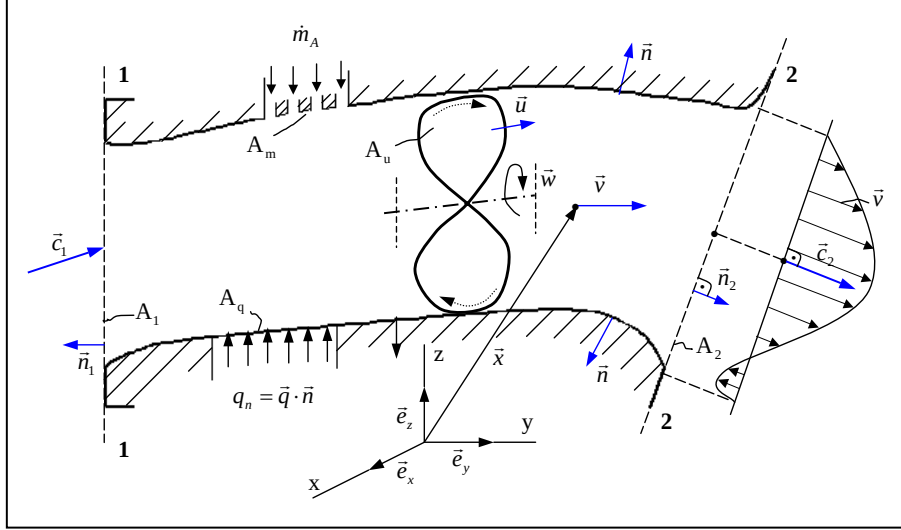
U.1.10

Szczegółowe wyprowadzenie bilansu energii w postaci inżynierskiej ($3D \rightarrow 0D$)

Bilans energii scałkowany w objętości urządzenia energetycznego – Definicje wielkości integralnych 0D – Definicje strumieni energii 0D – Definicje strumieni pracy, ciepła i pracy chemicznej – Bilans energii 0D – Przejście do postaci przyrostowej w czasie (**Pierwsza Zasada Termodynamiki**) – Postać integralna w czasie i przestrzeni – Komentarz do prawa równoważności ciepła i pracy – Dowody pośrednie słuszności pierwszej zasady termodynamiki – Pierwsza Zasada Termodynamiki dla procesów odwracalnych – Bilans energii w odniesieniu do jednego kilograma masy czynnika roboczego – Bilans energii dla przepływów izoenergetycznych – bilans energii czynnika transportującego ciepło i pracę – Dowody pośrednie słuszności zasady zachowania energii – **Równanie Bernoulliego-Darcy’ego** jako integralna (0D) postać bilansu energii mechanicznej – Termodynamiczna interpretacja równania Bernoulliego-Darcy’ego – Prototyp Rankine’a dla bilansu energii mechanicznej – **Równanie Carnota-Clausiusa** jako integralna (0D) postać bilansu energii cieplnej – Równanie Carnota-Clausiusa w układzie przepływowym – Bilans 0D energii całkowitej czyli suma równań Bernoulliego-Darcy’ego i Carnota-Clausiusa – Pierwsza zasada termodynamiki dla układów zamkniętych – Komentarze – **Pierwsza zasada termodynamiki dla układów otwartych** – Uwaga dotycząca pochodzenia pojęcia entalpii całkowitej – Bilans energii Zeunera w przepływie – Parametry stagnacji (spiętrzenia) – Wykresy energii Molliera – Struktura integralnych bilansów

U.1.10.1 Bilans energii scałkowany w objętości urządzenia energetycznego

Równanie bilansu energii całkowitej rozpatrywane jest w identycznym jak poprzednio kanale. Składa się on z powierzchni A_m , przez które przenika masa (energia chemiczna) i powierzchni A_u i A_q przez które może przenikać energia mechaniczna (praca) i cieplna (ciepło). Całkując równanie (U.71)



Rysunek U.12. Schemat urządzenia energetycznego posiadającego jeden wlot 1-1, jeden wylot 2-2, powierzchnię grzaną A_q , powierzchnię ruchomą A_u , powierzchnię wymiany masy A_m , oraz pozostałą powierzchnię A_{wall}

energii całkowitej (właściwej) $e + \Gamma = u + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}$ w obszarze V , otrzymujemy

$$\iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho e + \rho z g) + \operatorname{div} \left[\rho \left(e + \frac{p}{\rho} + z g \right) \vec{v} \right] = \operatorname{div} \left[\vec{\tau}^c \vec{v} + \vec{q}^c \right] \right\} dV \quad (\text{U.181})$$

i po zastosowaniu twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego i własności komutowania całki przestrzennej z eulerowską pochodną po czasie, mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_V \rho (e + z g) dV \right) + \iint_{\partial V} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{\vec{v}^2}{2} + z g \right) (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \\ = \iint_{\partial V} \left[\vec{v} \vec{\tau}^c \cdot \vec{n} + \vec{q}^c \cdot \vec{n} \right] dA. \end{aligned} \quad (\text{U.182})$$

U.1.10.2 Definicje Wielkości Integralnych

Definiujemy dalej:

entalpię całkowitą (uogólnioną)¹²⁹

$$i_e = u + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + zg \quad [\text{J/kg}] \quad (\text{U.183})$$

oraz całkowitą energię

$$E = \iiint_V (\rho e + \rho zg) dV \quad [\text{J}] \quad (\text{U.184})$$

straty ($\rho s_e = \rho D + \rho \dot{s}_e$) (w tym sformułowaniu nie występują jawnie)

$$\Delta \dot{E}_{1,2} = \iiint_V \rho D dV \quad [\text{J/s}] \quad (\text{U.185})$$

w postaci źródeł wewnętrznych energii takich jak ciepło reakcji chemicznych i radiacji.

U.1.10.3 Definicje Strumieni Energii 0D

Przymijmy, że strumienie dyfuzyjne energii mechanicznej $\overleftrightarrow{\tau}^c \vec{v}$ i cieplnej $\vec{q}^c$ są pomijalnie małe w przekrojach wlotowych i wylotowych, A_1 , A_2 . Obliczenie całki powierzchniowej po powierzchniach wlotu i wylotu, daje, analog równania

$$\begin{aligned} & \iint_{A_1} [i_{e1} (\rho_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1)] dA + \frac{\partial}{\partial t} E + \iint_{A_u} \left(\vec{u} \overleftrightarrow{\tau}^c \cdot \vec{n} - p \vec{u} \cdot \vec{n} \right) dA + \\ & + \iint_{A_q} \vec{q}^c \cdot \vec{n} dA + \iint_{A_{in}} h_m \dot{m}_A dA = \iint_{A_2} [i_{e2} (\rho_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2)] dA, \end{aligned} \quad (\text{U.186})$$

¹²⁹Oznaczenie i_e przyjęto za GUNDLACHEM [112]. A. MILLER [234] nazywa i_e energią uogólnioną. Taka definicja również jest poprawna pod warunkiem, iż rozróżniamy „energię całkowitą” (zasób) od „energii uogólnionej” (strumień). Entalpia uogólniona, co do wartości jest równa entalpii spiętrzenia, którą oznacza się zwykle indeksem (o) tzn. i_o , co oznacza, iż entalpię całkowitą osiąga płyn po zahamowaniu adiabatycznym bez wykonania pracy użytecznej do prędkości równej zero i sprowadzeniu płynu do poziomu odniesienia.

Pojęcie „entalpii” jako sumy energii wewnętrznej i energii przetłaczania, wprowadził do termodynamiki technicznej Richard Mollier nazywając tę wielkość „Wärmeinhalt” (zawartość ciepła) lub „Totalwärme” (ciepło całkowite) i oznaczając ją literą: i (od słowa *Inhalt*). Prawdopodobnie słowo „entalpia” wprowadził J. Gibbs (1877). Władysław Natanson (1890) nie nadaje jej nazwy, ale oznacza literą h . W różnych językach termin entalpia stosowany jest od lat trzydziestych (ang. *Enthalpy*, niem. *Enthalpe*). W literaturze polskiej, za CHRZANOWSKIM [56], używany był aż do lat sześćdziesiątych termin *cieplik*, którego źródłosłów jest jak najbardziej rodzimy [169].

gdzie pojawia się prędkość unoszenia powierzchni ruchomej $\vec{u}$ z uwagi na trójkąt prędkości $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ oraz warunek zerowania się prędkości względnej $\vec{w}|_{A_u} = 0$ na powierzchni ruchomej.

Definiujemy strumień entalpii uogólnionej w przekrojach A_1 , A_2 jako ([112], str 49):

$$\dot{E}_1 = \iint_{A_1} i_{e1} (\rho_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_2) dA, \quad (\text{U.187})$$

$$\dot{E}_2 = \iint_{A_2} i_{e2} (\rho_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2) dA. \quad (\text{U.188})$$

U.1.10.4 Definicja Strumieni Pracy, Ciepła i Pracy Chemicznej

Oznaczamy przez $\dot{L}_{1,2}$ [J/s] wielkość w literaturze anglosaskiej zwaną *working*, a w krajowej literaturze oznaczającą *moc mechaniczną* (praca techniczna¹³⁰ w czasie) a przez $\dot{Q}_{1,2}$ [J/s] wielkość zwaną *heating*, która w języku polskim nazywana jest *mocą cieplną* (ciepło pobierania w czasie), oraz przez $\dot{Q}_{1,2}^{(m)}$ moc energii chemicznej (energia chemiczna nie ma krótkiej nazwy tak jak *ciepło* i *praca*)

$$\dot{L}_{1,2} \equiv - \iint_{A_u} (\vec{u} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} - p \vec{u} \cdot \vec{n}) dA \quad [\text{J/s}], \quad (\text{U.189})$$

$$\dot{Q}_{1,2} \equiv \iint_{A_q} \vec{q}_c \cdot \vec{n} dA \quad [\text{J/s}], \quad (\text{U.190})$$

$$\dot{Q}_{1,2}^{(m)} \equiv \iint_{A_q} h_m \dot{m}_A dA \quad [\text{J/s}], \quad (\text{U.191})$$

U.1.10.5 Bilans energii 0D

Ostatecznie, dzięki powyższym definicjom otrzymujemy integralne (na poziomie objętości urządzenia), ale lokalne w czasie równanie bilansu energii mające „postać” spójną, ale nie identyczną z postacią **Pierwszej Zasady Termodynamiki**:

¹³⁰Natanson używa określenia **praca przeistaczania** rezerwując dla niej w oznaczeniach literę L. Natomiast pracę absolutną nazywa **pracą pobierania** i rezerwuje dla niej literę W. Powiada On, iż praca dL przeistacza się, gdy entalpia swobodna przechodzi w entalpię związaną, zaś praca jest pobierana dW gdy energia swobodna przechodzi w energię związaną. Przy czym, praca pobierania jest wykonywana gdy objętość właściwa się zmienia, praca przeistaczania jest wykonywana gdy prężność się zmienia, ciepło jest pobierane gdy entropia się zmienia oraz ciepło jest przeistaczane gdy temperatura się zmienia.

$$\dot{E}_1 + \dot{Q}_{1,2} + \dot{L}_{1,2} + \dot{Q}_{1,2}^{(m)} + \frac{\partial E}{\partial t} = \dot{E}_2. \quad (\text{U.192})$$

Równanie to czytamy jako: Strumień energii dysponowanej czynnika roboczego $\dot{E}_1$ wpływającego do kanału powiększony:

- o pracę dostarczaną na powierzchniach ruchomych,
- o ciepło dostarczane na powierzchniach grzanych,
- o energię chemiczną dostarczaną na ściankach przepuszczalnych,
- o przyrost w czasie energii całkowitej

jest równy strumieniowi energii odpadowej $\dot{E}_2$ opuszczającej kanał.¹³¹

Zauważmy, iż w równaniu bilansu energii całkowitej nie występują jawnie straty energii. W rzeczywistości nie ma ścianek całkowicie nie przepuszczających ciepła (np. radiacja) lub nie przekazujących pracy (np. drgania). Stąd w strumieniach mocy cieplnej i mechanicznej, pewien mały procent całkowitej energii czynnika roboczego musi być utracony z układu i nie może być brany pod uwagę w procesie konwersji.

U.1.10.6 Przejście do postaci integralnej w czasie (Pierwsza Zasada Termodynamiki)

Trzeba sobie uzmysłwić, iż Pierwsza Zasada Termodynamiki dotyczy szerszego obszaru bilansowania niż kanał przepływowy. Może to być całe urządzenie energetyczne, siłownia, miejska sieć ciepła, krajowa sieć energetyczna, itd. W tym celu należy określić **układ termodynamiczny** dla którego będzie wykonywany bilans energii i przyjąć dla niego objętość bilansową zwaną również **osłoną diabatyczną**, która przepuszcza wszelkiego rodzaju energie.

Mając definicję w równaniu (U.192), rozważmy system który posiada dużą ilość wlotów i wylotów, szereg grzanych i ruchomych powierzchni, to sumę **energii dopływającej** do układu oznaczymy jako

$$\dot{E}_{dop} = \sum_{i=1}^{N_{wlot}} \dot{E}_i + \sum_{m=1}^{N_{grzane}} \dot{Q}_i + \sum_{n=1}^{N_{ruchome}} \dot{L}_n + \sum_{k=1}^{N_{masa}} \dot{Q}_k^{(m)}.$$

¹³¹Praca zewnętrzna $\dot{L}_{1,2}$ (moc mechaniczna) nie jest tu automatycznie utożsamiana z pracą techniczną, bowiem pojęcia takie jak praca techniczna (przeistaczania) i ciepło przeistaczania należą do grupy pojęć związanych z bilansem energii wewnętrznej.

Sumę energii „odpływającej” oznaczmy przez

$$\dot{E}_{wyp} = \sum_{n=1}^{N_{wylotu}} \dot{E}_n.$$

Bilans energii (U.192) zapisany dla tak pomyślanego układu termodynamicznego bilansowanego w osłonie zapisujemy jako:

$$\dot{E}_{dop} + \frac{\partial E}{\partial t} = \dot{E}_{wyl}.$$

Gdy ograniczymy się do kanału w którym dostarczana jest praca i ciepło, jeśli zagadnienie jest stacjonarne $\partial_t E = 0$ wtedy energia doprowadzana do układu jest równa energii wyprowadzanej z układu. Urządzenia przepływowe w energetyce (kocioł parowy, odzyskowy, turbina parowa, tłokowy silnik spalinowy) stanowią układy adiabatyczne do których dopływa i z których odpływa energia w sposób ciągły. Jeśli po rozruchu urządzenia osiągnie ono stan ustalony, $\partial_t E = 0$, to wówczas strumienie energii dopływające do układu są równe strumieniom energii opuszczającej układ

$$\dot{E}_{dop} = \dot{E}_{wyl}.$$

Z powyższego równania wynika, że nie można skonstruować maszyny pracującej ciągle, która by oddawała na zewnątrz pracę mechaniczną $\dot{E}_{wyl} = -\dot{L}_{1,2}$ nie otrzymując w zamian energii $\dot{E}_{dop}$ w innej postaci (jak np. energia kinetyczna, energia chemiczna paliwa $\dot{E}_1$, ciepło $\dot{Q}_{1,2}$). Maszyna która by potrafiła pracować za darmo, bez pobierania energii nazywana jest **Perpetuum Mobile Pierwszego Rodzaju**. Stąd pierwowzór Pierwszej Zasady Termodynamiki, pochodzący jeszcze z czasów antycznych i średniowiecznych brzmi: **nie jest możliwym skonstruowanie perpetuum mobile pierwszego rodzaju**.

W przypadku gdy układ jest zamknięty, nie przepływowy, odpadają z równania (U.192) strumienie energii wlotowej $\dot{E}_1$ i wylotowej $\dot{E}_2$. Jeśli dodatkowo pominiemy wpływ energii kinetycznej i ciężenia to energia całkowita (U.184) układu sprowadza się do energii wewnętrznej oznaczonej przez Clausiusa literą U .

$$E = \iiint_V \rho u \, dV = U.$$

Bilans energii dla kanału w którym zamknięto wloty i wyloty oraz nie występują powierzchnie przypuszczające masę (rys. U.12) ma postać;

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \iint_{A_q} \vec{q}^c \cdot \vec{n} \, dA + \iint_{A_u} (p\vec{u} \cdot \vec{n}) \, dA = \dot{Q} + \dot{L}$$

to zamieniając lagrange'owskie kropki na lagrange'owskie przyrosty „ d ” będziemy mogli zapisać klasyczną przyrostową w czasie, ale integralną w przestrzeni postać bilansu energii (Rankine, 1850):

$$dU = dL + dQ, \quad (\text{U.193})$$

która stwierdza że w zamkniętym układzie termodynamicznym w którym nie zmienia się energia kinetyczna i potencjalna, zmiana energii wewnętrznej jest równa sumie pracy zewnętrznej i ciepła zewnętrznego.

Powyższe równanie pojawiło się jako postulat podczas rozpatrywania pracy silników cieplnych, czyli urządzeń profesjonalnie konwertujących ciepło w pracę. Aby więc dać odpowiedź na pytanie, w co zamienia się ciepło przekazane czynnikowi roboczemu należy przekształcić (U.193) w postać właściwą do modelowania silników cieplnych (Clausius, 1850):

$$dQ = dU - dL, \quad (\text{U.194})$$

które mówi, że ciepło dostarczone do czynnika roboczego może przekształcić się w przyrost energii całkowitej oraz w pracę wykonaną przez czynnik. Inaczej mówiąc, może zmienić energię wewnętrzną – zmagazynować ją w sposób odwracalny - oraz część oddać na zewnątrz w postaci pracy.

U.1.10.7 Postać Integralna w Czasie

Rozważmy proces w którym energia zewnętrzna doprowadzona zostaje do układu pod postacią pracy mechanicznej a układ wykonuje szereg przemian i powraca w końcu do stanu początkowego. Tak więc energia wewnętrzna, jako funkcja stanu (objętości i entropii właściwej) przyjmuje wartość początkową – jedynym dopuszczalnym skutkiem wykonanej pracy jest w takich zjawiskach powstanie pewnej ilości ciepła. W zjawisku cyklicznym praca mechaniczna doprowadzona z zewnątrz przetwarza się w ciepło, a czynnik roboczy pozostaje w tym samym stanie.

Na początku rozwoju termodynamiki mierzono pracę i ciepło w różnych jednostkach gdyż nie uważano je za różne postaci jednej energii. Stąd równoważność pracy obiegu i ciepła obiegu zamkniętego zapisywano przy pomocy mechanicznego równoważnika ciepła (ilość pracy jaka powstaje z jednostki ciepła gdy zamienimy ją w pracę)

$$L_{\text{obiegu}} = JQ_{\text{obiegu}}$$

Liczne eksperymenty potwierdziły, że mechaniczny równoważnik ciepła nie zależy od rodzaju czynnika roboczego i ilości przemian w obiegu (w układzie SI $J = 1$). Wartość odwrotną J^{-1} nazywa się cieplnym równoważnikiem

jednostki pracy i oznacza on ilość ciepła jaka wytwarza się z jednostki pracy przy zamianie jej na ciepło.¹³²

Lokalny bilans w czasie łatwo sprowadzić do bilansu w pewnym odcinku czasu np. godziny. Należy go scałkować w zadanym przedziale czasu. Dla obiegów termodynamicznych istnieje pewien szczególny czas, którym jest czas przebycia cząstki czynnika roboczego przez cały obieg i powrotu w miejsce wyjścia. Gdy przekroje 1-1 i 2-2 rozsuwają się coraz bardziej tak, że w końcu zejdą się w jednym miejscu to wtedy $\dot{E}_1 = \dot{E}_2$ zaś indeks 1,2 można zastąpić indeksem obiegu, np. $\dot{Q}_{1,2} \rightarrow \dot{Q}_f$. Całkując w czasie jednego obiegu czynnika roboczego równanie (U.194) otrzymujemy wynik, który słownie wypowiada się jako: energia całkowita czynnika roboczego może się zmieniać na sposób pracy lub na sposób ciepła. Ponieważ jednakże każdy kilogram czynnika roboczego przepływający przez przekrój $A_1 = A_2$ nie zmienia swej energii całkowitej to $\partial_t E = 0$ oraz

$$\boxed{Q_{\text{obiegu}} + L_{\text{obiegu}} = 0} \quad [\text{J}], \quad (\text{U.195})$$

które wypowiadamy słownie jako: strumień ciepła dostarczany czynnikowi roboczemu na grzanych powierzchniach (co najmniej dwu – powierzchni górnego i dolnego źródła) w całym obiegu jest zamieniany na strumień pracy (moc) oddawaną na zewnątrz poprzez powierzchnię ruchomą.

Nie jest poprawna relacja odwrotna – tzn. cały strumień pracy przekazany czynnikowi roboczemu na co najmniej dwu powierzchniach ruchomych zostaje oddany na zewnątrz w postaci strumienia ciepła. Taka odwrotna konwersja nie może mieć miejsca w silniku cieplnym, a jedynie w hipotetycznym urządzeniu zwanym **grzejnikiem mechanicznym**.

Konwersja form energii odbywa się niezależnie od tego czy czynnik roboczy jest idealnym transporterem i konwertorem energii. Bilans (U.195) uwzględnia straty ciepła (gdy to ciepło jest przekazywane do czynnika w celu konwersji) lub straty pracy (gdy to praca jest przekazywana do czynnika w celu konwersji).

¹³²Dla wyznaczenia J wykonywano zawsze doświadczenia, w których praca przetwarza się na ciepło ponieważ doświadczenia ze zjawiskiem odwrotnym, w którym ciepło przetwarza się w pracę są o wiele trudniejsze. Np. gdybyśmy chcieli wyznaczyć J w silniku cieplnym typu turbina musielibyśmy wyznaczyć na podstawie mocy turbiny ilość pracy wykonanej przez czynnik w jednostce czasu i jednocześnie zmierzyć różnicę ciepła doprowadzonego w tym samym czasie do kotła i odprowadzonego w kondensatorze.

U.1.10.8 Komentarz do prawa równoważności ciepła i pracy

Przykładem szczególnym zasady zachowania energii jest prawo równoważności ciepła i pracy w zamkniętym obiegu przemian odkryte na długo przed tym nim sformułowano prawo bilansu wszystkich form energii oraz zdefiniowano pojęcie energii wewnętrznej. Prawo głoszące równoważność $L_{\text{obiegu}} = Q_{\text{obiegu}}$ odkryte zostało najpierw jako równoważność form energii na sposób pracy i ciepła przez lekarza J. R. Mayera (1842) **poprzez obliczenie** (eksperyment wykonał dopiero w 1843 r. J. P. Joule), że energia potrzebna na ogrzanie pewnej ilości wody od 0°C do 1°C odpowiada energii spadku takiej samej ilości wody z wysokości 365 m. Mayer¹³³ obliczył również mechaniczny równoważnik jednostki ciepła J rozpatrując proces w którym cała wykonana praca sprężania powietrza wydziela się w postaci ciepła zaś równoważnik J związany jest ze stosunkiem ciepła właściwego pod stałym ciśnieniem (c_p) do ciepła właściwego w stałej objętości (c_v).

Doświadczenia dla wyznaczenia wartości J po raz pierwszy wykonane zostały w 1843r przez piwowara z Manchesteru Jamesa Prescottta Joule'a¹³⁴. W licznych doświadczeniach Joule znalazł, przyjmując za jednostkę pracy kilogramometr, że mechaniczny równoważnik wynosi 425 kilogramometrów. Badania te powtarzali wielokrotnie Rowland, Edlund, Hirn, Pallet i pozyskane z doświadczeń wartości wahają się w granicach 396.4 do 478.3. Aktualnie, w ramach SI, wartość $J = 1$.

U.1.10.9 Dowody pośrednie słuszności Zasady Zachowania Energii

Wiele wysiłku badawczego, w czasach przed ukonstytuowaniem się termodynamiki i teorii maszyn roboczych i silników poświęcono na zbudowanie maszyny która nie będąc zasilana z zewnątrz mogła by pozostać w ruchu

¹³³R. Mayer, Bemerkungen uber die Krafte der unbelebten Natur, *Ann. Chemie Pharmacie*, **42**, 233-240 1842.

