

Michał Karcz

Analiza pracy dyfuzorów termicznych w aspekcie chłodzenia turbin gazowych

535/1494/2004

Zeszyty Naukowe
Instytutu Maszyn Przepływowych w Gdańsku

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego KBN PB 1733/T10/2000/19

Recenzent

Prof. dr hab. inż. Stanisław Drobniać, Politechnika Częstochowska

Spis treści

1	Wstęp	7
1.1	Motywacje	7
1.2	Dyfuzory termiczne	8
1.3	Stan badań i przegląd literatury dotyczącej modelowania turbulentnego strumienia ciepła	10
1.4	Podstawy pracy	12
2	Modelowanie procesów cieplno–przepływowych	13
2.1	Równania zachowania	13
2.1.1	Bilans masy $\mathcal{U} = \rho$	14
2.1.2	Bilans pędu $\mathcal{U} = \rho \vec{v}$	14
2.1.3	Bilans energii $\mathcal{U} = \rho e$	16
2.2	Równania stanu, równania konstytutywne, domknięcia	18
3	O modelowaniu turbulentnej wymiany pędu	19
3.1	Domknięcia tensora Reynoldsa	19
3.1.1	Hipoteza lepkości turbulentnej	20
3.1.2	Transport naprężeń turbulentnych	26
3.1.3	Modelowanie DNS oraz LES	29
3.2	Uwagi o modelowaniu turbulencji przyściennej	30
3.2.1	Funkcje ścianek	31
3.2.2	Modele dwuwarstwowe	32
3.2.3	Modele <i>low-Re-number</i>	33
3.2.4	Model eliptycznej relaksacji	35
4	O modelowaniu turbulentnej wymiany ciepła	37
4.1	Hipoteza turbulentnej dyfuzyjności cieplnej	38
4.1.1	Domknięcia algebraiczne	38
4.1.2	Domknięcia dwurównaniowe	41
4.2	Transport składowych turbulentnego strumienia ciepła	45
4.2.1	<i>Differential Flux Model</i>	46
4.2.2	<i>Algebraic Flux Model</i>	46
5	Domknięcie $\overline{v'^2}$-f-$\overline{\theta'^2}$-ϵ_θ	49
5.1	Kombinowany model turbulencji mechanicznej i termicznej	50
5.1.1	Charakterystyka modelu turbulencji mechanicznej	51
5.1.2	Charakterystyka modelu turbulencji termicznej	52
5.2	Analiza pracy modelu	54
5.2.1	Rozbieg termiczny w rurze	54
5.2.2	Przepływ grzany w kanale płaskim	58

5.2.3	Wnioski	60
6	Implementacja modelu do solvera i jego weryfikacja	61
6.1	Weryfikacja na wybranych eksperymentach z wymianą ciepła	61
6.1.1	Kanał uźebrowany grzany	62
6.1.2	Napływ na płytę grzaną	66
6.1.3	Wnioski	70
7	Analiza pracy dyfuzorów termicznych	71
7.1	Właściwości ruchu płynu w dyfuzorze termicznym	72
7.1.1	Równania gazodynamiki	72
7.1.2	Charakterystyka przepływów dyfuzorowych	74
7.2	Dyfuzory termiczne na przykładzie rury chłodzonej powierzchniowo . . .	77
7.2.1	Opis badań	77
7.2.2	Analiza wyników	80
7.3	Dyfuzory termiczne na przykładzie rury chłodzonej filmowo	85
7.3.1	Opis badań	85
7.3.2	Analiza wyników	85
7.3.3	Wnioski	87
8	O chłodzeniu elementów turbiny gazowej	89
8.1	Potrzeba chłodzenia	89
8.2	Technologie chłodzenia	90
8.2.1	Chłodzenie filmowe	92
8.2.2	Wymiana ciepła w kanałach uźebrowanych	97
8.3	Modelowanie chłodzenia wewnętrznego	99
8.3.1	Kanał uźebrowany	99
8.4	Modelowanie chłodzenia zewnętrznego	106
8.4.1	Płyta z wtryskiem $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$	106
8.4.2	Płyta z wtryskiem $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$	113
8.4.3	Łopatką chłodzona powietrzem	118
9	Podsumowanie i wnioski	127
9.1	Podsumowanie	127
9.2	Wnioski	129
	Literatura	129
	Appendix	145
A	Wyprowadzenie równań transportu turbulentnego strumienia ciepła	147
A.1	Uśrednianie klasyczne	147
A.2	Postać niezachowawcza równań ewolucji	148
A.3	Równanie ewolucji turbulentnego strumienia ciepła $-\overline{v'_j \theta'}$	148
A.3.1	Człon lokalny	149
A.3.2	Człon konwekcyjny	149
A.3.3	Człon dyfuzyjny	150
A.3.4	Człon ciśnieniowy	151
A.3.5	Człon związany z polem sił	151
A.3.6	Równanie transportu trubulentnego strumienia ciepła	151

A.4	Równanie ewolucji wariancji temperatury $\overline{\theta'^2}$	153
A.4.1	Człon lokalny	153
A.4.2	Człon konwekcyjny	153
A.4.3	Człon dyfuzyjny	154
A.4.4	Równanie transportu $\overline{\theta'^2}$	155
A.5	Równanie ewolucji szybkości destrukcji fluktuacji temperatury ϵ_θ	156
A.5.1	Człon lokalny	157
A.5.2	Człon konwekcyjny	157
A.5.3	Człon dyfuzyjny	158
A.5.4	Równanie transportu ϵ_θ	158

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Motywacje

Elementy konstrukcyjne urządzeń energetycznych nawet w trakcie normalnej ich eksploatacji poddawane są znacznym i niestacjonarnym obciążeniom cieplnym, wynikającym z występowania istotnych różnic temperatury pomiędzy ścianką, a przepływającym czynnikiem roboczym. Obciążenia te mogą być jeszcze większe w czasie rozruchu czy też odstawienia, lub przy celowym przeciążeniu urządzenia w celu uzyskania dużych mocy w krótkim czasie.

Osiąganie coraz to wyższych sprawności oraz niezawodności poszczególnych urządzeń, wiąże się z doбором odpowiednich termodynamicznych parametrów pracy urządzenia, jak i niezbędną modyfikacją konstrukcji, polegającą na np. optymalnym ustawieniu łopatek, uszczelnień, zaworów oraz innych elementów na drodze przepływu czynnika roboczego.

Temperatury na wlocie do nowoczesnych turbin gazowych osiągają wartości znacznie przekraczające dopuszczalne temperatury stosowanych stali, stąd też wynika konieczność zastosowania chłodzenia wewnętrznego jak i zewnętrznego łopatek pierwszych stopni oraz innych wysoce obciążonych cieplnie elementów jak osłon komór spalania, tarcz czy korpusów. Planowane zmiany konstrukcyjne związane z wprowadzeniem układów chłodzenia, wymagają znajomości zmian obciążeń cieplnych zarówno lokalnie w każdym punkcie urządzenia jak i globalnie dla całego zespołu. Na poziomie projektowania nie można więc pomijać zjawiska turbulentnej wymiany ciepła od płynu do ścianek urządzenia oraz w kierunku odwrotnym, które przyczynia się jednocześnie do powstawania efektów dyfuzorowych podczas chłodzenia lub konfuzorowych w czasie grzania czynnika gazowego. Mimo, iż w maszynach cieplno-przepływowych zjawiska zachodzące w warstwach przyściennych odgrywają pierwszoplanową rolę, nie należy też zapominać o procesach zachodzących „wewnątrz” przepływu oraz o ich wzajemnym przenikaniu.

Technika numerycznego modelowania CFD¹ i CSD² znalazła już praktyczne zastosowanie w przemysłach energetycznym, lotniczym, okrętowym i wielu innych. Numeryczne symulacje zarówno przepływowe jak i wytrzymałościowe mają coraz większe znaczenie w całkowitym procesie projektowym elementów maszyn jak i całych urządzeń. Spory w tym udział mają kody obliczeniowe szeroko wykorzystywane przez najbardziej znaczące centra projektowe czy ośrodki badawcze. Mankamentem większości kodów jest stosowanie daleko idących uproszczeń, umożliwiających jednak stosunkowo szybkie i tanie

¹CFD - Computational Fluid Dynamics

²CSD - Computational Solid Dynamics

otrzymanie poprawnych w odpowiednim zakresie rozwiązań.

Modelowanie zjawisk termicznych, mimo iż stanowi niezmiernie ważne zagadnienie, jest traktowane we współczesnych kodach CFD w sposób zbyt ogólny i uproszczony, szczególnie w porównaniu z modelowaniem turbulentnej wymiany pędu.

Stąd wyrastają pytania: Czy i w jakim stopniu bardziej złożone modele turbulentnej wymiany ciepła wpływają na dokładność uzyskiwanych wyników? Jakie inne korzyści mogą wynikać z faktu zastosowania takich domknięć? Czy na przykład złożone, różniczkowe modele turbulentnej wymiany ciepła pozwalają na lepszy opis wpływu pola temperatury na pole prędkości. Taki wpływ, polegający na wyhamowaniu przepływu, obserwuje się podczas chłodzenia kanałów.

1.2 Dyfuzory termiczne

Dyfuzory i konfuzory termiczne to określenia dość rzadko pojawiające się w literaturze fachowej mimo, iż opisują zjawisko bardzo często występujące w rzeczywistych przepływach z wymianą ciepła. *Dyfuzorami* nazywa się ogólnie w mechanice płynów grupę urządzeń, które umożliwiają przekształcenie energii kinetycznej przepływającego czynnika w energię potencjalną, charakteryzowaną najczęściej przez wzrost (lub obniżenie w przypadku *konfuzora*) ciśnienia statycznego czynnika i częściowe wyhamowanie przepływu³.

Przemiany stanu płynącego czynnika mogą przebiegać w ogólnym przypadku przy wymianie ciepła, energii mechanicznej i masy z określonym otoczeniem oraz przy dyssypacji uporządkowanej energii kinetycznej. W zależności więc od sposobu oddziaływania na strumień czynnika, rozróżnia się generalnie pięć typów dyfuzorów [1, 2]:

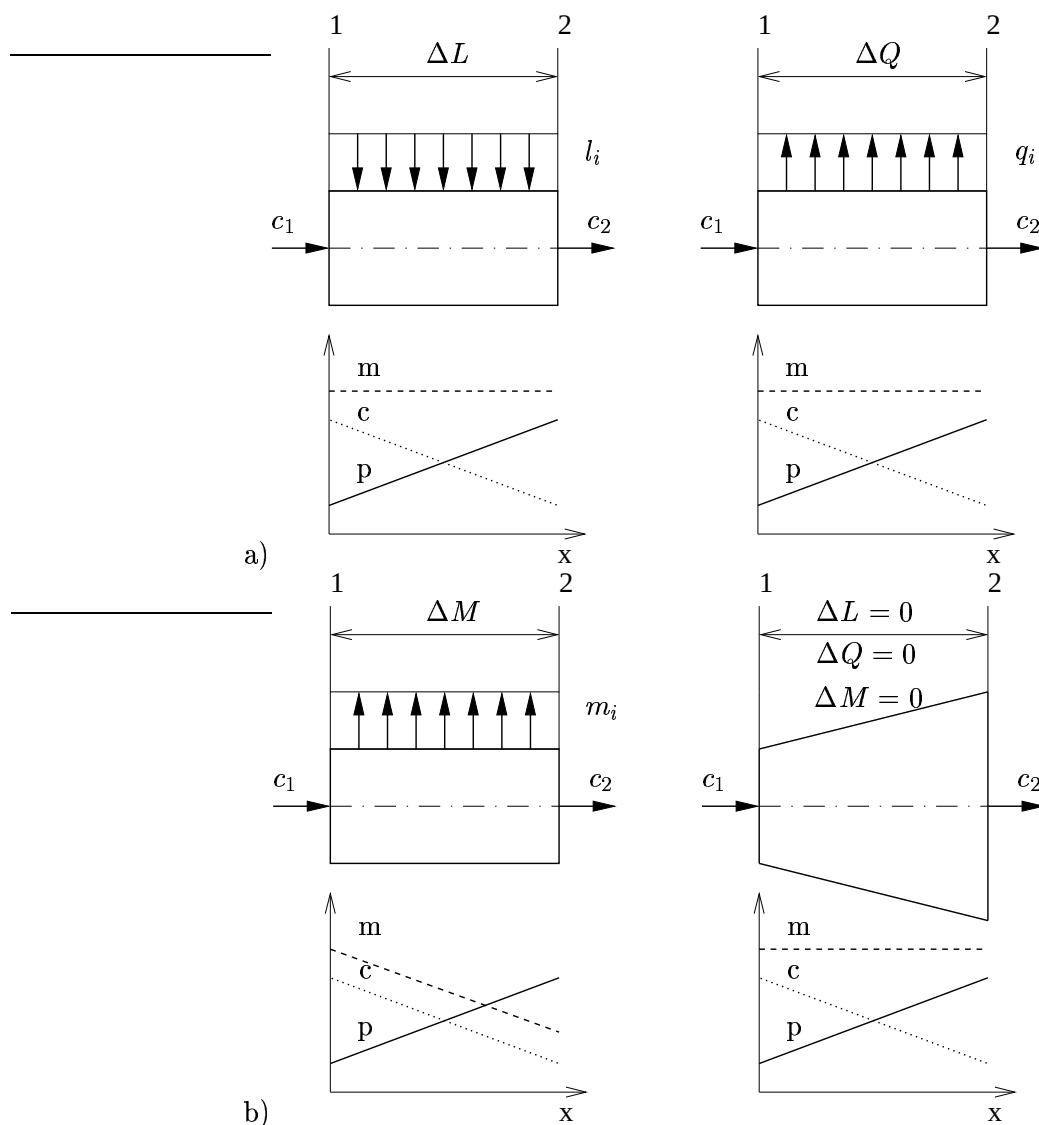
- geometryczne
- mechaniczne
- termiczne
- masowe (upustowe)
- kombinowane

W najbardziej znanym i łatwo "rozpoznawalnym" dyfuzorze *geometrycznym* konwersja energii kinetycznej na potencjalną następuje w wyniku określonej zmienności pola przekroju poprzecznego kanału. W dyfuzorze *mechanicznym* przyrost energii potencjalnej odbywa się kosztem energii dostarczonej z zewnątrz na sposób pracy. Opóźnianie przepływu odbywa się w dyfuzorze *termicznym* w wyniku odprowadzania od czynnika na zewnątrz energii na sposób ciepła. Poprzez upuszczanie części przepływającego przez kanał czynnika, także uzyskuje się spadek jego prędkości⁴ - w tym przypadku jest to dyfuzor *masowy*. Dyfuzor *kombinowany* zawiera w sobie cechy pozostałych. Podstawowe rodzaje dyfuzorów przedstawiono na Rysunku 1.1 [2].

Urządzenia o tych cechach są niezmiernie często wykorzystywane w technice. Szczególnie w takiej gałęzi przemysłu jaką jest energetyka dyfuzory wszystkich typów są obecne. Przykładem są wszelkiego rodzaju dmuchawy, wentylatory, sprężarki, dyfuzory wylotowe turbin, rozszerzenia kanałów, chłodzone i ogrzewane rury, ciągi spalin,

³Nie zawsze jednak takie działanie na przepływający czynnik jest zjawiskiem korzystnym i celowo zamierzonym przez projektanta!

⁴Przy niezmiennym przekroju poprzecznym



Rysunek 1.1: Podstawowe rodzaje dyfuzorów oraz zmiana ich charakterystycznych parametrów: a) (z lewej) ΔL przyrost pracy w dyfuzorze mechanicznym, (z prawej) ΔQ przyrost ciepła w dyfuzorze termicznym; b) (z lewej) ΔM przyrost masy w dyfuzorze masowym, (z prawej) ΔA przyrost powierzchni w dyfuzorze geometrycznym (na podstawie [2])

wymienniki ciepła, skraplacze, a nawet kanały przepływowe pomiędzy intensywnie chłodzonymi łopatkami pierwszych stopni turbiny gazowej, itp. Turbina gazowa z racji znaczenie wyższych temperatur czynnika roboczego, niż to ma miejsce w turbinie parowej, oraz ze względu na niezbędne chłodzenie jej elementów i bardzo krótki czas przeprowadzania rozruchów do pełnej mocy, jest obiektem w którym szczególnie wyraźnie mogą występować termiczne efekty dyfuzorowe czy też konfuzorowe.

W dyfuzorze termicznym zwanym też **dyszą cieplną** [3] na skutek odbierania od płynu energii na sposób ciepła na pewnym odcinku dowolnego urządzenia czy też jego elementu, następuje hamowanie czynnika przy jednoczesnym spadku jego temperatury i zwiększeniu gęstości [2, 4]. Dyfuzor termiczny szczególnego typu mogą więc

stanowić wszystkie rurociągi i kanały parowe podczas procesu rozruchu turbozespołu po dłuższym odstawieniu turbiny. Spore różnice temperatur korpusu turbiny oraz jej poszczególnych elementów a gorącą parą dostarczaną podczas rozruchu zimnego, powodują intensywną wymianę ciepła, która wpływa na zmianę profilu prędkości pary i wielkość oporów w przepływie, co uniemożliwia uzyskanie odpowiednio wysokiej mocy przy dobrej sprawności, w krótkim czasie po uruchomieniu urządzenia. Także wszelkie wymienniki ciepła powinny być projektowane z uwzględnieniem dyfuzorowych efektów podczas chłodzenia przepływającego czynnika, gdyż w innym wypadku okaże się, że urządzenia przepływowe jak pompy czy sprężarki mogą być źle dobrane do istniejącej instalacji.

Szczególną odmianę dyfuzorów termicznych stanowią typowe skraplacze stacji redukcyjno schładzających czy też wyloty turbin gazowych, gdzie dostępny spadek entalpii jest dodatkowo zwiększany poprzez wtrysk wody chłodzącej spaliny [2].

Z przytoczonych przykładów wynika, iż zasadnym jest zwrócenie uwagi na zjawiska związane z występowaniem dyfuzorów termicznych (lub kombinowanych z głównym efektem termicznym), a także lokalizowanie tego typu elementów w instalacjach przemysłowych i eliminowanie procesów niekorzystnie wpływających na osiągi i sprawność poszczególnych urządzeń.

1.3 Stan badań i przegląd literatury dotyczącej modelowania turbulentnego strumienia ciepła

Jeszcze 200 lat temu, gdy głównym źródłem energii były młyny wodne czy wiatraki zagadnienia wymiany ciepła nie były dla ludzi problemami istotnymi. Dopiero dziewiętnastowieczny rozwój przemysłu, związany przede wszystkim ze skonstruowaniem maszyn parowych, które łączyły w sobie procesy zarówno przepływowe jak i cieplne spowodował, iż poznanie obu zjawisk stało się jednym z głównych wyzwań dla badaczy. Z tego czasu pochodzą prace, które ukierunkowały nasze pojmowanie procesów wymiany pędu oraz ciepła, aż do czasu teraźniejszego. Przykładem mogą być pionierskie publikacje Reynoldsa [5], Stantona [6] i późniejsze, nie mniej ważne prace Prandtla [7]. Właśnie w pracy O. Reynoldsa *On the extent and action of the heating surface from heat boilers* określono zjawisko turbulentnej wymiany energii poprzez analogię do turbulentnej wymiany pędu. Bezpośrednim następstwem tego założenia jest uzależnienie turbulentnego współczynnika dyfuzji energii od turbulentnej lepkości w modelach numerycznej termomechaniki płynów bazujących na koncepcji lepkości efektywnej Boussinesqa [8].

Głównym przyczynkiem do zajęcia się tematem numerycznej wymiany ciepła w przepływie jest praca W.C.Kaysa *Turbulent Prandtl Number - Where Are We?* [9]. Próbuje się w niej dociec, w jakim zakresie modelowanie turbulentnej wymiany ciepła w oparciu o stałą lub zmienną algebraicznie turbulentną liczbę Prandtla, czyli bezpośrednio modelowanie współczynnika dyfuzji termicznej na bazie współczynnika turbulentnej dyfuzji pędu, może być uzasadnione. Już na wstępie artykułu pozbywamy się złudzeń co do poprawności takiego uproszczenia:

"[...] *If we are talking about three-dimensional flows or re-circulating flows, or in other words the completely general turbulent flow problem, then the concept of an eddy diffusivity certainly loses its usefulness [...]*"

Także Weigand et al. [10] przy okazji prezentowania obecnego stanu badań nad zagadnieniem chłodzenia elementów turbin gazowych podsumowuje, iż należy już zaprzestać stosowania turbulentnej liczby Prandtla, a turbulentny strumień ciepła modelować z wykorzystaniem dodatkowych równań transportu. Zawężając nasze zagadnienie

jedynie do poprawnego nawet modelowania przepływów w kanałach prostych i rurach zaczynamy odbiegać zbyt daleko od przepływów ograniczonych mocno skomplikowaną geometrią w kanałach rzeczywistych urządzeń. Stąd też próby odmiennego przedstawienia procesu turbulentnej wymiany ciepła, które pozwoliłyby na wypracowanie uniwersalnego modelu, który byłby poprawny dla każdych warunków tj. różnej liczby Reynoldsa Re i dla każdego płynu tj. różnej liczby Prandtla Pr .

Wspomniana praca Kaysa jest w zasadzie podsumowaniem badań eksperymentalnych i teoretycznych prowadzonych głównie w latach 70-tych i 80-tych dwudziestego wieku nad domknięciami turbulentnej liczby Prandtla. Wśród ważniejszych publikacji związanych bezpośrednio z tą tematyką można wymienić prace A. Reynoldsa [11], [12], Jischa et al. [13], McEligot'a et al. [14], Bremhorsta i Krabsa [15], Antonia et al. [16, 17, 18], Weiganda et al. [19] oraz wielu innych. Wśród krajowych należy wyróżnić prace Mikielewicza i Ichnatowicza [20] oraz szereg publikacji Rupa [21, 22, 23, 24].

Równocześnie prowadzono szereg badań eksperymentalnych związanych z turbulentną wymianą ciepła. W literaturze można napotkać bardzo subtelne i dokładne pomiary Nagano, Hishida, Wardana, Ota i innych dotyczące turbulentnej wymiany ciepła w przepływie w rurach [25, 26] oraz kanałach [27, 28, 29], a także wymiany ciepła w warstwie przyściennej przy opływie płaskiej płyty [30, 31, 32, 33]. Sporo badań dotyczyło także turbulentnej wymiany ciepła przy konwekcji swobodnej [34]. W eksperymentach tych, oprócz średnich wielkości, mierzono także wartość fluktuacji prędkości i temperatury. Coraz zasobniejsze stały się bazy danych, w których gromadzi się wyniki symulacji DNS⁵, także odpowiednie dla kalibracji modeli turbulencji dynamicznej i termicznej, zwłaszcza w obszarach przyściennych $y^+ < 5$, dla których trudności w realizacji dokładnych pomiarów są oczywiste. Niestety wadą tychże obliczeń jest modelowanie przepływów o stosunkowo niskiej jeszcze liczbie Re [35, 36].

Wyniki szczegółowych badań eksperymentalnych, przy jednoczesnym rozwoju technik komputerowych, były solidną podstawą do poszukiwania domknięć wyższego rzędu turbulentnego strumienia energii $-\overline{v'_j\theta'}$. Próby domknięć jednorównaniowych, w których do układu równań bilansu pędu i energii dopisywano równanie ewolucji wariancji temperatury $\overline{\theta'^2}$ uwzględniane w formule na turbulentny współczynnik dyfuzji ciepła, były stosunkowo słabo rozpowszechnione. Dopiero podejście dwurównaniowe z dodatkowym równaniem ewolucji szybkości destrukcji fluktuacji termicznych ϵ_θ zdobyło dużą popularność i doczekało się sporej ilości implementacji. Szczególne miejsce zajmują w tym względzie publikacje Sommera et al. [37, 38, 39, 40], Nagano et al. [41, 42, 43, 44, 45], Rhee et al. [46, 47], Sunga et al. [48] oraz ostatnie propozycje Denga et al. [49].

Inną drogą jest modelowanie pełnego strumienia energii, gdzie rezygnuje się z pojęcia turbulentnego współczynnika dyfuzji ciepła. Jednak w tym przypadku pojawiają się trudności związane z modelowaniem poszczególnych członów źródłowych równań transportu $-\overline{v'_j\theta'}$ [50, 8].

Pewien wgląd na stan badań dają też prace przeglądowe związane z tematyką domknięcia $-\overline{v'_j\theta'}$. Wśród wielu innych warto odnotować prace Nagano [51], Laundera [52], Speziale i So [8] czy też pracę Pozorskiego [53]. Ostatnia z przytoczonych prac koncentruje się na wykorzystaniu metody PDF⁶ do modelowania pól prędkości i temperatury.

Tematyka dyfuzorów termicznych jest bardzo zawężona. Wyodrębnienie zjawiska wśród innych zachodzących równocześnie stanowi dużą trudność. W literaturze świa-

⁵Direct Numerical Simulation

⁶PDF - Probability Density Function

towej zjawisko jest w zasadzie tematem prawie nie istniejącym - włącza je się bowiem w całość zagadnienia wymiany ciepła w przepływie. Jedyne publikacje, w których występuje pojęcie dyfuzora termicznego, stanowią prace Dejcza i Zariankina [1, 54]. Z krajowych publikacji warto odnotować prace Jesionka et al. [55, 56, 2], Gundlacha [4] oraz Dowkontta [3].

Dziedziną, która w najbardziej oczywisty sposób łączy wszystkie wymienione tematy, jest zagadnienie chłodzenia elementów turbin gazowych, przede wszystkim łopatek pierwszych stopni, ale też i osłon komór spalania itd. Wpływ chłodzenia na aerodynamikę palisady nie jest jeszcze rozpoznany, a jego oddziaływanie powinno uwzględniać się w procesie projektowym [57, 58]. Tematyka związana z technologią chłodzenia zewnętrznego czy też wewnętrznego jest szczególnie „mocno” reprezentowana w literaturze światowej. Zagadnienie przedstawiono szerzej w Rozdziale 8.

Weryfikacji nowych modeli turbulencji termicznej można dokonać na podstawie wyników eksperymentów referencyjnych⁷, które są dostępne w internetowych bazach danych. Do najbardziej znanych należy zaliczyć bazę danych organizacji ERCOFTAC [59] oraz japońskie bazy danych DATHET [60] i THTLAB [61].

1.4 Podstawy pracy

Niniejsza praca powstała na bazie własnej rozprawy doktorskiej pod tym samym tytułem [62], w której wykorzystano rezultaty grantu promotorskiego Komitetu Badań Naukowych PB 1733/T10/2000/19.

Podstawą niniejszej pracy jest także szereg własnych publikacji naukowych związanych bezpośrednio i pośrednio z jej tematyką. Wśród nich należy wymienić [63, 64, 65, 66, 67, 68].