¹³⁴Po wycięciu lasów w Anglii i rozpoczęciu eksploatacji złóż węgla powstało w naturalny sposób zapotrzebowanie społeczne na odkrycie równoważnika (przelicznika) pracy (ludzkiej i końskiej) związanej z wydobywaniem 1 kg węgla na ilość ciepła uzyskanego w wyniku jego spalania. Tak więc pragmatyzm był motywem wysiłków Joule'a - rezultat tej pracy był rewolucyjny w fizyce – odkryto, że **ciepło i praca są różnymi przejawami tego samego**. Znalezienie równoważnika ciepła i pracy dało asumpt do badań nad ogólnym sformułowaniem zasady zachowania energii. Społecznym wyrażeniem równoważności wielu form energii jest pieniądz i system monetarny którego siła i niezmiennosc bierze się z siły i niezmienności Pierwszej Zasady Termodynamiki. Szczegółowe dalsze dane czytelnik znajdzie w:

O. REYNOLDS, Memoir of James Prescott Joule, *Memoirs and Proc. of the Manchester Literary & Philosophical Society*, **60**, 1-196, 1892.

wiecznym. Maszynę która narusza prawo zachowania energii nazwano **perpetuum mobile pierwszego rodzaju**¹³⁵.

Przypomnijmy, że maszyną energetyczną nazywamy świadome złożenie wielu ciał służące do konwersji energii. Wyróżniamy dwa rodzaje maszyn energetycznych: **maszyny robocze** i **silniki**. Maszyny robocze służą do konwersji zewnętrznej energii mechanicznej na określoną pracę stąd maszynę napędzaną silnikiem (pompę, sprężarkę) nazywamy maszyną roboczą. Silnikami nazywamy mechanizmy przy pomocy których przetworzona zostaje w pracę mechaniczną energia doprowadzona do silnika pod inną postacią. Silniki przeznaczone do przetwarzania energii cieplnej w energię mechaniczną nazywamy silnikami cieplnymi. Podstawowym elementem silnika cieplnego jest **czynnik roboczy** który przenosi różne formy energii z jednych miejsc urządzenia w inne. Zmienia on przy tym swój stan (objętość i entropię właściwą) konwertując ciepło w pracę w zespole kolejnych przemian zwanych **obiegiem termodynamicznym**. Czynnik roboczy nazywamy **idealnym** jeśli bez strat pobiera energię ciepłą i magazynuje sprężyste w jednym miejscu, bez strat transportuje w inne miejsce, gdzie bez strat rozładowuje magazyn energii sprężystej.

Zarówno maszyny robocze jak i silniki wykonują zawsze zamknięte obiegi termodynamiczne w których stan czynnika powraca do stanu początkowego: własności fizyczne, chemiczne, energia wewnętrzna, energia kinetyczna przyjmują wartości początkowe zaś bilans energii przyjmuje postać niezależną od rodzaju czynnika roboczego

$$L_{\text{obiegu}} = Q_{\text{obiegu}}.$$

Z równania tego wynika, że zasada zachowania energii silnika w ruchu ustalonym stwierdza, iż w silniku można energię jedynie przetwarzać, a nie wytwarzać (z niczego) ponieważ suma zmian energii wewnętrznej jest zawsze równa zeru (I Równanie Carnota). Bezowocność wysiłków stworzenia perpetuum mobile pierwszego rodzaju może być uznana za podstawę empiryczną pierwszej zasady termodynamiki. Brak takiej maszyny jest pośrednim dowodem stwierdzającym słuszność zasady zachowania energii. Ponieważ w każdym mechanizmie istnieją opory szkodliwe czyli siły działające na ruch wstrzymująco przeto mechanizm poruszający się o ile nie jest zasilany energią z zewnątrz musi zawsze przejść w stan spoczynku po dowolnej liczbie obrotów – te empiryczne fakty stały się podstawą dla wprowadzenia drugiej zasady termodynamiki.

O dowodzeniu Pierwszej Zasady Termodynamiki tak pisał Natanson: Skąd wyprowadzamy samą zasadę? Czy mamy opierać ją, jak to czynił Mayer, na

¹³⁵J. KOZACZKA, *Podstawy Termodynamiki*, wyd. Taurus, Kraków, 1992.

ogólnikowych zdaniach: *causa aequat effectum, ex nihilo nil fit, nil fit ad nohilum*? Dla nauki ścisłej jest to droga zbyt niebezpieczna. Czy mamy, jak Helmholtz, wyprowadzać ją z dynamicznej zasady zachowania energii, odwołując się do przypuszczenia, według którego każde ciało jest układem zachowawczym, złożonym z punktów materialnych, pomiędzy którymi czynne są siły centralne? Dla Termodynamiki jest to podstawa zbyt hypotetyczna. Czy mamy zasadzać ją bezpośrednio na doświadczeniu? Na spostrzeżeniach Rumfolda, Davy’ego, na niemożliwości perpetuum mobile cieplno-dynamicznego, na badaniach Joule’a? Wszystkie te usiłowania przyczyniły się niewątpliwie, jak już wiemy, do ustalenia w nauce zasady równoważności pracy i ilości ciepła. Lecz pomiędzy nielicznymi temi i niezbyt dokładnymi doświadczeniami a prawem, ścisłym i ogólnym, które kładziemy jako fundament nauki, zbyt wielki jest odskok. Jakież jest więc przejście logiczne pomiędzy doświadczeniem a tym prawem? **Niema go.** Odgadujemy podstawowe zasady w Termodynamice, podobnie jak odgadujemy je w Dynamice, uogólniając wyniki doświadczenia, sprowadzając wstępne wnioski, które z przyjętych zasad wynikają.¹³⁶

U.1.10.10 Pierwsza Zasada Termodynamiki dla układów odwracalnych

Idealny, hipotetyczny czynnik roboczy nie stawia oporów ciepłu które ma pobrać i pracy którą ma zmagazynować. Czynnik roboczy im lepszy tym większą energię odwracalną (sprężystą) może zgromadzić w jednym kilogramie substancji, przetransportować ją bez żadnych strat i oddać w innym miejscu w formie pracy lub ciepła. Energia sprężysta niesiona przez czynnik nazywa się **energiją wewnętrzną** i z punktu zgrubnego bilansowania mocy i sprawności urządzenia jest to wielkość najważniejsza. Zdajemy sobie sprawę, iż w urządzeniu rzeczywistym czynnik roboczy traci część energii wewnętrznej na opory transportu ciepła i materii, straty te nie są jednak tak duże aby w fazie projektowania je uwzględniać inaczej jak poprzez pewien ogólny współczynnik strat. Wystarczy jeśli w pierwszym przybliżeniu zapytamy się jaka część energii wewnętrznej zamieniła się w pracę zewnętrzną a jaka w ciepło zewnętrzne. Tą część energii wewnętrznej nazywamy odpowiednio **pracą i ciepłem kompensowanym**. Konwersja ciepła w pracę, która odbywa się na zewnątrz czynnika roboczego ma też swoje odbicie w stanie fizycznym czynnika, bowiem w nim samym następuje sprężysta konwersja jednej formy energii w inną.

Aby bilansować tylko zjawiska sprężyste wystarczy wziąć z czterech cząstkowych bilansów energii (kinetycznej, ciężenia, wewnętrznej, związanej) bi-

¹³⁶W. NATANSON, *Wstęp do fizyki współczesnej*, Wyd Prace Mat-Fiz, W-wa, 1890, str 177.

bilans energii wewnętrznej w postaci zaproponowanej przez Rankinea i Gibbsa¹³⁷:

$$du = dq + dw = Tds - pdv,$$

gdzie dq i dw są ciepłem i pracą kompensowaną, T , s , p , v są czterema parametrami stanu sprężystego czynnika zwanymi **temperaturą termodynamiczną, entropią sprężystą, prężnością i objętością sprężystą**. Pojęcie entropii sprężystej s jako funkcji stanu sprężystego czynnika roboczego wprowadził w 1837 J.W. Rankine – oznaczył ją literą Φ i nazwał funkcją metamorficzną.

U.1.10.11 Bilans energii w odniesieniu do jednego kilograma masy czynnika roboczego

Innym, częściej używanym bilansem energii jest bilans odniesiony do kilograma masy czynnika roboczego. Podstawowe uproszczenie¹³⁸ oparte jest na energetycznym uśrednieniu strumienia entalpii (U.187)

$$\dot{E} = \iint_A i_e (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \dot{m} \frac{\iint_A i_e (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dA}{\iint_A (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dA} \approx$$

(U.196)

$$\approx \dot{m} \tilde{i}_e = \dot{m} \left(\tilde{u} + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} + \frac{1}{2} \tilde{c}^2 + \tilde{z}g \right),$$

gdzie nałożona fala, np. $(\tilde{u})$, tak jak poprzednio, oznacza uśrednienie względem równania energii, dokonywane w konkretnym przekroju. W praktyce inżynierskiej, posługujemy się przeważnie średnimi, i umownie pomijamy dodatkowe fale, lub inne oznaczenia średnich.

Wtedy pamiętając, że $\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2$, można podzielić (U.192) przez $\dot{m}$ aby otrzymać integralny bilans energii 0D w odniesieniu do kilograma masy czynnika roboczego. Taki bilans jest szczególnie ważny tam gdzie dopiero projektujemy strumień masy. Ograniczając się do **przepływów**

¹³⁷J.W. Gibbs, On the equilibrium of heterogeneous substances, *Trans. Conn. Acad. Arts. Sci.*, **3**, 108-248, 343-534, 1875.

¹³⁸Używamy słowa „uproszczenie” bowiem w praktyce obliczeniowej średnie ciśnienie w sensie energetycznym identyfikowane jest ze średnim ciśnieniem w sensie pędu, podobnie wektor średniej prędkości. Średnia energetyczna wysokość $\tilde{z}$ zwykle utożsamiana jest z położeniem środka geometrycznego kanału. Inaczej mówiąc, przejście od definicji 3D (U.187) do definicji 0D nie jest trywialne.

stacjonarnych, na jakie projektujemy urządzenie przepływowe, mamy:

$$\boxed{i_{e1} + q_{1,2} + l_{1,2} + q_{1,2}^{(m)} = i_{e2}} \quad [\text{J/kg}], \quad (\text{U.197})$$

gdzie pominęliśmy, zgodnie z inżynierską tradycją, znak uśredniania względem energii, entalpie całkowite i_{e1} , i_{e2} określone są wzorem (U.183), a pozostałe wielkości oznaczają

$$i_{e1} = \frac{\dot{E}}{\dot{m}}, \quad q_{1,2} = \frac{\dot{Q}_{1,2}}{\dot{m}}, \quad l_{1,2} = \frac{\dot{L}_{1,2}}{\dot{m}}, \quad q_{1,2}^{(m)} \equiv \frac{Q_{1,2}^{(m)}}{\dot{m}}. \quad (\text{U.198})$$

Wielkość i_e nazywa się entalpią całkowitą, $q_{1,2}$ – zewnętrznym ciepłem dostarczanym do układu, $l_{1,2}$ – pracą użytą (zewnętrzną pracą) układu, $q_{1,2}^{(m)}$ – zewnętrzną energią chemiczną.

U.1.10.12 Bilans Energii dla Przepływów Izoenergetycznych

W kanale w którym nie następuje oddawanie lub pobieranie ciepła z zewnątrz $q_{1,2} = 0$ oraz czynnik nie wykonuje pracy $l_{1,2} = 0$, bilans energii czynnika roboczego przyjmuje dobrze znaną postać:

$$\boxed{i_1 + \frac{1}{2}\vec{c}_1^2 + z_1 g = i_2 + \frac{1}{2}\vec{c}_2^2 + z_2 g = i_e = \text{const}} \quad [\text{J/kg}], \quad (\text{U.199})$$

gdzie entalpia właściwa wynosi $i = u + p/\rho$ oraz uwzględniono kierunek wpływu i wypływu z kanału. Powyższa forma 0-D równania energii jest używana do obliczania przepływów w dyfuzorach i konfuzorach geometrycznych. Równanie to mówi, iż energia całkowita w przepływie dowolnego czynnika roboczego w kanale ograniczonym wlotem i wylotem (przepływ adiabatyczny bez wykonywania pracy) nie zmienia się, a jedynie następuje konwersja energii kinetycznej w entalpię (przepływ dyfuzorowy) lub konwersja entalpii w energię kinetyczną (przepływ konfuzorowy). W przypadku przepływów cieczy nieściśliwych raczej konwersja energii potencjalnej w kinetyczną (konfuzor) i odwrotnie (dyfuzor) ma miejsce.

Jeśli natomiast w miarę ekspansji czynnika jego entalpia nie zmienia się $i_1 = i_2$, co ma miejsce podczas dławienia, to również nie zmienia się długość wektora prędkości średniej, czyli energia kinetyczna czynnika.

U.1.10.13 Bilans Energii Czynnika Transportującego Ciepło i Pracę

Klasyczna postać bilansu energii czynnika transportującego ciepło i pracę w sposób odwracalny, zapisana dla bezwzględnych wartości, jest znana w

literaturze w postaci

$$\boxed{i_{e1} + q_{1,2} + l_{1,2} = i_{e2}}, \quad (\text{U.200})$$

gdzie:

- $q_{1,2}$ [J/kg] – ciepło dostarczone pomiędzy przekrojami (stanami) 1-1 i 2-2 na grzanych powierzchniach,
- $l_{1,2}$ [J/kg] – praca dostarczona pomiędzy przekrojami (stanami) 1-1 i 2-2 na powierzchniach ruchomych,
- $i_{e2} - i_{e1}$ [J/kg] – różnica entalpii całkowitej między przekrojami (stanami) 1-1 i 2-2 wymieniona tylko w sposób dowolny, gdzie **entalpia całkowita** składa się z **czterech podstawowych form energii**

$$i_e = u + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}c^2 + zg. \quad (\text{U.201})$$

Używając równania bilansu energii (U.200) zaprojektowano 99% doskonałych maszyn przepływowych. Powyższe równanie bilansu mimo, iż nie występuje w nim jawnie entropia, ma geometryczną wizualizację w postaci wykresu Molliera $i - s$. Równanie to nie kładzie ograniczeń na rodzaj czynnika roboczego – może być on lepkiem, przewodzącym ciepło, z dyfuzją składników itd.

Udział pracy $l_{1,2}$ i ciepła $q_{1,2}$ w równaniu bilansu wymaga dalszego komentarza. Równanie to zakłada, iż (na skutek uśrednienia) każdy kilogram substancji czynnika roboczego otrzyma pracę na powierzchni ruchomej i ciepło na powierzchni grzanej. W rzeczywistości nie każdy kilogram czynnika przepływający przez urządzenie ma okazję zetknąć się z powierzchnią ruchomą lub powierzchnią grzaną. Stąd relacja (U.200) odnosi się do kilograma umownego, na poziomie projektowania gdy jeszcze nie ustaliliśmy jaki strumień $\dot{m}$ ma płynąć przez urządzenie.

Należy pamiętać, że w rzeczywistych urządzeniach trudno jest w stu procentach wydzielić powierzchnie, które nie przekazują ciepła (heatless) i pracy (workless), bowiem większość ścianek jest tylko częściowo adiabatyczna (np. radiacja). Podobnie nie ma ścianek doskonale nieruchomych, które by nie poruszały się (drgały) i nie przekazywały jakiejś pracy na zewnątrz. Stąd w bilansie (U.200) ciepło należy rozdzielić na ciepło przekazywane do czynnika oraz ciepło tracone na wszystkich pozostałych ściankach. Również praca winna być podzielona na pracę przekazywaną czynnikowi na ruchomych ściankach oraz pracę traconą na wszystkich pozostałych ściankach tworzących kanał.

U.1.10.14 Równanie Bernoulli-Darcy'ego jako integralna (0D) postać bilansu energii mechanicznej

Punktem wyjścia do rozważań niniejszego paragrafu jest bilans energii mechanicznej (U.90), który, jak pokazano wcześniej, jest sumą bilansu energii kinetycznej

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \vec{v} \right)}_1 + \underbrace{\operatorname{div} \left(\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 \vec{v} \right)}_2 = \operatorname{div} \left(\underbrace{-p \vec{v}}_3 + \underbrace{\overleftrightarrow{\tau}^c \vec{v}}_4 \right) + \underbrace{-(p \cdot \operatorname{div} \vec{v})}_5 - \underbrace{\overleftrightarrow{\tau}^c \cdot \vec{\nabla} \otimes \vec{v}}_6 + \underbrace{\rho \vec{b} \vec{v}}_7 \quad (\text{U.202})$$

i energii ciężenia

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Gamma)}_8 + \operatorname{div} \left(\underbrace{\rho \Gamma \vec{v}}_9 \right) = - \underbrace{\rho \vec{b} \cdot \vec{v}}_{10}. \quad (\text{U.203})$$

Przypomnijmy, że poszczególne człony równania bilansu energii kinetycznej mają interpretację:

- 1) prędkość wzrostu energii kinetycznej przypadającej na jednostkę objętości,
- 2) zmiana energii kinetycznej wynikająca z przepływu czynnika z prędkością $\vec{v}$ przez ścianki objętości cząstki,
- 3) prędkość pracy (moc mechaniczna) wykonana przez ciśnienie na ściankach objętości cząstki,
- 4) prędkość pracy wykonana przez siły lepkie na ściankach objętości cząstki,
- 5) prędkość sprężystej konwersji energii kinetycznej w energię wewnętrzną,
- 6) prędkość nieodwracalnej konwersji energii kinetycznej w ciepło. Człon ten opisuje degradację energii kinetycznej w energię cieplną i z tej przyczyny żaden rzeczywisty proces nie jest odwracalny. Człon ten wywołuje istotne nieodwracalne zmiany w energii dysponowanej w przepływach z dużą ilością powierzchni wewnętrznych (w stosunku do objętości kanału przepływowego) oraz w przepływach z dużymi prędkościami, gdzie gradienty prędkości są duże.
- 7) Prędkość pracy wykonywanej przez siły ciężkości na jednostkę objętości. Człon ten opisuje konwersję energii kinetycznej w energię ciężenia.

W równaniu bilansu energii ciążenia mamy:

- 8) zmianę potencjału energii ciążenia $\rho\Gamma = \rho zg$
- 9) umowny transport konwekcyjny energii ciążenia,
- 10) $= -7$) – konwersja energii ciążenia w energię kinetyczną. Równanie powyższe mówi, iż **energia ciążenia może konwertować tylko w energię kinetyczną**.

Celem niniejszego paragrafu jest otrzymanie integralnej formy (0D) równań bilansu energii kinetycznej i energii ciążenia. Ograniczmy się, tak jak poprzednio, do kanału z jednym wlotem (1-1) i wylotem (2-2).

Człon odwracalny – 5), z uwagi na równanie ciągłości, przekształcamy $p \operatorname{div} \vec{v} = p\dot{v}/\rho$ do następującej zależności:

$$\rho \left(\frac{d}{dt} pv \right) = \rho(p\dot{v}) + \rho(v\dot{p}). \quad (\text{U.204})$$

Zauważmy również, że człon pv powstaje jako różnica potencjałów termodynamicznych:

- entalpia swobodna Gibbsa – energia swobodna Helmholtza

$$pv = g - f, \quad (\text{U.205})$$

- entalpia – energia wewnętrzna

$$pv = i - u. \quad (\text{U.206})$$

Ponieważ podstawowymi zmiennymi funkcjonałów termodynamicznych są:

$$u = u(s, v),$$

$$f = f(T, v),$$

$$i = i(s, p),$$

$$g = g(T, p)$$

to dla **przemiany izentropowej** ($s = \text{const}$) otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}(i - u) = \frac{\partial i}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial i}{\partial s}\dot{s} - \left(\frac{\partial u}{\partial v}\dot{v} + \frac{\partial u}{\partial s}\dot{s} \right) = v\dot{p} + p\dot{v} = \frac{d}{dt}(vp). \quad (\text{U.207})$$

zaś dla **przemiany izotermicznej** ($T = \text{const}$) otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}(g - f) = \frac{\partial g}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial g}{\partial T}\dot{T} - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\dot{v} + \frac{\partial f}{\partial T}\dot{T} \right) = v\dot{p} + p\dot{v} = \frac{d}{dt}(vp). \quad (\text{U.208})$$

Równania (U.207) i (U.208) zezwalają na zastąpienie bilansu energii mechanicznej (równanie (U.202) plus równanie (U.203)) następującymi ekwiwalentnymi równaniami bilansu dla:

układu izentropowego ($s = \text{const}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(u + \Gamma + \frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) \right] + \text{div} \left[\rho \left(i + \Gamma + \frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) \vec{v} \right] = \\ = \text{div} \left[-p\vec{v} + \vec{\tau} \vec{v} \right] - \left(\vec{\tau} \cdot \text{grad} \vec{v} \right), \end{aligned} \quad (\text{U.209})$$

układu izotermicznego ($T = \text{const}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(f + \Gamma + \frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) \right] + \text{div} \left[\rho \left(g + \Gamma + \frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) \vec{v} \right] = \\ = \text{div} \left[-p\vec{v} + \vec{\tau} \vec{v} \right] - \left(\vec{\tau} \cdot \text{grad} \vec{v} \right). \end{aligned} \quad (\text{U.210})$$

Możemy przecałkować równania (U.209) i (U.210) w kanale z jednym wylotem i jednym wlotem oraz powierzchnią ruchomą A_u , na której czynnik pobiera pracę. W kanale tym nie mogą występować powierzchnie grzane A_q , bowiem traci wtedy sens wyseparowanie bilansu energii mechanicznej.

Wykorzystując całkowanie wewnątrz obszaru kanału i na odpowiednich ściankach otrzymujemy ($\dot{m}_1 = \dot{m}_2$) **równanie Bernoulli-Darcy'ego**:

układ izentropowy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (U_{cal} + \Gamma_{cal} + K_{cal}) + \dot{m}_1 \left(i_1 + z_1 g + \frac{1}{2} c_1^2 \right) + \\ + \dot{L}_{1,2} - \Delta \dot{L}_{1,2}^v = \dot{m}_2 \left(i_2 + z_2 g + \frac{1}{2} c_2^2 \right), \end{aligned} \quad (\text{U.211})$$

układ izotermiczny

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (U_{cal} + \Gamma_{cal} + K_{cal}) + \dot{m}_1 \left(g_1 + z_1 g + \frac{1}{2} c_1^2 \right) + \\ + \dot{L}_{1,2} - \Delta \dot{L}_{1,2}^v = \dot{m}_2 \left(g_2 + z_2 g + \frac{1}{2} c_2^2 \right), \end{aligned} \quad (\text{U.212})$$

gdzie poszczególne wielkości oznaczają:

$$\begin{aligned}
U_{cal} &= \iiint_v \rho u \, dv && - \text{całkowita energia wewnętrzna,} \\
F_{cal} &= \iiint_v \rho f \, dv && - \text{swobodna energia Helmholtza,} \\
K_{cal} &= \iiint_v \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 \, dv && - \text{energia kinetyczna,} \\
\dot{L}_{1,2} &= \iint_{A_u} \left(-p \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\tau} \right) \cdot \vec{n} \, dA && - \text{praca na ruchomych powierzchniach,} \\
\Delta \dot{L}_{1,2}^v &= \iiint_V \left(\vec{\tau} \cdot \text{grad } \vec{v} \right) \, dV && - \text{energia zmieniana w ciepło;}
\end{aligned}$$

zaś, pozostałe wielkości $\dot{m}$, g_1 , c_1 , z_1 oraz g_2 , c_2 , z_2 oznaczają średnie w przekrojach A_1 i A_2 definiowane poprzednio.

Jeśli układ jest stacjonarny to pochodne $\frac{\partial}{\partial t} (\quad) \equiv 0$ zanikają, uwzględniając $\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2$ możemy bilanse (U.211) i (U.212) odnieść do 1kg substancji:

układ izentropowy

$$\left(i_1 + z_1 g + \frac{1}{2} c_1^2 \right) + l_{1,2} - \Delta l_{1,2}^v = \left(i_2 + z_2 g + \frac{1}{2} c_2^2 \right) \quad (\text{U.213})$$

układ izotermiczny

$$\left(g_1 + z_1 g + \frac{1}{2} c_1^2 \right) + l_{1,2} - \Delta l_{1,2}^v = \left(g_2 + z_2 g + \frac{1}{2} c_2^2 \right). \quad (\text{U.214})$$

Trzeba przypomnieć, iż dla tak określonych przemian nie możemy bezpośrednio obliczać różnicy $i_1 - i_2$ lub $g_1 - g_2$ lecz **jedynie poprzez równanie stanu**. Biorąc, przemianę izentropową i izotermiczną mamy:

$$(i_1 - i_2)_{s=\text{const}} = (g_1 - g_2)_{T=\text{const}} = \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho} \, dp, \quad (\text{U.215})$$

gdzie całka obliczana jest w oparciu o równanie przemiany. Z powyższego równania (U.215) wynika iż równania (U.213) i (U.214) mają wspólną postać bilansu energii mechanicznej 0D zwaną w literaturze **równaniem Bernoulli-Darcy'ego**.

$$\frac{1}{2} (c_1^2 - c_2^2) + g (z_1 - z_2) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho} \, dp + l_{1,2} - \Delta e_{1,2}^v = 0. \quad (\text{U.216})$$

Całka w (U.216) winna być obliczona dla przemiany izentropowej i izotermicznej osobno. Zgodnie z założeniem Zeunera całka ta jest obliczana wzdłuż linii prądu tej samej cząstki, która na wlocie posiadała stan termodynamiczny (1), a na wylocie stan (2). W ogólności, aby obliczyć (U.215) trzeba

znać równania stanu $\rho = \rho(T, p)$ oraz zmianę temperatury T w funkcji p wzdłuż linii prądu (układ izentropowy) lub $\rho = \rho(s, p)$ i zmianę entropii s w funkcji ciśnienia wzdłuż linii prądu (układ izotermiczny). W ogólności jest to trudne i całka (U.215) wyznaczana jest w szczególnych przypadkach:

a) układ izotermiczny ($T = \text{const}$)

- dla gazu doskonałego, $\rho = \rho(T, p) = p/(RT)$

$$\int_1^2 \frac{1}{\rho} dp = RT \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} dp = RT \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \quad (\text{U.217})$$

- dla płynu nieściśliwego, $\rho = \text{const}$

$$\int_1^2 \frac{1}{\rho} dp = \frac{1}{\rho} (p_2 - p_1) \quad (\text{U.218})$$

b) układ izentropowy ($s = \text{const}$)

- dla gazu doskonałego $p\rho^{-\kappa} = pv^{\kappa} = \text{const}$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{\rho} dp &= \frac{p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{p_1} \int_1^2 \frac{dp}{p^{\frac{1}{\kappa}}} = \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] = \\ &= \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (\text{U.219})$$

W literaturze przedmiotu całka (U.215) nazywana jest pracą techniczną (użyteczną) i oznaczana jest jako:

$$l_{t1,2} = \int_{p_1}^{p_2} v dp. \quad (\text{U.220})$$

U.1.10.15 Termodynamiczna interpretacja równania Bernoulli-Darcy'ego

W odniesieniu do maszyn i urządzeń energetycznych, termodynamika stosowana, rozumiana jako sztuka projektowania i zrozumienia przepływu na poziomie integralnym, wyrasta z trzech praktycznych pytań:

- Co dzieje się z ciepłem dostarczonym do czynnika roboczego? – odpowiedź na to pytanie daje bilans energii cieplnej czyli równanie Carnota – Clausiusa.

- Co dzieje się z pracą dostarczoną do czynnika roboczego? – odpowiedź na to pytanie daje bilans energii mechanicznej czyli równanie Bernoulli-Darcy’ego.
- Co dzieje się z pracą i ciepłem dostarczonym do czynnika roboczego? – odpowiedź na to pytanie daje bilans energii całkowitej czyli I Zasada Termodynamiki.

Termodynamika ekwiwalentnie używa oznaczeń (1) i (2) do wlotów i wylotów identyfikując (1) ze stanem termodynamicznym czynnika na wlocie i (2) ze stanem termodynamicznym ze stanem czynnika na wylocie. Jeśli układ jest nieskończenie mały to zamiast indeksów 1,2 np. $\dot{L}_{1,2}$ oznaczających różnicę między wlotem a wylotem, używamy oznaczenia „d” oznaczający przyrost w nieskończenie małym czasie, jaki jest potrzebny, aby czynnik przebył nieskończenie małą drogę między wlotem i wylotem.

Tak, więc z termodynamicznego punktu widzenia równanie Bernoulli-Darcy’ego (U.216) mówi w co przekształca się praca przekazywana czynnikowi roboczemu na ruchomych ściankach (łopatkach, denku tłoka, etc.). Aby podkreślić ten fakt przekształcamy równanie Bernoulli-Darcy’ego (U.216) w ten sposób, aby po lewej stronie znalazła się prędkość pracy dostarczanej, zaś po prawej stronie jej skutki. Jeśli „d” oznacza nieskończenie mały przyrost między stanem (1) i (2) to:

$$dL = \dot{L}_{1,2} dt, \quad (\text{U.221})$$

zaś równanie (U.216) przepisujemy jako $e_k = \frac{1}{2}c^2$

$$dL = \dot{m} (dl_t + de_k + d\Gamma) - dt \frac{\partial}{\partial t} (U_{cal} + \Gamma_{cal} + K_{cal}) + \Delta dL^v. \quad (\text{U.222})$$

Powyższy termodynamiczny sposób zapisu uogólnionego równania Bernoulli-Darcy’ego (bilansu energii mechanicznej) ma tę zaletę, że nie występują w nim strumienie (moce) pracy, lecz bezpośrednio praca. Dla przepływów ustalonych drugi człon po prawej stronie jest równy zero, stąd odnosząc równanie (U.222) do 1 kg czynnika roboczego mamy:

$dl = (dl_t + de_k + d\Gamma) + \Delta dl^v,$

(U.223)

gdzie $dl = dL/m$, $\Delta dl^v = \Delta dL^v/m$, etc.

Równanie (U.223) słownie wypowiadamy w dwóch wersjach:

- Gdy czynnik roboczy wykonuje pracę i przekazuje ją na zewnątrz

Źródłem pracy dl wymienianej z otoczeniem przez kilogram czynnika roboczego w przepływie ustalonym jest: ubytek pracy technicznej dl_t , ubytek energii kinetycznej de_k , ubytek energii ciężenia $d\Gamma$ oraz straty na pracę tarcia Δdl^v .

- Gdy czynnik otrzymuje pracę z zewnątrz i konwertuje ją w nowy podwyższony stan czynnika roboczego

Praca dl przekazywana każdemu kilogramowi czynnika w przepływie ustalonym przekształca się w przyrost pracy technicznej $dl_t = vdp$, przyrost energii kinetycznej de_k i przyrost energii ciężenia pomniejszone przez straty na pracę tarcia Δdl^v .

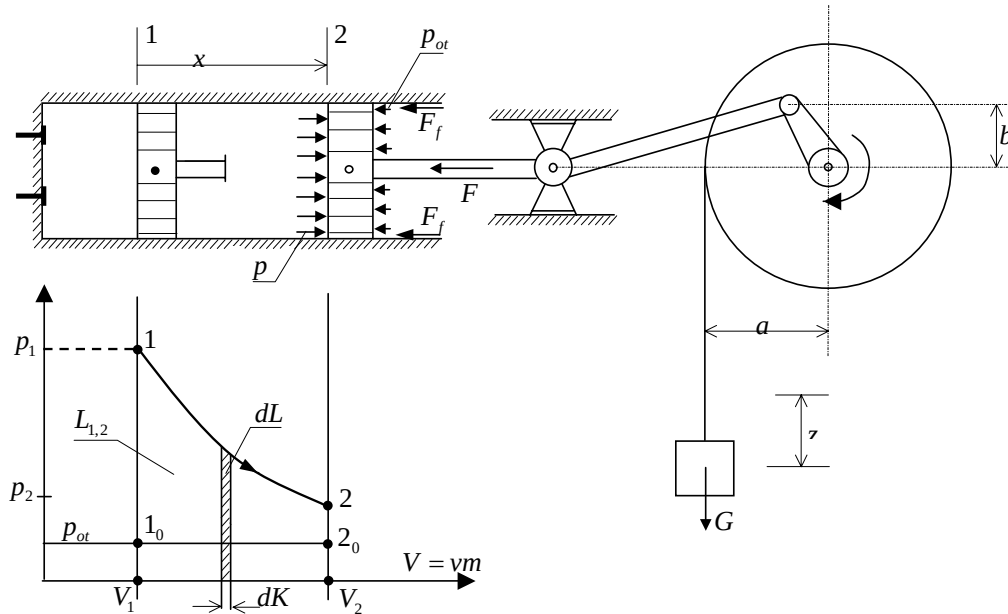
Praca tarcia Δdl^v (znaczek Δ tradycyjnie oznacza tu stratę a nie różnicę między wlotem i wylotem) działa tak, że zawsze zmniejsza skuteczność wymienianej z otoczeniem pracy niezależnie od tego, czy czynnik otrzymuje pracę dl (skutkiem jest mniejsza praca techniczna czyli spręż), czy wykonuje pracę zewnętrzną dl (skutkiem jest mniejsza praca dl).

Inaczej mówiąc, w **przypadku sprężarek i pomp**, które są urządzeniami służącymi do zamiany pracy w energię sprężu i energię kinetyczną, **dodatni wkład pracy** z zewnątrz przekształca się w dodatnią pracę techniczną sprężania i przetłaczania, odpowiednio: izotermicznego (U.217), izochorycznego (U.218) i izentropowego (U.219). Zwiększana jest również energia kinetyczna de_k , ciężenia $d\Gamma$. Część dostarczanej pracy dl konwertuje w sposób nieodwracalny w straty tarcia Δdl^v . Im większe będą straty tarcia tym mniejsza będzie praca techniczna a tym samym mniejszy od oczekiwanego spręż czynnika.

Natomiast w **przypadku turbin**, które są urządzeniami służącymi do zmiany dysponowanej entalpii całkowitej czynnika w pracę wykonywaną na powierzchniach ruchomych, od przepływającego czynnika odbieramy pracę dl . Ten ujemny wydatek pracy będzie pokryty kosztem pobieranej z wewnątrz czynnika pracy technicznej (ujemne vdp , bo ciśnienie maleje), ujemnej energii kinetycznej (spowolnienie czynnika) oraz ujemnej energii ciężenia (spadek położenia z czynnika), pomniejszony również o dodatni wkład strat energii tarcia Δdl^v . Im większe będą straty tarcia tym mniejsza może być oddawana praca na zewnątrz. Taka interpretacja nie dopuszcza możliwości istnienia nieustalonych zjawisk cieplnych.

U.1.10.16 Prototyp Rankine’a Bilansu Energii Mechanicznej

Integralny bilans energii mechanicznej (U.216) został wydedukowany w oderwaniu od bilansów lokalnych 3D wiele lat wcześniej niż zaczęto poszuki-



Rysunek U.13. Model maszyny tłokowej.

wać bilansów lokalnych różniczkowych¹³⁹. Jego najstarsza forma sięga badań nad cieplnymi silnikami tłokowymi, dla których obmyślano i zastosowano takie pojęcia jak **praca absolutna** (kompensowana) i **praca techniczna** (użyteczna).

Na rysunku U.13 przedstawiono urządzenie tłokowe służące do wykonywania pracy użytecznej (podnoszenia ciężaru G). Podniesienie ciężaru G na wysokość z wymaga momentu siły $G \cdot a$ równoważonego siłą parcia F . W cylindrze znajduje się czynnik o prężności p , a na zewnątrz tłoka panuje ciśnienie otoczenia p_{ot} . Na tłok oprócz siły F działa również siła tarcia F_f , która reprezentuje wysumowane siły lepkie. W układzie ustalonym następuje bilans sił:

$$pA = p_{ot}A + F + F_f. \quad (U.224)$$

Praca elementarna tych sił ma postać

$$\underbrace{pAdx}_{\text{praca absolutna}} = \underbrace{p_{ot}Adx}_{\text{praca kompresji otoczenia}} + \underbrace{Fdx}_{\text{praca użyteczna}} + \underbrace{F_fdx}_{\text{praca tarcia}}. \quad (U.225)$$

¹³⁹J. W. RANKINE, *A manual of the steam engines*, London, Charles Griffin, 1859

Określając kolejno:

- pracę absolutną

$$dL = pAdx = pdV = pmdv,$$

- pracę kompresji otoczenia

$$dL_{ot} = p_{ot}Adx = p_{ot}dV,$$

- pracę użyteczną (techniczną)

$$dL_t = Fdx = G\frac{a}{b}dx,$$

- pracę pokonywania sił tarcia

$$dL_f = F_fdx = dQ_f,$$

która w całości konwertuje w ciepło, mamy:

$$dL = dL_{ot} + dL_t + dL_f \quad (\text{U.226})$$

lub po scałkowaniu

$$L_{1,2} = L_{ot} + L_t + L_f, \quad (\text{U.227})$$

gdzie praca otoczenia $L_{ot} = -p_{ot}(V_2 - V_1)$ reprezentowana jest przez prostokąt $1_0, V_1, V_2, 2_0$ na rysunku U.13.

Realizacja pełnego cyklu maszyny tłokowej wymaga dodatkowo pracy napełniania do objętości V_1 , (p_1V_1) i pracy wytłaczania (p_2V_2) . Ponieważ ciśnienie p_{ot} pozostaje stałe to praca L_{ot} w trakcie jednego cyklu jest równa zero. Pomijając straty tarcia można zapisać następujący związek między pracą absolutną i techniczną w jednym cyklu

$$L_{1,2} = L_t - p_1V_1 + p_2V_2. \quad (\text{U.228})$$

Z analizy rysunku U.13 wynika, że praca techniczna reprezentuje pole $p1 - 1 - 2 - p_2 - p_1$. Równanie (U.226) jest prototypem równania bilansu energii mechanicznej (U.216).

U.1.10.17 Równanie Carnota – Clausiusa jako integralna (0D) postać bilansu energii cieplnej

Równanie Carnota-Clausiusa jest integralnym, algebraicznym (0D) bilansem energii cieplnej. Ma ono swe źródła w pytaniu: **co jest skutkiem ciepła przekazanego czynnikowi na grzanych ścianach**. Było ono znane w termodynamice technicznej na długo przed tym nim powstało różniczkowe, lokalne równanie bilansu energii cieplnej (U.75) będące jego trójwymiarowym odpowiednikiem.

Całkując (U.75) w objętości kanału, w którym oprócz wlotu 1-1 i wylotu 2-2 istnieje powierzchnia grzana $A_q \neq 0$, zaś $A_u = 0$, otrzymujemy kolejno:

$$\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \vec{v}) = \operatorname{div} \vec{q}^c - \rho p \vec{v} + \vec{\tau} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} \right] dV. \quad (\text{U.229})$$

Wprowadzając następujące wielkości integralne:

$$\begin{aligned} U_{cal} &= \iiint_V \rho u dV \text{ [J]} && - \text{ (energia wewnętrzna),} \\ \Delta \dot{Q}_{1,2}^v &= \iiint_V \left(\vec{\tau}^c \cdot \operatorname{grad} \vec{v} \right) dV \text{ [W]} && - \text{ (ciepło straty tarcia),} \\ \dot{L}_{a1,2} &= \iiint_V \rho p \vec{v} dV \text{ [W]} && - \text{ (praca absolutna przemiany),} \\ \dot{Q}_{1,2} &= \iint_{A_q} \vec{q} \cdot \vec{n} dA \text{ [W]} && - \text{ (ciepło przekazywane czynnikowi),} \\ \dot{Q}_1 &= \iint_{A_1} (\rho \vec{v}) \cdot \vec{n}_1 dA_1 = \dot{m} u_1 \text{ [W]} && - \text{ (strumień energii wewnętrznej na wlocie do kanału),} \end{aligned}$$

otrzymujemy z (U.229) integralne równanie bilansu energii cieplnej Carnota-Clausiusa:

$$\dot{m}_1 u_1 + \frac{\partial}{\partial t} U_{cal} + \dot{Q}_{1,2} + \Delta \dot{Q}_{1,2}^v + \dot{L}_{a1,2} = \dot{m}_2 u_2, \quad (\text{U.230})$$

które należy czytać jako:

Strumień ciepła przekazywany czynnikowi roboczemu w trakcie jego przepływu przez urządzenie, jest zamieniany w strumień energii wewnętrznej wlotu i wylotu, zmianę energii wewnętrznej oraz pracę absolutną czynnika. Strumień energii odpadowej podwyższany jest zawsze przez ciepło tarcia.

Gdy powyższy bilans integralny zastąpić bilansem odniesienia do 1 kg masy przepływającego przez objętość V to zapisujemy w konwencji umowy, iż objętość zajmowana przez 1 kg masy ma np. jedną grzaną ściankę oraz ścianki wlotu i wylotu. W analogii do równania (U.216) otrzymujemy ($\frac{\partial}{\partial t} U_{cal} \equiv 0$)

$$(u_1 - u_2) + q_{1,2} + \int_{v_1}^{v_2} p dv + \Delta q_{1,2}^v = 0. \quad (\text{U.231})$$

Użyte tu wielkości odniesione do 1 kg czynnika są średnimi i nie mają prostych związków z trójwymiarowymi odpowiednikami. Tak więc:

$$u_1 = U_1/m_1 \quad (\text{średnia energia wewnętrzna}),$$

$$q_{1,2} = \dot{Q}_{1,2}/\dot{m} = \iint_{A_q} \vec{q} \cdot \vec{n} dA / \iint_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA,$$

$$\int_{v_1}^{v_2} p dv = \dot{L}_{a1,2}/\dot{m} = \iiint_v p \dot{v} dV / \dot{m},$$

$$\Delta q_{1,2}^v = \Delta \dot{Q}_{1,2}^v / \dot{m}.$$

U.1.10.18 Równanie Carnota-Clausiusa w układzie przepływowym

Dla układów przepływowych wygodniejsza jest postać, która uwzględnia pracę przetłaczania. Biorąc $i = u + pv$ oraz $\rho d/dt(i) = \rho \dot{u} + \rho(p\dot{v} + v\dot{p})$, otrzymamy w miejsce wyjściowej formuły (U.229) następujący związek:

$$\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho i) + \text{div}(\rho i \vec{v}) = \text{div} \vec{q}^c + \rho v \dot{p} + \vec{\tau}^c \cdot \text{grad} \vec{v} \right] dV, \quad (\text{U.232})$$

który prowadzi do postaci integralnej

$$\boxed{\dot{m}_1 i_1 + \frac{\partial}{\partial t} I + \dot{Q}_{1,2} + \Delta \dot{Q}_{1,2}^v - \dot{L}_{t1,2} = \dot{m}_2 i_2}, \quad (\text{U.233})$$

gdzie nowe wielkości to:

$$I = \iiint_i \rho i dV \quad [\text{J}] \text{ entalpia},$$

$$\dot{L}_{t1,2} = \dot{m} l_{t1,2} \quad [\text{W}] \text{ moc pracy technicznej}.$$

Dla przypadku stacjonarnego $\partial/\partial t I \equiv 0$ powyższe równanie może być odniesione do 1 kg

$$\boxed{(i_1 - i_2) + q_{1,2} + \int_{p_1}^{p_2} v dp + \Delta q_{1,2}^v = 0}. \quad (\text{U.234})$$

Jeśli straty energii kinetycznej w postaci strat tarcia $\Delta \dot{L}_{1,2}^v$ w całości konwertują w ciepło to zachodzi:

$$\Delta \dot{L}_{1,2}^v \equiv \Delta \dot{Q}_{1,2}^v. \quad (\text{U.235})$$

U.1.10.19 Suma równań Bernoulli-Darcy'ego i Carnota – Clausiusa (Bilans 0D energii całkowitej)

Zauważmy, że w równaniu Bernoulli-Darcy'ego (U.216) występuje człon $\int_1^2 v dp$ wyrażający pracę techniczną, która w odwracalny sposób może konwertować w energię wewnętrzną (dla przepływu w entalpię). I odwrotnie, w równaniu energii cieplnej Carnota – Clausiusa (U.234) występuje praca techniczna, która może w sposób odwracalny konwertować w energię kinetyczną. Człony te, niezależnie od typu przemiany termodynamicznej, są sobie równe.

Opierając się na doświadczeniu Joule'a, mówiącemu że zawsze zachodzi nieodwracalna konwersja strat tarcia $\Delta l_{1,2}^v$ w ciepło tarcia $\Delta q_{1,2}^v$ można założyć, że (U.234), że $\Delta l_{1,2}^v \equiv \Delta q_{1,2}^v$. Sumując równanie Bernoulli-Darcy'ego (U.216) i równanie Carnota – Clausiusa (U.234) mamy kolejno:

$$\frac{1}{2} (c_1^2 - c_2^2) + g(z_1 - z_2) - \int_1^2 v dp + l_{1,2} - \Delta l_{1,2}^v = 0 \quad (\text{U.236})$$

$$+ \quad i_1 - i_2 + q_{1,2} + \int_1^2 v dp + \Delta q_{1,2}^v = 0 \quad (\text{U.237})$$

$$(i_1 - i_2) + \frac{1}{2} (c_1^2 - c_2^2) + g(z_1 - z_2) + l_{1,2} + q_{1,2} = 0. \quad (\text{U.238})$$

Powyższy bilans, gdy wykorzystamy definicję entalpii całkowitej: $i_e = i + \frac{1}{2}c^2 + zg$, zapiszemy krótko jako:

$$\boxed{i_{e1} + l_{1,2} + q_{1,2} = i_{e2}} \quad [\text{J/kg}]. \quad (\text{U.239})$$

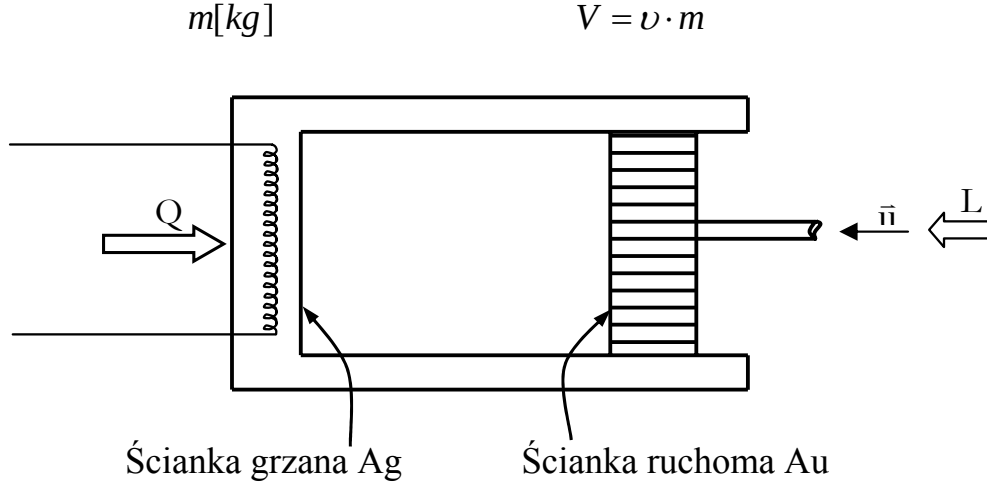
Bilans ten jest analitycznym wyrazem Pierwszej Zasady Termodynamiki, dla dowolnych – odwracalnych lub nieodwracalnych procesów.

Dla infinitezymalnych kanałów:

$$i_{e1} - i_{e2} \rightarrow di_e \quad (\text{U.240})$$

równanie I Zasady Termodynamiki przyjmuje postać:

$$di_e = \delta l + \delta q. \quad (\text{U.241})$$



Rysunek U.14. Schemat układu zamkniętego.

U.1.10.20 Pierwsza Zasada Termodynamiki dla Układów Zamkniętych

W technice występują układy w których czynnik roboczy przynajmniej chwilowo nie przepływa, a wloty i wyloty są zamknięte. W układzie zamkniętym mimo braku przepływu $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = 0$ może być wymieniana energia w postaci ciepła (grzanie ścianek) i pracy (ruchome ścianki). Zasada zachowania energii całkowitej w czasie przemiany, w której nie zmienia się sumaryczna energia kinetyczna i energia sił ciężenia jest równa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \left(u + \frac{\vec{v}^2}{2} + zg \right) dV = \iint_V (\text{div} \vec{q}) dV + \iint_{A_u} \left(\vec{u} \cdot \vec{\tau} - p\vec{u} \right) \cdot \vec{n} dA. \quad (\text{U.242})$$

Kładąc $\iiint_V \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + zg \right) dV = 0$ oraz zakładając że energia wewnętrzna jest równomiernie rozłożona $U = \iiint_V \rho u dV = \left(\iiint_V \rho dV \right) u = mu$, mamy:

$$\frac{\partial}{\partial t} U = \iint_{A_u} \vec{q} \cdot \vec{n} dA + \iint_{A_u} \left(\vec{u} \cdot \vec{\tau} - p\vec{u} \right) \cdot \vec{n} dA. \quad (\text{U.243})$$

Całkując układ (U.243) w czasie $t_{(1)} - t_{(2)}$ trwania przemiany mamy

$$\Delta U = Q + L \quad [\text{J}], \quad (\text{U.244})$$

gdzie:

ΔU – zmiana energii wewnętrznej,

Q – ciepło doprowadzone do układu,

L – praca doprowadzona do układu.