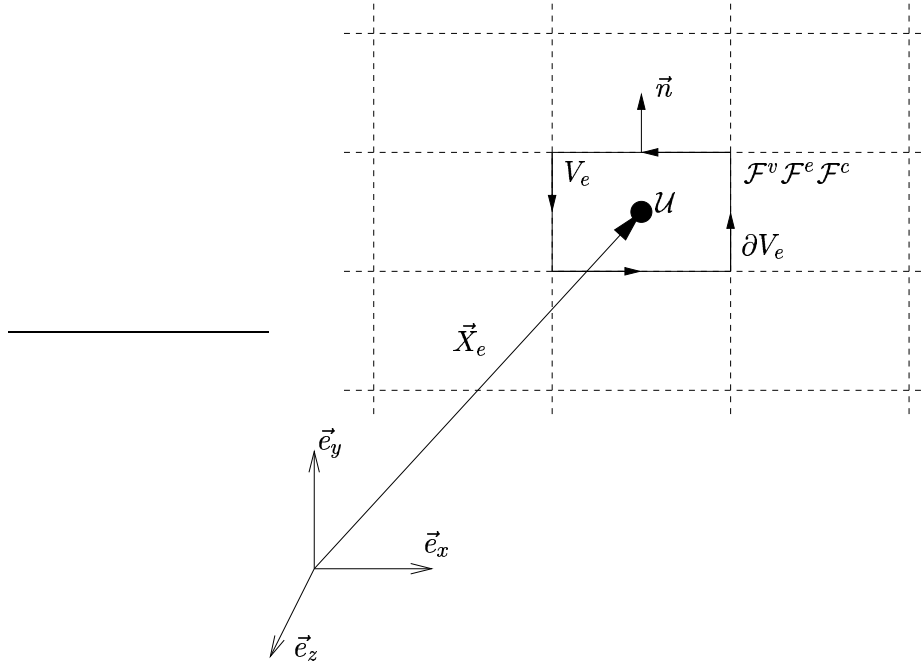
⁷ tzw. benchmark

Rozdział 2

Modelowanie procesów cieplno–przepływowych

2.1 Równania zachowania

Trójwymiarowy obszar można dyskretyzować objętościami kontrolnymi V_e , gdzie $e = 1, \dots, N$.



Rysunek 2.1: Objętość kontrolna V_e w otoczeniu sąsiednich objętości

Dla każdej z objętości kontrolnej w układzie jak na Rysunku 2.1 zapisuje się równanie transportu (bilansu) w postaci ogólnej [69]:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \mathcal{U} dV = \oint_{\partial V} (\mathcal{F}^v - \mathcal{F}^e) \vec{n} dA + \iiint_V \mathcal{S} dV \quad . \quad (2.1)$$

Wynika z niego, iż całkowita zmiana ilości¹ $\mathcal{U}$ w objętości kontrolnej V spowodowana jest jej przekroczeniem przez granice V (czyli powierzchnię A otaczającą objętość kon-

¹ Czyli uogólnionej gęstości

trolną jak na Rysunku 1) w formie strumienia dyfuzyjnego $\mathcal{F}^v$ i sprężystego $\mathcal{F}^e$ oraz wewnętrzną produkcją $\mathcal{S}$ [70]. Strumienie uwzględniają oddziaływanie sąsiednich objętości, a wewnętrzna produkcja związana jest z istnieniem w danej objętości źródeł np. siły grawitacji. Twierdzenie o transporcie czyli tzw. *teoremat ogólny transportu wielkości ekstensywnych Reynoldsa* [71, 72, 73] pozwala wyznaczyć pochodną materialną zmiennej zachowawczej $\mathcal{U}$.

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \mathcal{U} dV = \iiint_V \partial_t \mathcal{U} dV + \oint_{\partial V} (\mathcal{U} \otimes \vec{v}) \vec{n} dA \quad . \quad (2.2)$$

Człon $(\mathcal{U} \otimes \vec{v})$ określany jest mianem strumienia konwekcyjnego $\mathcal{F}^c$. Wykorzystując *twierdzenie Gaussa–Ostrogradzkiego* można równanie bilansu (2.5) uzupełnione równaniem (2.2) sprowadzić do postaci:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U} + \operatorname{div} (\mathcal{F}^c + \mathcal{F}^e) = \operatorname{div} \mathcal{F}^v + \mathcal{S} \quad . \quad (2.3)$$

2.1.1 Bilans masy $\mathcal{U} = \rho$

Masę m całej objętości V można przedstawić jako całkę potrójną [72]:

$$m = \iiint_V \rho dV \quad . \quad (2.4)$$

Równanie bilansu masy przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = 0 \quad , \quad (2.5)$$

a po wykorzystaniu *teorematu Reynoldsa* i twierdzenia Gaussa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0 \quad . \quad (2.6)$$

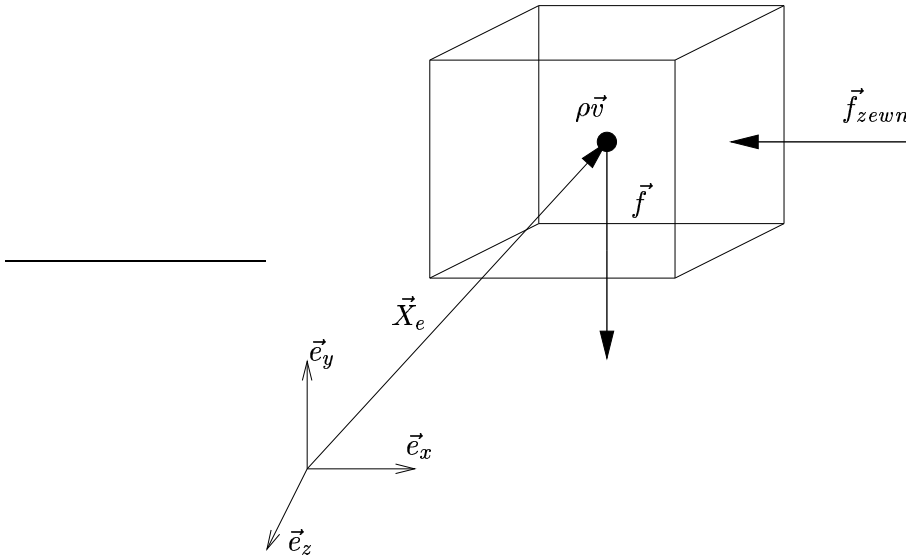
Zasada zachowania masy płynu mówi nam, iż strumień masy przekraczający powierzchnię A ograniczającą objętość kontrolną V musi być, w przypadku nieściśliwości tego płynu, równy strumieniowi opuszczającemu badaną objętość². W przypadku gdy płyn jest ściśliwy część masy może pozostać wewnątrz objętości, powodując w następstwie zwiększenie gęstości czynnika, lub zwiększyć dodatkowo strumień masy opuszczający objętość co wiąże się ze zmniejszeniem gęstości czynnika. Pierwszy człon równania ciągłości odzwierciedla właśnie zmianę gęstości w czasie, a drugi określa średni strumień masy przez objętość kontrolną na skutek konwekcji.

2.1.2 Bilans pędu $\mathcal{U} = \rho \vec{v}$

Bilans pędu, stanowiący *II Zasadę Dynamiki*, jest zarazem bilansem sił działających na badaną objętość kontrolną. Podstawowym założeniem jest stwierdzenie, iż w izolowanej objętości ilość ruchu nie ulega zmianie. Można zapisać elementarny bilans sił zgodnie z Rysunkiem 2.2:

$$m \vec{a} = \vec{f} + \vec{f}_{zewn.} \quad , \quad (2.7)$$

²Trzeba mieć jednak na uwadze, iż istnieją pewne przypadki konwersji pomiędzy masą i energią, co ma miejsce podczas reakcji chemicznych czy też nuklearnych. Bilans masy w postaci podanej powyżej nie uwzględnia tychże wyjątków przyjmując, iż w zakresie rozważanych tutaj procesów fizycznych zmiany masy są pomijalnie małe.



Rysunek 2.2: Bilans sił w objętości kontrolnej V_e

gdzie przyspieszenie $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}$. Bilans pędu $\vec{p} = m\vec{v} = \iiint_V \rho \vec{v} dV$ można zapisać w postaci [71, 72, 73]:

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \vec{v} dV = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dV + \oint_{\partial V} (\rho \vec{v}) \otimes \vec{v} \vec{n} dA \quad . \quad (2.8)$$

Wyróżnia się dwa rodzaje sił działających na objętość kontrolną:

- siły powierzchniowe, będące siłami związanymi z ciśnieniem, a także z lepkością płynu,
- siły masowe, związane z istnieniem pól sił np. grawitacyjne, elektromagnetyczne, stanowiące źródło pędu.

Siły masowe można zdefiniować ogólnie w postaci:

$$\vec{f} = \iiint_V \rho \vec{b} dV \quad . \quad (2.9)$$

W płynie lepkiem mogą występować jednocześnie naprężenia normalne i styczne. Normalne są wynikiem występowania sił ciśnieniowych, ścinające zaś związane są z występowaniem tarcia wewnętrznego w płynie (np. w przepływie laminarnym pomiędzy warstwami płynu poruszającymi się z różną prędkością). Oddziaływanie sąsiednich komórek można przedstawić więc w postaci siły całkowitej działającej na elementarną objętość:

$$\vec{f}_{zewn.} = \oint_{\partial V} \overset{\leftrightarrow}{T} \vec{n} dA \quad , \quad (2.10)$$

gdzie $\overset{\leftrightarrow}{T} = -p\overset{\leftrightarrow}{I} + \overset{\leftrightarrow}{\tau}^c$ jest strumieniem pędu Cauchy'ego. Uwzględniając teoremat Reynoldsa oraz twierdzenie Gaussa można zapisać równanie bilansu pędu w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{v} + \text{div} \left(\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \overset{\leftrightarrow}{I} \right) = \text{div} \overset{\leftrightarrow}{\tau}^c + \rho \vec{b} \quad . \quad (2.11)$$

W równaniu pojawiają się naprężenia całkowite, które są sumą następujących części dyssypatywnych - lepkościowej, turbulentnej, dyfuzyjnej, radiacyjnej oraz transpiracji [69]:

$$\overleftrightarrow{\tau}^c = \overleftrightarrow{\tau} + \overleftrightarrow{R} + \overleftrightarrow{\tau}_{dyf} + \overleftrightarrow{\tau}_{rad} + \overleftrightarrow{\tau}_{transpiracji} \quad . \quad (2.12)$$

Dla płynów niutonowskich tj. lepkich, pierwszy człon τ_{ij} naprężeń całkowitych, czyli tensor naprężeń lepkich określany jest najczęściej zależnością konstytutywną wiążącą współczynnik lepkości molekularnej i tensor prędkości deformacji d_{ij} (odkształceń):

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad , \quad (2.13)$$

gdzie λ jest współczynnikiem lepkości objętościowej. Zazwyczaj przyjmuje się, iż $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, stąd dalej można rozpisać:

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} = 2\mu d_{ij}^* \quad . \quad (2.14)$$

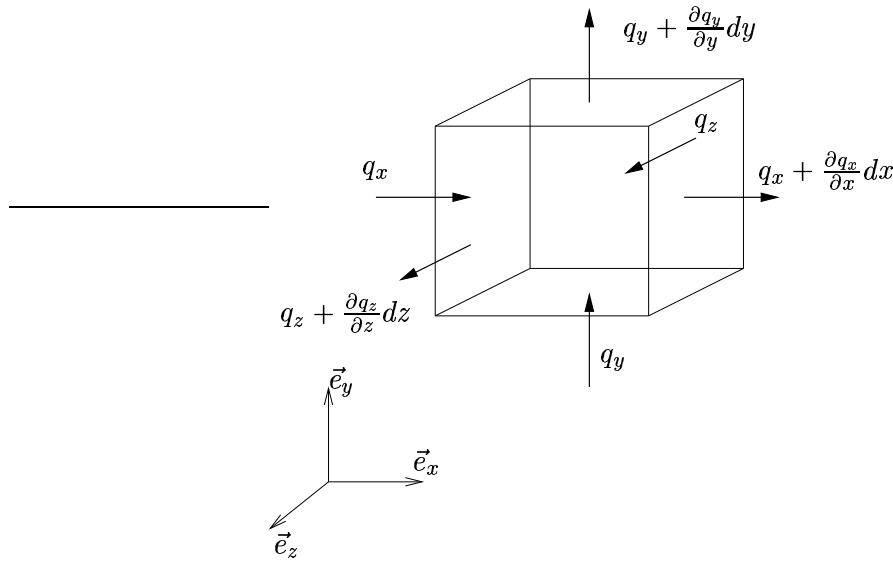
Bezsładowy tensor prędkości odkształceń d_{ij}^* zdefiniowany jest więc przez:

$$d_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad . \quad (2.15)$$

Równania zachowania pędu zapisane w takiej postaci są często nazywane równaniami Naviera–Stokesa.

2.1.3 Bilans energii $\mathcal{U} = \rho e$

Równanie bilansu energii wyprowadzone zostaje na bazie I Zasady Termodynamiki, która mówi, iż energia nie może w żaden sposób powstać ani ulec zniszczeniu - może jedynie zmieniać swoją postać.



Rysunek 2.3: Objętość kontrolna ze składowymi strumieniami ciepła

Proces wymiany ciepła, dla układu jak na Rysunku 2.3, opisuje klasyczne równanie Fouriera–Kirchhoffa [74, 75, 73, 76]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial v_j T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{q}{\rho c_p} . \quad (2.16)$$

Równanie zachowania energii:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho e + \text{div} \left(\rho \left[e + \frac{p}{\rho} \right] \vec{v} \right) = \text{div} \left(\vec{q}^c + \overset{\leftrightarrow}{\tau}^c \vec{v} \right) + \rho S_e . \quad (2.17)$$

W równaniu (2.17) zmienna e oznacza energię całkowitą, będącą sumą energii wewnętrznej i kinetycznej płynu.

$$e = u + \frac{\vec{v}^2}{2} = c_v T + \frac{\vec{v}^2}{2} . \quad (2.18)$$

Na część dyfuzyjną równania bilansu energii składają się:

- mechaniczny strumień energii³, który równy jest iloczynowi całkowitego strumienia pędu opisanego wcześniej oraz prędkości:

$$\vec{q}_m = \overset{\leftrightarrow}{\tau}^c \vec{v} , \quad (2.19)$$

- całkowity strumień ciepła $\vec{q}_c$, który można, podobnie jak strumień pędu, podzielić na strumienie molekularny, turbulentny, dyfuzyjny i radiacyjny.

$$\vec{q}_c = \vec{q} + \vec{q}_t + \vec{q}_{dyf} + \vec{q}_{rad} . \quad (2.20)$$

Przyjmując, iż części składowe strumieni pędu i ciepła związane z dyfuzją, radiacją i transpiracją są w ogólnym przypadku niewspółmiernie małe w stosunku do dominującej części molekularnej i turbulentnej, dla domknięcia ogólnego bilansu pędu i energii wystarczy zamodelowanie tych ostatnich.

Modelowanie molekularnego strumienia pędu $\overset{\leftrightarrow}{\tau}^c$ i ciepła $\vec{q}$ nie stanowi obecnie większego problemu. W literaturze wykorzystuje się hipotezę Naviera–Stokesa⁴ zakładającą koincydencję osi głównych tensora naprężeń lepkich i tensora prędkości deformacji (patrz również Rozdział 2.1.2), równanie Fouriera–Kirchhoffa oraz zakłada się za Reynoldsem istnienie analogii dla procesów wymiany pędu i ciepła [76, 5].

Zasadniczym problemem pozostaje jednak modelowanie turbulentnego strumienia zarówno pędu⁵ jak i ciepła⁶.

Korzystając z wyprowadzonych równań transportu masy ($\mathcal{U} = \rho$), pędu ($\mathcal{U} = \rho \vec{v}$) oraz energii ($\mathcal{U} = \rho e$) można zapisać ogólny układ równań bilansu tych wielkości uzupełniony dodatkowymi równaniami ewolucji wybranych parametrów $\psi_1 \div \psi_n$ w zależności od modelowanego zagadnienia np. energii kinetycznej turbulencji k , szybkości dyssypacji turbulentnej energii kinetycznej ϵ , stężenia produktów reakcji chemicznych Y_k oraz

³W zasadzie mechaniczno–dyfuzyjny strumień energii, ponieważ pełny strumień mechaniczny zawiera także część sprężystą, odwracalną pochodzącą od ciśnienia, czyli człon $p \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \vec{v} = p \vec{v}$

⁴Wynikającą wprost z rozważań Newtona.

⁵Poszukiwanie składowych tensora naprężeń Reynoldsa, który uzyskany został w wyniku dekompozycji równania Naviera–Stokesa na część średnią i fluktuacje [77].

⁶Główny nacisk położony jest na poszukiwanie modeli turbulencji domykających równanie bilansu pędu. Część badaczy z góry zakłada bowiem pełną „stosowalność” analogii Reynoldsa i w konsekwencji bezpośrednie przełożenie modeli powstałych dla turbulentnego strumienia pędu do równania energii. Stąd badania nad modelowaniem turbulentnego strumienia ciepła są nieco zubożone [78, 69]

innych, dowolnych parametrów, rozwiązywanych jednocześnie. Układ ten ma postać zachowawczą⁷, zapisaną tu bardziej szczegółowo jako:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho \vec{v} \\ \rho e \\ \rho \psi_1 \\ \vdots \\ \rho \psi_n \end{Bmatrix} + \operatorname{div} \begin{Bmatrix} \rho \vec{v} \\ \rho \vec{v} \otimes \vec{v} \\ \rho e \vec{v} \\ \rho \psi_1 \vec{v} \\ \vdots \\ \rho \psi_n \vec{v} \end{Bmatrix} + \operatorname{div} \begin{Bmatrix} 0 \\ p \vec{I} \\ p \vec{v} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \operatorname{div} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\tau}_c \\ \vec{\tau}_c \vec{v} + \vec{q}_c \\ \vec{J}_{\psi_1} \\ \vdots \\ \vec{J}_{\psi_n} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho \vec{b} \\ \rho S_e \\ \rho S_{\psi_1} \\ \vdots \\ \rho S_{\psi_n} \end{Bmatrix} . \quad (2.21)$$

2.2 Równania stanu, równania konstytutywne, domknięcia

Liczba zmiennych zależnych jest większa od liczby równań opisujących prawa zachowania. W celu domknięcia układu równań bilansu niezbędne jest istnienie relacji wiążących poszczególne zmienne, które uściślają opis własności płynu. Głównym związkiem jest równanie stanu [71]:

$$p = p(\rho, T) = p(v, T), \quad s = s(\rho, T) = s(v, T), \quad e = e(\rho, T) = e(v, T) \quad . \quad (2.22)$$

Dla gazu idealnego można zapisać następujące równania stanu:

$$p = \rho RT, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}, \quad u = c_v T, \quad c_p - c_v = R \quad , \quad (2.23)$$

gdzie R jest stałą gazową.

Związki konstytutywne pozwalają na ostateczne zamknięcie układu równań zachowania. Definiuje się je jako zależności wiążące stan obciążenia mechanicznego (naprężeń i ich pochodnych) ze stanem odkształcenia ośrodka (odkształcenia i ich pochodne) [72]. Dla gazów i cieczy równania konstytutywne zazwyczaj są linearyzowane i sprowadzane do związku pomiędzy tensorem prędkości odkształceń i tensorem naprężeń, tak jak to ma miejsce na przykład w równaniu (2.13). W niniejszej rozprawie ograniczono równania konstytutywne do związków na molekularne naprężenia lepkie (związek Naviera–Stokesa) oraz na molekularny strumień ciepła (związek Fouriera–Kirchhoffa)

Domknięcia zależą głównie od struktury przepływu tzn. laminarny – burzliwy, jednofazowy – dwufazowy itp. W układach przepływowych urządzeń energetycznych zagadnieniem najpowszechniejszym jest turbulentny przepływ z wymianą ciepła. Domknięcie dla turbulentnego strumienia pędu opisano w Rozdziale 3, zaś w Rozdziale 4 przedstawiono analogiczne związki dla turbulentnego strumienia ciepła.

⁷Równanie to jest obowiązujące, niezależnie od tego czy jest to problem 1D, 2D, czy też 3D, w każdym układzie współrzędnych. Jego struktura pozwala uwzględniać równania konstytutywne w szerokim zakresie tzn. od płynów sprężystych (odwracalnych) i płynów lepko-przewodzących do płynów opisanych równaniami ewolucji (tzn. tworzenie nowej fazy, spalanie, turbulencja itd.) [69]

Rozdział 3

O modelowaniu turbulentnej wymiany pędu

3.1 Domknięcia tensora Reynoldsa

Naprężenia turbulentne $\overleftrightarrow{R}$, które są częścią naprężeń całkowitych (2.12) składających się na strumień dyfuzyjny bilansu pędu przedstawionego w ogólnej postaci (2.11) w Rozdziale 2 stanowią największą przeszkodę w procesie obliczeniowym układów przepływowych. Naprężenia te „ujawnia się” klasycznie poprzez uśrednienie równania pędu zapisanego w postaci Naviera–Stokesa¹ (3.1), w którym następnie pole prędkości v_j i ciśnienia p dekomponuje się na część średnią $\bar{v}_j$ i $\bar{p}$ oraz fluktuacje v'_j i p' [79, 8], przy założeniu nieściśliwości płynu (tj. dla niskich wartości liczb Macha)² oraz uproszczeniu polegającym na przyjęciu, iż fluktuacje gęstości $\rho' = 0$, czyli jednocześnie $\rho = \bar{\rho}$.

$$\mathcal{N}(v_i) = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = 0 \quad . \quad (3.1)$$

Po dekompozycji pól prędkości i ciśnienia, a następnie uśrednieniu równania (3.1) przyjmuje ono postać (3.2):

$$\frac{\partial (\overline{v_i + v'_i})}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{v_i + v'_i}) (\overline{v_j + v'_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\overline{p_i + p'})}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial (\overline{v_i + v'_i})}{\partial x_j} \right] \quad . \quad (3.2)$$

Wykorzystując zasady uśredniania klasycznego, które przytoczono w Dodatku A, równanie (3.2) redukuje się do postaci:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \bar{v}_i^2}{\partial x_j \partial x_j} \quad , \quad (3.3)$$

lub po uporządkowaniu:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \bar{v}_i^2}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} r_{ij} \quad . \quad (3.4)$$

¹Dla uproszczenia równanie to jest w postaci, w której nie uwzględniono sił masowych

²Analogiczny do opisywanego proces dekompozycji oraz uśredniania w celu wyprowadzenia równań transportu turbulentnego strumienia ciepła, wariacji temperatury oraz szybkości jej destrukcji, został zamieszczony w Dodatku A na końcu niniejszej rozprawy

Napężenia Reynoldsa są opisywane przez wyrażenie:

$$r_{ij} = -\overline{v'_i v'_j}, \quad R_{ij} = \rho r_{ij} \quad (3.5)$$

Człon ten jest tensorem symetrycznym nazywanym często tensorem naprężeń Reynoldsa³. Aby rozwiązać równanie pędu (2.11) należy odpowiednio zamodelować sześć składowych tensora $\overleftrightarrow{r}$. Takie działanie określa się często mianem *problemu domknięcia* [82, 8, 77]. W zależności od poziomu przybliżenia wykorzystywanego do opisu składowych tensora $\overleftrightarrow{r}$, przyjęła się tradycyjna klasyfikacja modeli turbulencji, których charakterystykę opisano w dalszej części pracy, bazując na najbardziej popularnych domknięciach.

3.1.1 Hipoteza lepkości turbulentnej

Najwięcej modeli powstało w oparciu o hipotezę Boussinesqa, która analogicznie do naprężeń lepkich, jak w zależności (2.13), wiąże składowe tensora naprężeń turbulentnych z tensorem prędkości deformacji poprzez wielkość będącą współczynnikiem turbulentnej dyfuzji pędu, często określaną mianem lepkości turbulentnej ν_t . W odróżnieniu od molekularnej, lepkość turbulentna jest wyłącznie cechą przepływu, a nie własnością materiałową [79, 77].

$$r_{ij} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} = 2\nu_t d_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.6)$$

W równaniu (3.6) wielkość k jest turbulentną energią kinetyczną, która równa jest:

$$k = \frac{1}{2} \overline{v'_j v'_j} \quad (3.7)$$

Lepkość turbulentna o wymiarze $[m^2/s]$ ma zawsze postać iloczynu turbulentnej skali długości L_m i turbulentnej skali prędkości V_m (zamiennie turbulentnej skali czasu T_m) [82]:

$$\nu_t \approx L_m V_m = \frac{L_m^2}{T_m} = V_m^2 T_m \quad (3.8)$$

To właśnie sposób wyznaczania turbulentnych skal prędkości, czasu i długości determinuje przynależność danego modelu do określonej grupy domknięć.

Domknięcia algebraiczne

Fenomenologiczne domknięcia algebraiczne, zwane inaczej zerorównaniowymi, jako turbulentną skalę prędkości wykorzystują zazwyczaj gradient prędkości średniej, a jako turbulentną skalę długości tzw. *drogę mieszania*, która może mieć postać $L_m = \kappa y$, tak jak to ma miejsce w oryginalnej formule Prandtla [79, 83, 8, 84]. Do wyznaczania składowych tensora naprężeń turbulentnych stosuje się niepełną zależność (3.6) tj.:

$$r_{ij} = 2\nu_t d_{ij} \quad (3.9)$$

Mimo, iż od sformułowania przez Prandtla teorii drogi mieszania minęło już 80 lat, modele algebraiczne w dalszym ciągu znajdują swoje miejsce w modelowaniu przepływów turbulentnych. Do najbardziej znanych domknięć algebraicznych należy zaliczyć

³Człon $\overleftrightarrow{r}$ został przedstawiony po raz pierwszy w 1895 roku przez Reynoldsa [80], poprzez zastosowanie dekompozycji i splittingu oraz równania kinetycznej teorii gazów [80, 81]

model Baldwina–Lomaxa, który z powodzeniem wykorzystuje się do obliczeń aeromechanicznych palisad turbinowych [82, 77]. Lepkość turbulentną definiuje się w tym modelu jako [85]:

$$\nu_t = L_m^2 (\omega_i \omega_i)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad (3.10)$$

gdzie wielkość $\vec{\omega}$ jest wektorem wirowości:

$$\omega_i = e_{ijk} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \quad . \quad (3.11)$$

Innym znanym domknięciem jest model Smagorinskiego, który zastosowano jako tzw. *model podsiatkowy*⁴ na lepkość turbulentną przy modelowaniu LES [8, 86]. Współczynnik turbulentnej dyfuzji pędu w modelu Smagorinskiego przedstawia się w postaci:

$$\nu_t = L_m^2 (2\bar{d}_{ij}\bar{d}_{ij})^{\frac{1}{2}} \quad , \quad (3.12)$$

gdzie $\bar{d}_{ij}$ jest tensorem prędkości deformacji dla skali rozwiązywanej.

Domknięcia jednorównaniowe

Jednorównaniowe modele wykorzystują pełną zależność (3.6) do obliczania składowych tensora Reynoldsa, która zapewnia prawidłową formę (3.7) po kontrakcji wskaźników [82, 79, 77]. W modelach tych jako turbulentną skalę prędkości we wzorze (3.8) zaproponowano pierwiastek z turbulentnej energii kinetycznej⁵ k . W konsekwencji zależność (3.8) przybiera postać Prandtl–Kolmogorowa [52, 8]:

$$\nu_t = k^{\frac{1}{2}} L_m \quad . \quad (3.13)$$

Turbulentną energię kinetyczną k otrzymuje się z dodatkowego równania transportu, które ma standardową postać, wyprowadzoną z równania transportu składowych tensora naprężeń turbulentnych r_{ij} (3.39) [8]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \epsilon \quad . \quad (3.14)$$

W powyższym równaniu P_k jest produkcją k , którą zapisać można jako:

$$P_k = 2\nu_t d_{ij} d_{ij} \quad . \quad (3.15)$$

Wielkość ϵ jest dyssypacją turbulentnej energii kinetycznej, którą w jednorównaniowym ujęciu wiąże się równaniem algebraicznym z k . Przykładowa zależność ma postać [85]:

$$\epsilon = C_D \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l_D} \quad . \quad (3.16)$$

Turbulentną skalę długości L_m w równaniu (3.13) wyznacza się algebraicznie np. jako wielkość proporcjonalną do grubości warstwy przyściennej czy też szerokości śladu spływowego. Do bardziej znanych domknięć jednorównaniowych można zaliczyć model Spalarta–Allmarasa.