W równaniu (U.244) wprowadzono definicję¹⁴⁰

$$\Delta U = U^{(2)} - U^{(1)} = m (u^{(2)} - u^{(1)}) \quad [\text{J}], \quad (\text{U.245})$$

$$m = \iiint_V \rho dV = \text{const} \quad [\text{kg}], \quad (\text{U.246})$$

$$Q = \int_{t(1)}^{t(2)} \iint_{A_q} \vec{q} \cdot \vec{n} dA \quad [\text{J}] \quad (\text{U.247})$$

$$L = \int_{t(1)}^{t(2)} \iint_{A_u} (\vec{u} \overset{\leftrightarrow}{\tau} - p\vec{u}) \cdot \vec{n} dA \quad [\text{J}]. \quad (\text{U.248})$$

Przy założeniu, iż nie ma wewnętrznych źródeł energii pochodzących od strat i radiacji oraz przyjmując obowiązującą w termodynamice stosowanej zasadę, iż praca oddawana z układu jest dodatnia mamy z (U.244)

$$\Delta U = Q - L. \quad (\text{U.249})$$

Wzór powyższy jest analitycznym zapisem Pierwszej Zasady Termodynamiki słusznej dla dowolnej odwracalnej i nieodwracalnej przemiany termodynamicznej zachodzącej w układzie zamkniętym.

U.1.10.21 Komentarze

Potrzebne są uwagi objaśniające. W literaturze przedmiotu równanie Pierwszej Zasady Termodynamiki zapisywane jest często jako równanie dla całej objętości zawierającej dowolną masę czynnika roboczego

$$\Delta U = Q_{1-2} - L_{1-2} \quad (\text{U.250})$$

lub bilans przypadający na jeden kilogram masy

$$\Delta u = q_{1-2} - l_{1-2}, \quad (\text{U.251})$$

¹⁴⁰Indeks (1) (2) oznaczają stan a nie wlot i wylot

gdzie indeks (1) i (2) odnoszą się do chwili czasu a nie do wlotu i wylotu. Milcząco w całej literaturze zakłada się, iż bilansując energię w przepływie gdzie indeks (1) oznacza wlot a indeks (2) wylot w czynniku roboczym zachodzi przemiana 1-2. Jest to metodologiczna niespójność, z której musimy zdawać sobie sprawę.

Druga niespójność wynika stąd, iż w termodynamice przemian odwracalnych identyfikuje się pracę zewnętrzną $l_{1,2}$ z pracą kompensowaną $l_{1,2}^k$ tzn.

$$l_{1,2} \equiv \int_1^2 p dv \quad (\text{U.252})$$

Pracy kompensowanej odpowiada pole pod linią przemiany. Natomiast praca zewnętrzna jest doprowadzana na ruchomej ścianie tłoka od chwili $t_{(1)}$ do chwili $t_{(2)}$. Przekazanie pracy do czynnika i jego konwersja w energię wewnętrzną nie występują bezpośrednio jak to błędnie sugeruje wzór (U.197). Trzeba pamiętać, że ruchoma ścianka może przekazać czynnikowi tylko energię kinetyczną, która następnie z uwagi na lepkość czynnika roboczego rozprowdzi się równomiernie po całej objętości, i dopiero później konwertuje w nowy stan ciśnienia i temperatury. Mimo, iż całkowita energia kinetyczna płynu w objętości pod tłokiem jest równa zeru, to podczas przyspieszanego ruchu tłoka pojawiają się lokalne niejednorodności wektora prędkości oraz pochodzące od nich naprężenia lepkie. Mówimy, iż konwersja pracy w energię wewnętrzną płynu nie jest bezpośrednia, a lepkość czynnika roboczego ukazuje etap pośredni jako ważny mechanizm.

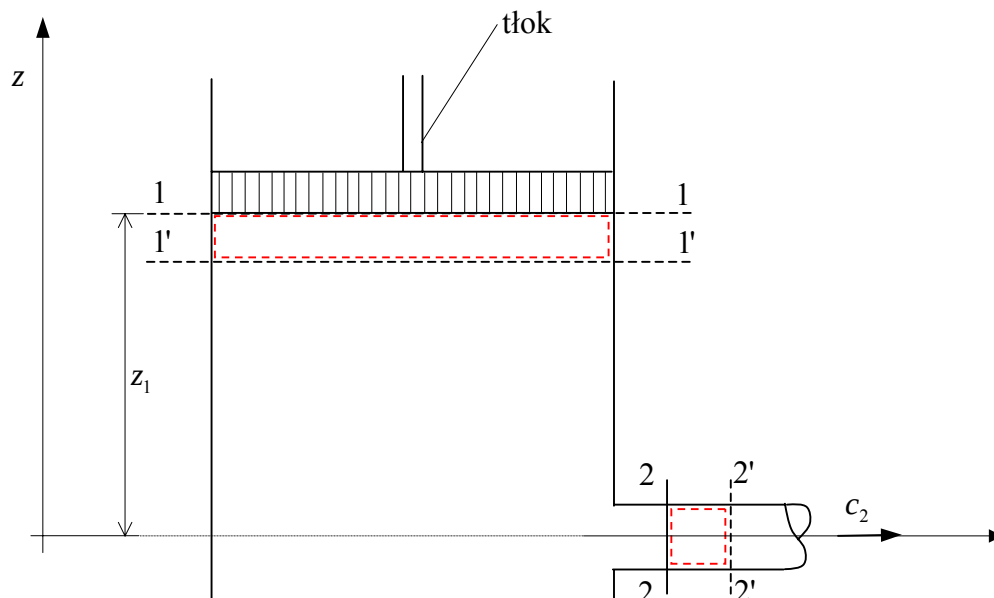
U.1.10.22 Pierwsza Zasada Termodynamiki dla Układów Odwracalnych

Jeśli wymiana energii pomiędzy układem zamkniętym a otoczeniem odbywa się na sposób pracy i ciepła w ten sposób, że cała otrzymana praca jest pracą kompensowaną a całe otrzymane ciepło jest ciepłem kompensowanym to Pierwsza Zasada Termodynamiki przyjmuje następującą postać identyczną z postacią **równania ewolucji energii wewnętrznej Gibbsa**:

$$dU = TdS - pdV \quad (\text{U.253})$$

Z warunków równowagi wynika, iż układ jest całkowicie jednorodny. Tak więc możemy przejść na dowolny kilogram masy zawartej w układzie, $S = ms$, $V = mv$, gdzie s , v entropia i objętość właściwa. Wtedy powyższe równanie przybierze postać

$$du = Tds - pdv.$$



Rysunek U.15.

Powyższą zasadę wypowiadamy jako: Zmiana energii wewnętrznej może być dokonywana kosztem zmiany energii związanej (Tds) lub energii przetłaczania ($p dv$).

U.1.10.23 Uwaga dotycząca pochodzenia pojęcia entalpii całkowitej

Prawdopodobnie po raz pierwszy bilans energii całkowitej $i_{e1} = i_{e2}$ i pojęcie pracy przetłaczania " pv " pojawiło się w pracy Gustawa Zeunera¹⁴¹. Rozpatruje on w połowie przepływowy układ dotyczący wypływu ze zbiornika gazu wymuszonego ruchem tłoka (Rys. U.15).

Układ ma charakterystyczny przekrój 1 – 1 (wlot) i 2 – 2 (wylot), które przesuwały się w czasie. Ilość płynu wypływającego otworem 2 – 2 w jed-

¹⁴¹G. ZEUNER, Das Locomotiven – Blasrehr, Zürich 1863. Prof. Zeuner zasłużony konstruktor maszyn cieplnych, przeszedł do historii termodynamiki technicznej również jako autor I zasady termodynamiki dla układów przepływowych (G. ZEUNER Eisernes Wasserrad mit Kulissenschutze, Politech. Central blutt, ss. 1-833, 1855). W latach 1873 – 1897 był profesorem Politechniki w Dreźnie, gdzie wykładał termodynamikę, mechanikę ciał sztywnych, sterodynamikę i hydrodynamikę oraz zagadnienia pokrewne. Wprowadził m.in.: tablice parowe, własności mieszaniny parowo-wodnych, przemianę politropową. Był nauczycielem Richarda Moillera (Drezno) oraz Aurela Stodoli (Zürich).

nostce czasu (zawarte w objętości $2 - 2'$) jest równa ilości płynu wypartego tłokiem, który przesuwa się o odpowiednią długość $1 - 1'$.

Zeuner dokonuje bilansu w **elemencie** $1 - 1'$

- energii kinetycznej $\frac{c_1}{2} \equiv 0$ (mała prędkość tłoka),
- energii potencjalnej $z_1 g$,
- energii przetłoczenia p_1/ρ_1 (praca przetłoczenia)

oraz w $2 - 2'$

- energii kinetycznej $\frac{c_2}{2}$,
- energii potencjalnej $z_2 g \equiv 0$,
- energii przetłoczenia p_2/ρ_2 (praca przetłoczenia).

Bilans energii kinetycznej (sił żywych – vis viva) uzupełnia Zeuner pracę sił wewnętrznych $\int p dv$ tak, że¹⁴²:

$$\frac{c_2}{2} = z_1 g + \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} + \int_{v_1}^{v_2} p dv. \quad (\text{U.254})$$

W równaniu tym pojawia się praca zmiany objętości zwana pracą kompensowaną występującą w bilansie energii wewnętrznej Gibbsa. Zakładając adiabatyczność zjawiska z bilansu energii właściwej wynikać będzie, że:

$$\int_{v_1}^{v_2} p dv = u_1 - u_2. \quad (\text{U.255})$$

W ogólności kładąc, że $c_1 \neq 0$ i $z_2 \neq 0$ na podstawie (U.254) i (U.255) mamy:

$$(u_1 - u_2) + g(z_1 - z_2) + \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) + \left(\frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} \right) = 0, \quad (\text{U.256})$$

co oznacza, że zachodzi równość entalpii uogólnionych.

¹⁴²Patrz również: M.COMBES, Expose des principes de la theorie mecanique de la chaleur, Paris 1867, oraz F.KUCHANEWSKI, W.KLUGER, Wykład Hydrauliki. Paryż 1878

U.1.10.24 Bilans Zeunera w przepływie

Rozwińmy teraz podejście Zeunera na przypadek przepływowy. Oznacza to, iż poszukujemy takiego wyrażenia bilansu energii całkowitej, w którym pojawiają się *explicite* wyrazy na pracę kompensową i ciepło kompensowane. Występuje tu podstawowa trudność, jaką napotykamy podczas złożenia bilansu energii wewnętrznej i energii całkowitej. Zakładamy za Zeunera, że przemiana (1) - (2) zachodzi w kilogramie płynu, który przepływa między wlotem (1) i wylotem (2). Możemy wtedy zapisać bilans entalpii właściwej jako:

$$di = d[i(s, p)] = Tds + vdp. \quad (\text{U.257})$$

Zakładając, że przemiana realizowana jest (nieskończenie powoli) między warunkami wlotu (1) i wylotu (2) otrzymamy po scałkowaniu:

$$i_1 - i_2 + \int_{1,2} Tds + \int_{1,2} vdp. \quad (\text{U.258})$$

Wykorzystując tę relację przekształcamy (U.255) do:

$$\frac{1}{2} (c_1^2 - c_2^2) + g(z_1 - z_2) + \left(\int_{1,2} Tds \right) + \left(\int_{1,2} vdp + l_{1,2} \right) - \Delta l_{1,2}^v = 0. \quad (\text{U.259})$$

W przypadku przemiany adiabatycznej otrzymujemy równanie zawierające tylko wielkości mechaniczne zwane **równaniem Bernoulli -Darcy'ego**

$$\frac{1}{2} (c_1^2 - c_2^2) + g(z_1 - z_2) + l_{1,2} - \Delta l_{1,2}^v + \int_{1,2} vdp = 0, \quad (\text{U.260})$$

które służy do określenia pracy użytecznej $l_{1,2}$ układu przepływowego (w stanie ustalonym). Jeśli $l_{t1,2} = - \int vdp$ nazywamy pracą techniczną to:

$$l_{1,2} = l_{t1,2} + \Delta e_{1,2}^v + \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + g(z_2 - z_1), \quad (\text{U.261})$$

bilans ten czytamy:

praca użyteczna doprowadzona do układu otwartego adiabatycznego konwertuje odpowiednio w pracę techniczną $l_{t1,2}$, straty tarcia $\Delta l_{1,2}^v$, zmianę energii kinetycznej $\frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2)$ i energii ciężenia $g(z_2 - z_1)$.

Oznacza to, iż w przypadku gdy przyrosty energii kinetycznej, energii ciężenia oraz rozpraszanie pracy można pominąć, praca użyteczna jest równa pracy technicznej.

U.1.10.25 Parametry stagnacji (spiętrzenia)

Z pojęciem entalpii całkowitej $i_e = u + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\vec{v}$ wiążą się ściśle pojęcia:

- **parametrów spiętrzenia** (w momencie zahamowania przepływu),
- **parametrów stagnacji** (w układzie zamkniętym lub daleko od wlotu).

Ponieważ parametry te odnoszą się do miejsc przepływu o zerowej energii kinetycznej, oznaczamy je zwyczajowo dodatkowym indeksem **zero** np.: T_0 , p_0 . Jeśli przepływ odbywa się bez pobierania pracy $l_{1,2} \equiv 0$ i ciepła $q_{1,2} \equiv 0$ to w myśl bilansu energii całkowitej:

$$i_e = i_{e1} = i_{e2} \equiv \text{const} = i_0,$$

całkowita entalpia właściwa jest stała i równa całkowitej entalpii spoczynkowej i_0 . Oznacza to, że jeśli przepływ płynu rozpoczyna się w dużym zbiorniku, w którym płyn jest nieruchomy i posiada zerową energię ciążenia entalpia całkowita składa się tylko z entalpii statycznej i_0 , której wartość w stosunku do innych cząstek poruszających się jest maksymalna. Gdy w zbiorniku znajduje się wlot kanału 1 – 1 na wysokości z_1 to w miarę zbliżania się do wlotu wzrasta energia kinetyczna i energia ciążenia kosztem obniżania się energii statycznej. W gazie doskonałym, obniżenie się entalpii statycznej i oznacza obniżenie się temperatury.

I odwrotnie, w przepływie, który nagle w sposób adiabatyczny wyhamowuje przed przeszkodą energia kinetyczna płynu konwertuje w entalpię statyczną, co oznacza, że ciśnienie i temperatura rosną:

$$\left(\begin{array}{c} \text{punkt} \\ \text{spiętrzenia} \end{array} \right) \rightarrow i_0(\text{wewnątrz zbiornika}) = \left(i_1 + \frac{c_1^2}{2} \right)_{\text{na wylocie}} \quad (\text{U.262})$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{punkt} \\ \text{stagnacji} \end{array} \right) \rightarrow h_0(\text{przed przeszkodą}) = \left(i_1 + \frac{c_1^2}{2} \right)_{\substack{\text{w przepływie} \\ \text{ustalonym}}} \quad (\text{U.263})$$

Zjawiska powstające przy wyhamowaniu przepływu lub gwałtownym zwiększeniu jego prędkości odnoszą się zarówno dla gazów jak i cieczy, z tym tylko, że w gazach powodują zazwyczaj zmianę temperatury zaś w cieczech zmianę ciśnienia¹⁴³.

¹⁴³Obniżenie się temperatury gazu wypływającego z wielką prędkością ze zbiornika można zauważyć doświadczalnie, gdy para w wysokim ciśnieniu i wysokiej temperaturze wychodząca w powietrze obniża tak dalece swą temperaturę, że można włożyć rękę w parę w pewnej odległości od otworu bez narażenia się na sparczenie. Para o niskim ciśnieniu wtryskiwana w powietrze zachowuje przeciwnie, temperaturę bardzo wysoką. Łatwo jest także wytłumaczyć dlaczego usta dmuchają zimnym powietrzem lub dmuchają ciepłem stosownie do tego czy pęd powietrza wypuszczamy z płuc jest prędko czy powolny.

W przypadku przepływu gazów doskonałych entalpia statyczna wyraża się jako funkcja temperatury i ciepła właściwego $i = c_p T$. Stąd można zdefiniować temperaturę spiętrzenia (stagnacji) T_0 jako:

$$i_0 = c_p T_0 = c_p T_1 + \frac{1}{2} c_1^2,$$

czyli:

$$T_0 = T_1 + \frac{c_1^2}{2c_p} \quad (\text{dla każdego przekroju}). \quad (\text{U.264})$$

Jeśli w spoczynku ma miejsce $p_0 v_0 = RT_0$, to z warunku adiabatycznego zahamowania przepływu wynika następujący związek między ciśnieniem spiętrzenia p_0 , temperaturą spiętrzenia, objętością właściwą v_0 . Znając p_0 i T_0 możemy obliczyć pozostałe parametry w dowolnym przekroju, jako:

$$\frac{v_0}{v} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}, \quad (\text{U.265})$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \quad (\text{U.266})$$

W przypadku przepływów nieściśliwych $v = \frac{1}{\rho} = \text{const}$, nie lepkich, nie pobierających ciepła i pracy temperatura w przepływie i temperatura stagnacji pozostaje niezmienna $T_0 = T$. Mamy wtedy:

$$i_0 = u_0(T_0) + \frac{p_0}{\rho} = u(T_0) + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} c^2 = \text{const} \quad (\text{U.267})$$

ponieważ energia wewnętrzna $u(T_0) = u(T)$ jest równa w punkcie stagnacji i punkcie przepływu to z powyższej relacji otrzymujemy związek

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho c^2 \equiv p_{\text{stat}} + p_{\text{dyn}}, \quad (\text{U.268})$$

który wypowiadamy jako:

Ciśnienie całkowite (stagnacji, spiętrzenia) jest równe sumie ciśnienia całkowitego i ciśnienia dynamicznego $p_{\text{dyn}} = \frac{1}{2} \rho c^2$.

U.1.10.26 Wykres Molliera ($i - s$) równania energii dla kanału konfuzorowego

Centralnym punktem podejścia 0D, wizualizującym nasze zrozumienie konwersji energii w kanale przepływowym, jest **wykres równania energii**

obmyślony i użyty do przepływów gazów przez drezdeńczyka Richarda Molliera (1870). W porównaniu z wykresem równania energii Ascony, wykres Molliera nie posiada współrzędnej (l), oznaczającej długości drogi cząstki wzdłuż toru przepływu, lecz odniesiony jest do wartości entropii, $s = s(l)$, którą posiada przepływająca cząstka. Taka zmiana współrzędnej z l [m] na s [J/(kgK)] pozwalała na wykorzystanie własności termodynamicznych gazów stabilizowanych na diagramie „ $i - s$ ”. Wykres „ $i - s$ ” jest szczególnie użyteczny w przypadku, gdy urządzenie przepływowe posiada wiele przekrojów charakterystycznych, w których czynnik roboczy rozdziela się (lub łączy) niekoniecznie zakreślając tor o stałym kierunku. Podejście śledzące stan termodynamiczny (p, T, s, v) poszczególnych cząstek, spójnie z opisem Lagrange’owskim, sugerowało jakąś, bliżej nieokreśloną „jednowymiarowość” przepływu, stąd też w starszych opracowaniach, o bilansach 0D mówi się w kontekście „**teorii jednowymiarowej**”. Takie nazewnictwo było jednoznaczne, gdyż **modele 3D** były w czasach przedkomputerowych, nieosiągalną, bliżej nieznaną fikcją. Współcześnie modele, które nie zawierają równań różniczkowych w czasie i przestrzeni nazywamy **modelami 0D** (integralnymi, algebraicznymi).

Jeśli kanał konfuzorowy posiada wlot (1 – 1) i wylot (2 – 2) o zupełnie dowolnych kształtach (nie tylko płaszczyzna!) to stan konwersji energii całkowitej między przekrojami 1 – 1 i 2 – 2 można przedstawić na wykresie funkcji termodynamicznych $i - s$, nazywanych w skrócie „tablicami $i - s$ ” (patrz rys. U.16). Na wykresach $i - s$ odniesione są linie stałego ciśnienia $p = \text{const}$, linie stałej temperatury $T = \text{const}$ oraz linie stałej objętości właściwej $v = 1/\rho = \text{const}$. Te linie stałych wartości pozwalają na odczytanie entalpii statycznej czynnika roboczego, nie tylko jako funkcji $i = i(s, p)$, ale również jako funkcji ciśnienia i temperatury $i = i(p, T)$. Pomijając wpływ energii ciężenia (niewielki dla gazów) równanie bilansu energii 0D:

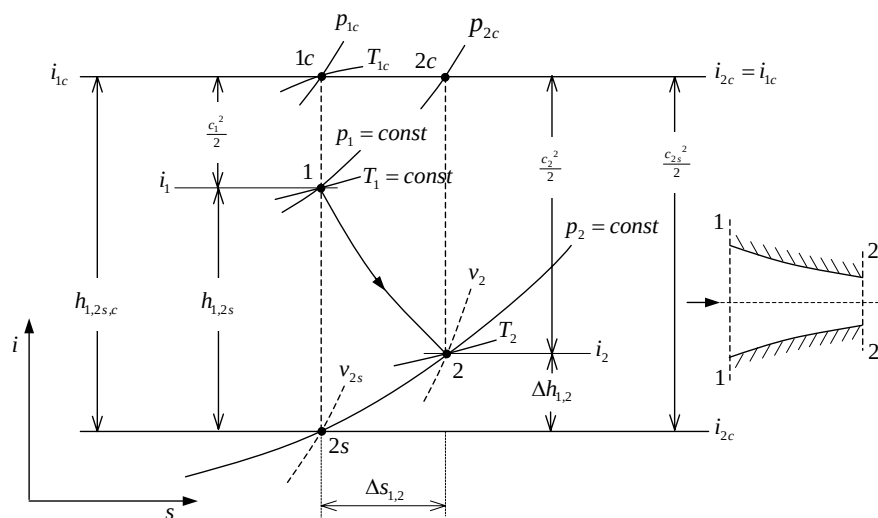
$$i_{1c} = i_1 + \frac{c_1^2}{2} = i_2 + \frac{c_2^2}{2} = i_{2c_2} = \text{const}, \quad (\text{U.269})$$

będziemy przedstawiać na wykresie „ $i - s$ ”. Ponieważ entalpia, pierwotnie zależy od ciśnienia i entropii $i = i(s, p)$, to na wykresie „ $i - s$ ” muszą być wydzielone linie $i = i(s, p = \text{const})$, w naszym przypadku linie $p_1 = \text{const}$ i $p_2 = \text{const}$. Wprowadzamy zwykle, szereg oznaczeń: indeksem c , np. i_{1c} oznaczamy całkowitą entalpię właściwą, p_{1c} - ciśnienie całkowite (spiętrzenia), T_{1c} - temperatura całkowita (spiętrzenia), literą h oznaczamy **różnice** między entalpiami, często jest to dysponowany spadek entalpii między przekrojem 1 – 1 i 2 – 2. Indeksami s będziemy oznaczać izentropowe - przy $s = \text{const}$ - zmiany parametrów np. i_{1s} , T_{1s} , etc.

Podczas rysowania wykresu „ $i - s$ ” uwidaczniają się **dwa podejścia** lub

dwie różne sytuacje:

- **podejście pomiarowe**, podczas którego obliczamy parametry z pomierzonych (0D) ciśnień p_1 i p_2 oraz temperatur T_1 i T_2 .
- **podejście projektowe**, w trakcie którego mamy założone spadki entalpii $h_{1,2}$ lub spadki ciśnienia $\Delta p = p_1 - p_2$ a nieznana jest temperatura T_2 .



Rysunek U.16. Entalpie, ciśnienia i temperatury statyczne i całkowite podczas przepływu przez konfuzor.

Aby narysować wykres energii „ $i - s$ ” stan wlotowy 1 – 1 musi być znany, tzn.: p_1, T_1, i_1 . Punkt 1 wyznaczony jest jako punkt przecięcia się $i_1 = \text{const}$ i $p_1 = \text{const}$ lub $i_1 = \text{const}$ i $T_1 = \text{const}$. Punkt 1c oznacza całkowitą entalpię na wlocie 1 – 1 oraz p_{1c}, T_{1c} ciśnienie całkowite i temperaturę całkowitą. W punkcie 1 możemy odczytać entropię właściwą s_1 i objętość właściwą v_1 .