⁴z ang. *subgrid-scale model*

⁵Czasem wszakże stosowano inny parametr charakteryzujący turbulencję np. turbulentną liczbę Reynoldsa R_t lub bezpośrednio współczynnik turbulentnej dyfuzji pędu ν_t [85]

Domknięcia dwurównaniowe

Pomimo swej ogromnej przydatności domknięcia zero- i jedno-równaniowe nie były jednakowoż modelami uniwersalnymi [79]. Dopiero zastosowanie dwurównaniowych modeli pozwoliło na niezależne wyznaczanie poprzez równania transportu wielkości, które reprezentowały turbulentne skale prędkości V_m albo czasu T_m i długości L_m . Modele tego rodzaju są obecnie najczęściej wykorzystywane do obliczeń inżyniersko-projektowych, gdyż reprezentują one minimalny poziom „akceptowalności” domknięcia tensora naprężeń Reynoldsa [8].

W domknięciach dwurównaniowych turbulentna skala prędkości prawie zawsze jest reprezentowana przez pierwiastek z turbulentnej energii kinetycznej k . Dobór wielkości odpowiadającej turbulentnej skali czasu czy też skali długości reprezentującej duże struktury energetyczne, stanowił problem podstawowy tworzenia nowego modelu i decydował o jego późniejszej przydatności. Do najbardziej popularnych domknięć dwurównaniowych zaliczyć trzeba modele $k-\epsilon$ i $k-\omega$. W mniejszym stopniu sprawdzili się model $k-\tau$.

Model $k-\epsilon$ Uważa się, że historycznie pierwszym udanie zaimplementowanym modelem dwurównaniowym jest model $k-\epsilon$ zaproponowany w 1968 przez Harlowa et al. [79], a rozpowszechniony w 1974 roku przez Laundera i Spaldinga [87].

Model tego typu, w zależności na lepkość turbulentną (3.8), jako turbulentną skalę prędkości wykorzystuje $V_m = \sqrt{k}$, a jako turbulentną skalę czasu wyrażenie $T_m = k/\epsilon$, gdzie k jest turbulentną energią kinetyczną wyznaczaną z (3.14), a ϵ prędkością jej dyssypacji.

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad . \quad (3.17)$$

Wielkość ϵ wyznacza się z dodatkowego równania transportu, którego pełną postać wyprowadza się podobnie jak k z równania transportu naprężeń turbulentnych (3.39) oraz pędu w postaci przedstawionej w Dodatku A, równanie (A.11). Sposób wyprowadzenia równania ewolucji ϵ na podstawie zależności (3.18) można znaleźć w pracach [88, 8].

$$2\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{N}(v'_i) = 0 \quad . \quad (3.18)$$

Wyrażenie $\mathcal{N}(v'_i)$ reprezentuje równanie Naviera–Stokesa dla fluktuacji prędkości, otrzymane przez odjęcie od równania Naviera–Stokesa (3.1) uśrednionego równania (3.4) [50, 8]. Równanie transportu ϵ po odpowiednim skróceniu i zastosowaniu domknięć reprezentujących człony obejmujące także podwójne korelacje fluktuacji prędkości, oraz gradienty fluktuacji prędkości i ciśnienia można zapisać w formie:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{v}_j \epsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\epsilon}{k} (C_{\epsilon 1} P_k - C_{\epsilon 2} \epsilon) \quad . \quad (3.19)$$

Powstało wiele wersji modelu $k-\epsilon$ związanych głównie z uzmiennianiem wybranych stałych modelu np. bardzo popularna ostatnio modyfikacja RNG Yakhota–Orszaga [89, 85] oraz takich, które obejmowały bezpośrednio obliczanie warstwy przyściennej [8, 90].

Uniwersalność modelu $k-\epsilon$ jak i innych domknięć dwurównaniowych jest jednak ograniczona poprzez uproszczone modelowanie członów produkcji i destrukcji wielkości charakteryzującej turbulentną skalę długości. Wykorzystanie hipotezy lepkości

turbulentnej implikuje izotropowość tj. składowe naprężeń Reynoldsa przyjmują te same kierunki co tensor prędkości deformacji, co jest założeniem błędnym w przypadku występowania sił masowych (grawitacji, sił odśrodkowych, pola magnetycznego) i w przepływach w silnie zakrzywionych kanałach.

Model $k-\omega$ Jako alternatywną skalę czasu w formule (3.8) stosuje się często wielkość $T_m = 1/\omega$ [91, 92]. Skalę prędkości przyjmuje się identyczną jak dla modelu $k-\epsilon$ czyli równą $V_m = \sqrt{k}$. W konsekwencji zależność na lepkość turbulentną można zapisać jako:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k}{\omega} \quad . \quad (3.20)$$

W rezultacie koniecznym jest rozwiązanie równania transportu wielkości $\omega = \epsilon/k$, zamiast prędkości dyssypacji ϵ . Równanie to ma postać [82, 93, 8]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{v}_j \omega) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \frac{\omega}{k} (C_{\omega 1} P_k - C_{\omega 2} k \omega) \quad . \quad (3.21)$$

Wśród bardziej znanych odmian domknięcia $k-\omega$ wyróżnić należy model SST Mentera [92] i oryginalny model Wilcoxa [91]. Szczególnie ten pierwszy predysponowany jest do obliczeń aeromechanicznych palisad turbinowych.

Model $k-\tau$ Innym domknięciem dwurównaniowym jest model $k-\tau$, w którym skala czasu $T_m = \tau = k/\epsilon$ obecna w formule (3.8) wyznaczana jest bezpośrednio z równania transportu τ [82].

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\tau) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{v}_j \tau) = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\tau 2}} \right) \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \right] + \frac{\tau}{k} \left[(1 - C_{\epsilon 1}) P_k + (C_{\epsilon 2} - 1) \frac{k}{\tau} \right] \\ & + \frac{2}{k} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\tau 1}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} - \frac{2}{\tau} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\tau 2}} \right) \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \quad . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Zależność na lepkość turbulentną ma więc postać:

$$\nu_t = C_\mu k \tau \quad . \quad (3.23)$$

Czterorównaniowy model $\overline{v'^2}$ - f

Model $\overline{v'^2}$ - f wyrasta z podstawowego założenia, iż za turbulentny transport pędu jest odpowiedzialna głównie składowa fluktuacji prędkości normalna do ścianki $\overline{v'^2}$ [94], poprzez którą najlepiej uwidacznia się efekt blokowania przyściennego. Stąd w zależności na lepkość turbulentną (3.8) zamiast najczęściej stosowanej turbulentnej energii kinetycznej k , Durbin zaproponował jako skalę prędkości zastosowanie wielkości $\overline{v'^2}$ [94, 95]. Zależność na współczynnik turbulentnej dyfuzji pędu przybiera postać:

$$\nu_t = C_\mu \overline{v'^2} T_m \quad . \quad (3.24)$$

Skala czasowa T_m we wzorze (3.24) jak i w równaniu transportu ϵ (3.19) jest wyznaczana z formuły, która zapewnia spełnienie warunku k/ϵ w dalszej odległości od ścianki oraz $\left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$ czyli skalę Kolmogorowa w bezpośrednim sąsiedztwie ścianki, tak by uniknąć problemów zerowania T_m przy $k \rightarrow 0$.

$$T_m = \max \left[\frac{k}{\epsilon}, C_T \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad . \quad (3.25)$$

Wielkość $\overline{v'^2}$, która nie jest składową tensora naprężeń, interpretuje się jako wielkość skalarną reprezentującą składową fluktuacji normalną do linii prądu [95], uzyskuje się poprzez rozwiązanie dodatkowego równania transportu w standardowej postaci, analogicznego do równania transportu naprężeń turbulentnych (3.39):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{v'^2}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v_j v'^2}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x_j} \right] + kf - \frac{\epsilon}{k} \overline{v'^2} \quad (3.26)$$

Niewiadomy człon kf będący jedynym źródłem w równaniu transportu $\overline{v'^2}$ reprezentuje redystrybucję czyli przekierowanie fluktuacji prędkości od kierunku związanego z przepływem głównym do kierunku normalnego do ścianki [96]. Nielokalne tłumienie można przedstawić poprzez równanie *eliptycznej relaksacji* Helmholtza wielkości skalarnej f [94, 97, 47], które pozwala uniknąć empirycznego podejścia przy definiowaniu efektów przysięciennych. W analogii do (3.68) równanie eliptycznej relaksacji ma postać:

$$L^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} - f = -\Pi \quad (3.27)$$

Do wyznaczenia Π można wykorzystać dowolny *quasi-homogeniczny* model. W oryginalnej formule Durbina [95, 94, 97] zastosowano model Laundera, który jest sumą modeli powrotu do izotropii Rotty oraz izotropizacji produkcji:

$$\Pi = \frac{C_1}{T} \left[\frac{2}{3} - \frac{\overline{v'^2}}{k} \right] + C_2 \frac{P_k}{k} \quad (3.28)$$

Skala długości L zostaje wyznaczana poprzez analogię do (3.29) [95]:

$$L = C_L \max \left[\frac{k^{3/2}}{\epsilon}, C_\eta \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \right] \quad (3.29)$$

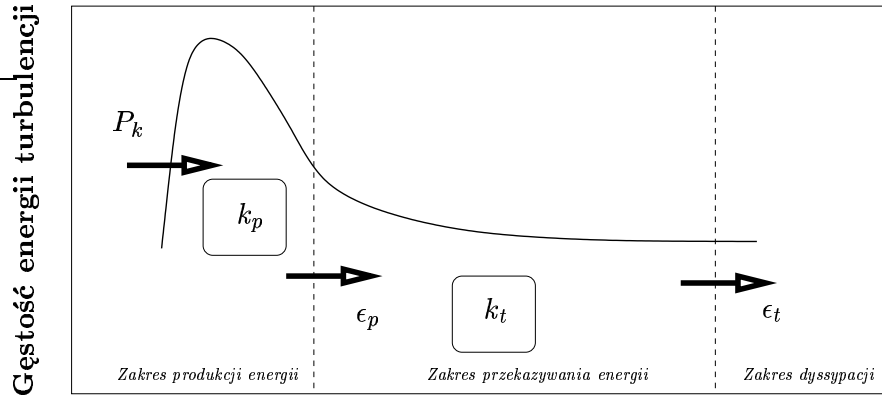
Czterorównaniowy model $\overline{v'^2}$ - f , wyznaczający cztery niewiadome k , ϵ , $\overline{v'^2}$, f znajduje coraz szersze zastosowanie w obliczeniach *CFD* [96, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105].

Domknięcia wieloskalowe

Wszystkie przedstawione wcześniej domknięcia tensora naprężeń Reynoldsa wykorzystują jedną skalę czasu lub długości. Interesujące wydają się być próby formułowania modeli wieloskalowych MTS⁶ [106, 107, 108, 109, 110, 111].

Ruch turbulentny charakteryzuje się strukturami przepływu, których zakres występujących skal długości i czasu jest bardzo szeroki. Największe struktury mają skalę porównywalną z charakterystycznym wymiarem ruchu średniego (np. geometria kanału przepływowego), te najmniejsze zaś są odpowiedzialne za dyssypację turbulentnej energii kinetycznej i porównywalne są ze skalą Kołmogorowa $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$. Podstawą stosowania domknięć wieloskalowych jest podział spektrum energii kinetycznej turbulencji na różne poziomy. Umożliwia to modelowanie transportu energii od struktur największych bazując na wielkościach związanych z największą skalą, jak średnie gradienty prędkości czy poziom zawirowania oraz oddzielne modelowanie szybkości dyssypacji dla skal najmniejszych.

⁶ang. *Multiple Time Scale*



Liczba falowa

Rysunek 3.1: Podział skal turbulencji (spektrum energii turbulencji)

Znane domknięcia wieloskalowe wywodzą się głównie z dwurównaniowego modelu k - ϵ stąd struktura poszczególnych równań transportu również jest podobna. Najczęściej stosuje się dwa równania transportu energii turbulencji - jedno związane z produkcją od struktur dużych k_p i drugie reprezentujące obszar transferu energii k_t . Oczywiście suma obu parametrów $k = k_p + k_t$ przedstawia całkowitą energię kinetyczną turbulencji. Wydzielonym poziomom turbulentnej energii k_p i k_t odpowiadają różne mechanizmy dyssypacji struktur wirowych. Szybkość dyssypacji struktur dużych ϵ_p interpretuje się jako stopień przekazywania energii pomiędzy wyróżnionymi skalami, zaś dyssypacja właściwa ϵ_t dotyczy tylko skali najmniejszej, czyli odmiennie niż w modelach jedno- czy dwu-równaniowych, gdzie cała kaskada energetyczna jest reprezentowana jedną wielkością skalarną, którą jest zazwyczaj ϵ . Pełny układ równań zachowania dla modelu z wyróżnionymi skalami dużych i małych wirów może wyglądać następująco [109, 110]:

- turbulentna energia kinetyczna dużych skal k_p

$$\frac{\partial k_p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_j k_p) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{k_p}} \right) \frac{\partial k_p}{\partial x_j} \right] + P_k - \epsilon_p \quad , \quad (3.30)$$

- dyssypacja turbulentnej energii kinetycznej dużych wirów ϵ_p

$$\frac{\partial \epsilon_p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_j \epsilon_p) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\epsilon_p}} \right) \frac{\partial \epsilon_p}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{k_p} (C_{p1} P_k^2 + C_{p2} P_k \epsilon_p - C_{p3} \epsilon_p^2) \quad , \quad (3.31)$$

- turbulentna energia kinetyczna małych wirów k_t

$$\frac{\partial k_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_j k_t) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{k_t}} \right) \frac{\partial k_t}{\partial x_j} \right] + \epsilon_p - \epsilon_t \quad , \quad (3.32)$$

- dyssypacja turbulentnej energii kinetycznej małych wirów ϵ_t

$$\frac{\partial \epsilon_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_j \epsilon_t) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\epsilon_t}} \right) \frac{\partial \epsilon_t}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{k_t} (C_{t1} \epsilon_p^2 + C_{t2} \epsilon_p \epsilon_t - C_{t3} \epsilon_t^2) \quad . \quad (3.33)$$

W dostępnych w literaturze modelach wieloskalowych odmiennie dobierano skalę czasową T_m w wyrażeniu na lepkość turbulentną. Chen [106] oraz Nagano [107] podają zależność $T_m = k_p/\epsilon_p$, z kolei Kim [109, 110] proponuje $T_m = k/\epsilon_p$. Skala prędkości jest zwyczajowo równa $V_m = \sqrt{k}$.

Przyszłość modeli wieloskalowych wiązano szczególnie z modelowaniem swobodnych strug [109, 110], [112] np. przy chłodzeniu filmowym powierzchni narażonych na działanie wysokich temperatur (łopatki turbin gazowych, ściany komory spalania itd.). Zaletą modeli dwuskalowych jest modelowanie kaskadowego procesu wymiany turbulentnej energii kinetycznej oraz lepsze odwzorowanie detali ruchu turbulentnego niż w klasycznym modelu $k-\epsilon$. Niedogodnością jest konieczność rozwiązywania czterech, a nie dwóch równań transportu w celu uzyskania domknięcia tensora naprężeń turbulentnych.

Domknięcia nieliniowe

Największym mankamentem opisanych wcześniej modeli jest fakt, iż wykorzystywana hipoteza lepkości turbulentnej Boussinesqa jest liniowym związkiem wprowadzającym izotropowość przepływu turbulentnego, czyli zakładającym identyczność kierunków fluktuującego pola prędkości z tensorem prędkości deformacji [78]. W świetle nieliniowych zależności na składowe naprężenia turbulentnych wynikających z pełnych równań transportu składowych tensora Reynoldsa (3.39), stanowi to pewną sprzeczność [85]. Z tego też względu pojawiło się wiele prac, w których zaproponowano rozszerzone formuły dla wyznaczenia składowych tensora Reynoldsa. Polegało to głównie na rozszerzeniu zależności (3.6) poprzez dodanie nieliniowych członów zawierających składowe tensora prędkości deformacji d_{ij} oraz antysymetrycznego tensora gradientu prędkości ω_{ij} [78, 85, 93, 47, 113].

$$r_{ij} \approx \frac{2}{3}k\delta_{ij} - \nu_t d_{ij} + r_{ij}^N \quad . \quad (3.34)$$

Wyrażenie r_{ij}^N reprezentuje nieliniową część dewiatora tensora Reynoldsa [47]:

$$r_{ij}^N \approx \nu_t^N f(d_{ik}d_{kj}, d_{ik}\omega_{kj}, \omega_{ik}\omega_{kj}) \quad , \quad (3.35)$$

zaś $\nu_t^N \neq \nu_t$ – nieliniowy współczynnik lepkości turbulentnej.

3.1.2 Transport naprężeń turbulentnych

Równania transportu składowych tensora Reynoldsa RSM⁷ zgodnie z procedurą Rotty otrzymuje się poprzez rozpisanie zależności [8, 88]:

$$\overline{v'_i \mathcal{N}(v_j) + \mathcal{N}(v_i) v'_j} = 0 \quad . \quad (3.36)$$

We wzorze (3.36) pojawia się wyrażenie $\mathcal{N}(v_j)$, które opisuje równanie pędu Naviera–Stokesa (3.1) tym razem z uwzględnieniem podstawowych sił masowych⁸ czyli grawi-

⁷ang. *Reynolds Stress Model*

⁸Poszczególne człony sił masowych wchodzących do wyrażenia $\sum_n b_i^n$ w równaniu (3.37) mają postać:

- siła grawitacyjna $b_i^g = g_i$,
- siła termicznego wyporu $b_i^\theta = -\beta_\theta g_i \theta$,
- siła odśrodkowa $b_i^\omega = \epsilon_{ikl} \epsilon_{lmn} \Omega_k \Omega_m x_n$,
- siła Coriolisa $b_i^c = 2\epsilon_{ikl} \Omega_k v_l$.

Oczywiście nie są to wszystkie siły masowe, które można rozpatrywać w tym wypadku. Prócz wymienionych powyżej istnieją bowiem siły masowe Lorentza na skutek istnienia pola elektromagnetycznego czy też siły związane z wyporem składników związków chemicznych [50].

tacyjnej b_i^g , termicznego wyporu b_i^θ , odśrodkowej b_i^ω oraz Coriolisa b_i^c , dzięki czemu równanie (3.1) przybiera postać:

$$\mathcal{N}(v_i) = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \sum_n b_i^n = 0 \quad . \quad (3.37)$$

Dokonując niezbędnych podstawień i przekształceń wzoru (3.36) oraz zakładając nieściśliwość płynu otrzymuje się wynik w postaci równania:

$$\begin{aligned} \overline{v'_i \mathcal{N}(v_j) + \mathcal{N}(v_i) v'_j} = & \overline{v'_i \frac{\partial v_j}{\partial t} + v'_i \frac{\partial v_i v_j}{\partial x_i} + v'_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} - v'_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \sum_n b_j^n v'_i +} \\ & + \overline{v'_j \frac{\partial v_i}{\partial t} + v'_j \frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j} + v'_j \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - v'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \sum_n b_i^n v'_j} \quad . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dekomponując wielkości prędkości, ciśnienia i temperatury na część średnią i fluktuacje oraz wykorzystując zasady uśredniania klasycznego i przekształceń jak w Dodatku A wyrażenie (3.38) można zapisać w pełnej formie [88, 79, 114, 50, 52, 8]:

$$\begin{aligned} \frac{D \overline{v'_i v'_j}}{Dt} = & \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial t} + \underbrace{\overline{v'_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k}}_{C_{ij}} = - \underbrace{\left(\overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_k} + \overline{v'_j v'_k} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_k} \right)}_{P_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{p'} \left(\frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_j} \right)}_{\Phi_{ij}} + \\ & - \underbrace{2\nu \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_k}}_{\epsilon_{ij}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\underbrace{\nu \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k}}_{D_{ijk}^\nu} - \underbrace{\overline{v'_k v'_i v'_j}}_{D_{ijk}^t} \right] - \underbrace{\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{v'_i p'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v'_j p'}}{\partial x_i} \right)}_{D_{ij}^p} + \\ & - \underbrace{\beta_\theta \left(g_j \overline{v'_i \theta'} + g_i \overline{v'_j \theta'} \right)}_{G_{ij}^\theta} - \underbrace{2\Omega_k \left(\epsilon_{jkl} \overline{v'_i v'_l} + \epsilon_{ikl} \overline{v'_j v'_l} \right)}_{G_{ij}^\omega} \quad . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Kontrakcja wskaźników prowadzi do przejścia od równania (3.39) do równania (3.14) reprezentującego transport turbulentnej energii kinetycznej k . Równanie (3.39) można zapisać w formie uproszczonej [50],

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial t} + \overline{v_k} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_k} = P_{ij} + \Phi_{ij} - \epsilon_{ij} + \frac{\partial D_{ijk}}{\partial x_k} + D_{ij}^p + G_{ij}, \quad i, j, k = x, y, z \quad . \quad (3.40)$$

w której poszczególnym członom można nadać odpowiednie znaczenie fizyczne [50]:

- C_{ij} - człon konwekcyjny,
- P_{ij} - produkcja od gradientów prędkości (deformacji przepływu średniego),
- Φ_{ij} - redystrybucja ciśnienia,

- ϵ_{ij} – dyssypacja,
- D_{ij}^p – dyfuzja ciśnienia,
- D_{ijk} – strumień dyfuzji molekularnej i turbulentnej,
- G_{ij} – generacja od sił masowych.

W pełnym równaniu transportu składowych tensora naprężeń turbulentnych (3.39) modelowania wymagają człony reprezentujące turbulentną dyfuzję D_{ijk}^t , redystrybucję ciśnienia Φ_{ij} , generację na skutek działania sił masowych od wyporu termicznego G_{ij}^θ oraz dyssypację lepkościową ϵ_{ij} . Dla tych członów tworzone są domknięcia, które pozwalają rozwiązać równania RSM [50, 8, 82].

W pakiecie Fluent [86], który zastosowano w niniejszej rozprawie, człon dyfuzji turbulentnej jest modelowany z wykorzystaniem zwykłej uproszczonej hipotezy gradientowej tj. skalarnej lepkości turbulentnej [50]:

$$D_{ij}^t = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{C_\mu}{\sigma_k} \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} \right) . \quad (3.41)$$

W równaniu (3.41) stała C_μ jest równa 0.09, a stała $\sigma_k = 0.82$. Jak wskazuje Iacovides, stosowanie dokładniejszej uogólnionej hipotezy gradientowej nie daje znaczącej poprawy wyników, a jedynie może prowadzić do niestabilności procesu obliczeniowego [115].

Korelację fluktuacji ciśnienia i prędkości Φ_{ij} dzieli się zazwyczaj na trzy człony:

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij}^S + \Phi_{ij}^R + \Phi_{ij}^W \quad (3.42)$$

Człon Φ_{ij}^S nazywany jest *slow pressure-strain*, albo zamiennie członem powrotu do izotropii. Modeluje się go poprzez formułę [116, 114, 50, 117], która liniowo wiąże Φ_{ij}^S z tensorem naprężeń Reynoldsa:

$$\Phi_{ij}^S = -C_1 \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{v'_i v'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) . \quad (3.43)$$

Stała C_1 ma w modelu zastosowanym w [86] wartość równą 1.8. Człon Φ_{ij}^R zwany *rapid pressure-strain* związany jest z tensorem prędkości deformacji, który jest głównym źródłem produkcji turbulencji. Modeluje się go jako [114, 50, 117]:

$$\Phi_{ij}^R = -C_2 \left[(P_{ij} + G_{ij} - C_{ij}) - \frac{2}{3} \delta_{ij} (P + G - C) \right] , \quad (3.44)$$

gdzie produkcja P_{ij} , konwekcja C_{ij} oraz oddziaływanie sił masowych G_{ij} są opisane równaniem (3.38), zaś $P = \frac{1}{2} P_{ii}$, $C = \frac{1}{2} C_{ii}$ i $G = \frac{1}{2} G_{ii}$. Stała C_2 przyjmuje wartość 0.6.

Człon Φ_{ij}^W związany z nielepkościowymi efektami oddziaływania ścianki (odbicie fluktuacji ciśnienia, powodujące tłumienie składowej normalnej naprężeń i intensyfikację naprężeń stycznych) dzieli się na część związaną z tensorem naprężeń turbulentnych oraz część wpływającą na produkcję naprężeń, przedstawia się następującą zależnością [114, 50]:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^W = & C'_1 \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{v'_k v'_m} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{v'_i v'_k} n_j n_k - \frac{3}{2} \overline{v'_j v'_k} n_i n_k \right) f_W + \\ & + C'_2 \left(\Phi_{km}^R n_k n_m - \frac{3}{2} \Phi_{ik}^R n_j n_k - \frac{3}{2} \Phi_{jk}^R n_i n_k \right) f_W . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Stałe C'_1 i C'_2 są w [86] odpowiednio równe 0.5 i 0.3, zaś funkcja $f_W = 0.4k^{3/2}/(\epsilon y)$. W obu równaniach n_k jest składową wektora jednostkowego w kierunku normalnym do ścianki (*cosinus kierunkowy*), a y jest odległością od ścianki. Równanie transportu dyssypacji ϵ jest analogiczne do równania (3.19) i ma postać:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{v}_j \epsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\epsilon}{k} \left(\frac{1}{2} C_{\epsilon 1} P_{ii} + \frac{1}{2} C_{\epsilon 3} G_{ii} - C_{\epsilon 2} \epsilon \right) \quad (3.46)$$

W równaniu (3.46) poszczególne stałe mają wartości $C_{\epsilon 1} = 1.44$ i $C_{\epsilon 2} = 1.92$, a wielkość $C_{\epsilon 3}$ jest funkcją postaci $\tanh |v/u|$, gdzie v jest składową prędkości równoległą do działania wektora siły grawitacyjnej, a u jest składową prędkości prostopadłą do tego samego wektora.

Turbulentna energia kinetyczna k jest śladem tensora naprężeń Reynoldsa:

$$k = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i} \quad (3.47)$$

Ponieważ nie trzeba modelować w domknięciach drugiego rzędu członów reprezentujących produkcję naprężeń, są to modele, które w naturalny sposób ujawniają anizotropię turbulencji, przepływy wtórne, efekty wirowania układu, efekty wypornościowe itd. Stąd też mają one istotną przewagę nad modelami wykorzystującymi hipotezę lepkości turbulentnej, co szczególnie ujawnia się przy obliczaniu trójwymiarowych układów przepływowych. Ich wadą jest jednak wydłużony czas obliczeń (domknięcie wymaga rozwiązania sześciu równań transportu składowych symetrycznego tensora Reynoldsa oraz jednego równania ewolucji dyssypacji lepkościowej), a także złożoność implementacji i niestabilność procesu iteracyjnego.

3.1.3 Modelowanie DNS oraz LES

Teoretycznie jest już możliwe rozwiązywanie pełnego spektrum skal turbulentnych, bez potrzeby posilkowania się hipotezami domykającymi. Technikę tą wykorzystuje się w metodzie bezpośredniej symulacji numerycznej DNS⁹.