Przypadek a:

Do odczytania stanu energetycznego płynu roboczego w przekroju 2–2 (czyli w punkcie 2 na $i-s$) potrzeba znać ciśnienie wylotu p_2 . Jeśli z pomiarów (przypadek a) znamy temperaturę T_2 to po odczytaniu $i_2 = i_2(p_2, T_2)$ możemy znaleźć: v_2 , s_2 energię kinetyczną $\frac{c_2^2}{2}$ oraz „prędkość” przepływu c_2 :

$$c_2 = \sqrt{2(i_1 - i_2) + c_1^2} = \sqrt{2(i_{1c} - i_2)}. \quad (\text{U.270})$$

Następnie odczytując z $i-s$ wartości entalpii $i_{2s} = i(p_2, s_1)$ otrzymanej przy hipotetycznym izentalpowym spadku energii wewnętrznej mamy „pomierzona” wartość strat energii kinetycznej w kanale.

$$\Delta h_{1,2} = i_2 - i_{2s} \quad (\text{U.271})$$

Występujący w naszej branży kolokwialny zwrot „**pomierzone straty**” praktycznie oznacza, iż pomierzono tylko entalpię i_2 , a entalpię i_{2s} obliczono na podstawie tablic termodynamicznych lub odczytano z wykresu „ $i-s$ ”.

Straty mogą być wyznaczone również numerycznie w oparciu o rezultaty obliczeń modelem 3D (CFD). Obliczenia prowadzimy w całym kanale przepływowym starając się najdokładniej zamodelować sprężyste własności płynu roboczego oraz dobrze obliczyć straty na skutek tarcia, turbulencji, transporty ciepła, itp. Jeśli numeryczne modelowanie przepływu wykonywane jest przez doświadczonego numeryka wysokiej klasy to mamy 50 – 80 procentową gwarancję, że uśrednione na wylocie 2 – 2 ciśnienie p_2 i temperatura T_2 odpowiadać będą (z 20 – 30 % dokładnością) pomierzonym wartościom p_2 i T_2 . Trzeba jednak zachować krytycyzm w stosunku do **ilościowych** danych obliczanych przy pomocy CFD i modelu 3D, zwłaszcza gdy obliczenia wykonywane były indywidualnie przez numeryka o nieudokumentowanych kwalifikacjach i małym doświadczeniu w posługiwaniu się kodem CFD. W porównaniu z CFD, dane uzyskane z pomiarów 0D (Experimental Flow Mechanics - EFM) posiadają dużą wiarygodność i zwykle są traktowane przez użytkowników jako wartości odniesienia (referencjalne). **Pomyłki w używaniu narzędzi pomiarowych EFM praktycznie nie występują, natomiast błędne używanie CFD jest codzienną plagą.**

Przypadek b: (podejście projektowe)

Dla projektowanego kanału o wlocie 1 – 1 i wylocie 2 – 2, którego wymiary nie są znane, a geometria jest znana tylko w ogólnym zarysie, posługujemy się, w fazie projektu, koncepcją iż każdy kilogram czynnika roboczego konwertuje energię bez strat, w sposób idealny niezależnie od tego, czy kilogram masy przepływa ocierając się o ścianki czy też przepływa wnętrzem kanału. Takie założenie daje wynik np. moc, energię kinetyczną z nadmiarem, jednakże obliczenie jest proste i łatwe do wielokrotnych powtórzeń podczas prób projektowych, zaś ostateczny wynik koryguje się poprzez uwzględnienie **sprawności konwersji energii** lub poprzez **współczynnik strat energii**.

W przypadku przepływu przez kanał, którego zadaniem jest konwersja entalpii w energię kinetyczną np. konfuzor lub dysza, **pytamy się o maksymalną energię kinetyczną**, jaka jest możliwa do uzyskania w przepływie czynnika roboczego realizującego spadek ciśnienia od p_1 do p_2 . Taka prędkość, oznaczana dodatkowym indeksem s , tzn. c_{2s} , jest osiągnięta, gdy wys-

tapi w trakcie przepływu między wlotem 1 – 1 i wylotem 2 – 2 sprężysta przemiana izentropowa - $s = \text{const}$. Wtedy wartość entalpii w wylocie 2 – 2 wynosić będzie $i_{2s} = i(p_2, s_1 = s_2)$. Różnica $i_{2c} - i_{2s}$ to energia kinetyczna na wylocie 2 – 2, zwana również **dysponowanym całkowitym spadkiem entalpii** $h_{1,2s,c}$. Maksymalna (izentropowa) prędkość odpowiadająca całkowitemu izentropowemu spadkowi entalpii jest oczywiście równa:

$$c_{2s} = \sqrt{2h_{1,2s,c}} = \sqrt{2h_{1,2s} + c_1^2} = \sqrt{2(i_1 - i_{2s}) + c_1^2} \quad (\text{U.272})$$

a ekspansja płynu przebiegająca przy $s = \text{const}$ opisana jest linią przerywaną 1 – 2s. Aby uwzględnić rzeczywisty przepływ już w fazie projektowania zakłada się, iż rzeczywista energia kinetyczna oparta na prędkości rzeczywistej c_2 będzie mniejsza tzn. $c_2 < c_{2s}$. Jeśli projektowana konstrukcja jest nowa w tym sensie, iż nie posiadamy żadnych informacji o charakterze przepływu jest trudno określić o ile procent c_2 będzie mniejsze od c_{2s} . Jednakże w kanałach o typowych kształtach w oparciu o pomiary stwierdzono, iż procent pomniejszenia zależy od masowego natężenia przepływu. Toteż wprowadzenie współczynnika prędkości φ poprzez związek:

$$c_2 = \varphi c_{2s}, \quad \varphi < 1, \quad (\text{U.273})$$

zezwała w **sposób integralny dla kanału** oszacować miarę strat w przepływie na odcinku między wlotem 1 – 1 i wylotem 2 – 2. Badania Christeina, Fluegla, Stodoli, Browna i Boveri'ego wykazały, że: $\varphi = \varphi(\dot{m})$ i wahają się od 0,9868 dla dużych $\dot{m}$ do 0,945 dla małych $\dot{m}$.

Wykres $\varphi = \varphi(\dot{m})$ nazywamy **charakterystyką** określającą straty energii kinetycznej w kanale. Wykres taki można wykonać tylko dla rzeczywistej geometrii kanału poprzez:

- pomiary 0D (EFM) w prędkości c_2 ,
- obliczenia numeryczne 3D (CFD) i proces uśredniania pola prędkości w przekroju 2 – 2.

Jest pożądanym, aby wykres $\varphi = \varphi(\dot{m})$ zależał od bezwymiarowych stałych charakteryzujących geometrię np. stosunku powierzchni wlotu i wylotu A_1/A_2 i długości kanału. Do obliczeń „ręcznych”, charakterystyki $\varphi = \varphi(\dot{m})$ musi być podana w postaci nomogramu, zaś do obliczeń komputerowych CFD diagram $\varphi = \varphi(\dot{m})$ musi być w postaci elektronicznej.

Strata energii kinetycznej w kanale dyszy $\Delta h_{1,2}$ jest równa różnicy między energią kinetyczną wylotową w przepływie izentropowym a energią kinetyczną w przepływie rzeczywistym (rys. U.16):

$$\Delta h_{1,2} = \frac{c_{2s}^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} = \frac{c_{2s}^2}{2} - \frac{\varphi^2 c_{2s}^2}{2} = (1 - \varphi^2) \frac{c_{2s}^2}{2}, \quad (\text{U.274})$$

ponieważ $\frac{1}{2}c_{2s}^2 = i_{1c} - i_{2s} = h_{1,2s,c}$ to:

$$\Delta h_{1,2} = (1 - \varphi^2) h_{1,2s,c} = \varsigma h_{1,2s,c}, \quad (\text{U.275})$$

gdzie

$$\varsigma = 1 - \varphi^2, \quad (\text{U.276})$$

oznacza **współczynnik start energii kinetycznej** w dyszy i wynosi on $\varsigma = 0,045 - 0,02$ dla φ zmieniającego się od 0,975 do 0,99. Znając $\Delta h_{1,2}$ możemy obliczyć i_2 i położenie punktu 2 na diagramie „ $i - s$ ”. Zmiana entropii z s_1 do s_2 spowodowana jest zjawiskami nieodwracalnymi takimi jak; tarcie poszczególnych cząstek o siebie i o ściany kanału, wiry, oderwania, odprowadzanie ciepła.

Ostatnim etapem procesu projektowania jest dobranie pola powierzchni wylotu A_2 . Zakładamy, iż pole przekroju będzie w sposób gładki przechodziło od A_1 do A_2 , co wyrażamy rysując gładką krzywą między punktami 1 i 2 (stany pośrednie między 1 i 2 są praktycznie nieobliczalne). Ponieważ znamy objętość właściwą v_2 i gęstość $\rho_2 = 1/v_2$ to z bilansu masy $\dot{m} = \rho A c_{(\rho)}$ możemy obliczyć potrzebny przekrój A_2 . Nie możemy dopuścić do tego, aby przekrój wylotowy był zbyt mały, wtedy ekspansja będzie dodatkowo stłumiona poprzez zmianę parametrów przepływu. Dzieje się tak, przykładowo, w ostatnim stopniu części niskoprężnej turbiny parowej.

Obliczenie A_2 z wzoru $\dot{m} = \rho_2 A_2 c_{2(\rho)}$ wymaga znajomości związku między średnią masową $c_{(\rho)}$ a średnią energetyczną $c_{(e)}$ obliczoną np. ze wzoru (U.269). Ponieważ zachodzi $c_{(\rho)} < c_{(p)} < c_{(e)}$ to kładąc $c_{(\rho)} = \mu_2 c_{(e)}$ otrzymamy z bilansu masy:

$$A_2 = \frac{\dot{m}}{\mu_2 \rho_2 c_{2(e)}}, \quad \mu_2 < 1, \quad (\text{U.277})$$

gdzie $c_{2(e)}$ to prędkość rzeczywista obliczana wg (U.270), zaś współczynnik μ_2 , wahający się od 0,97 – 0,99 jest współczynnikiem korygującym sposoby obliczenia średnich prędkości.

Reasumując, wykres $i - s$ służy do przedstawienia graficznego całkowitego równania energii używanego do wyznaczania energii kinetycznej bez potrzeby użycia równania pędu.

- Nie używając bilansu entropii w wersji integralnej 0D, wykres $i - s$, poprzez porównanie przemiany doskonale sprężystej izentropowej z przemianą rzeczywistą, pozwala na obliczenie przyrostu entropii $\Delta s_{1,2}$. Przyrost entropii jest miarą nieodwracalności procesów przepływowych w konfuzorze.

punkt 1 (stan termodynamiczny czynnika na wejściu). Podobnie jak w przypadku konfuzora mamy teraz dwa przypadki:

- a) **podejście pomiarowe** 0D (EFM) gdy mamy pomierzoną średnią w sensie energetycznym prędkość c_2 . Znamy tym samym wyhamowanie, jakiemu uległ przepływ między wlotem 1 – 1 i wylotem 2 – 2. Z bilansu energii (U.278) mamy:

$$i_2 = i_1 + \frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2}. \quad (\text{U.279})$$

Aby wyznaczyć ciśnienie sprężu p_2 na podstawie i_2 potrzebna jest jeszcze jedna dana pomiarowa np. T_2 . Z przecięcia $i_2 = \text{const}$ i $T_2 = \text{const}$ otrzymujemy punkt 2 i przechodzącą przez niego izobarę $p_2 = \text{const}$. Znając p_2 odczytujemy entalpię i_{2s} oraz stratę sprężu:

$$\Delta h_{1,2} = i_2 - i_{2s}. \quad (\text{U.280})$$

Strata ta mówi nam, że aby uzyskać spręż p_2 w przepływie rzeczywistym musimy zużyć nieco więcej energii kinetycznej ($h_{1,2}$) niż w przepływie doskonałym sprężystym ($h_{1,2s}$). Strata ta związana jest z przyrostem entropii $\Delta s_{1,2}$.

- b) **podejście projektowe** 0D (CFM), w którym projektujemy geometrię dyfuzora realizującego podniesienie ciśnienia z p_1 do p_2 (lub temperaturę T_1 do T_2). Ciśnienie p_2 nie może być dowolne i nie może przekraczać ciśnienia całkowitego p_{1c} . Osiągnięcie $p_2 = p_{1c}$ oznaczałoby całkowite wyhamowanie przepływu w przekroju 2 – 2 i wzrost gęstości i temperatury do bardzo dużych wartości.

Obliczenie dyfuzora rozpoczynamy od wyliczenia potrzebnej energii kinetycznej wystarczającej do sprężu w przypadku, gdy przepływ jest idealnie sprężysty i realizuje przemianę izentropową 1 – 2s. Otrzymamy wtedy prędkość c_{2s} , która jest nieco większa od prędkości rzeczywistej c_2 . Inaczej mówiąc, w rzeczywistym przepływie z uwagi na straty tarcia potrzebne jest mocniejsze wyhamowanie przepływu, aby osiągnąć wymagany spręż p_2 .

Maksymalna (izentropowa) prędkość c_{2s} odpowiadająca najmniejszemu zużyciu energii kinetycznej $c_1^2/2$ (najmniejsze wyhamowanie) jest obliczana na podstawie entalpii $i_{2s} = i(p_2 - s_1)$:

$$c_{2s} = \sqrt{c_1^2 - 2(i_{2s} - i_1)}, \quad (\text{U.281})$$

z uwagi na straty rzeczywiste prędkość c_2 musi być mniejsza o pewien współczynnik prędkości φ_d ($\varphi_d < 1$)

$$c_2 = \varphi_d c_{2s} \quad (\text{U.282})$$

Współczynnik ten dla dyfuzorów o małym kącie rozwarcia jest najmniejszy i zwiększa się znacznie, gdy kąt rozwarcia przekracza $7 \div 8^\circ$. W ogólności współczynniki prędkości dyfuzorów są o wiele większe niż odpowiadające im współczynniki prędkości konfuzorów. Znajac c_2 i ciśnienie p_2 wyznaczamy punkt 2 oraz i_2 , T_2, v_2 , s_2 . Strata sprężu (U.280) może być przedstawiona jako:

$$\Delta h_{1,2} = i_2 - i_{2s} = \frac{c_{2s}^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} = (1 - \varphi_d^2) \frac{c_{2s}^2}{2} = \varsigma_d \frac{c_{2s}^2}{2} \quad (\text{U.283})$$

oraz entalpia i_2

$$i_2 = i_{2s} + \Delta h_{1,2} = i_{2s} + \varsigma_d \frac{c_{2s}^2}{2} = \frac{c_1^2}{2} - \frac{c_{2s}^2}{2} + \varsigma_d \frac{c_{2s}^2}{2} = \frac{c_1^2}{2} - (1 - \varsigma_d) \frac{c_{2s}^2}{2}. \quad (\text{U.284})$$

Obliczenie powierzchni wylotu A_2 wykorzystuje równanie ciągłości masy $\dot{m} \rho_1 A_1 c_1 = \rho_2 A_2 c_2$. Ponieważ $c_2 \ll c_1$, zaś gęstość $\rho_2 > \rho_1$, ale nie w takim stosunku jak prędkości, to przekrój $A_2 > A_1$ i obliczany jest z (U.278).

U.1.10.28 Izentropowe sprawności konfuzora i dyfuzora

Kluczowym dla podejścia integralnego 0D jest określenie ile **procent dysponowanej energii na wlocie może przekonwertować w energię użyteczną na wylocie**. Tym samym sprawność określa doskonałość urządzenia i jego przydatność do celów, dla których zostało zaprojektowane. Sprawność izentropowa oznacza, iż energia dysponowana na wlocie obliczana jest wg przemiany izentropowej i jest maksymalna ze wszystkich możliwych energii dysponowanych, inaczej obliczanych. **Sprawność izentropowa** określana jest jako stosunek uzyskanej energii w przepływie rzeczywistym odniesiony do dysponowanej energii przemiany izentropowej, jest też miarą nieodwracalności przepływu i strat energii.

Ponieważ zadania konfuzora i dyfuzora różnią się to definicja izentropowej sprawności dla obu tych przypadków są różne. Jeśli wyjdziemy z równania bilansu energii

$$i_1 + \frac{c_1^2}{2} = i_2 + \frac{c_2^2}{2} \quad (\text{U.285})$$

to, w przypadku **konfuzora**, sprawnością nazywamy procent entalpii i_1 , który może przekonwertować w energię kinetyczną $\frac{c_2^2}{2}$. Zaś w przypadku **dyfuzora**, odwrotnie, sprawnością nazywamy ten procent energii kinetycznej

$\frac{c_1^2}{2}$, który może przekonwertować w i_2 . W tej konwersji form energii stanami granicznymi jest doskonale sprężysta konwersja, w której czynnik roboczy podlega przemianie izentropowej:

$$i_1 + \frac{c_1^2}{2} = i_{2s} + \frac{c_{2s}^2}{2}. \quad (\text{U.286})$$

Dla **konfuzora**, którego zadaniem jest przyspieszanie przepływu sprawnością izentropową jest stosunek energii kinetycznych:

$$\eta_{i,k} = \frac{\frac{c_2^2}{2}}{\frac{c_{2s}^2}{2}} = \frac{\varphi^2 \frac{c_{2s}^2}{2}}{\frac{c_{2s}^2}{2}} = \varphi^2 = 1 - \varsigma, \quad (\text{U.287})$$

gdzie i – oznacza izentalpowy, k – konfuzor. Związek ten oznacza, iż sprawność izentropowa jest związana ze stratami ς prostą zależną mówiącą, że ze wzrostem strat maleje sprawność urządzenia.

Dla **dyfuzora**, którego zadaniem jest wyhamowanie przepływu, sprawność izentropową określimy jako stosunek:

$$\eta_{i,d} = \frac{\frac{c_2^2}{2} + h_{1,2s}}{\frac{c_{2s}^2}{2} + h_{1,2}} = \frac{\frac{c_{2s}^2}{2} + \left(\frac{c_1^2}{2} - \frac{c_{2s}^2}{2}\right)}{\frac{c_{2s}^2}{2} + (i_2 - i_1)}. \quad (\text{U.288})$$

Ponieważ $i_2 - i_1 = h_{1,2s} + \Delta h_{1,2}$ to sprawność $\eta_{i,d}$ wyrazić można przy pomocy strat ς_d jako:

$$\eta_{i,d} = \frac{\frac{c_2^2}{2} + h_{1,2s}}{\frac{c_{2s}^2}{2} + h_{1,2s} + \varsigma_d \frac{c_{2s}^2}{2}}. \quad (\text{U.289})$$

W przypadku, gdy prędkość c_2 jest dostatecznie mała sprawność określimy z bezpośredniego porównania (U.288) i (U.286):

$$\eta_{i,d} = \frac{i_{2s}}{i_2} = \frac{i_{2s}}{i_{2s} + \Delta h_{1,2}}. \quad (\text{U.290})$$

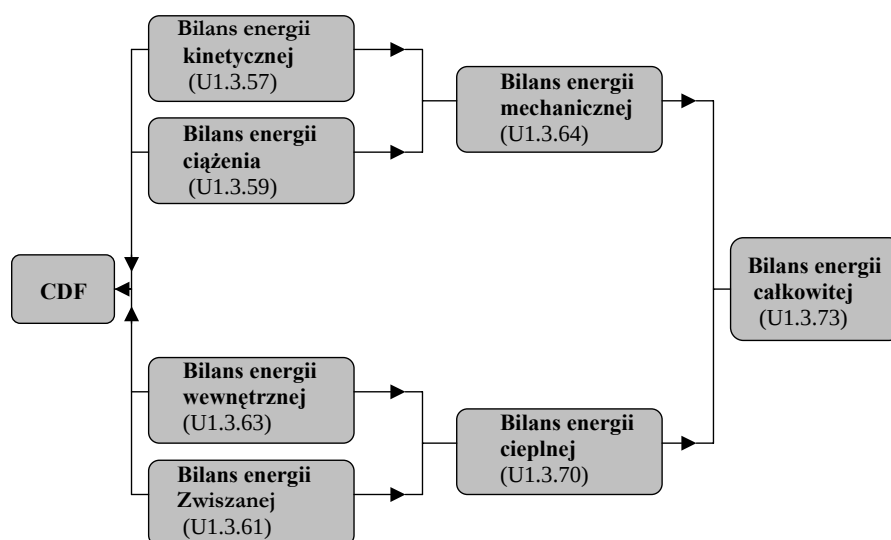
Sprawności izentropowe¹⁴⁴ nie tylko w przepływach przez konfuzory i dyfuzory ale również w przepływach w sprężarkach i turbinach (ze ściankami

¹⁴⁴W literaturze stosowane są różne – najróżniejsze oznaczenia sprawności, stąd też student zastanawia się, czemu ma to służyć (najczęściej promocji książki wykładowcy). Ogólnie sprawności mamy dwojakiego typu:

$$\text{energetyczna } \eta_I = \frac{\text{moc otrzymana}}{\text{doprowadzony strumień ciepła}}$$

$$\text{egzergiczna } \eta_{II} = \frac{\text{moc otrzymana}}{\text{doprowadzony strumień egzergii}}.$$

Indeks „I” podkreśla spójność definicji z I Zasadą Termodynamiki, indeks „II” podkreśla spójność z II Zasadą Termodynamiki. Omawiane tu sprawności izentropowe należą do szczególnych sprawności typu pierwszego, czyli sprawności energetycznych.



Rysunek U.18. Struktura bilansów energii na poziomie lokalnym 0D.

ruchomymi) odgrywają kluczową rolę w procesie projektowania. Stąd też są głównymi bezwymiarowymi charakterystykami urządzenia. W przypadku przepływów dyfuzorowych i konfuzorowych sprawności izentropowe związane są relacjami (U.287) i (U.284) ze stratami ζ oraz z współczynnikami prędkości φ , stąd też wystarczy znać jedną charakterystykę aby określić pozostałe.

U.1.10.29 Struktura integralnych bilansów energii

U.1.10.30 Podsumowanie

W literaturze Stosowanej Termomechaniki Płynów wykorzystywane są różne postaci bilansów energii. Przykładowo, bilans energii mechanicznej zawiera w sposób jawny straty energii zaś bilans energii całkowitej nie uwzględnia strat energii. Celem niniejszego uzupełnienia było wyprowadzenie integralnych postaci bilansu energii w formach analogicznych do modelu trójwymiarowego 3D. W tym celu wyprowadzono, w modelu 0D zarówno bilans energii mechanicznej (równanie Bernoulli-Darcy'ego) jak i bilans energii cieplnej (równanie Carnota-Clausiusa). Podobnie jak w modelu 3D, równanie bilansu energii mechanicznej i energii cieplnej po zsumowaniu prowadzą do bilansu energii całkowitej. Opisano termodynamiczną interpretację równan bilansu energii mechanicznej i energii cieplnej zaproponowane przez Rankine'a i Zeunera. Przedyskutowano szczegółowo wykres energii Molliera na przykładzie kanału konfuzorowego i dyfuzorowego.

Janusz Badur

Pięć wykładów ze współczesnej termomechaniki płynów

(skrypt dla studentów IZK)

U.1.11

Bezindeksowy (absolutny) zapis Gibbsa

W niniejszym opracowaniu przyjmujemy notację używaną w krajach Unii Europejskiej opracowaną ponad 100 lat temu przez Gibbsa. Będziemy używali zapisu wskaźnikowego głównie odniesionego do kartezjańskiej bazy $\vec{e}_i = \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ o współrzędnych $x_i = x, y, z$ lub rzadziej krzywoliniowej bazy $\vec{g}_i$ współrzędnych θ^i , $i = 1, 2, 3$:

- wektor pozycyjny

$$\vec{x} = x_i \vec{e}_i = \theta^i \vec{g}_i \quad i, j, k, m = x, y, z \text{ lub } i, j, k, m = 1, 2, 3$$

- idemfktor Gibbsa

$$\overleftrightarrow{I} = \delta_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z = g_{ij} \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j = g^{ij} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j$$

- delta Kroneckera

$$\delta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

- kowariantny i kontrawariantny tensor metryczny

$$g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j, \quad g^{ij} = \vec{g}^i \cdot \vec{g}^j,$$

- wektor prędkości

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = v_i(\vec{x}, t) \vec{e}_i = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z = v^j(\vec{x}, t) \vec{g}_j(\vec{x}, t) = v_i(\vec{x}, t) \vec{g}^i(\vec{x}, t)$$

Czasami w pracach klasycznych $v_x = u$, $v_y = v$, $v_z = w$,

- wektor normalny

$$\vec{n}(\vec{x}) = n_i \vec{e}_i, \quad |\vec{n}| = \sqrt{\vec{n} \cdot \vec{n}} = 1$$

- iloczyn diadyczny dwu wektorów

$$\begin{aligned}\vec{v} \otimes \vec{u} &= v_i u_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \\ &+ v_x u_x \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + v_x u_y \vec{e}_x \otimes \vec{e}_y + v_x u_z \vec{e}_x \otimes \vec{e}_z + \\ &+ v_y u_x \vec{e}_y \otimes \vec{e}_x + v_y u_y \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + v_y u_z \vec{e}_y \otimes \vec{e}_z + \\ &+ v_z u_x \vec{e}_z \otimes \vec{e}_x + v_z u_y \vec{e}_z \otimes \vec{e}_y + v_z u_z \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z\end{aligned}$$

lub

$$\vec{v} \otimes \vec{u} = v_i u_j \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j = v^i u^j \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j$$

- tensor (drugiego rzędu)

$$\overset{\leftrightarrow}{t} = t_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = t_{km} \vec{g}^k \otimes \vec{g}^m = t^{km} \vec{g}_k \otimes \vec{g}_m,$$

gdzie: $i, j = x, y, z$, $k, m = 1, 2, 3$ (składowe kartezjańskie t_{ij} posiadają rzeczywisty wymiar np. $[N/m^2]$, zaś składowe ko- i kontrawariantne t_{km} i t^{km} nie posiadają rzeczywistego wymiaru)

- transpozycja tensora

$$\overset{\leftrightarrow}{t}^T = (t_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)^T = t_{ij} \vec{e}_j \otimes \vec{e}_i$$

$$(\vec{v} \otimes \vec{u})^T = \vec{u} \otimes \vec{v}$$

$$(\overset{\leftrightarrow}{m} \otimes \overset{\leftrightarrow}{p})^{T2,3} = m_{ij} p_{kl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_l = (m_{ij} p_{kl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l)^{T2,3}$$

- tensor symetryczny (6 składowych niezależnych)

$$\begin{aligned}\overset{\leftrightarrow}{t} = \overset{\leftrightarrow}{t}^T &= t_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = t_{xx} \vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + t_{yy} \vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + t_{zz} \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z + \\ &+ t_{xy} (\vec{e}_x \otimes \vec{e}_y + \vec{e}_y \otimes \vec{e}_x) + t_{xz} (\vec{e}_x \otimes \vec{e}_z + \vec{e}_z \otimes \vec{e}_x) + t_{yz} (\vec{e}_y \otimes \vec{e}_z + \vec{e}_z \otimes \vec{e}_y)\end{aligned}$$

- osie główne i wartości własne tensora

$$\begin{aligned}\overset{\leftrightarrow}{t} &= t_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = t_I \vec{n}_I \otimes \vec{n}_I = t_1 \vec{n}_1 \otimes \vec{n}_1 + t_2 \vec{n}_2 \otimes \vec{n}_2 + t_3 \vec{n}_3 \otimes \vec{n}_3, \\ &I = 1, 2, 3 \quad t_1 \geq t_2 \geq t_3\end{aligned}$$

- tensor sferyczny (kulisty)

$$\overset{\leftrightarrow}{t} = t \overset{\leftrightarrow}{I} = t(\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_1 + \vec{n}_2 \otimes \vec{n}_2 + \vec{n}_3 \otimes \vec{n}_3) = t \delta_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

- iloczyn skalarny (dwu wektorów, dwu tensorów)

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{u} &= v_i \vec{e}_i \cdot u_j \vec{e}_j = v_i u_j \delta_{ij} = v_i u_i \quad (x_i) \\ \vec{v} \cdot \vec{u} &= v_i \vec{g}^i \cdot u_j \vec{g}^j = v_i u_j \vec{g}^{ij} = v_i u^i = v^i u_i \quad (\theta^i) \\ \overleftrightarrow{t} \cdot \overleftrightarrow{m} &= C_{2-4}^{1-3} \left[\overleftrightarrow{t} \otimes \overleftrightarrow{m} \right] = t_{ij} m_{kl} C_{2-4}^{1-3} [\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l] = \\ &= t_{ij} m_{kl} (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k) (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_l) = t_{ij} m_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} = t_{ij} m_{ij} \\ \overleftrightarrow{t} \cdot \overleftrightarrow{I} &= C_{2-4}^{1-3} \left[\overleftrightarrow{t} \otimes \overleftrightarrow{I} \right] = t_{ij} \delta_{km} C_{2-4}^{1-3} [\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_m] = \\ &= t_{ij} \delta_{km} \delta_{ik} \delta_{jm} = t_{ii}\end{aligned}$$

- kontrakcja bazy pierwszej z trzecią

$$C_{1-3} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k) = \vec{e}_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k) = \delta_{ik} \vec{e}_j$$

- kontrakcja bazy i -tej z bazą k -tą: C_{i-k} np.:

$$\begin{aligned}C_{1-2} (\vec{v} \otimes \vec{u}) &= C_{1-2} (v_i u_k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k) = v_i u_k \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = v_i u_k \delta_{ik} = v_i u_i, \\ C_{1-4} (m_{ijkl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) &= m_{ijkl} \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_l) = m_{ijk i} \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k\end{aligned}$$

- ślad tensora

$$\begin{aligned}\text{tr}(\overleftrightarrow{t}) &= C_{1-2}(\overleftrightarrow{t}) = t_{ij} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = t_{ii} = t_{xx} + t_{yy} + t_{zz}, \\ \text{tr}(\overleftrightarrow{t} \overleftrightarrow{m}) &= \text{tr}(t_{ij} m_{jk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_k) = t_{ij} m_{ji} = \overleftrightarrow{t} \cdot \overleftrightarrow{m}^T, \\ \text{tr}(\overleftrightarrow{I}) &= \delta_{xx} + \delta_{yy} + \delta_{zz} = 3,\end{aligned}$$

- iloczyn wektorowy wektora i tensora

$$\vec{v} \times \vec{u} = v_i u_j \vec{e}_i \times \vec{e}_j = v_i u_j \epsilon_{ijk} \vec{e}_k$$

lub:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = (v_y u_z - v_z u_y) \vec{e}_x + (v_z u_x - v_x u_z) \vec{e}_y + (v_x u_y - v_y u_x) \vec{e}_z,$$

$$\overleftrightarrow{t} \times \overleftrightarrow{m} = t_{ij} m_{kl} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \times (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = t_{ij} m_{kl} \epsilon_{jkn} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_n \otimes \vec{e}_l$$

- tensor Ricci

$$\epsilon = - \overleftrightarrow{I} \times \overleftrightarrow{I} = -\delta_{ij} \delta_{kl} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \times (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k$$

- tożsamość Levi-Civita

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}$$

- iloczyn diadyczny dwu tensorów

$$\overleftrightarrow{m} \otimes \overleftrightarrow{t} = (m_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \otimes (t_{km}\vec{e}_k \otimes \vec{e}_m) = m_{ij}t_{km}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_m$$

$$\overleftrightarrow{m} \otimes \vec{v} = (m_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \otimes (v_k\vec{e}_k) = m_{ij}v_k\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k$$

- iloczyn wewnętrzny

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{m} \overleftrightarrow{t} &= (m_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)(t_{km}\vec{e}_k \otimes \vec{e}_m) = m_{ij}t_{km}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_m)(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) = \\ &= m_{ij}t_{km}\delta_{jk}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_m = m_{ij}t_{jm}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_m, \end{aligned}$$

$$\overleftrightarrow{t} \vec{v} = (t_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)(v_k\vec{e}_k) = t_{ij}v_k\vec{e}_i(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) = t_{ij}v_j\vec{e}_i,$$

$$\vec{v} \overleftrightarrow{t} = (v_i\vec{e}_i)(t_{jm}\vec{e}_j \otimes \vec{e}_m) = v_it_{jm}(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)\vec{e}_m = v_jt_{jm}\delta_{ij}\vec{e}_m = v_it_{im}\vec{e}_m$$

- suma dwóch tensorów

$$\overleftrightarrow{t} + \overleftrightarrow{m} = (t_{ij} + m_{ij})\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

- wektor nabra (działa z prawej)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial x_y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial x_z}\vec{e}_z = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i = \partial_i\vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial \theta^j}\vec{g}^j = \text{grad}(\cdot)$$

- gradient skłara $\varphi(\vec{x})$

$$\text{grad } \varphi(\vec{x}) = \varphi \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \right) \vec{e}_i = \varphi_{,i} \vec{e}_i$$

- gradient wektora

$$\text{grad } \vec{v} = \vec{v} \otimes \nabla = (v_i\vec{e}_i) \otimes (\partial_j\vec{e}_j) = v_{i,j}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = (\partial_j\vec{e}_i \equiv 0)$$

$$\begin{aligned} &= v_{x,x}\vec{e}_x \otimes \vec{e}_x + v_{x,y}\vec{e}_x \otimes \vec{e}_y + v_{x,z}\vec{e}_x \otimes \vec{e}_z + \\ &+ v_{y,x}\vec{e}_y \otimes \vec{e}_x + v_{y,y}\vec{e}_y \otimes \vec{e}_y + v_{y,z}\vec{e}_y \otimes \vec{e}_z + \\ &+ v_{z,x}\vec{e}_z \otimes \vec{e}_x + v_{z,y}\vec{e}_z \otimes \vec{e}_y + v_{z,z}\vec{e}_z \otimes \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\text{grad } \vec{v} = \vec{v} \otimes \nabla = (v_i\vec{g}^i) \otimes (\partial_j\vec{g}^j) = (\partial_jv_i\vec{g}^i + v_i\partial_j\vec{g}^i) \otimes \vec{g}^j = v_{i,j}\vec{g}^i \otimes \vec{g}^j$$

- gradient tensora

$$\text{grad} \left(\overset{\leftrightarrow}{t} \right) = \overset{\leftrightarrow}{t} \otimes \nabla = \partial_k (t_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \otimes \vec{e}_k = t_{ij,k} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k$$

- diwergencja

$$\text{div}(\vec{v}) = C_{1-2}(\text{grad} \vec{v}) = C_{1-2} \vec{v} \otimes \nabla = C_{1-2} (v_{i,j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) = v_{i,j} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = v_{i,j} \delta_{ij} = v_{i,i}$$

$$\text{div} \left(\overset{\leftrightarrow}{t} \right) = C_{2-3}(\text{grad} \overset{\leftrightarrow}{t}) = C_{2-3} (t_{ij,k} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k) = t_{ij,k} \vec{e}_i (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) = t_{ij,k} \delta_{jk} \vec{e}_i = t_{ij,j} \vec{e}_i$$

- rotacja wektora

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{v} &= \vec{v} \times \nabla = v_i \vec{e}_i \times \partial_j \vec{e}_j = \partial_j v_i (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = \partial_j v_i \epsilon_{ijk} \vec{e}_k = \epsilon_{ijk} \partial_j v_i \vec{e}_k = \\ &= (v_{z,y} - v_{y,z}) \vec{e}_x + (v_{x,z} - v_{z,x}) \vec{e}_y + (v_{y,x} - v_{x,y}) \vec{e}_z = \\ &= \omega_x \vec{e}_x + \omega_y \vec{e}_y + \omega_z \vec{e}_z = \omega_k \vec{e}_k \end{aligned}$$

- symetryczna i antysymetryczna część gradientu wektora

$$\begin{aligned} \overset{\leftrightarrow}{l} = \text{grad} \vec{v} &= \overset{\leftrightarrow}{d} + \overset{\leftrightarrow}{\omega} = \frac{1}{2} (\text{grad} \vec{v} + \text{grad}^T \vec{v}) + \frac{1}{2} (\text{grad} \vec{v} - \text{grad}^T \vec{v}) = \\ &= \frac{1}{2} (\vec{v} \otimes \nabla + \nabla \otimes \vec{v}) + \frac{1}{2} (\vec{v} \otimes \nabla - \nabla \otimes \vec{v}) = \\ &= \frac{1}{2} (\vec{v}_{i,j} + \vec{v}_{j,i}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + \frac{1}{2} (\vec{v}_{i,j} - \vec{v}_{j,i}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \\ &= d_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + \omega_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, \\ \overset{\leftrightarrow}{d} &= \overset{\leftrightarrow}{d}^T, \quad \overset{\leftrightarrow}{\omega} = -\overset{\leftrightarrow}{\omega}^T = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \end{aligned}$$

- dywergencja diady

$$\text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{u}) = \text{div}(\rho \vec{v}) \vec{u} + \rho \vec{v} \text{grad}^T \vec{u}$$

- dywergencja iloczynu

$$\text{div} \left(\overset{\leftrightarrow}{t} \vec{v} \right) = \text{div} \left(\overset{\leftrightarrow}{t} \right) \vec{v} + \overset{\leftrightarrow}{t} \cdot \text{grad}^T \vec{v}$$

- Laplasjan skalara

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \text{div}(\text{grad} \varphi) = C_{1-2}(\nabla \varphi) \otimes \nabla = C_{1-2}(\partial_i \varphi \vec{e}_i) \otimes (\partial_j \vec{e}_j) = \\ &= C_{1-2} \partial_j \partial_i \varphi \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \partial_j \partial_i \varphi \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \partial_j \partial_i \varphi \delta_{ij} = \partial_i \partial_i \varphi \end{aligned}$$

- gradient kwadratu wektora

$$\text{grad} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) = \text{grad}(\vec{v})\vec{v} + (\text{rot } \vec{v}) \times \vec{v}$$

- twierdzenie Gaussa-Ostogradzkiego

$$\iiint_V \text{grad } \varphi \, dV = \oint_{\partial V} \varphi \vec{n} \, dA,$$

$$\iiint_V \text{div } \vec{v} \, dV = \oint_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA,$$

$$\iiint_V \text{div } \vec{t} \, dV = \oint_{\partial V} \vec{t} \cdot \vec{n} \, dA$$

- zapis Kryłowa

W literaturze krajowej używany jest również inny ekwiwalentny zapis pochodzący od szkoły wschodniej Kryłowa. Jest to również zapis bezindeksowy w którym diwergencja i gradient brane są nie z prawej a z lewej oraz nie używa się dla iloczynu diadycznego specjalnego znaku „ $\otimes$ ”.

- zapis stosowany w numeryce

W praktyce stosuje się również dużo krótszy zapis tensora polegający na ustawieniu składowych tensora w macierz i odrzuceniu bazy $\vec{e}$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{bmatrix} = [t], \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \equiv \{v\}.$$

Taki zapis, wygodny dla rachunku macierzowego, jest praktycznie wykorzystywany w Numerycznej Termomechanice zwłaszcza w Metodzie Objętości Skończonych (MOS) i Metodzie Elementów Skończonych (MES).

W niniejszym skrypcie będziemy konsekwentnie utrzymywać rozróżnienie w notacji tensorów i macierzy: – pierwsze będziemy oznaczać podwójnymi klamrami strzałkami np: $\vec{t}$, $\vec{\tau}$, $\vec{R}$ zaś drugie, za Zienkiewiczem, klamrami np: $[t]$, $[\tau]$, $[R]$. Natomiast wektory będą oznaczane pojedynczą strzałką np. $\vec{v}$, $\vec{n}$, $\vec{x}$, a ich składowe, za Zienkiewiczem, nawiasem $\{.\}$ np: $\{v\}$, $\{n\}$, $\{x\}$. Oznacza to, iż w niniejszym skrypcie nie będziemy posługiwać się oznaczeniami typu bold: np. $\mathbf{d}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{v}$, etc, gdyż zanika wtedy różnica między tensorami i macierzami, co powoduje dyskomfort zrozumienia.

Notacja Gibbsa (zachodnia)	Notacja Kryłowa (wschodnia)
$\vec{v} \otimes \vec{u} = v_i u_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$\vec{v}\vec{u} = v_i u_j \vec{e}_i \vec{e}_j$
$\vec{t} \otimes \vec{u} = t_{ij} u_k \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k$	$\vec{t} \vec{u} = t_{ij} u_k \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k$
$\vec{t} \vec{v} = t_{ij} v_j \vec{e}_i$	$\vec{t} \cdot \vec{v} = t_{ij} v_j \vec{e}_i$
$\vec{t} \vec{m} = t_{ik} m_{kj} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$\vec{t} \cdot \vec{m} = t_{ik} m_{kj} \vec{e}_i \vec{e}_j$
$\vec{t} \cdot \vec{m} = t_{ij} m_{ij}$	$\vec{t} : \vec{m} = t_{ij} m_{ij}$
$\text{tr} \left(\vec{t} \vec{m}^T \right) = t_{ij} m_{ji}$	$\vec{t} \cdot \vec{m} = t_{ij} m_{ji}$
$\text{div} \vec{t} = t_{ij,j} \vec{e}_i \equiv \text{C}_{2-3} \text{grad} \vec{t}$	$\text{div} \vec{t} = \nabla \cdot \vec{t} = t_{ji,j} \vec{e}_i$
$\text{grad} \vec{v} = \vec{v} \otimes \nabla = v_{i,j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	$\text{grad} \vec{v} = \nabla \vec{v} = v_{i,j} \vec{e}_j \vec{e}_i$
$\text{rot} \vec{v} = \vec{v} \times \nabla = \omega_k \vec{e}_k$	$\text{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v}$
$\iiint \text{div} \vec{t} dV = \oiint \vec{t} \cdot \vec{n} dA$	$\iiint \text{div} \vec{t} dV = \oiint \vec{n} \cdot \vec{t} dA$

Tablica U.4. Główne różnice w notacjach

Wykaz skrótów

WNT – Wydawnictwo Naukowo Techniczne, Warszawa

PWN – Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa

Arkady – Wydawnictwo Arkady, Warszawa

Ossolineum – Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław

WKiK – Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa

WSiP – Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa

PWSZ – Państwowe Wydawnictwo Szkolne, Warszawa

Wyd. AGH – Wydawnictwo Akademii Górniczo - Hutniczej, Kraków

Wyd. P. Biał. – Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok

Wyd. P. Częst. – Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej,
Częstochowa

Wyd. P. Gdań. – Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk

Wyd. P. Kosza. – Wydawnictwo Politechniki Koszalińskiej, Koszalin

Wyd. P. Łódz. – Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź

Wyd. P. Pozn. – Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań

Wyd. P. Śląsk. – Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice

Wyd. P. Warsz. – Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa

Wyd. P. Wroc. – Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław

Literatura i Bibliografia

Przedmiotu

- [1] G.A. Aksielrund , M.A. Altszuler, *Ruch Masy w Ciałach Porowatych*, WNT, 1986
- [2] G.N. Aleksiejew, *Bezpośrednia Przemiana Różnych Rodzajów Energii na Energię Elektryczną i Mechaniczną*, WNT, 1964
- [3] A.G. Amielin, *Powstawanie Mgły przez Kondensację Pary*, WNT, 1968
- [4] R. Andrzejewski, W. Gutkowski, *Fizyczne Własności Płynów*, Wyd. P. Śląsk, 1968
- [5] A.I. Andruszczenko, *Termodynamiczne Obliczenia Optymalnych Parametrów Elektrowni Ciepłych*, WNT, 1965
- [6] N.S. Arżanov, W.N. Malcew, *Aerodynamika*, PWN, 1959
- [7] J. Badur, *Numeryczne Modelowanie Zrównoważonego Spalania w Turbinach Gazowych*, Wyd. IMP PAN, 2003
- [8] K. Badyda, *Zagadnienia Modelowania Matematycznego Instalacji Energetycznych*, Wyd. P. Warsz., 2000
- [9] J. Banaszek, *Zunifikowany Model Numerycznego Rozwiązania Złożonych Zagadnień Przewodnictwa Ciepła*, Wyd. P. Warsz., 1978
- [10] J. Banaszek, J. Bzowski, R. Domański, J. Sado, *Termodynamika, Przykłady i Zadania*, Wyd. P. Warsz., 1998
- [11] C.O. Bennett, J.E. Myers, *Przenoszenie Pędu, Ciepła i Masy*, WNT, 1966
- [12] M. Bernhardt, *Doładowanie Silników Spalinowych*, WKiŁ, 1958
- [13] W. Bieniasz, W. Szymański, *Laboratorium Mechaniki Płynów*, Wyd. P. Rzesz., 1977
- [14] C. Bieniek, W. Kolendarski, J. Ostrowski, W. Sobczyński, *Wentylatory Osiołowe*, WNT, 1961
- [15] Z. Bilicki, J. Cieśliński, S. Doerffer, R. Kwidziński, D. Mikielwicz, *Metody Komputerowe w Technice Ciepłej*, Wyd. P. Gdań., 1996
- [16] W. Błaszczyk, M. Roman, H. Stamatello, *Kanalizacja*, Arkady, 1974
- [17] Z. Bis, *Aerodynamika Binarnych Warstw Fluidalnych*, Wyd. P. Częst., 1999

- [18] T. Bohdal, H. Charun, Z. Ewretowska, K. Majka, J. Sławecki, *Ćwiczenia Laboratoryjne z Mechaniki Płynów*, Wyd. P. Koszał., 1997
- [19] T. Bohdal, H. Charun, M. Czapp, K. Dutkowski, *Wrzenie Perspektywicznych Czynników w Parownikach Urządzeń Chłodniczych*, Wyd. P. Koszał., 1999
- [20] T. Bohdal, H. Charun, M. Czapp, *Urządzenia Chłodnicze Sprężarkowe, Parowe*, WNT, 2003
- [21] S. Bretsznajer, *Własności Gazów i Cieczy*, WNT, 1962
- [22] M. Broszko, *Hydromechanika*, PWN, 1955
- [23] J. Bogdanienko, *Odnawialne Źródła Energii*, PWN, 1989
- [24] Z. Bonca, *Perspektywy Stosowania Freonów w Urządzeniach Chłodniczych*, Wyd. WSM Gdynia, 1994
- [25] Z. Bonca, D. Butrymowicz, D. Dambek, A. Depta, W. Targański, *Czynniki Chłodnicze i Nośniki Ciepła*, Wyd. IPPu, Gdańsk, 1997
- [26] K. Brodowicz, T. Dyakowski, *Pompy Ciepła*, PWN, 1990
- [27] K. Brodowicz, T. Dyakowski, M. Wszyński, *Przepływy Dwufazowe w Zastosowaniach Przemysłowych*, Wyd. P. Warsz., 1982
- [28] K. Brodowicz, *Teoria Wymienników Ciepła i Masy*, PWN, 1982
- [29] J. Bukowski, *Mechanika Płynów*, PWN, 1959
- [30] J. Bukowski, P. Kijkowski, *Kurs Mechaniki Płynów*, PWN, 1980
- [31] W. Bunkin, *Exploatacja Turbin Parowych*, PWT, 1956
- [32] Cz. Buraczewski, *Podstawy Termodynamiczne Procesów Nieodwracalnych*, Wyd. P. Gdań., 1975
- [33] E. Burka, T. Nałęcz, *Mechanika Płynów w Przykładach*, PWN, 1994
- [34] Z. Celiński, *Energetyka Jądrowa*, PWN, 1991
- [35] Z. Cliński, *Nowe Metody Wytwarzania Energii Elektrycznej* WNT, 1977
- [36] H. Charun, M. Czapp, *Parowe Jednostopniowe Urządzenia Chłodnicze Sprężarkowe*, Wyd. P. Koszał. 1999
- [37] T. Chmielniak, *Turbiny Ciepłne*, Wyd. P. Śląsk, 1998
- [38] T. Chmielniak, *Analiza Niektórych Zjawisk Charakterystycznych dla Stopnia Turbiny Pracującego w Obszarze Pary Mokrej*, Wyd. P. Śląsk., 1972
- [39] T. Chmielniak, G. Kosman, J. Otte, T. Wrebowski *Zbiór Zadań z Turbin Ciepłych*, Wyd. P. Śląsk., 1976
- [40] T. Chmielniak, J. Ukuski, *Siłownie Ciepłne*, Wyd. P. Śląsk., 1987
- [41] T. Chmielniak, *Obiegi Termodynamiczne Turbin Ciepłych*, Ossolineum, 1988
- [42] T. Chmielniak, *Podstawy Teorii Profili i Palisad Łopatkowych*, Ossolineum, 1989
- [43] T. Chmielniak, *Przepływy Transsoniczne*, Ossolineum, 1994
- [44] T. Chmielniak, A. Rusin, K. Czwiertnia, *Turbiny Gazowe*, Ossolineum, 2000
- [45] T. Chmielniak, *Maszyny Przepływowe*, Wyd. P.Śląsk. 1997