Stosunek skali dużych wirów energetycznych do najmniejszej skali wirów energetycznych wynosi $Re_t^{\frac{3}{4}}$, stąd rozwiązanie wszystkich skal turbulencji w modelu trójwymiarowym wymaga siatki numerycznej o wymiarze równym $Re_t^{\frac{9}{4}}$, gdzie Re_t jest turbulentną liczbą Reynoldsa [118, 77]. Mając na uwadze fakt, iż obliczenia te mogą być prowadzone tylko jako niestacjonarne, do tego z bardzo małym krokiem czasowym, nie dziwi już, że jedyne rozwiązania, które są obecnie dostępne dotyczą wyłącznie przepływów o bardzo niskiej liczbie Reynoldsa w niewielkich kanałach o bardzo prostej geometrii [35, 36, 119, 120, 121]. Wyniki uzyskane metodą bezpośredniej symulacji numerycznej dostarczają jednak bardzo dużo informacji o strukturze przepływu, których eksperymenty fizyczne nie są w stanie ujawnić, a które z powodzeniem wykorzystuje się do tworzenia dokładniejszych domknięć modeli fenomenologicznych.

Rozwiązaniem pośrednim pomiędzy metodą DNS, a modelami fenomenologicznymi i RSM jest hybrydowa technika dużych wirów LES¹⁰, która łączy w sobie poziomy fenomenologicznego i statystycznego opisu turbulencji [69]. U podstaw metody LES legły następujące twierdzenia:

- transport masy, pędu, energii i wszystkich wielkości skalarnych odbywa się głównie poprzez duże struktury przepływu,

⁹ang. *Direct Numerical Simulation*

¹⁰ang. *Large Eddy Simulation*

- skale energetyczne ruchu turbulentnego są związane głównie z geometrią układu i warunkami przepływowymi
- turbulencja w obszarze wirów dyssypujących jest bardziej izotropowa, stąd bliższe uniwersalności, łatwiejsze jest też znalezienie dla nich domknięć.

Ogólnie, w metodzie LES struktury energetyczne rozwiązywane są bezpośrednio jak w metodzie DNS, a skale mniejsze od charakterystycznego wymiaru siatki dyskretyzacyjnej są wyznaczane w sposób pośredni poprzez tzw. modele podsiatkowe, które zwykle są modelami algebraicznymi. Podziału na skale mniejsze i duże dokonuje się za pomocą filtrowania określoną funkcją [79]. Równanie pędu ma po filtracji postać:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} . \quad (3.48)$$

W równaniu (3.48) wyrażenie τ_{ij} reprezentuje turbulentne naprężenia podsiatkowe:

$$\tau_{ij} = \bar{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j . \quad (3.49)$$

Naprężenia podsiatkowe wyznacza się zazwyczaj w oparciu o hipotezę lepkości turbulentnej. Najbardziej popularnymi modelami podsiatkowymi jest algebraiczne domknięcie Smagorinsky–Lilly [8] oraz model Germano [122].

3.2 Uwagi o modelowaniu turbulencji przyściennej

W bezpośrednim sąsiedztwie ścianek rozróżnia się cztery główne obszary przepływu (licząc od ścianki) [84]:

- podwarstwa laminarna, w której dominującą rolę w transporcie masy, pędu i energii odgrywa lepkość molekularna;
- warstwa przejściowa zwana też buforową, która z jednej strony jest poddawana pulsacjom od warstwy turbulentnej, z drugiej zaś tłumieniu lepkościowemu od podwarstwy laminarnej,
- warstwa turbulentna, obrazowana logarytmicznym rozkładem prędkości, gdzie dominującą rolę ma ruch turbulentny;
- zewnętrzny obszar śladu będący obszarem struktur wieloskalowych.

Do opisu warstwy przyściennej przydatny jest parametr y^+ analogiczny do klasycznej liczby Reynoldsa, który określa bezwymiarową odległość od ścianki. Definiuje się go jako stosunek:

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} , \quad (3.50)$$

gdzie y jest rzeczywistą odległością normalną punktu od ścianki, ν stanowi lepkość kinematyczną w badanym punkcie, a $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$ jest prędkością tarcia, gdzie τ_w to naprężenie styczne na ścianie.

W warstwach przyściennych można wyróżnić dwa rodzaje efektów, które w mniejszym lub większym stopniu działają na przepływ. Są to dynamiczne efekty lepkościowe, które powodują tłumienie fluktuacji prędkości w równym stopniu w każdym kierunku

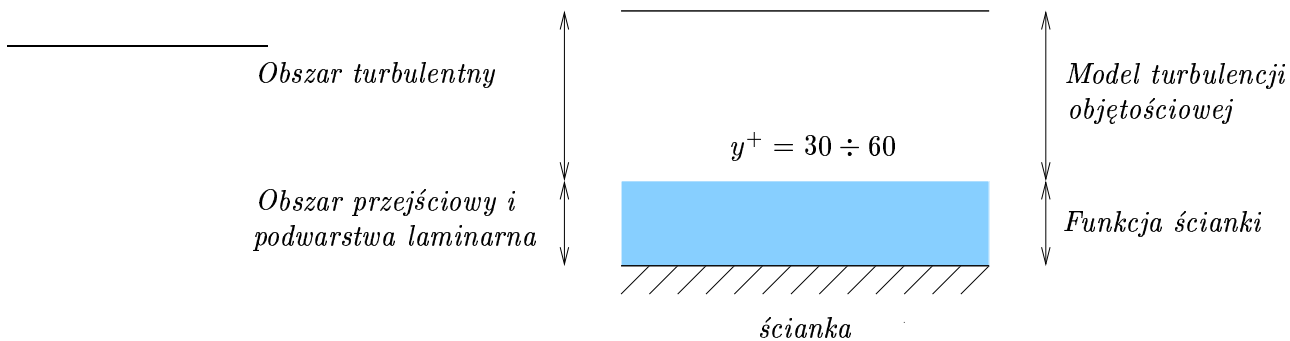
oraz kinematyczne, czyli efekty echa i tzw. *blokowania kinematycznego*¹¹, które związane są z „odbiciem” od nieprzepuszczalnych ścianek pulsacji ciśnienia oraz z wyhamowaniem przepływu i tłumieniem fluktuacji prędkości głównie w kierunku normalnym do powierzchni ścianki[123]. Efekt echa – odbijanie pulsacji ciśnienia prowadzi do intensyfikacji redystrybucji energii kinetycznej pomiędzy członami źródłowymi naprężeń turbulentnych, a w rezultacie do *izotropizacji* turbulencji, z kolei blokowanie składowej normalnej fluktuacji prędkości czyni turbulencję przyścienną bardziej anizotropową [124, 123].

Efekty kinematyczne są „odczuwalne” już w dalszej odległości od ścianki $y^+ \lesssim 200$, z kolei dynamiczne tłumienie lepkościowe ma bezpośredni wpływ jedynie w obszarze przejściowym i podwarstwie laminarnej $y^+ \lesssim 30$ [82]. W obszarze warstwy przyścienniej następuje istotne zwiększenie poziomu turbulencji (produkcja energii kinetycznej osiąga swoje maximum w warstwie przejściowej [124]) poprzez produkcję turbulentnej energii kinetycznej związaną z działaniem silnych gradientów prędkości, które powstają pomiędzy przepływem głównym, a ścianką przy założeniu braku poślizgu. W bezpośrednim sąsiedztwie ścianki tłumienie składowej fluktuacji prędkości normalnej do jej powierzchni powoduje, iż turbulentne mieszanie ulega wyraźnej redukcji i z tego powodu obszar ten wprowadza pewien „opór” dla procesów wymiany pędu i energii pomiędzy ścianką i czynnikiem [97].

Modele turbulencji przedstawione w poprzednim podrozdziale¹² niniejszej pracy są ważne głównie dla zewnętrznego obszaru z homogeniczną turbulencją tj. w znacznej odległości od ścianek, jednakowoż modelowanie obszarów przyściennych ma znaczący wpływ na całkowitą jakość obliczeń numerycznych układów przepływowych, dlatego poprawne przejście modelu od ścianki do przepływu głównego jest szczególnie istotnym problemem numerycznej termomechaniki płynów.

3.2.1 Funkcje ścianek

Pierwszym sposobem połączenia obliczeń przepływu głównego z obszarem ścianki było zastosowanie tzw. funkcji ścianek¹³. Zakres działania tej metody zobrazowano na Rysunku 3.2.



Rysunek 3.2: Schemat obszaru przyściennego z funkcją ścianek (na podstawie [86, 125])

Jej podstawą jest założenie, iż w obszarze przyściennym prędkość przepływu zależy tylko od odległości od ścianki, od wartości naprężeń stycznych na ścianie oraz wła-

¹¹ ang. *kinematic blocking*

¹² Z wyjątkiem modeli Spalart–Allmaras, $k-\omega$ oraz $\overline{v'^2}$ - f

¹³ ang. *law of the wall*

sności płynu [122]. Dzięki zastosowaniu funkcji ścianek omija się kompletnie obliczanie podwarstwy laminarnej oraz strefy buforowej. Zamiast tego wykorzystuje się półempiryczne formuły [87], które bezpośrednio „łączą” ściankę¹⁴ z obszarem turbulentnym. Zależności wykorzystywane jako tzw. funkcje ścianek wyrastają wprost z obserwacji zmian prędkości w turbulentnej warstwie przyściennej. Logarytmiczna funkcja ścianki dla prędkości w obszarze przepływu turbulentnego ma postać [82, 52]:

$$v^* = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^*) \quad . \quad (3.51)$$

Bezwymiarową prędkość wyznacza się z zależności:

$$v^* = \frac{v C_\mu^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{2}}}{\tau_w / \rho} \quad . \quad (3.52)$$

Bezwymiarową odległość wyznacza się z formuły:

$$y^* = \frac{y C_\mu^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{2}}}{\nu} \quad . \quad (3.53)$$

W powyższych zależnościach C_μ oznacza stałą modelu równą 0.09, κ stałą Karmana równą 0.42, E stałą empiryczną równą 9.81, v_p prędkość średnią, y odległość od ścianki, $\nu = \mu/\rho$ lepkość kinematyczną płynu.

Ze względu na pomijanie w procesie obliczeniowym części obszaru warstwy przyściennej $y^+ < 60$, modele turbulencji z funkcjami ścianek wykorzystują zdecydowanie rzadsze siatki numeryczne, stąd też wynika główna zaleta stosowania tych funkcji przy dużych trójwymiarowych symulacjach. Niestety ich wadą jest zła praca w obszarze występowania oderwań, silnych gradientów ciśnienia oraz znacznych sił masowych. Funkcje ścianek tracą więc na znaczeniu na rzecz modeli, które rozwiązują warstwę przyścienną „w całości”.

3.2.2 Modele dwuwarstwowe

W modelu dwuwarstwowym warstwa przyścienna jest dzielona na dwa podobszary. Do jednego wchodzi obszary turbulentny i zewnętrzny śladu, do drugiego zaś podwarstwa laminarna oraz obszar przejściowy jak na Rysunku 3.3.

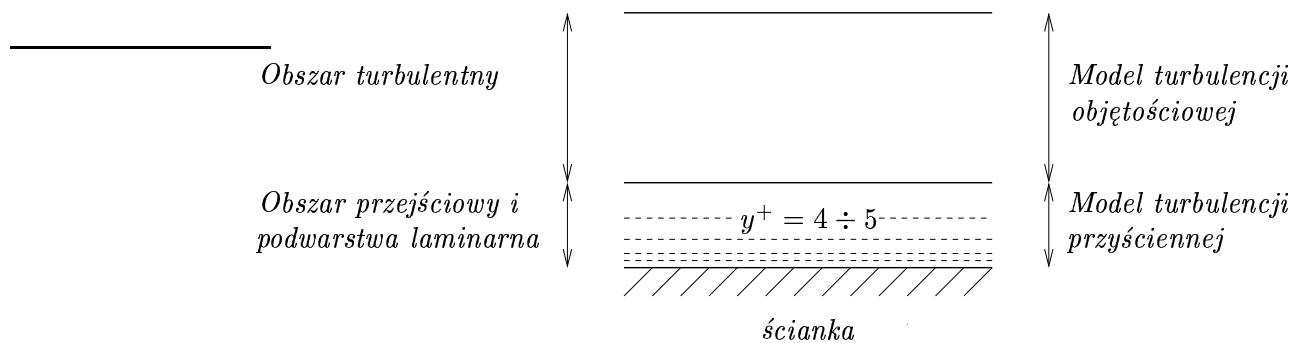
„Graniczną linię” pomiędzy dwoma podobszarami wyznacza się na podstawie parametru Re_y zwanego turbulentną liczbą Reynoldsa¹⁵:

$$Re_y = \frac{k^{\frac{1}{2}} y}{\nu} \quad , \quad (3.54)$$

gdzie k jest turbulentną energią kinetyczną, y to odległość do ścianki, a ν jest lepkością molekularną. Obszar, dla którego $Re_y > 200$, jest traktowany jako homogenicznie turbulentny. Do obliczeń przepływowych wykorzystuje się w nim znane modele dwurównaniowe jak $k-\epsilon$ czy też modele transportu naprężeń turbulentnych RSM. W obszarze $Re_y < 200$ stosuje się najczęściej jednorównaniowe domknięcie Wolfshteina [126], w

¹⁴tj. pierwszą warstwę objętości kontrolnych

¹⁵Lokalna turbulentna liczba Reynoldsa definiowana jest jako $Re_l = \frac{V_m L_m}{\nu}$, gdzie V_m jest turbulentną skalą prędkości, a L_m turbulentną skalą długości.



Rysunek 3.3: Schemat obszaru przyściennego z modelem dwuwarstwowym (na podstawie [86, 125])

którym ϵ nie jest wyznaczany z różniczkowego równania transportu, a jedynie z algebraicznej zależności analogicznej do (3.16):

$$\epsilon = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l_{\epsilon}} \quad . \quad (3.55)$$

Współczynnik lepkości turbulentnej wyznaczany jest w domknięciu Wofshsteina z formuły Prandtla–Kolmogorowa [52]:

$$\nu_t = C_{\mu} k^{\frac{1}{2}} l_{\mu} \quad . \quad (3.56)$$

Skale długości l_{μ} oraz l_{ϵ} wyznacza się na podstawie funkcji Van Driesta [8]:

$$l_{\mu} = C_l y \left[1 - \exp \left(-\frac{Re_y}{A_{\mu}} \right) \right] \quad , \quad (3.57)$$

$$l_{\epsilon} = C_l y \left[1 - \exp \left(-\frac{Re_y}{A_{\epsilon}} \right) \right] \quad . \quad (3.58)$$

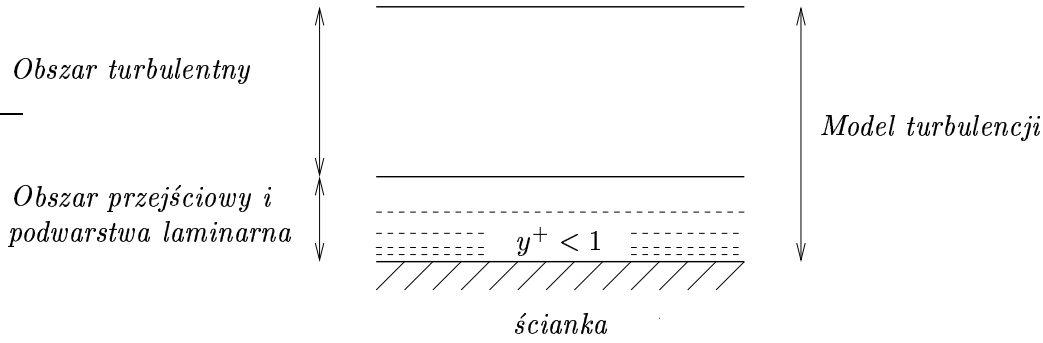
Stałe i pozostałe funkcje w powyższych zależnościach mają wartość [86]:

$$C_l = \kappa C_{\mu}^{-\frac{3}{4}}, \quad A_{\mu} = 70, \quad A_{\epsilon} = 2C_l \quad . \quad (3.59)$$

3.2.3 Modele *low-Re-number*

Kolejnym sposobem uwzględnienia efektów przyściennych w modelach turbulencji jest modyfikacja równań transportu wielkości charakteryzujących turbulencję oraz zależności na lepkość turbulentną poprzez wprowadzenie tzw. funkcji tłumiących, które wymuszają określone zmiany parametrów w obszarze przyściennym. Pozwala to na rozwiązywanie całego obszaru obliczeniowego jednym modelem turbulencji (Rysunek 3.4).

Modele tego typu nazywa się modelami *low-Re-number*. Ich popularność jest związana bezpośrednio z rozwojem symulacji DNS, które dostarczają szczegółowych informacji na temat struktury przepływu w warstwie przyściennej i dzięki którym można tworzyć dokładne funkcje tłumiące. Funkcje te są zazwyczaj postaci wykładniczej i mogą zawierać takie wielkości jak:



Rysunek 3.4: Schemat obszaru przyściennego z modelem z funkcjami tłumiącymi (na podstawie [86, 125])

- $y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu}$ – bezwymiarowa odległość od ścianki, gdzie $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ jest prędkością tarcia,
- $y^* = \frac{yu_\epsilon}{\nu}$ – bezwymiarowa odległość od ścianki, gdzie $u_\epsilon = (\nu\epsilon)^{\frac{1}{4}}$ jest skalą prędkości Kolmogorowa,
- $Re_t = \frac{k^2}{\nu\epsilon}$ – turbulentna liczba Reynoldsa.

Jako przykładowe można przedstawić domknięcie Abe–Kondoh–Nagano¹⁶ [127]. Równanie transportu turbulentnej energii kinetycznej k jest w modelu AKN identyczne z (3.14), zaś równanie prędkości dyssypacji ϵ ma postać następującą [127]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{v}_j \epsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\epsilon}{k} (C_{\epsilon 1} P_k - C_{\epsilon 2} f_\epsilon \epsilon) \quad . \quad (3.60)$$

W porównaniu do standardowego równania transportu ϵ (3.19), w członie źródłowym równania (3.60) pojawia się funkcja f_ϵ . Podobnej modyfikacji dokonuje się w zależności na lepkość turbulentną wstawiając do zależności (3.17) funkcję f_μ :

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad . \quad (3.61)$$

Funkcje tłumiące f_μ oraz f_ϵ mają w modelu AKN formę:

$$f_\mu = \left[1 - \exp \left(-\frac{y^*}{14} \right) \right]^2 \left[1 + \frac{5}{Re_t^{\frac{3}{4}}} \exp \left[-\left(\frac{Re_t}{200} \right)^2 \right] \right] \quad , \quad (3.62)$$

$$f_\epsilon = \left[1 - \exp \left(-\frac{y^*}{3.1} \right) \right]^2 \left[1 + 0.3 \exp \left[-\left(\frac{Re_t}{6.5} \right)^2 \right] \right] \quad . \quad (3.63)$$

Wątpliwa jednakże, podobnie jak w przypadku funkcji ścianek, jest uniwersalność funkcji tłumiących, które mają za zadanie dopasować bieżące rozwiązanie do przebiegu założonego na podstawie danych pochodzących z różnych źródeł. Powoduje to, iż modele w całości są mało elastyczne. Świadczyć o tym może sama ilość domknięć tego typu kalibrowanych dla różnych rozwiązań. Dokładny przegląd modeli typu *low-Re-number* zaprezentowano w pracach Patela et al. [90] oraz Speziale i So [8]. Do najczęściej wykorzystywanych modeli tej grupy można zaliczyć domknięcia Launder–Sharma, Chang–Hsieh–Chen [128, 129, 130], Abe–Kondoh–Nagano [127], Yang–Shih [131] oraz Lam–Bremhorst.

¹⁶W celu skrócenia zapisu model Abe–Kondoh–Nagano jest określany skrótem AKN

3.2.4 Model eliptycznej relaksacji

Turbulencja przyścienna wiąże ze sobą efekty lepkościowe jak i efekty blokowania kinematycznego. Modele turbulencji przyściennej *low-Re-number* przedstawione powyżej oba efekty łączą w jeden poprzez funkcję tłumiącą [82].

Nielokalne, eliptyczne efekty przepływowe, czyli blokowanie kinematyczne składowej normalnej do ścianki fluktuacji prędkości oraz „odbijanie” od powierzchni ścianki pulsacji ciśnienia, opisywane są korelacją fluktuacji ciśnienia i prędkości (3.64), będącą sumą członów Φ_{ij} oraz D_{ij}^p w równaniu transportu składowych naprężeń turbulentnych (3.39).

$$\Phi_{ij}^* = \frac{1}{\rho} \left(\overline{v_i' \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{v_j' \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right) = \underbrace{\frac{1}{\rho} p' \left(\frac{\partial v_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \right)}_{\Phi_{ij}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \left(\overline{\frac{\partial v_i' p'}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial v_j' p'}{\partial x_i}} \right)}_{D_{ij}^p} . \quad (3.64)$$

Człon Φ_{ij} określany jest mianem redystrybucji naprężeń turbulentnych, która „izotropizuje” turbulencję przyścienną, zaś wyrażenie D_{ij}^p reprezentuje dyfuzję ciśnienia. Sumaryczny człon Φ_{ij}^* można opisać z wykorzystaniem eliptycznego równania Poissona. Gradient fluktuacji ciśnienia stanowi bowiem rozwiązanie równania Poissona (3.65), które otrzymuje się przez zróżniczkowanie względem x_i równanie pędu Naviera–Stokesa dla fluktuacji prędkości v_i' [50, 132, 104, 133].

$$\nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_k} = -\rho \frac{\partial}{\partial x_k} \left(2 \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \frac{\partial v_j'}{\partial x_i} - \overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \frac{\partial v_j'}{\partial x_i}} \right) . \quad (3.65)$$

W pracach [124, 132] podano następujące wyrażenie całkowe, wykorzystujące funkcję Greena:

$$\rho \Phi_{ij}^* (\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \underbrace{\left(-v_i' (\mathbf{x}) \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_j} (\mathbf{x}') - v_j' (\mathbf{x}) \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_i} (\mathbf{x}') \right)}_{\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} G_{\Omega} (\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV (\mathbf{x}') . \quad (3.66)$$

Po zastąpieniu w powyższym wyrażeniu G_{Ω} przez *funkcję nieograniczoną w przestrzeni* $G = -1/(4\pi r)$ oraz podstawieniu funkcji korelacyjnej $\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Psi_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, z założeniem $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp(-r/L)$ zaproponowanym przez Durbin, przedstawiono zależność [132]:

$$\rho \Phi_{ij}^* (\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \Psi_{ij} (\mathbf{x}', \mathbf{x}') \underbrace{\frac{\exp(-r/L)}{4\pi r}}_{E(r)} dV (\mathbf{x}') . \quad (3.67)$$

Tensor Φ_{ij}^* jest wynikiem *konwolucji* pomiędzy tensorem Ψ_{ij} , a funkcją $E(r)$, która jest funkcją Greena związaną z operatorem $-\nabla^2 + 1/L^2$. Z całki (3.67) wynika równanie eliptycznej relaksacji Helmholtza, dla członu redystrybucji naprężeń, w którym człon Φ_{ij}^h można opisać modelem quasi-homogenicznym np. Rotty powrotu do izotropii i izotropizacji produkcji [97]:

$$\Phi_{ij}^* - L^2 \nabla^2 \Phi_{ij}^* = - \underbrace{\frac{L^2}{\rho} \left(v_i' \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_j} + v_j' \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)}_{\Phi_{ij}^h} . \quad (3.68)$$

Model w takiej postaci jest przeznaczony do pracy z modelem transportu naprężeń turbulentnych [97]. Ostatnie propozycje dotyczą modelu kombinowanego¹⁷ [133, 124, 132, 123], który pozwala zmniejszyć ilość równań eliptycznej relaksacji z sześciu do jednego z parametrem α .

Istnieje także inna uproszczona wersja modelu, który może współpracować z domknięciem wykorzystującym hipotezę lepkości turbulentnej. Zastosowano go w opisanym wcześniej modelu $\overline{v'^2}$ - f .

¹⁷ang. *elliptic blending model*

Rozdział 4

O modelowaniu turbulentnej wymiany ciepła

Ogólne równanie bilansu energii w postaci temperaturowej (2.16) przy założeniu nieściśliwości płynu można zapisać w formie niezachowawczej:

$$\mathcal{T}(\theta) = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial v_j T}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{q}{\rho c_p} = 0 \quad . \quad (4.1)$$

Parametr α reprezentuje współczynnik molekularnej dyfuzji temperatury:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad . \quad (4.2)$$

Uśredniając równanie energii (4.1), w którym wcześniej, analogicznie jak dla równania pędu w Rozdziale 3, zdekomponowano wektor prędkości v_i oraz temperaturę T na część średnią oznaczaną odpowiednio $\bar{v}_i$, $\bar{\theta}$ oraz fluktuacje v'_i , θ' , otrzymuje się wyrażenie:

$$\frac{\partial (\bar{\theta} + \theta')}{\partial t} + \frac{\partial \left((\bar{\theta} + \theta') (\bar{v}_j + v'_j) \right)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\alpha \frac{\partial (\bar{\theta} + \theta')}{\partial x_j} \right] + \frac{q}{\rho c_p} \quad . \quad (4.3)$$

Wykorzystując zasady uśredniania klasycznego, które przytoczono w Dodatku A, równanie (4.3) można zredukować do postaci:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\theta} \bar{v}_j}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{\theta' v'_j}}{\partial x_j} + \frac{q}{\rho c_p} \quad . \quad (4.4)$$

Rozwiązanie równania energii jest możliwe tylko poprzez znalezienie zależności opisujących turbulentny strumień ciepła $q_i^t / (\rho c_p) = -\overline{\theta' v'_j}$, a także pędu $r_{ij} = -\overline{v'_i v'_j}$, gdy uwzględnimy w równaniu (4.4) mechaniczny strumień energii¹ $q_i^m = \tau_{ij}^c \bar{v}_j$ (2.19). Problem domknięcia składowych tensora Reynoldsa $\overleftrightarrow{R}$ wchodzących w skład naprężeń całkowitych $\overleftrightarrow{\tau}^c$ omówiono w Rozdziale 3. Sposoby modelowania turbulentnego strumienia ciepła $\vec{q}^t$, których klasyfikacja jest analogiczna jak dla turbulentnego strumienia pędu [45], zamieszczono poniżej.

¹ Jest to zagadnienie szczególnie istotne dla przepływów z wysoką liczbą Macha, gdzie lepkościowe efekty przyścienne powodują wzrost temperatury czynnika

4.1 Hipoteza turbulentnej dyfuzyjności cieplnej

Najbardziej rozpowszechnionymi modelami turbulencji termicznej² są domknięcia wykorzystujące hipotezę gradientową tj. opierające się na pomocniczej wielkości charakteryzującej turbulentną dyfuzyjność ciepła³ α_t , który wiąże turbulentny strumień energii z gradientem średniej temperatury [116, 134]. Wyrażenie na turbulentny strumień ciepła $\vec{q}^t$ można przedstawić w postaci ogólnej [11]:

$$\frac{q_j^t}{\rho c_p} = -\overline{\theta' v_j'} = \alpha_t \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \quad . \quad (4.5)$$

Podobnie jak współczynnik lepkości turbulentnej ν_t , turbulentna dyfuzja ciepła α_t ma wymiar $[m^2/s^2]$. Definiuje się ją także w analogiczny sposób jako iloczyn turbulentnych skal [51]:

$$\alpha_t \approx L_\theta V_\theta = \frac{L_\theta^2}{T_\theta} = V_\theta^2 T_\theta \quad . \quad (4.6)$$

4.1.1 Domknięcia algebraiczne

Modele algebraiczne turbulentnego strumienia ciepła wiążą się nierozzerwalnie z wykorzystaniem kolejnej pomocniczej wielkości, będącej stosunkiem lepkości turbulentnej i współczynnika turbulentnej dyfuzyjności cieplnej, zwanej *turbulentną liczbą Prandtla* Pr_t poprzez analogię do przypadku molekularnego [9].