- [46] T. Chmielniak, i inni, *Zbiór Zadań z Turbin Ciepłych*, Wyd. P. Śląsk., 1982
- [47] T. Chmielniak, G. Kosman, A. Rusin, *Pelzanie Elementów Turbin Ciepłych*, WNT, 1991
- [48] T. Chmielniak, G. Kosman, *Obciążenie Ciepłne Turbin Parowych*, WNT, 1990
- [49] T. Chmielniak, *Zagadnienia Ciepłych Maszyn Przepływowych, Czynniki Robocze, Obiegi Parowe i Gazowe*, Wyd. P. Śląsk., 1977
- [50] T. Chmielniak, C. Aksan, *Zagadnienia Maszyn Przepływowych, Regulacja Turbin*, Wyd. P. Śląsk., 1981,
- [51] T. Chmielniak, *Zagadnienia Ciepłych Maszyn Przepływowych, Teoria Palisad*, Wyd. P. Śląsk., 1979
- [52] T. Chmielniak, G. Kosman, *Turbiny Parowe, Zagadnienia Ciepłne i Wytrzymałościowe*, Wyd. P. Śląsk., 1987
- [53] T. Chmielniak, *Technologie Energetyczne*, Wyd. P. Śląsk., 2005
- [54] J. Chomiak, *Podstawowe Problemy Spalania*, PWN, 1973
- [55] D. Chomicz, *Uzdatnianie Wody w Kociołkach i Ciepłowniach*, Arkady, 1989
- [56] T. Chrzanowski, *Turbiny Parowe*, W-wa, 1932
- [57] J. Chudziński, *Sieci Ciepłne – Budowa, Obsługa, Naprawa*, PWT, 1955
- [58] J. Ciborowski, *Fluidyzacja*, PWT, 1957
- [59] J. Cieśliński, *Studium Wrzenia Pęcherzykowego na Metalicznych Powierzchniach Porowatych*, Wyd. P. Gdań., 1996
- [60] J. Cieśliński, *Niekonwencjonalne Urządzenia i Układy Energetyczne - Przykłady Obliczeń*, Wyd. P. Gdań., 1997
- [61] J. Cieśliński, J. Mikieliewicz *Niekonwencjonalne Źródła Energii*, Wyd. P. Gdań., 1996
- [62] G. Cole, *Dynamika Płynów*, PWN, 1964
- [63] L. Cwynar, *Rozruch Kocioł Parowych*, WNT, 1978
- [64] M. Czapp, H. Charun, T. Bohdal, *Wielostopniowe Sprężarkowe Urządzenia Chłodnicze*, Wyd. P. Koszał., 1997
- [65] M. Czapp, H. Charun, T. Bohdal, *Badania Laboratoryjne Urządzeń Chłodniczych*, Wyd. P. Koszał., 1996
- [66] E. Czetwertyński, *Hydraulika i Hydrodynamika*, PWN, 1958
- [67] E. Czetwertyński, B. Utrysko, *Hydraulika i Hydrodynamika*, PWN, 1968
- [68] J. Dobrański, *Termodynamika Techniczna*, Wyd. UWM., Olsztyn, 1997
- [69] R. Domański, *Magazynowanie Energii Ciepłej*, WNT, 1990
- [70] R. Domański, *Promieniowanie Laserowe – Oddziaływanie na Ciała Stałe*, WNT, 1990
- [71] R. Domański, *Wymiana Ciepła. Laboratorium Dydaktyczne*, Wyd. P. Warsz., 1996

- [72] R. Domański, M. Jaworski, M. Rebow, *Wymiana Ciepła. Komputerowe Wspomaganie Obliczeń. Tablice Własności Termofizycznych*, Wyd P. Warsz., 1996
- [73] R. Domański, M. Jaworski, M. Rebow, *Wymiana Ciepła. Termodynamika, Komputerowe Bazy Danych*, Wyd P. Warsz., 1994
- [74] J. Dowkontt, *Teoria Silników Ciepłych*, PWN, 1962
- [75] S. Drobniak, *Struktury Koherentne Swobodnej Strugi Osiowo-Symetrycznej*, Wyd. P. Częstoch., 1986
- [76] R.A. Duckworth, *Mechanika Płynów*, WNT, 1983
- [77] Z. Dvorak, J. Petrak, *Własności Ciepłne Czynników Chłodniczych*, WNT, 1982
- [78] M. Dzida, *Identyfikacja Przyczyn Niestacjonarności oraz Niestabilności Temperatury i Ciśnienia Gazów za Komorą Spalania Turbiny Gazowej*, Wyd. P. Gdań. 2000
- [79] B. Eckert, *Sprężarki Osiowe i Promieniowe*, PWT, 1959
- [80] J.W. Elsner, *Aerodynamika Palisad Łopatkowych*, Ossolineum, 1988
- [81] J.W. Elsner, *Turbulencja Przepływów*, PWN, 1987
- [82] J.W. Elsner, S. Drobniak, *Metrologia Turbulencji Przepływów*, Ossolineum, 1995
- [83] J. Ferencowicz, *Wentylacja i Klimatyzacja*, Arkady, 1964
- [84] T. Fiedler, *Teoria Maszyn i Urządzeń Ciepłych*, Lwów, 1932
- [85] D. Flotańska-Wereszko, *Teoria Systemów Ciepłych*, Wyd. P. Wrocławskiej, 1997
- [86] S. Fortuna, *Wentylatory*, Wyd. Techwent, Kraków, 1999
- [87] S. Fortuna, *Badania Wentylatorów i Sprężarek*, Wyd. AGH, 1999
- [88] W. Gajewski (red) *Ekologiczne Aspekty Przetwarzania Energii*, Wyd. PAN, Warszawa, 1996
- [89] Z. Gajewski, *Termometry*, PWT, 1957
- [90] A. Gardzilewicz, *Komputerowe Obliczenia Obiegów Ciepłych i Turbin*, Wyd. IMP Gdańsk, 1984
- [91] J. Gąsiorowski, *Laboratorium Podstaw Miernictwa Ciepłego, Termodynamiki i Teorii Maszyn Ciepłych*, Wyd. P. Warsz.. 1977
- [92] J. Gąsiorowski, E. Radwański, J. Zagórski, M. Zgorzelski *Zbiór Zadań z teorii Maszyn Ciepłych*, WNT., 1969
- [93] S.J. Gdula, *Podstawy Techniki Ciepłej*, Wyd. P. Śląsk., 1974
- [94] H. Gładyś, R. Matala *Praca Elektrowni w Systemie Energetycznym*, WNT, 1999
- [95] M. Gola, J. Januła, J. Litwin, *Laboratorium Silników Spalinowych*, Wyd. P. Radom., 1966
- [96] W. Gogół, *Wymiana Ciepła*, Wyd. P. Warsz., 1991

- [97] J. Goliński, A.T. Troskolański, *Strumienice*, WNT, 1968
- [98] C. Gołębiewski, E. Łuczywek, E. Walicki, *Zbiór Zadań z Mechaniki Płynów*, PWN, 1975
- [99] B. Goszczenko, *Aerodynamika szybkich samolotów*, PWN, 1955
- [100] L. Gosztowtt, *Rurociągi i Armatura*, PWT, 1953
- [101] L. Gosztowtt, *Uszczelnienia*, PWT, 1957
- [102] Cz. Grabarczyk, *Przepływy Cieczy w Przewodach. Metody Obliczeniowe*, Envirotech, Poznań 1997
- [103] B. Grochal, *Radiacyjno-Kondukcyjny Transport Energii w Złożach Upakowanych*, Wyd. IMP Gdańsk, 1995
- [104] R. Gryboś, *Podstawy Mechaniki Płynów*, PWN, 1989
- [105] W. Grześlowski (ed) i J. Cieśliński, W. Jaśiński, P. Kubiński, T. Madaj, M. G. Rogowski, J. Stąsień, M. Wasiluk, *Zbiór Zadań z Termodynamiki Technicznej*, Wyd. P. Gdań., 1981
- [106] R. Gryboś, *Podstawy Mechaniki Płynów*, PWN, 1983
- [107] R. Gryboś, G. Pakuła, *Zbiór zadań z Mechaniki Płynów*, Wyd. P. Śląs., 1988
- [108] R. Gryboś, *Dynamika Maszyn Wirnikowych*, PWN, 1994
- [109] R. Gryboś, *Zbiór Zadań z Technicznej Mechaniki Płynów*, PWN, 2002
- [110] K. Gumiński, *Termodynamika, wyd. II* PWN, 1972
- [111] K. Gumiński, *Termodynamika Procesów Nieodwracalnych* PWN, 1962
- [112] W. Gundlach, *Maszyny Przepływowe, I*, PWN, 1970
- [113] W. Gundlach, *Maszyny Przepływowe, II*, PWN, 1971
- [114] W. Gundlach, *Maszyny Przepływowe, III*, PWN, 1975
- [115] W.R. Gundlach, *Silniki Turbospalinowe małej mocy*, WNT, 1963
- [116] Z. Guntek, W. Kordylewski *Maszynoznastwo energetyczne*, Wyd. P. Wroc., 1994
- [117] K. Gutkowski, *Chłodnictwo*, WNT, 1972
- [118] W. Hibner, M. Rosiński, *Laboratorium Techniki Ciepłej*, Wyd. P. Warsz. 1980
- [119] T. Hobler, *Ruch Ciepła i Wymienniki*, PWN, 1959
- [120] T. Hobler, *Dyfuzyjny Ruch Masy i Absorbery*, WNT, 1976
- [121] M. Hoffmann, *Małe Elektrownie Wodne, Poradnik*, Wyd. Nabla, 1991
- [122] J. Iciek (ed), *Zbiór Zadań z Ruchu Ciepła*, Wyd. P. Łódz., 1993
- [123] K. Imhoff, *Kanalizacja Miast i Oczyszczanie Ścieków*, Arkady, 1982
- [124] J. Iwan, A. Jakubek, *Laboratorium Mechaniki Płynów*, Wyd. P. Gdań. 1991
- [125] K. Jackowski, *Elektrownie Wodne*, WNT, 1971
- [126] A. Jakubik, *Uszkodzenia Mechaniczne Urządzeń Ciepłych Elektrowni*, WNT, 1974
- [127] A. Jakubik, *Woda w Wysokoprężnych Elektrowniach Parowych*, WNT, 1967

- [128] R. Janiczek, *Eksploatacja Elektrowni Parowych*, WNT, 1980
- [129] F. Jankowski, *Pompy i Wentylatory w Inżynierii Sanitarnej*, Arkady, 1975
- [130] J. Jarosiński, *Techniki Czystego Spalania*, WNT, 1996
- [131] J. Jarosiński, Z. Wiejacki, S. Wiśniewski, *Termodynamika*, Wyd. P. Łódzkiej, 1993
- [132] K. Jesionek, *Prognozowanie Oderwania Strumienia i Możliwości jego Ograniczenia w Przepływowych Maszynach Energetycznych*, Wyd. P. Wroc., 1998
- [133] W. Jędral, *Pompy Wirowe Odśrodkowe, Teoria Przykłady Projektowania, Energooszczędna Eksploatacja*, Wyd. P. Warsz., 1996
- [134] W.P. Jones, *Klimatyzacja*, Arkady, 1981
- [135] J. Juda, *Pomiary Zapalenia i Technika Odpylania*, WNT, 1968
- [136] W. Jungowski, *Podstawy Dynamiki Gazów*, Wyd. P. Warsz., 1976
- [137] P. Kabscha, *Odpylanie i Odpylacze – Mechanika Aerozoli i Odpylanie Suche*, PWN, 1994
- [138] Z. Kabza (ed), *Laboratorium Procesów Termoenergetycznych*, Wyd. P. Wroc., 1983
- [139] E. Kalinowski, *Termodynamika*, Wyd. P. Wrocław., 1994
- [140] W. Kamler, *Cieplownictwo*, PWN, 1978
- [141] W. Kalmer, *Wentylacja i Klimatyzacja*, PWN, 1954
- [142] A. Kapitaniak, J. Sztraube, *Poradnik Palacza. Budowa i Obsługa Kotłów Rusztowych*, WNT, 1991
- [143] S. Kazimierski, Z. Orzechowski, *Mechanika Płynów*, Wyd. P. Łódzkiej, 1993
- [144] Z. Kazimierski, *Numeryczne Wyznaczanie Trójwymiarowych Przepływów Turbulentnych*, Ossolineum, 1992
- [145] Z. Kembłowski, *Reometria Płynów Nienewtonowskich*, WNT, 1973
- [146] J. Kijewski, *Silniki Spalinowe*, WSzP, 1997
- [147] I. Kisiel, *Reologiczne Równania Stanu Ośrodków Quasiliniowych*, Ossolineum, 1980
- [148] J. Klammer, *Wybrane Zagadnienia z Teorii Silników Ciepłych*, WSiP, 1974
- [149] E. Klonowska, W. Prosnak, J. Szymański, *Obliczanie Optywu Palisady Prostoliniowej*, Prace IPPT, Warszawa, 1976
- [150] L. Kołodziejczyk, M. Rubik, *Pomiary w Inżynierii Sanitarnej*, Arkady, 1974
- [151] L. Kołodziejczyk, M. Rubik, *Technika Chłodnicza w Klimatyzacji*, Arkady, 1976
- [152] N.S. Komarow, *Chłodnictwo i jego Zastosowanie*, WPLiS, 1956
- [153] J. Koniecznyński, *Oczyszczanie Gazów Odlotowych*, Wyd. P. Śląsk., 1993
- [154] A. Konorski, *Zagadnienia Termodynamiki Procesów Pary Wilgotnej w Turbinach*, Wyd. IMP PAN Gdańsk, 1986

- [155] W. Kordylewski, (ed), *Spalanie i Paliwa*, Wyd. P. Wrocł., 2000
- [156] Cz. Kordziński, T. Srudulski, *Silniki Spalinowe z Turbodoładowaniem*, WNT, 1970
- [157] K. Kosowski, *Dobór Korzystnych Wartości Podstawowych Parametrów Projektowych Turbin Ciepłych*, Wyd Pol. Gdań., 1995
- [158] F. Kotlewski, M. Mieszkowski (ed), *Pomiary w Technice Ciepłej*, WNT, 1974
- [159] E. Kostowski, *Przepływ Ciepła*, Wyd. P. Śląsk., 1986
- [160] E. Kostowski (ed), *Zbiór Zadań z Przepływu Ciepła*, Wyd. P. Śląsk., 2003
- [161] St. Kowalczewski, *Urządzenia Chłodnicze*, PWN, 1955
- [162] A. Kowalewicz, *Podstawy Procesów Spalania*, WNT, 2000
- [163] A. Kowalewicz, *Wybrane Zagadnienia Silników Spalinowych*, Wyd. WSI Radom, 1996
- [164] Cz., Kowalski, *Kotły Gazowe Centralnego Ogrzewania Wodne Niskotemperaturowe*, WNT, 1994
- [165] J. Kowalski, *Stacje Sprężarek Powietrza – Poradnik Projektanta Przemysłowego*, WNT, 1978
- [166] J. Kozaczka, *Procesy Spalania*, Wyd. AGH, Kraków, 1993
- [167] J. Kozaczka, *Analiza Termodynamiczna*, Wyd. AGH, Kraków, 1988
- [168] J. Kozaczka, *Procesy Zgazowywania – Inżynierskie Metody Obliczeń*, Wyd. AGH, Kraków, 1994,
- [169] J. Kozaczka, *Podstawy Termodynamiki*, Wyd. Taurus, Kraków, 1997
- [170] T. Krajewski, *Maszyny Ciepłe*, WKiŁ, 1974
- [171] P. Krzyślak, *Podnoszenie Sprawności Ciepłych Układów Turboparowych*, Wyd. P. Gdań., 2002
- [172] J. Krzyżanowski, *Erozja Łopatek Turbin Parowych*, Ossolineum, 1991
- [173] W. Krzyżanowski, *Turbiny Wodne, Konstrukcja, Zasady Regulacji*, WNT, 1971
- [174] K. Krygier, *Ciepłownictwo, Sieci Ciepłownicze*, Wyd. Fun. Współpracy, 1994
- [175] J. Kucowski, D. Laudyn, M. Przekwas, *Energetyka a Ochrona Środowiska*, WNT, 1997
- [176] S. Kuczewski, *Wentylatory Promieniowe*, WNT, 1966
- [177] S. Kuczewski, *Pompy i Wentylatory Diagonalne*, WNT, 1973
- [178] S. Kuczewski, *Wentylatory*, WNT, 1978
- [179] F. Kuchanewski, W. Kluger, *Wykład Hydrauliki wraz z Teorią Maszyn Wodnych Poprzedzony Wiadomościami Wstępnymi z Mechaniki Analitycznej Ciał Płynnych*, Wyd. Towarzystwo Naukowej Pomocy i Nauk Ścisłych w Paryżu, str. 1-1116, 1873
- [180] J. Kunstetter, *Silniki Spalinowe*, Wyd. P. Warsz., 1949

- [181] L. Landau, L. Lifszic, *Mechanika Ośrodków Ciągłych*, PWN, 1960
- [182] G. Lange, A. Mirowski, *Projektowanie dla Kotłów Viessmanna*, Wyd. P. Wrocław, 1998
- [183] D. Laudyn, M. Pawlik, F. Strzelczyk, *Elektrownie*, WNT, 1997
- [184] P.D. Lebediew, *Wymienniki Ciepła, Urządzenia Suszarnicze i Chłodnicze*, WNT, 1970
- [185] W. Leśniak, *ABC Samochodowego Silnika Wysokoprężnego*, WkiL, 1969
- [186] S. Łazarkiewicz, A. Troskolański, *Pompy Wirowe*, WNT, 1968
- [187] S. Łazarkiewicz, *Pompy, Sprężarki, Wentylatory*, PWT, 1956
- [188] J. Ledwoń, M. Golczyk, *Chłodnie Kominowe i Wentylatorowe*, Arkady, 1967
- [189] H. Leszczyński, *Aparatura i Urządzenia Chłodnicze*, WSiP, 1982
- [190] W. M. Lewandowski, *Proekologiczne Źródła Energii Odnawialanej*, WNT, 2002
- [191] J. Lewandowski, *Zagadnienia Identyfikacji Turbin Parowych*, Wyd. P. Warsz., 1990
- [192] M. Litwińczyk, W. Selerowicz, S. Skrzyński, A. Tarnogradzki, *Ćwiczenia Laboratoryjne z Mechaniki Płynów*, Wyd. P. Warsz., 1991
- [193] S. Łosiew, *Turbiny Parowe*, PWN, 1953
- [194] E. Łuczywek, *Zbiór Zadań z Aerodynamiki*, Wyd. P. Warsz., 1964
- [195] M. Łunc, A. Szaniawski, *Zarys Mechaniki Ogólnej*, PWN, 1959
- [196] S. Mac, *Termodynamika*, WSzP, 1980
- [197] J. Madejski, *Teoria Wymiany Ciepła*, PWN, 1963
- [198] J. Madejski, *Termodynamika Techniczna*, Wyd. P. Rzesz., 1977
- [199] J. Madejski, *Wymiana Ciepła w Turbinach Ciepłych*, Ossolineum, 1988
- [200] J. Madejski, B. Staniszewski, *Wymiana Ciepła przy Wrzeniu i Przepływy Dwufazowe*, Wyd. Ośr. Inf. Energii Jądrowej, 1971
- [201] J. Madejski, *Traktat o Śmigłach*, Ossolineum, 1991
- [202] R. Majewski, A. Olszewski, R. Szafran, *Elektrownie i Gospodarka Energetyczna*, Wyd. P. Wrocław, 1981
- [203] S. Malanowski, *Równowaga Ciecz-Para*, PWN, 1974
- [204] J. Malczewski, M. Piekarski, *Modele Procesów Transportu Masy, Pędu i Energii*, PWN, 1992
- [205] M. Malecki, *Wentylacja i Klimatyzacja*, PWN, 1974
- [206] L. Malinowski, *Relaksacyjny Model Przewodzenia i Generacji Ciepła*, Wyd. P. Szczec., 1995
- [207] J. Malko, *Wybrane Zagadnienia Prognozowania Energetycznego*, Wyd. P. Wrocław, 1995
- [208] H. Mańczak, *Techniczne Podstawy Ochrony Wód przed Zanieczyszczeniem*, Wyd. P. Wrocław, 1972

- [209] S. Mańkowski, *Projektowanie Instalacji Ciepłej Wody Użytkowej*, Arkady, 1982
- [210] J. Marecki, *Gospodarka Skojarzona Ciepłno-Elektryczna*, WNT, 1980
- [211] J. Marecki, *Podstawy Przemian Energetycznych*, WNT, 1995
- [212] K. Markiewicz, *Wentylatory i Dmuchawy*, PWN, 1955
- [213] R. Matla, M. Bernatek, *Przemiany Energetyczne*, Wyd. P. Warsz., 1980
- [214] K. Mączek, M. Mieczysławski, *Chłodnictwo*, Wyd. P. Wrocł., 1981
- [215] C. Mejro, *Podstawy Gospodarki Energetycznej*, WNT, 1980
- [216] W. Merc, *Chłodnictwo. Teoria Chłodziarek*, PWN 1968
- [217] W. Merc, *Chłodnictwo. Teoria Chłodziarek, II*, Wyd. P. Łódz., 1977
- [218] J. Merkisz, *Ekologiczne Aspekty Stosowania Silników Spalinowych*, Wyd. P. Pozn., 1995
- [219] J. Merkisz, *Ekologiczne Problemy Silników Spalinowych*, Wyd. P. Pozn., 1998
- [220] L. Michalski, *Pomiary Temperatury*, WNT, 1969
- [221] J. Michałowska, *Paliwa, Oleje, Smary*, WKiŁ, 1973
- [222] S. Michałowski, K. Wańkowicz, *Termodynamika Procesowa*, WNT, 1993
- [223] M. Michajew, *Zasady Wymiany Ciepła*, PWN, 1953
- [224] E.W. Mielcarzewicz, *Obliczanie Systemów Zaopatrzenia w Wodę*, Arkady, 1972
- [225] J. Mielnicki, *Centralne Ogrzewanie – Regulacja i Eksploatacja*, Arkady 1985
- [226] J. Mikielwicz, *Modelowanie Procesów Ciepłno-Przepływowych*, Ossolineum, 1995
- [227] J. Mikielwicz, J. Cieśliński, *Niekonwencjonalne Urządzenia i Systemy Konwersji Energii*, Ossolineum, 1999
- [228] J. Mikielwicz, P. Kubski, *Wymiana Ciepła*, Wyd. WSI, Koszalin, 1973
- [229] J. Mikielwicz, A. Rasmus, *Wybrane Zagadnienia z Termodynamiki*, Wyd. P. Koszal. 1990
- [230] C. Mikulski, *Kotły Parowe*, PWSZ, Warszawa, 1953
- [231] A. Miller, J. Lewandowski, *Praca Turbin Parowych w Zmienionych Warunkach*, Wyd. P. Warsz. 1992,
- [232] A. Miller, *Turbiny Gazowe i Układy Parowo-Gazowe*, Wyd. P. Warsz. 1984
- [233] A. Miller, *Teoria Maszyn Wirnikowych*, Wyd. P. Warsz., 1989
- [234] A. Miller, *Maszyny i Urządzenia Ciepłne i Energetyczne*, WSZiP, 1998
- [235] A. Miller, J. Lewandowski, *Układy Gazowo-Parowe na Paliwa Stałe*, WNT, 1993
- [236] T. Monkiewicz, *Charakterystyka Elektrowni Parowych*, WNT, 1962
- [237] R. Mosdorf, *Dynamiczny Model Wrzenia na Podstawie Metody Chaosu Deterministycznego*, Wyd. P. Białosto., 1997
- [238] W. Moszyński, *Wykłady Elementów Maszyn*, PWT, 1949