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t} = \frac{\mu_t c_p}{\lambda_t} \quad . \quad (4.7)$$

Znajomość turbulentnej liczby Prandtla umożliwia wyznaczenie w bardzo uproszczony sposób turbulentnego strumienia ciepła, bowiem w modelach algebraicznych współczynnik dyfuzji termicznej przedstawia się bazując na zależności (4.7) w funkcji lepkości turbulentnej i Pr_t [70, 42], co też z powodzeniem wykorzystuje się w numerycznej mechanice płynów.

Całkowity strumień dyfuzyjny w równaniu energii (4.4), przy wykorzystaniu hipotezy gradientowej oraz koncepcji turbulentnej liczby Prandtla i lepkości turbulentnej, przybiera następującą formę:

$$\frac{q_i^c}{\rho c_p} = \left(\alpha + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} \quad . \quad (4.8)$$

Najprostszą metodą zamodelowania przepływu z wymianą ciepła jest przyjęcie stałej wartości turbulentnej liczby Prandtla $Pr_t = const$, co też w przypadku podobieństwa rozkładów prędkości i temperatury nie stanowi zasadniczego uproszczenia i daje bardzo dobre rezultaty [135, 41, 53]. Taki sposób wykorzystywany jest z powodzeniem w większości kodów numerycznych, które opierają się na fenomenologicznych modelach turbulencji. Najczęściej przyjmuje się wartości zbliżone do $Pr_t = 1$, czyli przy założeniu istnienia pełnej analogii pomiędzy procesami turbulentnej wymiany ciepła i pędu⁴.

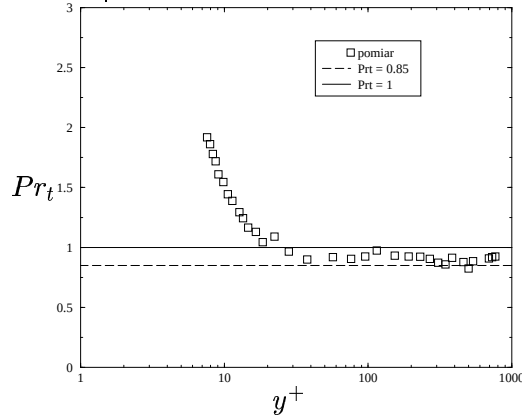
²Dla odróżnienia, w dalszej części pracy, mianem *modeli turbulencji termicznej* określane są domknięcia turbulentnego strumienia ciepła, zaś *modelami turbulencji mechanicznej* nazywa się domknięcia składowych tensora Reynoldsa

³Analogiczną do lepkości turbulentnej ν_t

⁴Często określanej mianem analogii Reynoldsa. Jest to następstwem spostrzeżeń zawartych w pracy [5].

Założenie, iż $Pr_t = const$ w następstwie implikuje $\alpha_t \approx \nu_t$, co w świetle zależności (3.8) definiującej lepkość turbulentną powoduje, że do opisu turbulencji termicznej wykorzystywane są jedynie skale turbulentne V_m , L_m czy T_m związane z polem prędkości. W szczególności przyjęcie $Pr_t = 1$ zakłada równą grubość termicznej i mechanicznej warstwy przyściennej.

Należy jednak pamiętać przy tym, iż nie ma i nie może być jednej uniwersalnej wartości turbulentnej liczby Prandtla dla wszystkich klas przepływów, co też szczególnie widoczne jest w miejscach, gdzie występują duże gradienty prędkości i ciśnienia, na przykład w punkcie oderwań czy spiętrzenia przepływu [46, 41, 44] i bezpośrednio w obszarze przyściennym jak na Rysunku 4.2, gdzie kwadratowymi symbolami oznaczono dane eksperymentalne Nagano, dla w pełni rozwiniętego hydraulicznie i termicznie przepływu w grzanej rurze [25, 26].



Rysunek 4.1: Turbulentna liczba Prandtla w obszarze przyściennym dla $Pr_t = const$ (dane eksperymentalne na podstawie [25, 26])

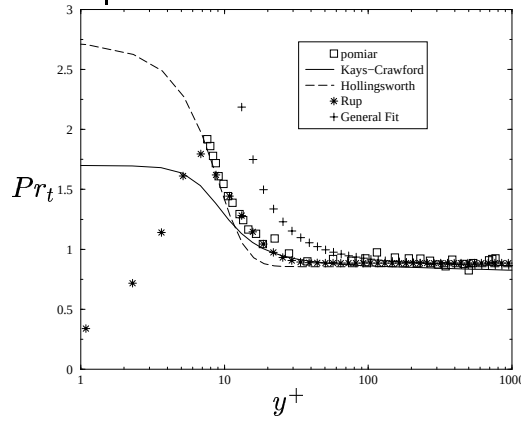
Kolejne zagadnienie stanowią próby przedstawiania turbulentnej liczby Prandtla jako algebraicznej funkcji parametrów płynu i geometrii⁵ $Pr_t = f(Pr, Re, y^+)$, jakkolwiek większość badań nie sygnalizuje dla prostego typu przepływów znaczących różnic wyników uzyskanych w taki sposób czy przy obliczeniach dla $Pr_t = const$ [135, 136, 137, 20] także zaliczanych do modeli zerorównaniowych. Szereg modeli takiego typu oraz ich weryfikację zaprezentowano w pracach⁶ [20, 22, 23, 9, 11, 13]. Przykładowe domknięcia na turbulentną liczbę Prandtla przedstawiono poniżej, a ich przebieg w obszarze przyściennym zobrazowano dodatkowo na Rysunku 4.2:

1. Model Kaysa–Crawforda [9, 20]

$$Pr_t = \frac{1}{0.5882 + 0.228 \left(\frac{\nu_t}{\nu}\right) - 0.0441 \left(\frac{\nu_t}{\nu}\right)^2 \left[1 - \exp\left(\frac{-5.165}{\left(\frac{\nu_t}{\nu}\right)}\right)\right]},$$

⁵Budowa domknięć algebraicznych sprowadzała się głównie do dopasowania funkcji wiążącej te parametry do przebiegu Pr_t uzyskanego na drodze eksperymentalnej.

⁶Szczególne nasilenie badań nad turbulentną liczbą Prandtla przypada na lata siedemdziesiąte i osiemdziesiąte XX wieku. Zainteresowanie tą tematyką powróciło wraz z rozwojem przemysłowych technik CFD opartych przede wszystkim na modelach wykorzystujących zagadnienie lepkości turbulentnej.



Rysunek 4.2: Turbulentna liczba Prandtla w obszarze przyściennym dla $Pr_t = var$ (dane eksperymentalne na podstawie [25, 26])

2. Model GF (*General Fit*) [9, 20]

$$Pr_t = \frac{2}{\left(\frac{\nu_t}{\nu}\right) Pr} + 0.85 \quad ,$$

3. Model opisywany przez Rupa [21, 22, 23] dla różnych zakresów bezwymiarowej odległości od ścianki y^+ . W przypadku $0 < y^+ < 6$ jest $Pr_t = 0.313 \cdot y^+$, natomiast dla wyższych y^+ :

$$Pr_t = 1.876 - 0.991 \cdot tgh \left[0.098 (y^+ - 6) \right] \quad ,$$

4. Model Hollingswortha [20]

$$Pr_t = 1.885 - tgh \left[0.2 \cdot (y^+ - 7.5) \right] \quad .$$

W tym miejscu należałoby też wspomnieć o modelu wymiany ciepła, który zastosowany jest w modelu turbulencji RNG $k-\epsilon$ [89]. Współczynnik efektywnej⁷ dyfuzji ciepła α_{eff} jest wyznaczany w tym przypadku z zależności:

$$\alpha_{eff} = \beta \nu_{eff} \quad .$$

Współczynnik β , będący w zasadzie odwrotnością turbulentnej liczby Prandtla, przedstawia się w tym modelu następująco:

$$\left| \frac{\beta - 1.3929}{\beta_0 - 1.3929} \right|^{0.6321} \left| \frac{\beta + 2.3929}{\beta_0 + 2.3929} \right|^{0.3679} = \frac{\nu}{\nu_{eff}} \quad .$$

, gdzie $\beta_0 = \frac{1}{Pr_t}$. Następstwem tego, iż współczynnik β zmienia się wraz z stosunkiem lepkości molekularnej i efektywnej, jest zmiana turbulentnej liczby Prandtla Pr_t wraz z jej molekularnym odpowiednikiem Pr . Równania powyższe są obowiązujące w zasadzie dla całego zakresu liczb Prandtla tj. od ciekłych metali $Pr \sim 10^{-2}$ do olejów parafinowych $Pr \sim 10^3$

Zaletą algebraicznych domknięć turbulentnego strumienia ciepła jest ich prostota i co się z tym wiąże łatwość numerycznej implementacji. Także wyniki uzyskiwane

⁷Czyli współczynnika będącego sumą molekularnego i turbulentnego

dla modeli z $Pr_t = \text{const}$ są zadawalające. Ich wadą jest jednak zbyt daleko idące uproszczenie, iż turbulentna wymiana ciepła jest bezpośrednim następstwem jedynie turbulentnej wymiany pędu oraz że turbulentny strumień ciepła jest współliniowy z gradientem temperatury średniej.

4.1.2 Domknięcia dwurównaniowe

Odmiennej typu metodą jest modelowanie turbulentnego współczynnika dyfuzji termicznej z pominięciem wyznaczania turbulentnej liczby Prandtla. Modelowanie turbulentnej wymiany ciepła w taki sposób jest szczególnie korzystne w sytuacjach, gdy nie ma podobieństwa pól prędkości i temperatury, głównie w warstwie przyściennej, układach przepływowych silnie i niestacjonarnie obciążonych cieplnie, lub z gwałtownymi zmianami temperatury, a więc tam gdzie nie znana jest turbulentna liczba Prandtla [41, 44]. Współczynnik turbulentnej dyfuzji ciepła ma postać bazującą na turbulentnej skali prędkości oraz charakterystycznej skali czasu (4.6). Skala prędkości, podobnie jak w domknięciach tensora Reynoldsa, jest oparta o turbulentną energię kinetyczną k . W ujęciu dwurównaniowym jako turbulentną skalę czasu zaproponowano zastosowanie kombinowanej skali mechaniczno-termicznej [138, 42], która uwzględnia wpływ skal związanych z polem temperatury. Współczynnik dyfuzyjności cieplnej α_t jest więc jednocześnie funkcją stanu pól prędkości i temperatury. Mechaniczna skala czasowa jest definiowana jako stosunek turbulentnej energii kinetycznej i jej prędkości dyssypacji $T_m = k/\epsilon$. Termiczną skalą czasową stanowi stosunek wariancji temperatury $\overline{\theta'^2}$ do szybkości jej destrukcji ϵ_θ , czyli $T_\theta = \overline{\theta'^2}/2\epsilon_\theta$. Można więc zapisać wyrażenie na α_t :

$$\alpha_t \approx k \left(\frac{k}{\epsilon} \right)^l \left(\frac{\overline{\theta'^2}}{2\epsilon_\theta} \right)^m. \quad (4.9)$$

Z analizy wymiarowej oraz porównania formuł (4.6) i (4.9) wynika, iż suma wykładników poszczególnych skal czasowych musi być równa jedności $l + m = 1$.

W celu wyznaczenia wariancji temperatury $\overline{\theta'^2}$ konieczne jest rozwiązanie równania transportu, które zostaje wyprowadzone z ogólnej zależności, będącej uśrednioną sumą iloczynów fluktuacji temperatury θ' i równania bilansu energii w niezachowawczej postaci (4.1):

$$\overline{\theta' \mathcal{T}(\theta)} + \overline{\mathcal{T}(\theta) \theta'} = 0. \quad (4.10)$$

Równanie transportu $\overline{\theta'^2} = \overline{\theta' \theta'}$ po dekompozycji temperatury i prędkości oraz późniejszym uśrednieniu ma postać⁸ [49, 50, 8]:

$$\frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial t} + \overline{v_j} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} \right)}_{D_\theta} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{v'_j \theta'^2} \right)}_{D_\theta^t} - \underbrace{2 \overline{v'_j \theta'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j}}_{P_\theta} - \underbrace{2 \alpha \frac{\partial \overline{\theta'}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{\theta'}}{\partial x_j}}_{\epsilon_\theta}. \quad (4.11)$$

To samo równanie po zastosowaniu hipotezy gradientowej do wyznaczania członu reprezentującego produkcję fluktuacji temperatury P_θ oraz turbulentnej dyfuzji D_θ^t można zapisać jako:

$$\frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial t} + \overline{v_j} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\alpha + \frac{\alpha_t}{\sigma_{\overline{\theta'^2}}} \right) \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} \right] + 2P_\theta - 2\epsilon_\theta. \quad (4.12)$$

⁸Pełne wyprowadzenie równania ewolucji $\overline{\theta'^2}$ przedstawiono w **Dodatku A** na końcu niniejszej pracy.

Pierwotnie parametr $\epsilon_\theta = \alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}}$ był modelowany zależnością algebraiczną, która wiązała ϵ_θ bezpośrednio z wariancją temperatury $\overline{\theta'^2}$, a także z turbulentną energią kinetyczną k i jej prędkością dyssypacji ϵ , poprzez wykorzystanie założonego stosunku termicznej i mechanicznej skali czasowej⁹ R [138, 134, 38, 53].

$$R = \frac{T_h}{T_m} \quad . \quad (4.13)$$

Wartości R przyjmowano z zakresu $0.35 \div 0.8$ w zależności od rozpatrywanego zagadnienia cieplno-przepływowego.

W ujęciu dwurównaniowym dyssypacja ϵ_θ jest już wyznaczana z dodatkowego równania transportu, które wyprowadzone zostało w oparciu o definicję [134]:

$$2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{T}(\theta')} = 0 \quad . \quad (4.14)$$

Wyrażenie $\mathcal{T}(\theta')$ reprezentuje równanie energii dla fluktuacji temperatury, które użyć można poprzez odjęcie od równania energii $\mathcal{T}(\theta)$ (4.1) jej uśrednionej postaci $\mathcal{T}(\bar{\theta})$, przy założeniu dekompozycji temperatury $\theta = \bar{\theta} + \theta'$.

Postępując analogicznie jak w przypadku wyprowadzania równania transportu wariancji temperatury (4.11) otrzymuje się pełne¹⁰ równanie ewolucji szybkości jej destrukcji ϵ_θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial x_j} = & \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial x_k} \right)}_{D_{\epsilon_\theta}^t} - \underbrace{\alpha \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v'_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right)}_{D_{\epsilon_\theta}^t} - 2 \underbrace{\alpha \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j}}_{P_{\epsilon_\theta}^M} - 2 \underbrace{\alpha \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k}}_{P_{\epsilon_\theta}^T} + \\ & - 2 \underbrace{\alpha v'_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_k \partial x_j}}_{P_{\epsilon_\theta}^G} - 2 \underbrace{\alpha \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}}_{P_{\epsilon_\theta}^t} - 2 \underbrace{\alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k \partial x_j} \right)^2}_{\epsilon_{\epsilon_\theta}} \quad . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Formułowanie modeli dwurównaniowych wymagało zaproponowania odpowiednich domknięć członów źródłowych równania transportu ϵ_θ (4.15). Występowanie podwójnych korelacji fluktuacji prędkości i temperatury oraz iloczynów gradientów fluktuacji utrudnia dodatkowo ich fizyczną interpretację. Za najbardziej dominujące człony w równaniu transportu (4.15) uznano te związane z drobnoskalową produkcją turbulentną $P_{\epsilon_\theta}^t$ i dyssypacją $\epsilon_{\epsilon_\theta}$. Wkład członów produkcji mechanicznej $P_{\epsilon_\theta}^M$, termicznej $P_{\epsilon_\theta}^T$ oraz gradientowej $P_{\epsilon_\theta}^G$ związanych z gradientami średnich wielkości uznaje się najczęściej za pomijalnie mały [134, 51]. Propozycje rozwiązań zawarto w szeregu prac poświęconych modelom turbulencji termicznej $\overline{\theta'^2}$ - ϵ_θ [41, 42, 43, 37, 38, 39, 45, 46, 48, 44, 49]. Do modelowania członu $D_{\epsilon_\theta}^t$ reprezentującego turbulentną dyfuzję stosuje się najczęściej hipotezę gradientową, zaś całkowitą produkcję P_{ϵ_θ} i dyssypację $\epsilon_{\epsilon_\theta}$ wyznacza się poprzez odpowiednie formuły zawierające mechaniczne i termiczne skale czasowe [139]. Analiza wymiarowa pozwoliła więc powyższy zapis zredukować do zależności najczęściej

⁹ang. *time scale ratio*

¹⁰Bez członu źródłowego obejmującego fluktuacje naprężeń turbulentnych i gradientów prędkości [38]. Jest to następstwo założenia przepływu z niską liczbą Macha.

wykorzystywanej [37, 39, 8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial t} + \overline{v}_j \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial x_j} = & \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\alpha + \frac{\alpha_t}{\sigma_{\epsilon_\theta}} \right) \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial x_k} \right]}_{D_{\epsilon_\theta} + D_{\epsilon_\theta}^t} + \underbrace{C_{p1} f_{p1} \frac{\epsilon_\theta}{\theta'^2} P_\theta + C_{p2} f_{p2} \frac{\epsilon_\theta}{k} P + C_{p3} f_{p3} \frac{\epsilon}{k} P_\theta +}_{P_{\epsilon_\theta}} \\ & - \underbrace{C_{d1} f_{d1} \frac{\epsilon_\theta}{\theta'^2} \epsilon_\theta - C_{d2} f_{d2} \frac{\epsilon}{k} \epsilon_\theta}_{\epsilon_{\epsilon_\theta}} . \end{aligned} \quad (4.16)$$

W członach źródłowych pojawia się cały szereg wielkości stałych oraz funkcji tłumiących, kalibrowanych na bazie eksperymentów zarówno fizycznych jak i obliczeń DNS.

Poniżej przedstawiono charakterystykę czterech wybranych dwurównaniowych modeli turbulencji termicznej [140] tj. NK Nagano–Kim (1988) [43], YNT Youssef–Nagano–Tagawa (1992) [45], AKN Abe–Kondoh–Nagano (1995) [44], DWX Deng–Wu–Xi (2000) [49]. Równania transportu wykorzystywane w tych domknięciach są identyczne z równaniami ewolucji wariancji temperatury (4.12) i jej prędkości destrukcji (4.16). Jedynie dla modelu NK w równaniu transportu $\overline{\theta'^2}$ pojawia się dodatkowy człon dysypacyjny postaci:

$$S_{\overline{\theta'^2}} = -2\alpha \left(\frac{\partial \sqrt{\overline{\theta'^2}}}{\partial x_j} \right)^2 . \quad (4.17)$$

Dodatkowo w domknięciu DWX zastosowano nową zależność reprezentującą całkowitą produkcję w równaniu transportu ϵ_θ :

$$P_{\epsilon_\theta} = -C_{p1} \left(\frac{\epsilon}{k} \frac{\epsilon_\theta}{\theta'^2} \right)^{\frac{1}{2}} P_\theta . \quad (4.18)$$

Model	α_t
NK	$C_\lambda f_\lambda k \left(\frac{k}{\epsilon} \right)^l \left(\frac{\overline{\theta'^2}}{2\epsilon_\theta} \right)^m$
YNT	$C_\lambda f_\lambda k \left(\frac{k}{\epsilon} \right)^l \left(\frac{\overline{\theta'^2}}{2\epsilon_\theta} \right)^m$
AKN	$C_\lambda f_\lambda \left[k \frac{k}{\epsilon} \left(\frac{2R}{C_m + R} + 3k^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{(2R)^{\frac{1}{2}}}{Pr} f_d \right) \right]$
DWX	$C_\lambda f_\lambda k \left(\frac{k}{\epsilon} \right)^l \left(\frac{\overline{\theta'^2}}{2\epsilon_\theta} \right)^m$

Tabela 4.1: Zależność opisująca współczynnik turbulentnej dyfuzji ciepła

Parametr R pojawiający się w Tabeli 4.1 oznacza stosunek termicznej i mechanicznej skali czasowej (4.13), zaś funkcja f_d definiowana jest jako:

$$f_d = \exp \left[- \left(\frac{Re_t}{200} \right)^2 \right] . \quad (4.19)$$

Wartości stałych wybranych domknięć dwurównaniowych turbulencji termicznej przedstawiono w Tabeli 4.2, zaś odpowiednie funkcje tłumiące z równania transportu ϵ_θ i zależności definiującej α_t zamieszczono w Tabelach 4.3, 4.4 oraz 4.5.

Model	C_{p1}	C_{p2}	C_{p3}	C_{d1}	C_{d2}	C_λ	$\sigma_{\overline{\theta'^2}}$	σ_{ϵ_θ}	l	m
NK	1.80	0.72	1	2.20	0.80	0.11	1.0	1.0	0.5	0.5
YNT	1.70	0.64	–	2.00	0.90	0.10	1.0	1.0	-1	-2
AKN	1.90	0.60	–	2.00	0.90	0.10	1.6	1.6	–	–
DWX	2.34	–	–	2.00	0.90	0.10	1.0	1.0	0.5	0.5

Tabela 4.2: Wartości stałych wybranych modeli dwurównaniowych

Model	f_{p1}	f_{p2}	f_{p3}
NK	1	1	$f_{p3} \frac{\epsilon}{k} P_\theta = \alpha \alpha_t (1 - f_\lambda) \left(\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2$
YNT	1	1	–
AKN	$[1 - \exp(-y^*)]^2$	1	–
DWX	1	–	–

Tabela 4.3: Funkcje tłumiące w członach produkcji wybranych modeli

Model	f_{d1}	f_{d2}
NK	1	1
YNT	$\left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{5.8}\right)\right]^2$	$\frac{1}{C_{d2}} [C_{\epsilon 2} f_\epsilon - 1] \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{6}\right)\right]^2$
AKN	$[1 - \exp(-y^*)]^2$	$\frac{1}{C_{d2}} [C_{\epsilon 2} f_\epsilon - 1] \left[1 - \exp\left(-\frac{y^*}{5.7}\right)\right]^2$
DWX	$\left[1 - \exp\left(-\frac{R_\epsilon}{1.7}\right)\right]^2$	$\frac{1}{C_{d2}} [C_{\epsilon 2} f_\epsilon - 1] \left[1 - \exp\left(-\frac{y^*}{5.8}\right)\right]^2$

Tabela 4.4: Funkcje tłumiące w członach dyssypacji wybranych modeli

Funkcja f_ϵ w Tabeli 4.4 związana jest z wybranym modelem turbulencji mechanicznej. Przy stosowaniu modelu AKN [127] funkcja ta ma postać:

$$f_\epsilon = 1 - 0.3 \exp \left[- \left(\frac{Re_t}{6.5} \right)^2 \right] . \quad (4.20)$$

Model	f_λ
NK	$\left[1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{Pr} \cdot 2}{30.5 \cdot C_f} Sty^+\right)\right]^2$
YNT	$\left[1 - \exp\left(-\frac{y^+ Pr^{1/4}}{26}\right)\right]^2 \left[1 + \frac{3.4}{Re_h^{3/4}}\right]$
AKN	$\left[1 - \exp\left(-\frac{y^*}{14}\right)\right]^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{Pr^{1/2} y^*}{14}\right)\right]$
DWX	$\left[1 - \exp\left(-\frac{y^*}{16}\right)\right]^2 \left[1 + \frac{3}{Re_t^{3/4}}\right]$

 Tabela 4.5: Funkcje tłumiące w zależności na współczynnik dyfuzji α_t

Parametr y^* jest bezwymiarową odległością od ścianki, bazującą na skali prędkości Kołmogorowa $v_\epsilon = (\nu \epsilon)^{1/4}$:

$$y^* = \frac{v_\epsilon y}{\nu} . \quad (4.21)$$

Parametr Re_h określony jest zależnością:

$$Re_h = Re_t (2R)^2 . \quad (4.22)$$

4.2 Transport składowych turbulentnego strumienia ciepła

Pełne równanie transportu składowych wektora turbulentnego strumienia ciepła można uzyskać poprzez uśrednienie sumy iloczynu równania energii $\mathcal{T}(\theta)$ w postaci (4.1) i fluktuacji prędkości v'_i oraz iloczynu równania pędu $\mathcal{N}(v_i)$ w postaci (3.1) i fluktuacji temperatury θ' [141, 134]:

$$\overline{v'_i \mathcal{T}(\theta) + \mathcal{N}(v_i) \theta'} = 0 \quad . \quad (4.23)$$

Dekomponując temperaturę θ i prędkość v_i , podobnie jak przy wyznaczaniu pełnego równania transportu składowych tensora Reynoldsa, na część średnią $\bar{\theta}$, $\bar{v}_i$ i fluktuacje θ' , v'_i , otrzymuje się równanie [50, 141, 134, 52, 51, 8]¹¹:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\theta' v'_i}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \overline{\theta' v'_i}}{\partial x_j} = & \\ & - \underbrace{\overline{\theta' \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} \delta_{ji}}}_{\Phi_{i\theta}} - \underbrace{\overline{v'_i v'_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}}}_{P_{i\theta}^T} - \underbrace{\overline{\theta' v'_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}}}_{P_{i\theta}^D} - \underbrace{\overline{\frac{\partial v'_j v'_i \theta'}{\partial x_j}}}_{D_{i\theta}^t} + \\ & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\nu \theta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} + \overline{\alpha v'_i \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} \right]}_{D_{i\theta}} - \underbrace{(\nu + \alpha) \frac{\partial \bar{\theta}'}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}}_{\epsilon_{i\theta}} + \underbrace{g_i \beta \overline{\theta'^2}}_{G_{i\theta}^\theta} \quad . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Równanie (4.24) można zapisać w wersji skróconej jako:

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{\theta' v'_i}}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \overline{\theta' v'_i}}{\partial x_j}}_{\frac{D \overline{\theta' v'_i}}{Dt}} = \underbrace{D_{i\theta} + D_{i\theta}^t}_{D_{\theta' v'_i}} + \Phi_{i\theta} + P_{i\theta}^T + P_{i\theta}^D + G_{i\theta}^\theta - \epsilon_{i\theta} \quad . \quad (4.25)$$

Poszczególnym członom równania (4.24) można nadać odpowiednie znaczenie fizyczne [141, 134, 52]:

- $D_{i\theta}$ – dyfuzja molekularna,
- $D_{i\theta}^t$ – dyfuzja turbulentna,
- $\Phi_{i\theta}$ – korelacja ciśnienie–gradient temperatury reprezentująca redystrybucję,
- $P_{i\theta}^T$ – produkcja termiczna fluktuacji prędkości od gradientu temperatury średniej,
- $P_{i\theta}^D$ – produkcja mechaniczna fluktuacji temperatury od gradientu prędkości średniej,
- $G_{i\theta}^\theta$ – generacja od sił wyporu termicznego,
- $\epsilon_{i\theta}$ – dyssypacja.

¹¹ Pełne wyprowadzenie równania transportu $-\overline{\theta' v'_j}$ znajduje się w Dodatku A

4.2.1 Differential Flux Model

W równaniu (4.24) modelowania wymagają kolejno: korelacja ciśnienie–temperatura $\Phi_{i\theta}$, człony dyfuzyjne $D_{i\theta}$ i $D_{i\theta}^t$, a także dyssypacja $\epsilon_{i\theta}$ [50, 134].