- [239] L. Musil, *Ogólne Zasady Projektowania Elektrowni Parowych*, PWT, 1954.
- [240] J. Namieśnik (ed) *Metody Instrumentalne w Kontroli Zanieczyszczeń Środowiska*, Wyd. P. Gdań. 1992
- [241] L. Nechrebecki, *Elektrownie Ciepłne*, WNT, 1974
- [242] A. Nechrebecki, *Ciepłownictwo*, Wyd. Fund. Współpracy. W-wa, 1993
- [243] T. Nikiel, *Turbiny Parowe*, WNT, 1980
- [244] N.N., *Elektrownia Wodna Żarnowiec*, Wyd PPHU, Wejherowo, 1994
- [245] N.N. *Pomiary Ciepłne*, WNT, 1993
- [246] N.N. *Wodociągi i Kanalizacja. Poradnik*, WNT, W-wa, 1971
- [247] N.N., *Poradnik Chłodnictwa*, WNT, 1965
- [248] Z. Nowak,(ed), *Ćwiczenia Laboratoryjne z Mechaniki Płynów*, Wyd. P. Krak., 1981
- [249] B. Nowakowski, *Zasady Wietrzenia i Ogrzewania Zakładów Pracy*, PWT, 1955
- [250] W. Nusselt, *Termodynamika Techniczna*, Wyd. P. Śląsk., 1948
- [251] W. Nusselt, *Teoria Maszyn Ciepłych*, Wyd. P. Śląsk., 1948
- [252] J. Obrepalski, *Gospodarka Energetyczna*, PWT, 1952
- [253] S. Ochęduszek, *Termodynamika Stosowana*, WNT, 1970
- [254] S. Ochęduszek, *Teoria Maszyn Ciepłych*, PWT, 1955/1957
- [255] S. Ochęduszek, J. Szargut, H. Górniak, A. Guzik, S. Wilk, *Zbiór Zadań z Termodynamiki Technicznej*, WNT, 1975
- [256] B. Okołowicz-Grabowska, *Komfort Ciepły Pomieszczeń Ogrzewanych*, Wyd. P. Warsz., 1976
- [257] P. Orłowski, *Kotły Parowe, Konstrukcja i Obliczenia*, WNT, 1972
- [258] P. Orłowski, *Kotły Parowe w Energetyce Przemysłowej*, WNT, 1976
- [259] P. Orłowski, W. Dobrzański, E. Szwarc, *Kotły Parowe*, WNT, 1979
- [260] Z. Orzechowski, *Dynamika Przepływów*, Wyd. P. Łódz., 1966
- [261] Z. Orzechowski, J. Prywer, R. Zarzycki, *Zadania z Mechaniki Płynów w Inżynierii Środowiska*, WNT, 2001
- [262] Z. Orzechowski *Wybrane Zagadnienia z Mechaniki Płynów dla Inżynierii Środowiska*, Wyd. P. Łódzkiej, 1981
- [263] Z. Orzechowski, *Przepływy Dwufazowe*, PWN, 1990
- [264] Z. Orzechowski, J. Prywer, *Mechanika Płynów w Inżynierii Środowiska*, Wyd. P. Łódz., tom 1 1990, tom 2, 1991
- [265] Z. Orzechowski, J. Prywer, R. Zarzycki, *Mechanika Płynów w Inżynierii Środowiska*, WNT, 1997
- [266] Z. Orzechowski, P. Wiewiórski, *Ćwiczenia Audytoryjne z Mechaniki Płynów*, Wyd. P. Łódz., 1999
- [267] Z. Orzechowski, J. Prywer, *Rozpylanie Cieczy*, WNT, 1991

- [268] Z. Orzechowski, J. Prywer, *Rozpylanie Cieczy w Urządzeniach Energetycznych*, WNT, 1994
- [269] Z. Ostrowski, K. Zabłocki, J. Zagórski, A. Zmysłowski, *Kotły Parowe*, PWN 1956
- [270] J. Palarski, *Hydrotransport*, WNT, 1982
- [271] A. Paliwoda, *Urządzenia Chłodnicze Strumieniowe*, WNT, 1971
- [272] M. Pawlik, J. Skierski, *Układy i Urządzenia Potrzeb Własnych Elektrowni*, WNT, 1986
- [273] R. Pełczarski, *Warunki Doboru Konstrukcji Kotłów w Kotłowniach Nisko i Wysokotemperaturowych*, Wyd. Viessmann, Wrocław, 1998
- [274] J. Petela, *Adiatermiczny Stabilny i Matastabilny Przepływ Wrzącej Cieczy oraz Pary Nasyconej Mokrej w Kanałach Prostoliniowych*, Wyd. P. Poznań., 1971
- [275] S. Perycz, *Turbiny Parowe i Gazowe*, Ossolineum, 1992
- [276] R. Podhorecki, S. Wroński, *Kinetyka i Termodynamika Procesów Inżynierii Chemicznej*, WNT, 1977
- [277] W. Piotrowski, *Wytwornice Pary, Podstawy Teoretyczne*, Wyd. P. Gdań., 1988
- [278] J. Piotrowski, *Okrętowe Urządzenia Chłodnicze* Wyd. Morskie, Gdańsk, 1977
- [279] M. Poniewski, *Termodynamiczna Analiza Kryzysu Wrzenia Błonowego*, Wyd. P. Warsz., 1988
- [280] J. Portacha, *Identyfikacja Układów Ciepłych Siłowni Klasycznych i Jądrowych w Stanie Ustalonym*, Wyd. P. Warsz., 1977
- [281] S. Postrzednik, *Termodynamika Zjawisk Przepływowych - Podstawy Teoretyczne*, Wyd. P. Śląsk., 1991
- [282] L. Prandtl, *Dynamika Przepływów*, PWN, 1956
- [283] M. Pronobis, *Modernizacja Kotłów Energetycznych*, WNT, 2002
- [284] Wł. J. Prosnak, *Wykłady z Aerodynamiki*, Wyd. P. Warsz., 1962
- [285] W. Prosnak, *Wybrane Zagadnienia Teoretyczne Aerodynamiki Dużych Prędkości*, Wyd. P. Warsz., 1967
- [286] W. Prosnak, *Mechanika Płynów*, PWN, tom 1, 1970, tom 2, 1971
- [287] W. Prosnak i inni, *Cwiczenie Laboratoryjne z Mechaniki Płynów*, Wyd. P. Warsz., 1975
- [288] W. Prosnak *Teoria układu profilów lotniczych*, Ossolineum, 1981
- [289] W. Pudlik, *Wymiana i Wymienniki Ciepła*, Wyd. P. Gdań., 1988
- [290] W. Pudlik, *Termodynamika*, Wyd. P. Gdań., 1995
- [291] R. Puzyrewski, *Kondensacja Pary Wodnej w Dyszy de Laval*, PWN, 1969
- [292] R. Puzyrewski, *Podstawy Teorii Maszyn Wirnikowych w Ujęciu Jednowymiarowym*, Ossolineum, 1992

- [293] R. Puzyrewski, J. Sawicki, *Podstawy Mechaniki Płynów i Hydrauliki*, PWN, 1987
- [294] J. Rakowski, *Automatyka Ciepłych Urządzeń Siłowni*, WNT, 1976
- [295] Z.Z. Rant, *Odparowywanie w Teorii i Praktyce*, PWN, 1965
- [296] A. Rasmus, *Teoretyczny Model Wrzenia w Przepływie*, Wyd. WSI Koszalin, 1990
- [297] R. Ratajczak, W. Zwoliński, *Zbiór Zadań z Hydrodynamiki*, Wyd. P. Warsz. 1981
- [298] F. Rawski, C. Bocheński, *Układy Zasilania Silników Spalinowych*, Wyd. P. Warsz., 1991
- [299] I. Razmunow, *Fluidyzacja i Transport Pneumatyczny Materiałów Sypkich*, WNT, 1975
- [300] K. Razniewicz, *Tablice Ciepłne z Wykresami*, WNT, 1966
- [301] H. Recknagel, *Ogrzewanie i Klimatyzacja*, Wyd. EFW, Gdańsk, 1994
- [302] L. Redey, *Ogniwa paliwowe*, WNT, 1973
- [303] M. Reiner, *Reologia Teoretyczna*, PWN, 1958
- [304] A. Reński, *Elektrownie Jądrowe*, Wyd. P. Gdań., 1991
- [305] H. Rokicki, *Urządzenia Kotłowe*, Wyd. P. Gdań., 1996
- [306] M. Roman, *Kanalizacja Oczyszczanie Ścieków*, Arkady, 1986
- [307] W. Roszczyński, K. Filek, *Zbiór Zadań z Mechaniki Płynów i Termodynamiki*, Wyd. AGH, 1985
- [308] J. Rościszewski, *Aerodynamika stosowana*, Wyd. MON, 1957
- [309] R. Rowiński, J. Rubiczewski, *Termodynamika. Wprowadzenie do Ćwiczeń Laboratoryjnych*, Wyd. ART. Olsztyn, 1996
- [310] M. Rubik, *Chłodnictwo*, PWN, 1979
- [311] M. Rubik, *Pompy Ciepła, Poradnik*, Wyd. Instal, W-wa, 1996
- [312] Z. Rudnicki, *Radiacyjny Przepływ Ciepła w Piecach Przemysłowych*, Wyd. P. Śląsk., 1985
- [313] Z. Rudnicki, *Modelowanie Matematyczne Radiacyjnego Przepływu Energii*, Wyd. P. Śląsk., 2003
- [314] J. Rutkowski, *Podstawy Bilansowania Masy, Pędu i Energii*, Wyd. P. Warsz., 1976
- [315] A. Rumianowski, *Zbiór Zadań z Mechaniki Płynów Nieściśliwych*, Wyd. PWN, 1984
- [316] A. Rumianowski, *Mechanika Płynów*, Wyd. P. Gdań., 2003
- [317] K. Rup, *Mechanika Płynów w Środowisku Naturalnym*, Wyd. P. Krak., 1984
- [318] T. Rychter, *Budowa Pojazdów Samochodowych*, WSzP, 1994
- [319] J. Rydlewicz, *Wentylatory i Pompy Przepływowe*, Wyd. P. Łódz., 1989
- [320] J. Sado, *Wybrane Zagadnienia Termodynamiki*, Wyd. P. Warsz., 1997.

- [321] J. A. Sakusz, *Sprężarki Śrubowe*, WNT, 1964
- [322] J.F. Sandfort, *Teoria i Praktyka Termodynamiki*, WP, Warszawa, 1969
- [323] A. Sawicki, *Podstawy Mechaniki Kontinuum*, Wyd. P. Gdań. 1992
- [324] J. Sawicki, *Przenoszenie Masy i Energii*, Wyd. P. Gdań. 1993
- [325] J. Schnee, *Teoria Turbin Gazowych*, PWN, 1954
- [326] J. Sentek, *Promieniowe Maszyny Przepływowe*, Wyd. AGH, Kraków, 1972
- [327] M. Serwinski, *Zasady Inżynierii Chemicznej*, WNT, 1976
- [328] S. Sieniutycz, Z. Szwaast, *Praktyka Obliczeń Optymalizacyjnych, Zagadnienia Procesowe*, WNT, 1982
- [329] E. Sierakowski, J. Mrozek, *Kontrola Przygotowania Wody w Elektrowniach i Ciepłowniach*, WNT, 1972
- [330] E. Sierakowski, J. Mrozek, *Kontrola Wody i Pary w Energetyce*, ZPBE Energopomiar, Gliwice, 1998
- [331] T. Skiepmo, *Efekty Przewodzenia Ciepła w Wypełnieniach i Przeciekach w Regeneratorach Obrótowych*, Wyd. P. Biał., 1993
- [332] J. Skorek *Ocena Efektywności Energetycznej i Ekonomicznej Gazowych Układów Kogeneracyjnych Małej Mocy*, Wyd. P. Śląsk., 2002
- [333] G. S. Skubaczewski *Lotnicze Silniki Turbospalinowe*, PWT, Warszawa, 1959
- [334] E. Sokołow, *Sieci Ciepłne*, PWN, 1955
- [335] J.J. Sokołow, N.M. Zinger, *Strumienice*, WNT, 1965
- [336] A. Staniszewski, *Zarys Elektrowni*, Wyd. P. Warsz., 1983
- [337] B. Staniszewski, *Termodynamika*, PWN, 1982
- [338] B. Staniszewski, *Wymiana Ciepła*, PWN, 1963
- [339] Z. Starowicz, Z. Zaborowski, *Domowe i Handlowe Urządzenia Chłodnicze*, WNT, 1989
- [340] J. Stasiak, H. Walden *Mechanika Cieczy i Gazów*, PWN, 1969
- [341] B. Stefanowski, *Ciepło*, PWN, 1920
- [342] B. Stefanowski, *Podstawy Techniki Ciepłej*, PWN, 1956
- [343] B. Stefanowski, B. Staniszewski, *Termodynamika Techniczna*, PWN, 1959
- [344] B. Stefanowski, J. Jasiewicz, *Podstawy Techniki Ciepłej*, WNT, 1982
- [345] F. Stręk, *Mieszanie i Mieszalniki*, WNT, 1983
- [346] Cz. Strumiło, *Podstawy Teorii i Techniki Suszenia*, WNT, 1983
- [347] W. W. Syczew, *Termodynamika Układów Złożonych*, PWN, 1973
- [348] K. Szablewski, *Pompy Wyporowe*, Wyd. AGH, Kraków, 1960
- [349] K. Szablewski, *Sprężarki Wyporowe*, Wyd. AGH, Kraków, 1958
- [350] K. Szablewski, *Sprężarki Prędkościowe*, Wyd. AGH, Kraków, 1957
- [351] K. Szablewski, B. Kowalski, *Pompy i Rurociągi*, PWN, 1955
- [352] K. Szablewski, *Sprężarki Wirowe*, PWN, 1970

- [353] R. Szafran, *Podstawy Procesów Energetycznych*, Wyd. P. Wrocł., 1989
- [354] J. Szarawara, *Termodynamika Chemiczna*, WNT, 1969
- [355] J. Szargut, R. Petela, *Egzergia*, WNT, 1965
- [356] J. Szargut, *Analiza Termodynamiczna i Ekonomiczna w Energetyce Przemysłowej*, WNT, 1983
- [357] J. Szargut, *Energetyka Ciepła w Hutnictwie*, Wyd. P. Śląsk., 1983
- [358] J. Szargut, *Metody Numeryczne w Obliczeniach Ciepłych pieców Przemysłowych*, Wyd. P. Śląsk., 1977
- [359] J. Szargut (ed), *Rachunek Wyrównawczy w Technice Ciepłej*, Ossolineum, 1984
- [360] J. Szargut, *Termodynamika*, PWN, 1998
- [361] J. Szargut (ed), *Modelowanie Numeryczne Pól Temperatury*, WNT, 1992
- [362] J. Szargut, *Termodynamika Techniczna*, PWN, 1991
- [363] J. Szargut, A. Gwlik, H. Górniak, *Programowy Zbiór Zadań z Termodynamiki Technicznej*, PWN, 1979
- [364] J. Szargut, *Teoria Procesów Ciepłych*, PWN, 1973
- [365] J. Szargut, A. Ziębik, J. Kozioł, K. Kurpisz, E. Majza, *Przemysłowa Energia Odpadowa*, WNT, 1993
- [366] J. Szargut, A. Ziębik, *Podstawy Energetyki Ciepłej*, PWN 2000
- [367] K. Szawłowski, *Silniki Spalinowe*, PWN, 1947
- [368] K. Szawłowski, T. Haupt, H. Dziewianowski, *Energetyka Ciepła w Hutnictwie*, PWN, 1955
- [369] K. Szawłowski, *Silniki Wysokoprężne Dużej Mocy Okrętowe i Przemysłowe*, WNT, 1967
- [370] W. Szejnach, J. Koprzywa, L. Sawicki, G. Lis, M. Materkowski, *Laboratorium Pneumatyki Maszyn Technologicznych*, Wyd. P. Warsz. 1992
- [371] R. Szewalski, *Aktualne problemy rozwoju techniki energetycznej. Podwyższenie mocy jednostkowej i sprawności turbin oraz bloków energetycznych*, Wszechnica, PAN, Wrocław, 1978
- [372] R. Szewalski, *Turbiny Gazowe*, Poradnik Techniczny-Mechanik, s 1327-1462, PWV, 1960
- [373] R. Szewalski, *Turbiny Parowe*, Poradnik Techniczny-Mechanik, s 760-967, PWV, 1960
- [374] R. Szewalski, *Aktualne Problemy Rozwoju Techniki Energetycznej*, Ossolineum, 1979
- [375] H. Szczczyk (ed)., *Mechanika Płynów*, Wyd. P. Wroc. 1989
- [376] P.N. Szlachin, *Turbiny Parowe*, PWSZ, Warszawa, 1953
- [377] W. Szuman, *Elektrownie Ciepłe*, Trzaska, W-wa, 1951
- [378] W. Szuman, *Elektrociepłownie i Sieci Ciepłe*, PWN, 1958

- [379] W. Szuman, *Urządzenia Pomocnicze Elektrowni Parowych*, WNT, 1962
- [380] A. Szumowski, W. Selerowicz, J. Piechna, *Dynamika Gazów*, Wyd. P. Warsz., 1988
- [381] A. Szuster, B. Utrysko, *Hydraulika i Podstawy Hydromechaniki*, Wyd. P. Warsz. 1986
- [382] H. Szydłowski, *Teoria Pomiarów*, PWN, 1981
- [383] W. Szymański, T. Pyrcioch, *Mechanika Płynów, zbiór zadań*, Wyd. P. Rzesz., 1977
- [384] T. Szymański, W. Wasiluk, *Systemy Wentylacji Przemysłowej*, Wyd. P. Gdań., 2000
- [385] A. Szumanowski *Magazynowanie Energii w Pojazdach*, WKŁ, 1981
- [386] J. Śmigielski, *Elektromagnetyczne Pływakowe Przetworniki Wydatku i Ciśnienia*, PWN, 1980
- [387] J. Śmigielski, *Niekonwencjonalne Metody i Urządzenia do Pomiaru Energii Ciepłej i Natężenia Przepływu*, Ossolineum, 1996
- [388] B. Średniawa, J. Weyssenhoff *Mechanika Środowisk Rozciągłych*, PWN, 1969
- [389] B. Średniawa, *Hydrodynamika i Teoria Sprężystości*, PWN, 1977
- [390] A. Tarnogrodzki, *Wykłady i Ćwiczenia z Mechaniki Cieczy i Gazów*. Wyd. P. Warsz. 1987
- [391] J. Taler, *Teoria i Praktyka Identyfikacji Procesów Ciepłych*, Ossolineum, 1995
- [392] A. Teodorczyk, *Termodynamika Techniczna*, WSiP, W-wa, 1995
- [393] A. Teodorczyk, *Zbiór Zadań z Termodynamiki Technicznej*, WSiP, 1992
- [394] J. Terpiłowski, *Przemiany Energetyczne w Chemii Nieorganicznej*, WNT, 1993
- [395] B. Tołłoczko, *Kotły Parowe*, WNT, 1956
- [396] J. Tomeczek, *Spalanie Węgla*, Wyd. P. Śląsk. 1992
- [397] M. Terla, *Zagadnienia Termo-Hydrodynamiczne Fazy Ciekłej na Ściance w Przepływie Dwufazowym*, Wyd. IMP, Gdańsk, 1989
- [398] M. Trela, *Zwilżanie Powierzchni przez Strugi Cieczy*, Wyd. IMP PAN Gdańsk, 1987
- [399] M. Trela, *Wymiana Ciepła i Masy w Przepływie Mgłowym*, Wyd. IMP PAN, Gdańsk, 1983,
- [400] M. Trela, J. Mikielwicz, *Ruch i Wymiana Ciepła Cienkich Warstw Cieczy*, Ossolineum, 1998
- [401] A.T. Troskoleński, *Hydromechanika Techniczna*, PWT, 1954
- [402] A.T. Troskoleński, *Hydrodynamika*, WNT, 1962
- [403] E. Tuliszka, *Mechanika Płynów*, Wyd. P. Pozn., 1969
- [404] E. Tuliszka, *Turbiny Ciepłne, Zagadnienia Termodynamiczne i Przepływowe*, WNT, 1973

- [405] E. Tuliszką, *Sprężarki, Dmuchawy, i Wentylatory*, WNT, 1969
- [406] E. Tuliszką, *Mechanika Płynów*, PWN, 1980
- [407] E. Tuliszką, *Termodynamika Techniczna*, PWN, 1978
- [408] J. Waclawik, *Mechanika Płynów i Termodynamika*, Wyd. AGH, Kraków, 1979
- [409] H. Walden, *Mechanika Płynów*, Wyd. Pol. Warsz., 1980
- [410] H. Walden, J. Stasiak, *Mechanika Ciecży i Gazów w Inżynierii Sanitarnej*, Arkady, 1971
- [411] W. Warczak, *Tłokowe Sprężarki Ziębnicze*, WNT, 1972
- [412] W. Warczak, *Sprężarki i Agregaty Ziębnicze*, WNT, 1978
- [413] W. Warczak, *Sprężarki Ziębnicze*, WNT, 1987
- [414] J. Warych, *Odpylanie Gazów Metodami Mokrymi*, WNT, 1979
- [415] J. Warych, *Oczyszczanie Przemysłowych Gazów Odlotowych*, WNT, 1988
- [416] W. Wasiluk, T. Szymański, *Wentylacja Przemysłowa*, Wyd. P. Gdań., 1992
- [417] M. Ways, *Podstawy i Zasady Projektowania Kanalizacji Ciśnieniowej*, Wyd. P. Warsz. 1980
- [418] J. Werlc, *Termodynamika Fenomenologiczna*, PWN, 1957
- [419] A. Wesołowski, *Urządzenia Chłodnicze i Kriogeniczne oraz ich Pomiar*y Ciepłne, WNT, 1980
- [420] H. Więckiewicz, L. Cantek, *Sprężarki Wyporowe*, Wyd. P. Gdań., 1978
- [421] S. Wilk, *Termodynamika Techniczna*, WSiP, 1977
- [422] S. Wilk, *Technika Ciepłna*, WSiP, 1981
- [423] W.L. Wilkinson, *Ciecze Nienewtonowskie*, PWN, 1963
- [424] A. Witkowski, *Pompy i Sprężarki*, Wyd. P. Śląsk. 1977
- [425] Cz. Witoszyński, *Prace wybrane*, PWN, 1957
- [426] Cz. Witoszyński, *Aerodynamika*, Wyd P. Warsz. 1975
- [427] S. Wiśniewski, *Podstawy Termodynamiki Silników Spalinowych*, WNT, 1963
- [428] S. Wiśniewski, *Wymiana Ciepła*, PWN, 1979
- [429] S. Wiśniewski, *Pomiary Temperatury w Badaniach Silników i Urządzeń Ciepłych*, WNT, 1983
- [430] S. Wiśniewski, *Termodynamika Techniczna*, WNT, 1993
- [431] S. Wiśniewski, T.S. Wiśniewski, *Wymiana Ciepła*, WNT, 1994
- [432] S. Wiśniewski, *Termodynamika Fenomenologiczna*, Wyd. P. Łódzkiej, 1983
- [433] S. Wiśniewski, B. Staniszewski, R. Szymanik, *Termodynamika Procesów Nierównowagowych*, PWN, 1973
- [434] W. Wiśniowski, *Pouczenia do Ćwiczeń w Laboratorium Ciepłym*, Wyd. P. Gdańskiej, 1948
- [435] W. Wiśniowski, *Podstawowe Pojęcia Termodynamiki, Mechanik, Poradnik Techniczny*, PWT, Tom 1/2, 427 - 485, 1961

- [436] J. Wojciechowski, *Pomiary w Elektrowniach Ciepłych*, PWN, 1958
- [437] S. Wójcicki, *Spalanie*, WNT, 1969
- [438] T. Wróblewski, *Kotły Parowe*, PWN, 1954
- [439] T. Wróblewski, A. Pełowski, H. Górecki, *Urządzenia Kotłowe*, PWN, 1960
- [440] T. Wróblewski, W. Sikorski, K. Rzepa, *Urządzenia Kotłowe*, WNT, 1973
- [441] W. Wróblewski, *Numeryczna Symulacja Zjawisk Przepływowych w Turbinach Ciepłych*, Wyd. P. Śląsk., 2000
- [442] A. Wszalaczyński, *Eksplotacja Sprężarek promieniowych*, WNT, 1960
- [443] J. Wysocki, *Mechanika Płynów*, PWN, 1967
- [444] J. Zagórski, *Kotły Parowe Energetyczne*, PWSZ, 1957
- [445] J. Zagórski, *Zarys Techniki Ciepłej*, WNT, 1976
- [446] J. Zagórski, *Termodynamika Techniczna*, PWN, 1973
- [447] S. Zahorski, *Mechanika Przepływów Cieczy Lepkosprężystych*, PWN, 1978
- [448] N. Zaks, *Podstawy Aerodynamiki Doświadczalnej*, Wyd. MON, W-wa, 1956
- [449] W. Zalewski, *Procesy Ciepłno-Przepływowe w Wyparnych Wymiennikach Ciepła*, Wyd. P. Krakow. 1992
- [450] L.A. Załmonozon, *Teoria Elementów Stosowanych w Technice Strumieniowej*, WNT, 1971
- [451] S. Zelena, *Obsługa Kotłów Parowych*, PWN, 1959
- [452] A. Ziębik, J. Szargut, *Podstawy Gospodarki Energetycznej*, Wyd. P. Śląsk., 1995
- [453] A. Ziębik, *Systemy Energetyczne*, Wyd. P. Śląsk., 1991
- [454] Z. Zieliński, *Maszyny i Urządzenia Ciepłe i Energetyczne*, WSiP, 1976
- [455] M. Ziolo, *Instalacje Rurociągowe w Przemśle Chemicznym*, WNT, 1969
- [456] W. Zembaty, *Systemy i Urządzenia Chłodzące Elektrowni Ciepłych*, WNT, 1993
- [457] J. Zierep, *Kryteria Podobieństwa i Zasady Modelowania w Mechanice Płynów*, PWN, 1978
- [458] S. Żmudzki, *Silniki Stirlinga*, WNT, 1993