W celu domknięcia członu ciśnienie – gradient temperatury $\Phi_{i\theta}$ wykorzystuje się równanie Poissona dla fluktuacji ciśnienia (3.65), analogicznie jak przy modelowaniu członu redystrybucji w równaniu transportu składowych tensora naprężeń turbulentnych (3.39) [50, 134, 8]. W rezultacie można wydzielić trzy dodatkowe człony powstałe na bazie korelacji ciśnienie – gradient temperatury.

$$\Phi_{i\theta} = \Phi_{i\theta}^{(S)} + \Phi_{i\theta}^{(R)} + \Phi_{i\theta}^{(B)} + \Phi_{i\theta}^{(W)} \quad . \quad (4.26)$$

Domknięcia poszczególnych członów $\Phi_{i\theta}$ tj. *slow term* $\Phi_{i\theta}^{(S)}$, *rapid term* $\Phi_{i\theta}^{(R)}$, wyporu termicznego $\Phi_{i\theta}^{(B)}$ oraz efektu ścianki $\Phi_{i\theta}^{(W)}$ podają np. Dol et al. [142], Gibson [114] czy Hanjalić [50].

W przeciwieństwie do równania transportu naprężeń turbulentnych RSM (3.39), człon dyfuzji molekularnej musi być także zamodelowany, jeżeli $Pr \neq 1$ [142].

$$D_{i\theta}^\nu = D_{i\theta} + \frac{1}{2} (\alpha - \nu) \theta' \frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{2} (\alpha - \nu) \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_k \partial x_k} v_i' \quad . \quad (4.27)$$

Człon reprezentujący turbulentną dyfuzję $D_{i\theta}^t$, a będący potrójną korelacją fluktuacji prędkości i temperatury, przedstawia się najczęściej w uproszczonej postaci algebraicznej [142, 50, 134, 52]:

$$D_{i\theta}^t = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[C_\theta \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{v_k' v_i' \frac{\partial \theta' v_j'}{\partial x_i}} + \overline{v_j' v_i' \frac{\partial \theta' v_k'}{\partial x_i}} + \overline{\theta' v_i' \frac{\partial v_j' v_k'}{\partial x_i}} \right) \right] \quad . \quad (4.28)$$

Dyssypacja $\epsilon_{i\theta}$ turbulentnego strumienia ciepła, jest z reguły pomijana. Inaczej niż w przypadku równania transportu składowych tensora Reynoldsa, dyssypacja nie równoważy produkcji naprężeń cieplnych. Produkcja $-\overline{\theta' v_j'}$ jest równoważona głównie korelacją ciśnienie–temperatura $\Phi_{i\theta}$, która jest członem będącym źródłem ze znakiem ujemnym. Dyssypacja zaś równoważy dyfuzję lepkościową w obszarze przyściennym [142].

Domknięcie równania (4.24) wymaga dodatkowo rozwiązania równania transportu wariancji temperatury θ'^2 (4.11).

4.2.2 Algebraic Flux Model

Turbulentny strumień ciepła $-\overline{\theta' v_j'}$ w modelach Algebraic Flux Model (AFM) wyznaczany jest z uproszczonego równania transportu składowych wektora $\vec{q}_t$ (4.24) [50, 40]. Zakłada się, iż wielkość transportu turbulentnych naprężeń cieplnych $-\overline{\theta' v_j'}$ (różnica pomiędzy członami lokalno–konwekcyjnym i dyfuzyjnym) jest proporcjonalna do wielkości transportu $\sqrt{k} \sqrt{\theta'^2}$ [114, 117, 134].

$$\begin{aligned} \frac{D \overline{\theta' v_i'}}{Dt} - D_{\theta' v_i'} &= \frac{\overline{\theta' v_i'}}{k^{\frac{1}{2}} \sqrt{\theta'^2}} \left[\frac{D}{Dt} \left(k^{\frac{1}{2}} \sqrt{\theta'^2} \right) - D_{k^{\frac{1}{2}} \sqrt{\theta'^2}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\overline{\theta' v_i'}}{\theta'^2} \left[\frac{1}{\theta'^2} \left(\frac{D \theta'^2}{Dt} - D_{\theta'^2} \right) + \frac{1}{k} \left(\frac{Dk}{Dt} - D_k \right) \right] \quad . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Wykorzystując równania transportu turbulentnej energii kinetycznej k (3.14), wariancji temperatury $\overline{\theta'^2}$ (4.12) i równania (4.24) można zapisać następującą algebraiczną zależność dla turbulentnego strumienia ciepła [50]:

$$\overline{\theta'v'_i} = \frac{\overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \xi \overline{\theta' v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \eta \beta g_i \overline{\theta'^2}}{-C_{\theta 1} \frac{k}{\epsilon} + \frac{1}{2\overline{\theta'^2}} \left(2\overline{\theta' v'_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \epsilon_\theta \right) + \frac{1}{2k} \left(\overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \beta g_i \overline{\theta' v'_i} + \epsilon \right)} . \quad (4.30)$$

Zredukowany model RAFM

Pominięcie wszystkich członów transportu k i $\overline{\theta'^2}$ w równaniu (4.30) prowadzi do zredukowanej postaci modelu AFM [50]:

$$\overline{\theta'v'_i} = -\frac{1}{C_{\theta 1}} \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \xi \overline{\theta' v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \eta \beta g_i \overline{\theta'^2} \right) . \quad (4.31)$$

mechaniczna skala czasowa $T_m = k/\epsilon$ może być zastąpiona termiczną $T_\theta = \overline{\theta'^2}/2\epsilon_\theta$ lub kombinowaną skalą czasową.

Model RAFM jest domknięciem, które uwzględnia jeszcze wszystkie najważniejsze efekty – źródła turbulentnych naprężeń cieplnych.

Uogólniona hipoteza gradientowa GGDH

Dalsza redukcja zależności (4.31) prowadzi do anizotropowego modelu zwanego uogólnioną hipotezą gradientową [50]:

$$\overline{\theta'v'_i} = -C_\theta \frac{k}{\epsilon} \left(\overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right) . \quad (4.32)$$

Niestety pominięcie drugiego i trzeciego członu zależności (4.31) powoduje, iż turbulentny strumień ciepła jest zawsze współliniowy z gradientem temperatury średniej.

Rozdział 5

Domknięcie $\overline{v'^2-f-\theta'^2-\epsilon_\theta}$

Dwurównaniowe modele turbulentnej wymiany ciepła $\overline{\theta'^2-\epsilon_\theta}$ dostępne w literaturze, zostały zbudowane w oparciu o domknięcia *low-Re-number* $k-\epsilon$. Pierwszy zaimplementowany model Nagano–Kim z 1988 roku [42] wykorzystuje domknięcie Nagano–Hishida, model Youssef et al. (1992) [45] domknięcie Nagano–Tagawa, zaś modele Abe–Kondoh–Nagano (1995) [44] oraz Deng–Wu–Xi (2000) [49] stosują domknięcie Abe et al. Wszystkie te modele wykorzystują więc jako mechaniczną skalę czasową stosunek k/ϵ , termiczną skalę czasową reprezentuje $\overline{\theta'^2-\epsilon_\theta}$, zaś turbulentną skalę prędkości stanowi turbulentna energia kinetyczna $\sqrt{k}$.

Zastosowanie domknięć *low-Re-number* $k-\epsilon$ wiąże się niestety z „przejmowaniem” wszystkich niekorzystnych cech tych modeli przez kombinowany model turbulentnej wymiany pędu i ciepła. Poprawne wyznaczanie pola prędkości jest sprawą podstawową. Jedynie dla przepływów o wysokiej liczbie Rayleigha tj. swobodnej konwekcji, efekty turbulentnej wymiany ciepła w sposób zasadniczy wpływają na wymianę pędu. Stąd dla typowych przepływów w urządzeniach energetycznych, gdzie dominują efekty konwekcji wymuszonej pompą czy sprężarką, dobór odpowiedniego i wiarygodnego modelu turbulencji mechanicznej decyduje o jakości rozwiązania numerycznego całego układu. W kanałach międzyłopatkowych turbin czy sprężarek, komorach spalania, palnikach, zaworach itd. znajduje się wiele stref dyfuzorowych, miejsc oderwania przepływu, punktów ponownego przyklejenia przepływu itp., które domknięcia turbulentnego strumienia pędu muszą być w stanie zamodelować. Modele *low-Re-number* $k-\epsilon$ z funkcjami tłumiącymi kalibrowane są na podstawie obliczeń DNS, które wykonywane są dla wyjątkowo nieskomplikowanych geometrii. Testy tak przygotowanych domknięć wykazują, iż jeśli nawet pracują one dobrze dla jednej klasy przepływów np. z oderwaniem za nieciągłością geometryczną kanału, to jednocześnie zawodzą szczególnie przy modelowaniu przepływów z wzdłużnym gradientem ciśnienia [98, 143, 144, 92]. Istotną wadą funkcji tłumiących w modelach *low-Re-number* $k-\epsilon$ jest także ich uzależnienie w sposób bezpośredni lub pośredni (parametry y^+ i y^*) od geometrii kanału. Szczególnie istotny może być wpływ takiego podejścia dla skomplikowanych trójwymiarowych kanałów przepływowych.

Zawężając na tym etapie rozważania do modeli wykorzystujących hipotezę lepkości turbulentnej oraz rezygnując jednocześnie z domknięć typu *low-Re-number* $k-\epsilon$ czy $k-\omega$, do modelowania turbulentnego strumienia pędu zastosowano czterorównaniowe domknięcie $k-\epsilon-\overline{v'^2-f}$, o roboczej nazwie $\overline{v'^2-f}$. Do modelowania efektów przysciennych wykorzystuje się w nim równanie eliptycznej relaksacji, które pozwala całkowicie wyeliminować konieczność stosowania funkcji tłumiących. Testy modelu przeprowadzane dla różnych konfiguracji przepływowych wykazały bardzo dobrą zgodność obliczeń z

eksperymentem [96, 143, 99, 100, 101, 102, 103]. Wadą domknięcia $\overline{v'^2}$ - f , jak oczywiście i innych modeli wykorzystujących koncepcję lepkości turbulentnej, jest niemożność modelowania przepływów wtórnych generowanych siłami odśrodkowymi i Coriolisa [105], które zamodelować można jedynie pełnym modelem transportu naprężeń turbulentnych [50].

5.1 Kombinowany model turbulencji mechanicznej i termicznej

Koncepcja modelu kombinowanego opiera się na założeniu, iż **głównym czynnikiem odpowiedzialnym za transport zarówno pędu jak i ciepła w kierunku ścianki jest składowa prędkości normalna do jej powierzchni $\overline{v'^2}$** [95, 94, 52, 124]. Eksperymenty związane z badaniem układów chłodzenia turbin gazowych wykazują istnienie silnej korelacji pomiędzy poziomem wymiany ciepła, a natężeniem fluktuacji prędkości w kierunku normalnym do ścianki [145]. Ta składowa prędkości ulega silnemu tłumieniu w bezpośrednim sąsiedztwie ścianki na skutek działanie efektu blokowania kinematycznego. Stąd zarówno w równaniu na turbulentny współczynnik dyfuzji pędu jak i ciepła, które ogólnie dla modeli dwurównaniowych będziemy zapisywać w postaci analogicznej do (3.8) i (4.6):

$$\nu_t \approx k^{\frac{1}{2}} L_m = C_\mu f_\mu k T_m \quad , \quad (5.1)$$

$$\alpha_t \approx k^{\frac{1}{2}} L_t = C_\lambda f_\lambda k T_\theta \quad , \quad (5.2)$$

zamiast energii kinetycznej turbulencji k powinno stosować się skalę prędkości związaną właśnie z parametrem $\overline{v'^2}$, dzięki czemu unika się jednocześnie konieczności stosowania funkcji tłumiących f_μ oraz f_λ , kalibrowanych dla przepływów przyściennych na płycie lub w kanale dwuwymiarowym i związanych najczęściej z geometrią obszaru obliczeniowego.

Turbulentna skala czasowa dla turbulentnego współczynnika transportu pędu ν_t definiowana jest w modelu $\overline{v'^2}$ - f standardowo jako stosunek energii kinetycznej turbulencji k i jej prędkości dyssypacji ϵ . Skala czasowa dla turbulentnego współczynnika dyfuzyjności cieplnej α_t (4.9), wyznaczanego modelem dwurównaniowym, uwzględnia nie tylko skalę czasową pola prędkości k/ϵ , lecz także skalę czasową pola temperatur $\overline{\theta'^2}/\epsilon_\theta$ poprzez relację:

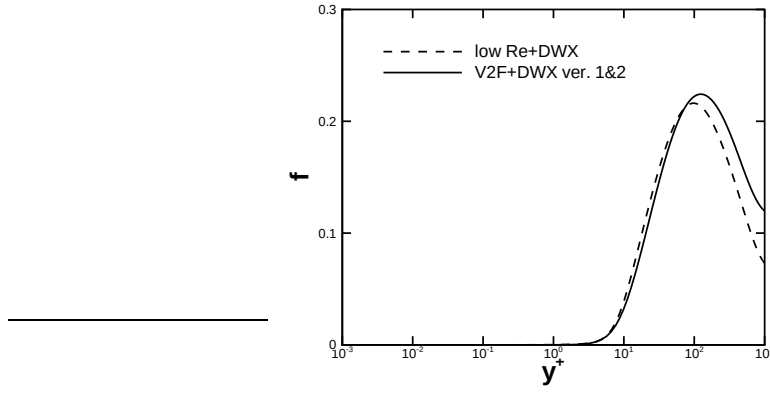
$$T_\theta = \frac{k^l}{\epsilon} \frac{\overline{\theta'^2}^m}{\epsilon_\theta} \quad , \quad l + m = 1 \quad . \quad (5.3)$$

W rezultacie w rozprawie [62] zaproponowano następującą postać turbulentnego współczynnika dyfuzyjności cieplnej:

$$\alpha_t = C_\lambda \overline{v'^2} \frac{k^l}{\epsilon} \frac{\overline{\theta'^2}^m}{\epsilon_\theta} \quad . \quad (5.4)$$

Przebieg zmian funkcji $C_\lambda f_\lambda k$ pochodzącej z oryginalnej formuły α_t w modelu DWX i nowej zależności $C_\lambda \overline{v'^2}$ przedstawiono na Rysunku 5.1. Proponowana formuła w podobny sposób co zwykły model $\overline{\theta'^2}$ - ϵ_θ z domknięciem *low-Re-number* k - ϵ reprezentuje przyścienne zmiany współczynnika turbulentnej dyfuzyjności ciepła α_t .

Pozostawiając model turbulencji $\overline{v'^2}$ - f w niezminionej postaci [100], to w zależności 5.4 kalibracji wymagają tylko współczynniki C_λ , l oraz m , a w równaniu ewolucji



Rysunek 5.1: Porównanie przyściennych zmian wyrażenia $C_\lambda f_\lambda k$ w oryginalnym modelu DWX z proponowaną zależnością $C_\lambda \overline{v'^2}$

destrukcji fluktuacji temperatury ϵ_θ współczynniki przy członach produkcji i dyssypacji tej wielkości. Poniżej przedstawiono opis łączonych modeli turbulencji mechanicznej i termicznej wraz z propozycją wartości stałych i funkcji wymagających przekalibrowania.

5.1.1 Charakterystyka modelu turbulencji mechanicznej

Ogólny opis domknięcia $\overline{v'^2}$ - f zawarto w Rozdziale 3. Podstawy tego modelu wraz z pierwszymi udanymi implementacjami przedstawił na początku lat 90-tych dwudziestego wieku Durbin [95, 94]. W następnych latach ukazały się prace, w których pojawiły się nowe wersje modelu. Modyfikacje dotyczyły głównie wartości stałych oraz sposobu wyznaczania skali czasu i długości [100, 101]. Niniejszy opis oparty jest bezpośrednio o wersję modelu Durbina z 1995 roku [94, 98].

Współczynnik turbulentnej dyfuzji pędu ma postać, w której zamiast turbulentnej skali prędkości k wprowadzono $\overline{v'^2}$:

$$\nu_t = C_\mu \overline{v'^2} T_m \quad . \quad (5.5)$$

Równanie transportu wielkości $\overline{v'^2}$ zostało wyprowadzone w analogii do równania transportu naprężeń turbulentnych w kierunku normalnym do ścianki [103]. Tłumienie $\overline{v'^2}$ wprowadzono poprzez człon źródłowy kf w równaniu transportu oraz zastosowanie tzw. *równania eliptycznej relaksacji* dla wielkości f . Model $\overline{v'^2}$ - f wymaga więc by do równań ewolucji k i ϵ dołączono dodatkowe dwa równania tj. transportu $\overline{v'^2}$ i f (jeśli potraktuje się równanie eliptycznej relaksacji jak zwykłe równanie transportu). Pełny układ równań zachowania dla opisywanego modelu wygląda więc następująco:

- turbulentna energia kinetyczna k

$$\frac{\partial}{\partial t} (k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \epsilon \quad , \quad (5.6)$$

- dyssypacja turbulentnej energii kinetycznej ϵ

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_j \epsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{C_{\epsilon 1} P_k - C_{\epsilon 2} \epsilon}{T_m} \quad , \quad (5.7)$$

- składowa normalna do ścianki naprężeń turbulentnych $\overline{v^2}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{v'^2}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{v_j v'^2}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x_j} \right] + kf - \frac{\epsilon}{k} \overline{v'^2} \quad , \quad (5.8)$$

- eliptyczna relaksacja f

$$0 = L^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) - f + \frac{C_1}{T_m} \left[\frac{2}{3} - \frac{\overline{v'^2}}{k} \right] + C_2 \frac{P_k}{k} \quad . \quad (5.9)$$

Produkcja energii kinetycznej P_k związana z istnieniem gradientów prędkości wyznaczana jest z zależności:

$$P_k = 2\nu_t d_{ij} d_{ij} \quad (5.10)$$

Skala długości wykorzystywana w równaniu eliptycznej relaksacji f (5.9) wyznaczana jest z zależności:

$$L = C_L \max \left[\frac{k^{3/2}}{\epsilon}, C_\eta \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \right] \quad . \quad (5.11)$$

Skala czasu ma postać analogiczną:

$$T = \max \left[\frac{k}{\epsilon}, 6 \sqrt{\frac{\nu}{\epsilon}} \right] \quad (5.12)$$

Poszczególne stałe modelu mają następujące wartości:

$$C_\mu = 0.22, \quad C_1 = 0.4, \quad C_2 = 0.3, \quad C_L = 0.25, \quad C_\eta = 85, \quad C_{\epsilon 2} = 1.9, \quad \sigma_\epsilon = 1.3 \quad . \quad (5.13)$$

Dodatkowo wyznaczana jest stała $C_{\epsilon 1}$ z zależności:

$$C_{\epsilon 1} = 1.4 \left(1 + 0.045 \sqrt{\frac{k}{\overline{v'^2}}} \right) \quad . \quad (5.14)$$

Warunki brzegowe na ściankach dla poszczególnych równań przyjmuje się następująco:

$$k_w = 0, \quad \epsilon = \frac{2\nu k_1}{y_1^2}, \quad \overline{v^2} = 0, \quad f_w = -\frac{20\nu^2 \overline{v^2}}{\epsilon_w y_1^4} \quad . \quad (5.15)$$

5.1.2 Charakterystyka modelu turbulencji termicznej

Sposób wyprowadzenia równań transportu skalarnych wielkości wariancji temperatury $\overline{\theta'^2}$ i szybkości jej destrukcji ϵ_θ przedstawiono w Rozdziale 4 oraz w Dodatku A na końcu niniejszej pracy.

O ile modelowanie wariancji temperatury $\overline{\theta'^2}$ na bazie równania (4.11) przy zastosowaniu hipotezy gradientowej na domknięcie członu produkcyjnego jest we wszystkich cytowanych modelach dwurównaniowych identyczne, o tyle modelowanie szybkości destrukcji fluktuacji temperatury ϵ_θ nie jest już tak jednoznaczne. Dla celów niniejszej analizy wykorzystano model Deng–Wu–Xi¹ [49]. Charakterystyczną cechą powyższego domknięcia jest modelowanie całego członu produkcyjnego jedynie na bazie produkcji termicznej przy jednoczesnym wykorzystaniu kombinowanej mechaniczno-termicznej skali czasowej. Równania transportu $\overline{\theta'^2}$ i ϵ_θ mają w modelu DWX postać następującą:

¹W dalszej części pracy model Deng–Wu–Xi reprezentuje skrót DWX

- wariancja temperatury $\overline{\theta'^2}$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\theta'^2}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_j \overline{\theta'^2}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\alpha + \frac{\alpha_t}{\sigma_{\overline{\theta'^2}}} \right) \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} \right] + 2P_\theta - 2\epsilon_\theta \quad , \quad (5.16)$$

- szybkość destrukcji fluktuacji temperatury ϵ_θ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_\theta) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_j \epsilon_\theta) = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\alpha + \frac{\alpha_t}{\sigma_{\epsilon_\theta}} \right) \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial x_j} \right] + \\ & C_{p1} f_{p1} \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_\theta}{k \overline{\theta'^2}}} P_\theta - C_{d1} f_{d1} \frac{\epsilon_\theta \epsilon_\theta}{\overline{\theta'^2}} - C_{d2} f_{d2} \frac{\epsilon \epsilon_\theta}{\overline{\theta'^2}} \quad . \end{aligned} \quad (5.17)$$

Produkcja wariancji temperatury P_θ związana z istnieniem gradientu średniej temperatury wyznaczana jest z zależności:

$$P_\theta = \alpha_t \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad . \quad (5.18)$$

Model DWX w oryginalnej postaci [49] zawiera w równaniu transportu ϵ_θ i zależności formułującej współczynnik turbulentnej dyfuzji ciepła funkcje tłumiące f_λ , f_{p1} , f_{d1} , f_{d2} oraz stałe C_λ , C_{p1} , C_{d1} , C_{d2} . Szczegółowy opis tych funkcji i stałych zamieszczono w Tabelach 4.2, 4.3, 4.4 i 4.5 w Rozdziale 4, przy okazji prezentowania dwurównaniowych modeli turbulentnej wymiany ciepła.

Wykorzystując jednak zmienioną formułę współczynnika turbulentnej dyfuzyjności cieplnej α_t (5.4), który wyznaczany jest teraz z zależności wiążącej skalę prędkości $\overline{v'^2}$ oraz kombinowaną mechaniczno-termiczną skalę czasową można założyć, iż analogicznie jak dla równania transportu dysypacji energii kinetycznej ϵ (5.7), tak w równaniu szybkości destrukcji temperatury ϵ_θ (5.17) należy funkcje tłumiące albo pominąć $f_{d1} = f_{d2} = 1$, albo zmienić tak, by uniezależnić je od parametrów związanych bezpośrednio i pośrednio z geometrią układu².

Modyfikacja zależności α_t powoduje jednocześnie konieczność zmiany poszczególnych stałych modelu. W rozprawie [62] zaproponowano dwa warianty wartości stałych modelu $\overline{\theta'^2}$ - ϵ_θ . Dla wariantu **1** można zapisać:

$$C_\lambda = 0.23, \quad C_{p1} = 2.75, \quad C_{d1} = 2.1, \quad C_{d2} = 0.9 \quad , \quad (5.19)$$

$$f_\lambda = f_{p1} = f_{d1} = f_{d2} = 1, \quad l = 1.5, \quad m = -0.5 \quad \sigma_{\epsilon_\theta} = 1.0, \quad \sigma_{\overline{\theta'^2}} = 1.0 \quad . \quad (5.20)$$

Natomiast w wariancie **2** zastosowano dodatkowo funkcję f_{d2} , mającą w obszarze przyściennym przebieg zbliżony do oryginalnej funkcji tłumiącej DWX jak na Rysunku 5.2, która jest jednak zależna tylko od wielkości k i $\overline{v'^2}$:

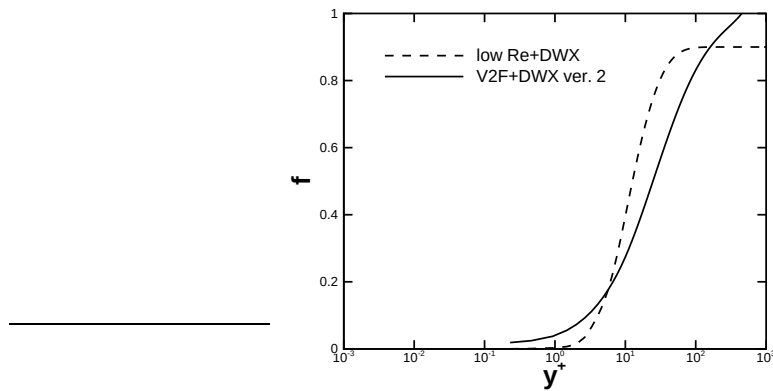
$$C_\lambda = 0.28, \quad C_{p1} = 2.6, \quad C_{d1} = 2.0, \quad C_{d2} = 1.5 \quad , \quad (5.21)$$

$$f_{p1} = f_{d1} = 1, \quad f_{d2} = \sqrt{\frac{k}{\overline{v'^2}}}, \quad l = 0.5, \quad m = 0.5 \quad \sigma_{\epsilon_\theta} = 1.0, \quad \sigma_{\overline{\theta'^2}} = 1.0 \quad . \quad (5.22)$$

Warunki brzegowe na nieprzepuszczalnych ściankach dla poszczególnych równań obu wariantów modelu przyjęto identyczne z podanymi w pracy Denga et al. [49]:

$$\overline{\theta'^2} = 0, \quad \epsilon_\theta = \alpha \frac{\overline{\theta'^2}}{y_1^2} \quad . \quad (5.23)$$

²Czyli zawierających odległość od ścianki y



Rysunek 5.2: Porównanie przebiegu funkcji tłumiącej f_{d2} w oryginalnym modelu DWX z przyścienną zmianą $\sqrt{k/v'^2}$

5.2 Analiza pracy modelu

Przedstawione powyżej warianty modelu kombinowanego wykalibrowano i przetestowano dla dwóch eksperymentów tj. fizycznego Nagano et al. [25, 26] związanego z problemem rozbiegu termicznego w rurze oraz eksperymentu numerycznego Kasagi [35, 36] czyli obliczeń DNS dla kanału grzanego.

Testy obliczeniowe wykonano przy wykorzystaniu komercyjnego programu numerycznej mechaniki płynów Fluent 6.0.12 [86]. Algorytm numeryczny oraz ogólny sposób zaimplementowania sześciu równań transportu modelu kombinowanego tj. k , ϵ , $\overline{v'^2}$, f , $\overline{\theta'^2}$ i ϵ_θ zaprezentowano w Rozdziale 6. Dodatkowo w Rozdziale 6 zaprezentowano wyniki obliczeń już tylko z wykorzystaniem wariantu **2** domknięcia kombinowanego $\overline{v'^2}$ - f - $\overline{\theta'^2}$ - ϵ_θ dla wymiany ciepła w warunkach oderwania przepływu.

5.2.1 Rozbieg termiczny w rurze

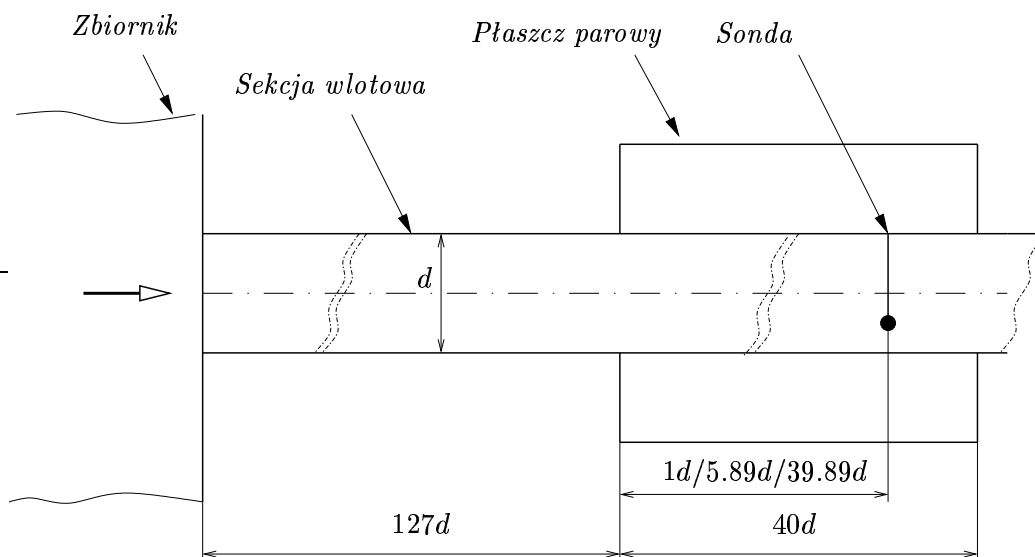
Szczegółowy opis stanowiska badawczego oraz wyników eksperymentu fizycznego zamieszczono w bazie danych [60] oraz w opracowaniach [146, 25, 26].

Eksperyment dotyczy przepływu powietrza przez rurę o średnicy $d = 45.68$ mm, która jest ogrzewana od miejsca zlokalizowanego w odległości $127d$ od wlotu rury jak na Rysunku 5.3.

Tak długi odcinek rozbiegowy zapewnia pełne rozwinięcie się hydraulicznej warstwy przyściennej. Sekcja ogrzewana ma długość $40d$. Dzięki zastosowaniu ogrzewania parą nasyconą przy ciśnieniu atmosferycznym zapewniono stałą temperaturę ścianki równą $T_w = 373K$. Pomiary realizowano dla sześciu położań sondy x/d od początku ogrzewania licząc. Główne parametry eksperymentalne przedstawiono w Tabeli 5.1.

Obliczenia numeryczne

Obliczenia wykonano korzystając z solvera Fluent, do którego zaimplementowano podprogram, który pozwalał na rozwiązywanie dodatkowych równań transportu turbulencji mechanicznej wg modelu Durбина $\overline{v'^2}$ - f oraz turbulencji termicznej $\overline{\theta'^2}$ - ϵ_θ wraz z równaniami bilansu masy, pędu i energii.



Rysunek 5.3: Schemat stanowiska eksperymentalnego

x/d	U_c	u_τ	δ^*	T_w	T_c	t_τ	q_w	δ_θ
$[-]$	$[\frac{m}{s}]$	$[\frac{m}{s}]$	$[mm]$	$[^\circ C]$	$[^\circ C]$	$[^\circ C]$	$[\frac{W}{m^2}]$	$[mm]$
1.00	17.0	0.77	2.53	99.9	26.1	5.67	4584	4.13
1.89	17.2	0.77	2.52	99.9	24.2	5.16	4207	5.80
3.89	17.1	0.76	2.50	100.2	25.2	4.75	3801	9.35
5.89	16.7	0.74	2.61	100.3	19.8	4.82	3693	12.30
14.89	17.5	0.78	2.61	100.1	26.8	3.76	3055	-
39.89	17.2	0.79	2.23	100.3	41.2	2.89	2451	-

Tabela 5.1: Główne parametry eksperymentalne i niektóre parametry wynikowe [146], x/d - miejsce kolejnego położenia sondy, U_c - prędkość wzdłużna w osi kanału, u_τ - prędkość tarcia, δ^* - grubość straty pędu, T_w - temperatura ścianki, T_c - temperatura w osi rury, t_τ - temperatura tarcia, q_w - strumień ciepła, δ_θ - grubość termicznej warstwy przyściennej.

Osiowosymetryczny obszar obliczeniowy zdyskretyzowano siatką strukturalną. Siatka numeryczna posiadała 80 objętości skończonych na długości promienia. Zapewniało to już otrzymywanie rozwiązań niezależnych od gęstości siatki. Bezwymiarowy parametr y^+ na ścianie był mniejszy od 0.1 na całej długości rury. Do dyskretyzacji równań zachowania wykorzystano schematy QUICK. Dla sprzężenia ciśnienia i prędkości zastosowano metodę SIMPLEC. Jako kryterium zbieżności obliczeń przyjęto standardowo uzyskanie względnych residuów równań zachowania na poziomie niższym od 10^{-3} , a także zbilansowanie strumienia masy i energii na poziomie 0.01% oraz ustalenie się stałej wartości współczynnika oporu C_d w wybranym punkcie na ścianie rury.

Zakładając przepływ ściśliwy do obliczeń wykorzystano równanie gazu doskonałego, a lepkość molekularną dla powietrza modelowano w funkcji temperatury wg standardowej formuły Sutherlanda [86]:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_0 + S}{T + S} \quad (5.24)$$

Parametr μ_0 reprezentuje lepkość referencyjną (dla umiarkowanych ciśnień i temperatur $\mu_0 = 1.716 \cdot 10^{-5}$ kg/ms), S to temperatura efektywna ($S = 111$ K), zaś T_0 jest temperaturą referencyjną ($T_0 = 273$ K). Przewodność molekularną λ i ciepło właściwe c_p dla powietrza przedstawiono wg następujących funkcji temperatury odpowiadającym danym zawartym w [147]:

- przewodność molekularna λ [W/mK]

$$\lambda = 1.5207 \cdot 10^{-11} T^3 - 4.8574 \cdot 10^{-8} T^2 + 1.0184 \cdot 10^{-4} T - 3.9333 \cdot 10^{-3} \quad , \quad (5.25)$$

- ciepło właściwe c_p [J/kgK]

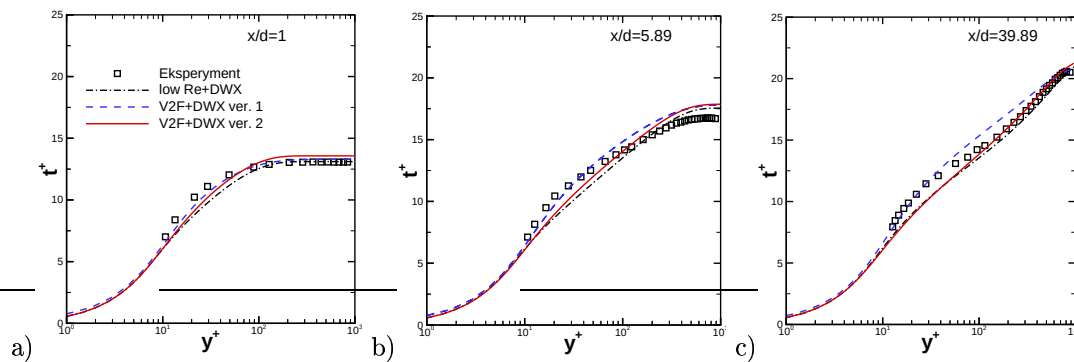
$$c_p = 1.932 \cdot 10^{-10} T^4 - 7.999 \cdot 10^{-7} T^3 + 1.1407 \cdot 10^{-3} T^2 - 4.489 \cdot 10^{-1} T + 1.057 \cdot 10^3 \quad . \quad (5.26)$$

Obliczenia przeprowadzono dla trzech modeli. Pierwszym zastosowanym domknięciem był oryginalny model *DWX* [49] współpracujący z modelem *low-Re-number k- ϵ* wg Abe et al. [127]. Drugim i trzecim były warianty **1** i **2** kombinowanego modelu $\overline{v'^2}$ - f - $\overline{\theta'^2}$ - ϵ_θ .

Wyniki obliczeń przedstawiono dla trzech przekrojów poprzecznych na odcinku grzanym rury tj. $x/d = 1, 5.89$ oraz 39.89 . Dla porównania wyników eksperymentalnych i numerycznych dysponowano danymi normalizowanymi temperatury θ^+ , turbulentnego strumienia ciepła $(-\overline{v'_i \theta'})^+$, wariancji temperatury $(\overline{\theta'^2}/2)^+$, produkcji fluktuacji temperatury $(P_\theta)^+$, które prezentowano w funkcji bezwymiarowej odległości od ścianki y^+ w układzie logarytmicznym. Dodatkowo porównano zmianę turbulentnej liczby Prandtla Pr_t w przekroju pełnego rozwinięcia termicznego.

Opis otrzymanych rezultatów

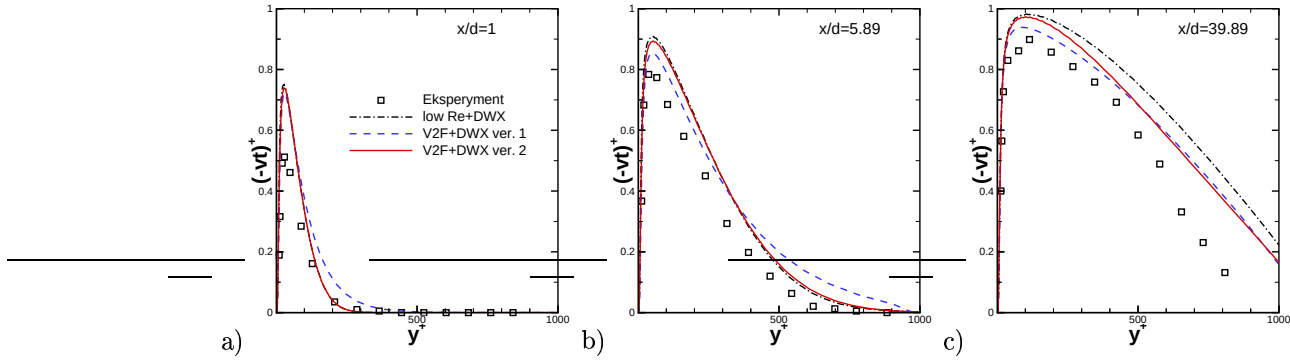
Porównując profile temperatury normalizowanej obliczonej i pomierzonej na Rysunku 5.4 można stwierdzić, iż zaproponowane warianty modelu $\overline{v'^2}$ - f - $\overline{\theta'^2}$ - ϵ_θ dobrze odwzorowują zmiany temperatury dla procesu rozbiegu termicznego, podobnie jak oryginalna formuła *DWX*.



Rysunek 5.4: Temperatura normalizowana θ^+ w trzech przekrojach a) $x/d = 1$, b) 5.89 i c) 39.89

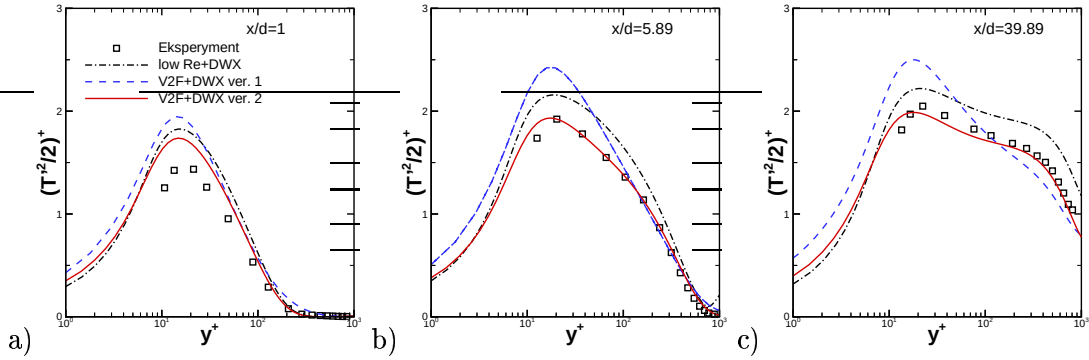
Nieco gorzej wygląda porównanie z eksperymentem zmian turbulentnego strumienia ciepła Rysunek 5.5, szczególnie dla obszaru, dla którego przepływ jest już rozwinięty

termicznie tj. dla $x/d = 39.89$. Wykres uzyskany numerycznie wyraźnie odsta-
danych eksperymentalnych, jednak trzeba zauważyć, iż pomiędzy poszczególnymi mo-
delami nie ma istotnych różnic.



Rysunek 5.5: Normalizowany turbulentny strumień ciepła $(-v_t')^+$

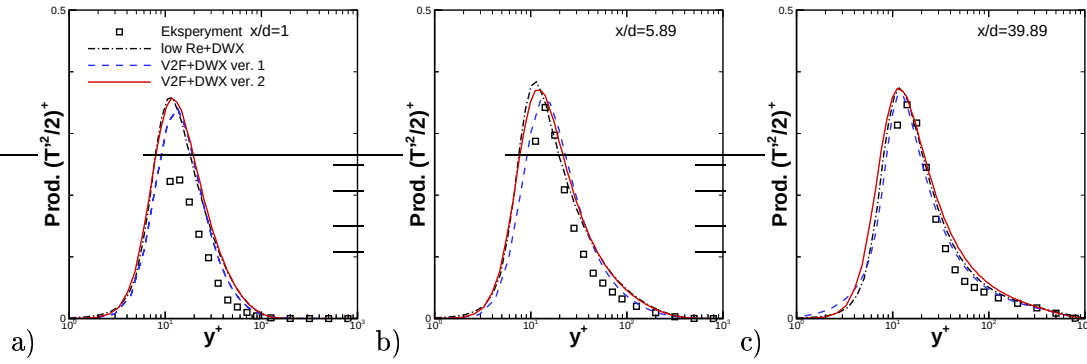
W przypadku zmian wariancji temperatury $\overline{\theta'^2}$ przedstawionych na Rysunku 5.6, najlepsze rezultaty otrzymuje się przy zastosowaniu wariantu **2** domknięcia $\overline{v'^2} - f - \overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$, który w obszarze pełnego rozwinięcia termicznego przepływu wykazuje pełną zgodność z przebiegiem eksperymentalnym. Nieznacznie gorsze wyniki przedstawia oryginalny model DWC. Dla wariantu **1** wartość maksymalna wariancji temperatury $(\overline{\theta'^2}/2)^+$ w każdym z przekrojów pomiarowych jest przeszacowana o około 20%.



Rysunek 5.6: Normalizowana wariancja temperatury $(\overline{\theta'^2}/2)^+$

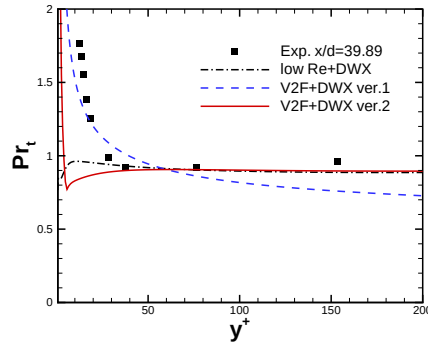
Na wykresie zmian produkcji fluktuacji temperatury Rysunek 5.7 widać istotną różnicę pomiędzy obliczeniami, a danymi eksperymentalnymi w obszarze początkowym rozbiegu termicznego. Wyrazem tego jest także przeszacowanie maksymalnej wartości $\overline{\theta'^2}$ widocznej na Rysunku 5.6 w tym samym obszarze pomiarowym. Może to świadczyć o wciąż niewłaściwym modelowaniu ewolucji destrukcji fluktuacji temperatury ϵ_θ w początkowej fazie rozbiegu termicznego.

Na Rysunku 5.8 porównano eksperymentalne i numeryczne zmiany turbulentnej liczby Prandtla. Dla obszaru przyściennego, to jest w zakresie $y^+ < 50$, zmiany Pr_t wyznaczone dla wariantu **1** domknięcia $\overline{v'^2} - f - \overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ pokrywają się dość ściśle z wyni-
kami pomiarów, jednak już w dalszej odległości od ścianki zamodelowane Pr_t zmierza



Rysunek 5.7: Normalizowana produkcja wariancji temperatury $\left(\frac{\overline{\theta'^2}}{2}\right)^+$

ku zbyt niskim wartościom. Zastosowanie oryginalnego modelu DWX oraz wariantu **2** prowadzi do poprawnego modelowania zmiany turbulentnej liczby Prandtla w zakresie $y^+ > 50$, jednak w bezpośrednim sąsiedztwie ścianki wyniki obliczeń domknięciem DWX całkowicie odstają od danych eksperymentalnych.



Rysunek 5.8: Turbulentna liczba Prandtla Pr_t w obszarze przyściennym

5.2.2 Przepływ grzany w kanale płaskim

Do celów porównawczych wybrano obliczenia DNS dla przepływu turbulentnego $Re_\tau = 180$ w grzanym kanale przeprowadzone przez Kasagi et al. [35, 36]. Szczegółowe dane eksperymentu numerycznego zaczerpnięto z bazy danych DATHET [60]. Rezultaty obliczeń DNS są głównym źródłem badania przebiegu zmian przyściennych parametrów charakteryzujących turbulentną wymianę pędu i energii. Główny nacisk w niniejszej analizie położono na przebadanie budżetów równań transportu zaimplementowanych modeli.

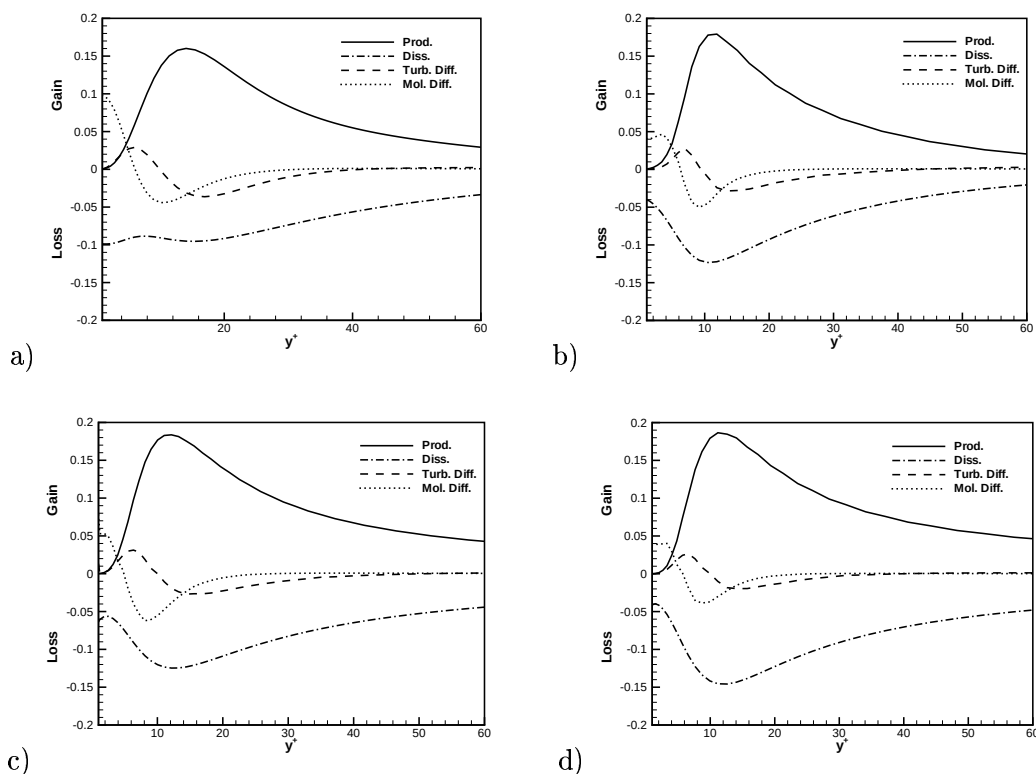
Obliczenia numeryczne

Do modelowania zastosowano taki sam proces obliczeniowy jak w przypadku wcześniej opisanego rozbiegu termicznego w rurze. Dwuwymiarowy obszar obliczeniowy zdykretyzowano numeryczną siatką strukturalną, która posiadała 120 objętości kontrol-

nych po wysokości kanału. Dla takiej siatki bezwymiarowy parametr y^+ na ścianie był mniejszy niż 0.2 na całej długości kanału.

Opis otrzymanych rezultatów

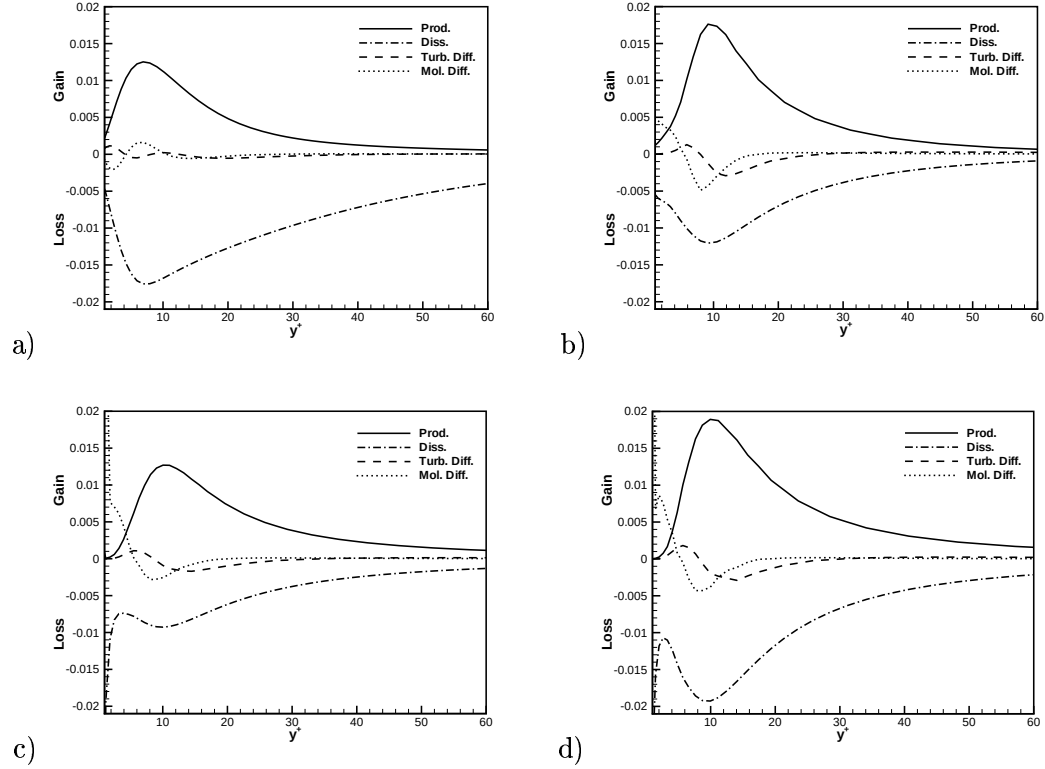
Na Rysunku 5.9 zaprezentowano porównanie budżetów równań transportu wariancji temperatury $\overline{\theta'^2}$ kolejno dla a) obliczeń DNS, b) oryginalnej formuły DWX, c) wariantu 1 oraz d) wariantu 2 domknięcia $v'^2 - f - \overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$. Budżet równania ewolucji wariancji temperatury bardzo dobrze odwzorowuje zmiany przyścienne produkcji oraz dyfuzji molekularnej i turbulentnej $\overline{\theta'^2}$. Zauważalne różnice są dla dyssypacji $\overline{\theta'^2}$, co potwierdza trudności związane z modelowaniem tego członu sygnalizowane przez większość badaczy [52, 51, 8].



Rysunek 5.9: Budżet wariancji temperatury $\overline{\theta'^2}$. Poszczególne diagramy ilustrują odpowiednio a) dane DNS [60], b) oryginalny model DWX, c) wariant 1 oraz d) wariant 2 modelu DWX

Różnice te ujawniają się na diagramie przedstawiającym budżet równania destrukcji fluktuacji temperatury ϵ_θ Rysunek 5.10. Jeśli jeszcze produkcję w równaniu transportu ϵ_θ można uznać za odwzorowaną prawidłowo dla wszystkich modeli, tak szczególnie zmiany dyssypacji ϵ_θ w obszarze przyściennym obarczone są już sporym błędem. Jedynie dla wariantu 2 reprezentowanego przez diagram d) dyssypacja dominuje nad produkcją ϵ_θ w obszarze przyściennym, co pozostaje w zgodności z danymi DNS na diagramie a) mimo, iż sama wielkość produkcji i dyssypacji jest przeszacowana. Pozostałe dwa modele wykazują przeciwną do omawianej tendencję, chociaż produkcja ϵ_θ

dla wariantu 1 na diagramie c) jest identyczna z DNS.



Rysunek 5.10: Budżet szybkości destrukcji fluktuacji temperatury ϵ_θ . Poszczególne diagramy ilustrują odpowiednio a) dane DNS [60], b) oryginalny model DWX, c) wariant 1 oraz d) wariant 2 modelu DWX

5.2.3 Wnioski

Obserwując wyniki obliczeń testowych można stwierdzić, iż wariant **2** domknięcia $\overline{v'^2} - f - \overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ pracuje równie dobrze co oryginalny model DWX. W większości z przypadków przewyższa on jednak model DWX, szczególnie w obszarze rozbiegu termicznego. Rezultaty otrzymane przy zastosowaniu wariantu **1** nie są zadowalające w takim stopniu jak dla wariantu **2**. Różnice wynikają z traktowania członów źródłowych równania destrukcji fluktuacji temperatury ϵ_θ , gdzie w wariantcie **2** zastosowano quasi funkcję tłumiącą $f_{d2} = \sqrt{k/v'^2}$. Reasumując, wyeliminowanie funkcji tłumiącej f_λ z zależności formułującej α_t oraz wprowadzenie na miejsce turbulentnej energii kinetycznej k wielkości skalarnej $\overline{v'^2}$ prowadzi do otrzymywania poprawnych rezultatów przy wykorzystaniu modelu turbulencji termicznej $\overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ połączonego z czterorównaniowym domknięciem turbulencji mechanicznej Durbina.

Rozdział 6

Implementacja modelu do solvera i jego weryfikacja

6.1 Weryfikacja na wybranych eksperymentach z wymianą ciepła

Weryfikacji domknięć turbulentnego strumienia zarówno pędu jak i ciepła, można dokonywać w oparciu o dane eksperymentalne i wyniki obliczeń DNS. Istnieje wiele baz danych zawierających rezultaty pomiarów oraz obliczeń przepływów turbulentnych w rurach, kanałach prostych i o bardziej skomplikowanej geometrii. Wśród najważniejszych znajdują się baza danych organizacji ERCOFTAC¹ [148, 59], DATHET² [60], THTLAB³ [61] oraz *Kawamura Lab* [149].

Głównym etapem weryfikacji modeli jest sprawdzenie ich przydatności do obliczeń turbulentnych przepływów z wymianą ciepła w warunkach oderwania. Analiza wyników wcześniejszych symulacji wskazuje, iż domknięcie $\overline{v'^2}$ - f połączone z wariantem **2** modelu $\overline{\theta'^2}$ - ϵ_θ DWX, można wykorzystać do obliczeń kanałów ograniczonych ściankami grzаныmi bądź chłodzonymi. Także licznie obecne w literaturze publikacje weryfikujące model $\overline{v'^2}$ - f [96, 98, 143, 99, 100, 101, 102, 103], a także własne prace, które potwierdzają poprawność implementacji tego modelu do kodu Fluent [62, 144], wskazują, iż model tego typu można z powodzeniem stosować do obliczeń kanałów o skomplikowanej geometrii tj. kanałów z uskokiem geometrycznym (*backward facing step*) jak i z wzdłużnym gradientem ciśnienia (dyfuzory geometryczne).

Ilość odpowiednio przygotowanych badań referencyjnych, dostępnych w bazach danych jest jednakże ograniczona, także większość z nich jest wielokrotnie i chętnie stosowana do weryfikacji różnych modeli. W niniejszej pracy wykorzystano dwa eksperymenty związane z turbulentną wymianą ciepła i pędu. Pierwszy z nich jest eksperymentem referencyjnym pochodzącym z bazy danych ERCOFTAC [59], a który był przedmiotem seminarium ERCOFTAC/IAHR w 1998 roku. Badania Liou et al. [150] dotyczą przepływu przez grzany kanał, którego jedna ze ścianek jest uźebrowana. Może to stanowić odpowiednik kanału wewnętrznego łopatk gazowej przy zastosowaniu chłodzenia. Drugi eksperyment Ota i Kona [30, 31] związany jest z napływem powietrza na tępo-ściętą płaską płytę, która jest dodatkowo grzana. Wyniki tych badań są prezentowane w bazie danych DATHET [60].

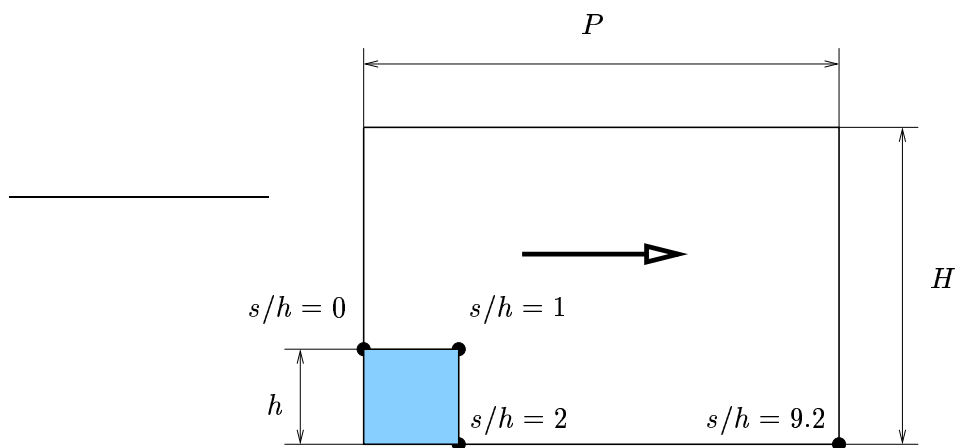
¹ang. *European Research Community On Flow, Turbulence And Combustion*

²ang. *Japan Society of Mechanical Engineers, Thermal Engineering Division*

³ang. *DNS Databases of Turbulence, Mechanical Engineering, University of Tokyo*

6.1.1 Kanał uźebrowany grzany

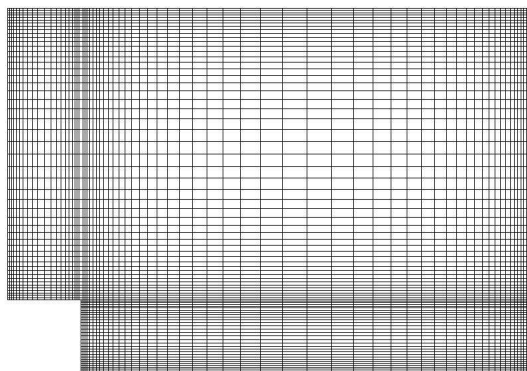
Stosowanie turbulizatorów umieszczonych w kanale przepływowym, zawsze związane jest z intensyfikowaniem procesu wymiany ciepła. Takiej klasie zagadnień poświęcono szereg prac eksperymentalnych i obliczeniowych. Do celów niniejszej analizy wybrano eksperyment referencyjny Liou et al. [150], powszechnie wykorzystywany przy weryfikacji modeli turbulentnej wymiany pędu i ciepła [151, 103]. Eksperyment został przeprowadzony z zachowaniem cech dwuwymiarowości w dwóch etapach tzn. dla przepływu adiabatycznego o liczbie Reynoldsa $Re = 37200$ oraz dla $Re = 12600$ z wymianą ciepła od grzanych ścianek. Geometrię wraz z charakterystycznymi wymiarami przedstawiono na Rysunku 6.1.



Rysunek 6.1: Geometria badanego kanału uźebrowanego

Obliczenia numeryczne

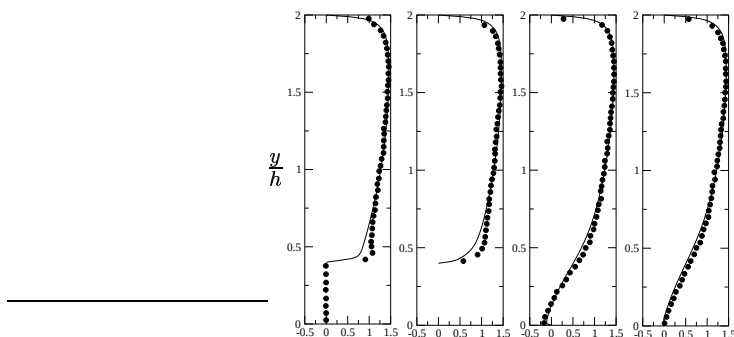
Periodyczny obszar obliczeniowy zdyskretyzowano siatką strukturalną o wymiarze 100×100 z odpowiednim zagęszczeniem objętości przy ściankach. Siatkę obliczeniową przedstawiono na Rysunku 6.2.



Rysunek 6.2: Siatka numeryczna (bez dyskretyzacji obszaru żebra)

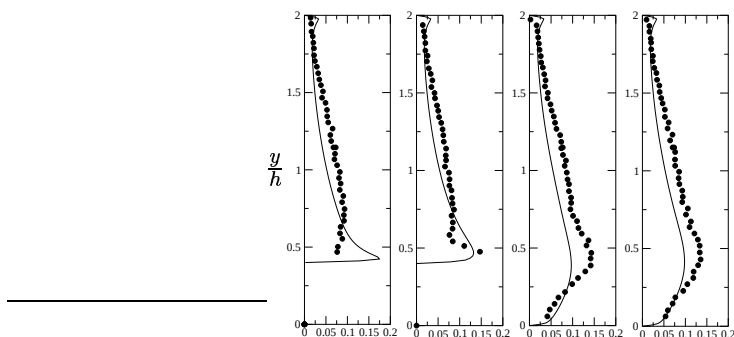
Kierując się uwagami zawartymi w pracy Manceau et al. [103], wykonano siatkę

numeryczną obejmującą także obszar materiału żebra, która posłuży do sprzężonych obliczeń zarówno powietrza jak i ciała stałego⁴. Zastosowano podobne założenia dotyczące numerycznego procesu obliczeniowego i domknięć stanu dla powietrza jak dla wcześniej przedstawionych analiz.



Rysunek 6.3: Profile prędkości V_x normalizowanej (*punkty* - dane pomiarowe wg [150], *linia* - wyniki obliczeń)

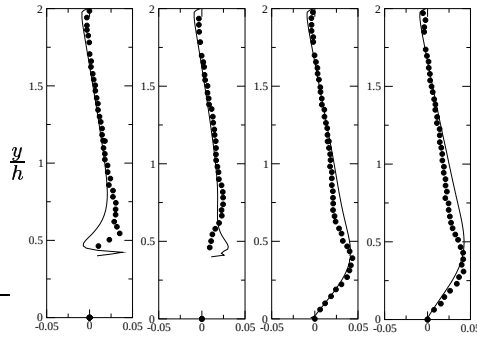
Obserwując profile składowej prędkości v_x dla $Re = 37200$ Rysunek 6.3, widać dobrą zgodność wyników obliczeń z danymi eksperymentalnymi dla różnych przekrojów pomiarowych $x/e = 0.1, 0.5, 4.18$ oraz 5.32 . W stosunku do wyników obliczeń zamieszczonych w pracy [151], a wykonanych przy wykorzystaniu innych modeli turbulencji mechanicznej, nie zanotowano większych rozbieżności. Identyczne rezultaty przy zastosowaniu modelu $\overline{v'^2}$ - f zamieszczono w pracy [103], co potwierdza poprawność własnej implementacji domknięcia do kodu. Różnice przebiegów profili bezpośrednio w obszarze żebra, w stosunku do przedstawionych danych pomiarowych, tłumaczy się w pracach [88, 103] efektami trójwymiarowymi (przepływy wtórne), których nie udało się w badaniach eksperymentalnych całkowicie wyeliminować.



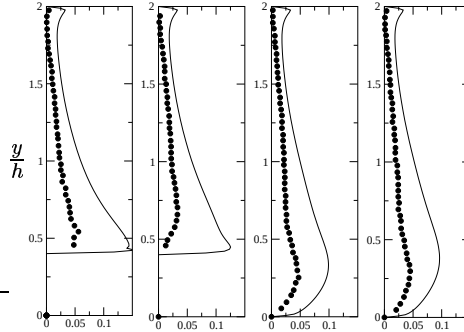
Rysunek 6.4: Profile składowej $-\overline{v'_x v'_x}$ tensora naprężeń turbulentnych (*punkty* - dane pomiarowe wg [150], *linia* - wyniki obliczeń)

Na Rysunkach 6.4, 6.5 i 6.6 przedstawiono profile składowych tensora naprężeń turbulentnych, które obliczano stosując hipotezę Boussinesqa (3.6) i porównano je z danymi pomiarowymi. Podobnie jak dla profili składowej prędkości v_x największe róż-

⁴Obliczenia sprzężone są dziedzina, która rozwija się bardzo intensywnie. Dotyczy to głównie sprzężenia poprzez równanie energii, jak w pracach związanych z wymianą ciepła w łopatkach turbin gazowych [152, 153] czy też w elementach turbiny parowej [64]



Rysunek 6.5: Profile składowej $-\overline{v'_x v'_y}$ tensora naprężeń turbulentnych (*punkty* - dane pomiarowe wg [150], *linia* - wyniki obliczeń)



Rysunek 6.6: Profile składowej $-\overline{v'_y v'_y}$ tensora naprężeń turbulentnych (*punkty* - dane pomiarowe wg [150], *linia* - wyniki obliczeń)

nice pomiędzy wynikami obliczeń, a eksperymentem notuje się w obszarze bezpośrednio nad żebrem dla wszystkich składowych naprężeń.

Dodatkowo, zgodnie z uwagami podanymi przez Manceau et al. [103], na Rysunku 6.7 porównano profile zmian wielkości skalarnej $\overline{v'^2}$ i danych pomiarowych $-\overline{v'_y v'_y}$. Wielkość $\overline{v'^2}$ może być traktowana jako składowa naprężeń turbulentnych normalnych do ścianki, co daje pewien obraz anizotropii turbulencji w obszarze przyściennym. Jak widać wielkość ta lepiej reprezentuje zmiany naprężeń $-\overline{v'_y v'_y}$ niż wynika to ze stosowania klasycznej hipotezy Boussinesqa [103] uwidocznionej na Rysunku 6.6.

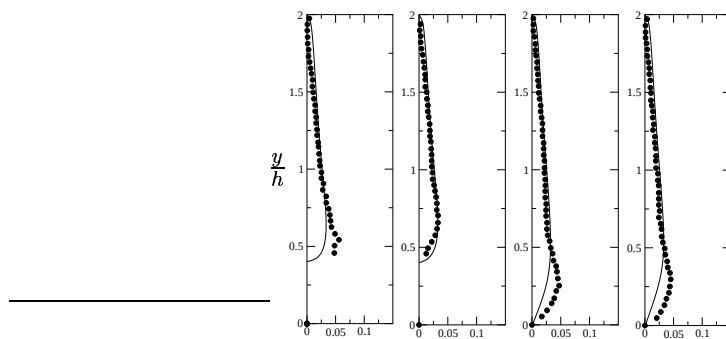
Wyniki związane z wymianą ciepła dla $Re = 12600$ prezentowano w postaci zmian liczby Nusselta Nu na ścianie:

$$Nu = \frac{q_w D_{ref}}{\lambda (T_w - T_{ref})} \quad . \quad (6.1)$$

Temperaturę referencyjną T_{ref} przyjmowano jako średnią temperaturę w całym obszarze obliczeniowym. Jako średnicę referencyjną D_{ref} przyjmowano podwojoną wysokość kanału H . Liczbę Nusselta otrzymaną z zależności (6.1) normalizowano empiryczną formułą Dittusa-Boeltera Nu_{ref} (6.2).

$$Nu_{ref} = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4} \quad . \quad (6.2)$$

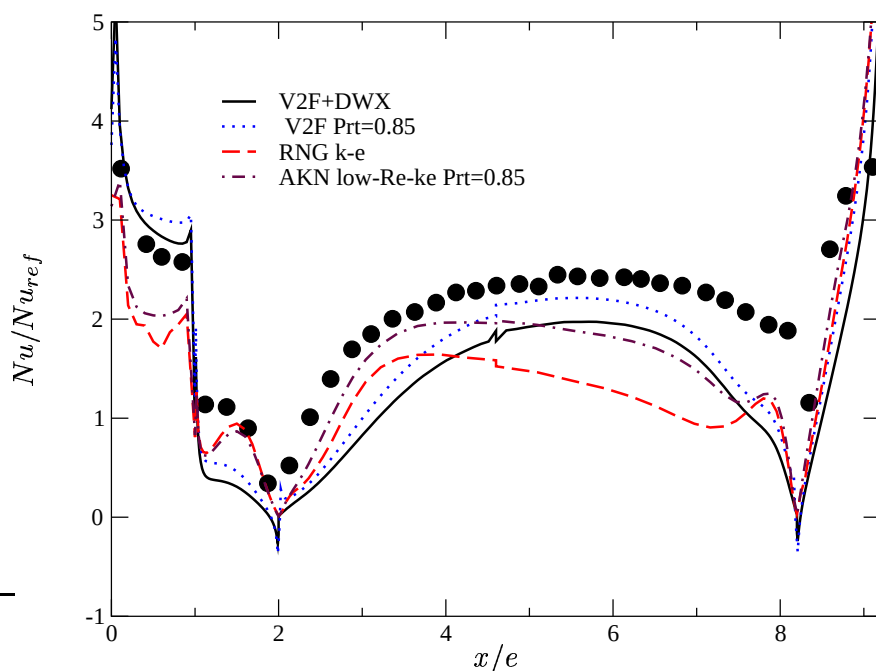
Jako, iż w danych eksperymentalnych nie sprecyzowano warunków brzegowych na



Rysunek 6.7: Profile składowej $-\overline{v'_y v'_y}$ tensora naprężeń turbulentnych (*punkty* - dane pomiarowe wg [150], *linia* - wyniki obliczeń)

ściance, wykonano, podobnie jak w pracy [103], obliczenia dla siatki obejmującej także materiał żebra, przy założeniu $T_w = const$ u podstawy żebra.

Stosując obliczenia sprzężone dla takiej konfiguracji otrzymuje się bardzo dobrą zgodność obliczeń modelem $\overline{v'^2}$ w obszarze żeber z jednoczesnym pogorszeniem wyników w obszarze między żebrami, jak na Rysunku 6.8. Lepszą zgodność zaprezentowano w pracy [103], w tym że tam do obliczeń sprzężonych wykorzystano warunek $q_w = const$, na całości kanału⁵.

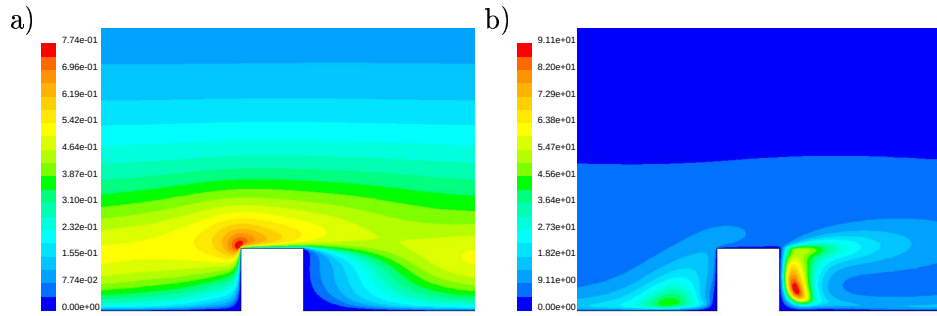


Rysunek 6.8: Zmiana normalizowanej liczby Nusselta - porównanie modeli i danych eksperymentalnych (punkty wg [150])

Na Rysunku 6.8 przedstawiono także zmiany normalizowanej liczby Nusselta otrzymane dla różnych modeli obliczeniowych tj. modelu $\overline{v'^2}$ - f z dołączonym wariantem mo-

⁵Ograniczenia programu Fluent nie pozwoliły na wykonanie sprzężonych obliczeń płyn – ciało stałe z wykorzystaniem warunku $q_w = const$ dla periodycznego obszaru przepływowego.

delu $\overline{\theta'^2}-\epsilon_\theta$ DWX, model $\overline{v'^2}-f$ przy założeniu standardowej wartości liczby Prandtla $Pr_t = 0.85$, model RNG $k-\epsilon$ oraz *low-Reynolds-number* $k-\epsilon$ wg Abe et al. z założeniem $Pr_t = 0.85$.



Rysunek 6.9: Porównanie dystrybucji a) turbulentnej energii kinetycznej k i b) wariancji temperatury $\overline{\theta'^2}$

Wyniki uzyskane dla obu modeli $\overline{v'^2}-f$ są wyraźnie lepsze niż w przypadku domknięć RNG $k-\epsilon$ i *low-Reynolds-number* $k-\epsilon$. Te ostatnie bardziej uwypuklają obecność wiru recyrkulacyjnego przed żebrą, gdzie następuje wyraźny wzrost liczby Nusselta. Wydaje się, iż wyniki uzyskane modelem $\overline{v'^2}-f$ przy uproszczonym założeniu $Pr_t = 0.85$ lepiej odwzorowują dane pomiarowe w obszarze między żebrami, niż dwurównaniowy model turbulentnej wymiany ciepła. W bezpośrednim sąsiedztwie żeber nie ma już większych rozbieżności pomiędzy oboma zastosowanymi wariantami.

Na Rysunku 6.9 a) i b) przedstawiono dystrybucję turbulentnej energii kinetycznej k oraz jej „odpowiednika” w polu temperaturowym czyli wariancję temperatury $\overline{\theta'^2}$. Porównując oba diagramy wyraźnie uwypuklają się różnice będące rezultatem odmiennych źródeł generacji k i $\overline{\theta'^2}$.

6.1.2 Napływ na płytę grzaną

Eksperyment referencyjny związany z badaniem wymiany ciepła w oderwanym strumieniu przy napływie na płytę grzaną zaprezentowano w pracach [30, 31]. Wyniki badań dla prędkości przepływu $U = 17.5\text{m/s}$ zamieszczono w bazie danych DATHET [60]. W tym eksperymencie, przeprowadzonym w tunelu aerodynamicznym, powietrze tłoczone było między płaskimi płytkami w celu zapewnienia dwuwymiarowości przepływu. Poziom turbulencji na wlocie nie przekraczał wartości $Tu = 0.8\%$. Badana płytka, którą wykonano ze stali nierdzewnej miała następujące wymiary główne:

- grubość 20mm,
- szerokość 100mm,
- długość 400mm.

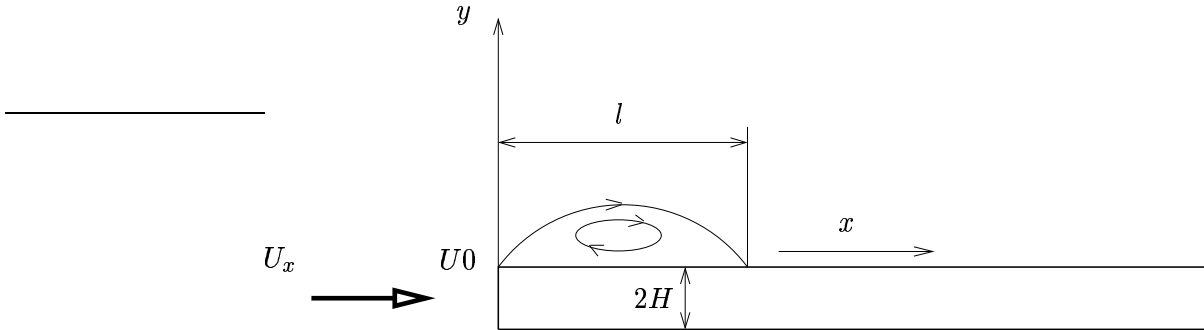
W Tabeli 6.1.2 przedstawiono główne parametry eksperymentalne

Krawędź natarcia płyty została ścięta prostopadle do kierunku przepływu głównego, zapewniając tym samym warunek oderwania przepływu, Rysunek 6.10.

Analizując wyniki badań stwierdzono, iż *przyklejenie* przepływu ma miejsce w odległości równej czterem grubościom płyty od jej krawędzi natarcia i jest niezależne od

$q[\frac{W}{m^2}]$	575
$U[\frac{m}{s}]$	17.5
$Tu[-]$	0.008
$Re[-]$	11700

Tabela 6.1: Główne parametry eksperymentalne

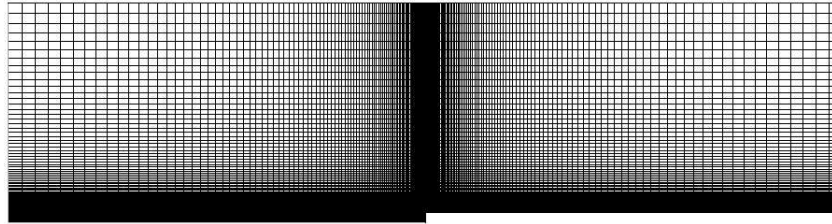


Rysunek 6.10: Przekrój krawędzi natarcia badanej płyty

wartości liczby Reynoldsa związanej z przepływem głównym. W tym miejscu także liczba Nusselta osiąga swoje wartości maksymalne. Proces wymiany ciepła jest najbardziej intensywny w bezpośredniej bliskości krawędzi natarcia płyty, gdzie naprężenia styczne mają największe wartości. Ponowne osiągnięcie przez przepływ stanu pełnego *rozwinienia* dokonuje się bardzo powoli i na długim odcinku [30, 31].

Obliczenia numeryczne

Zdyskretyzowany objętościami kontrolnymi dwuwymiarowy obszar obliczeniowy przedstawiono na Rysunku 6.11. Siatkę o wymiarze 100×100 zagęszczono w obszarze krawędzi natarcia oraz bezpośrednio przy ścianie płyty.



Rysunek 6.11: Siatka numeryczna dyskretyzująca obszar obliczeniowy

W obliczeniach wykorzystano identyczne założenia dla powietrza jak przy modelowaniu kanału uźebrowanego. Zastosowano wariant **2** modelu kombinowanego $\overline{v'^2}$ - f - θ'^2 - ϵ_θ do wyznaczania turbulentnego strumienia pędu i ciepła. Ważnym elementem przy modelowaniu przepływów turbulentnych z oderwaniem jest odpowiednie zadanie warunków brzegowych determinujących turbulentną skalę czasową na wlocie. Determinuje to w bowiem wielkość i intensywność oderwania na płycie. Turbulentną energię kine-

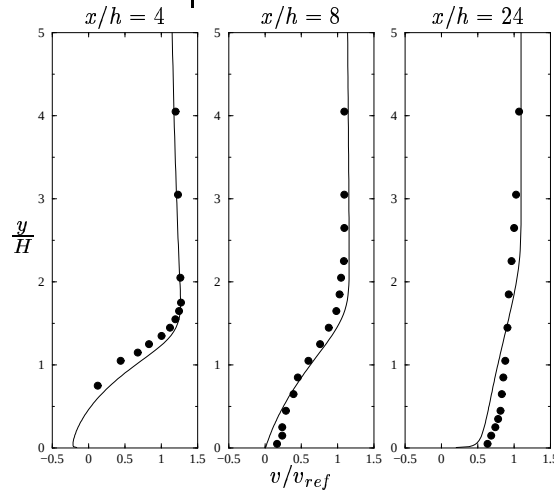
tyczną k można oszacować na podstawie poziomu turbulencji $Tu = \sqrt{v'^2}/v_\infty$ na wlocie przy założeniu izotropowości:

$$k = \frac{v'_i v'_i}{2} \approx \frac{3}{2} v'^2 = \frac{3}{2} (Tu \cdot v_\infty)^2 \quad . \quad (6.3)$$

Nieco trudniejszym zagadnieniem jest oszacowanie wielkości związanej z turbulentną skalą długości, w tym wypadku parametru ϵ . Najczęstszym założeniem jest przyjęcie, iż w obszarze turbulentnym lepkość turbulentna ν_t n -krotnie przewyższa lepkość molekularną ν . Odpowiednio przekształcając formułę lepkości turbulentnej dla standardowego modelu k - ϵ (3.17) otrzymuje się:

$$\epsilon = c_\mu \frac{k}{n\nu} \quad . \quad (6.4)$$

Standardowo przyjmuje się, iż wielkość $n \gg 2$. Dla celów niniejszej analizy przyjęto $n = 10$ co zapewniało otrzymanie oderwania o odpowiedniej długości.



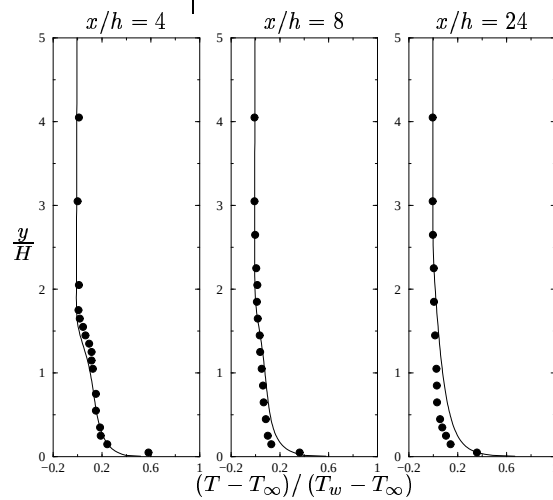
Rysunek 6.12: Profile prędkości normalizowanej v/v_{ref} dla różnych przekrojów x/h ((*punkty* - dane pomiarowe wg [30, 31], *linia* - wyniki obliczeń)

Na Rysunku 6.12 przedstawiono profile prędkości v_x normalizowane prędkością v_∞ dla różnych przekrojów $x/h = 4, 8$ i 24 . Ogólnie zgodność wyników obliczeń z eksperymentem [30, 31] jest dobra, szczególnie dla przekrojów początkowych i dla odwzorowania wysokości obszaru separacji. Numeryczny proces rozwinięcia się powrotnego hydrodynamicznej warstwy przyściennej za obszarem oderwania jest jednak zbyt powolny, co uwiadcza się na wynikach w przekroju $x/h = 24$.

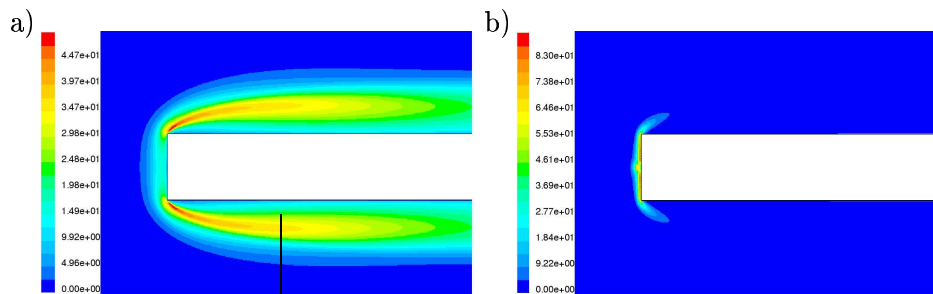
Profile temperatury normalizowanej $(T - T_\infty) / (T_w - T_\infty)$ zaprezentowano na Rysunku 6.13. Także i w tym wypadku różnice uwiadcniają się w obszarze rozbiegu warstwy przyściennej dla przekroju $x/h = 24$, co wynika głównie z niedokładności odwzorowania pola prędkości jak na Rysunku 6.12.

Rozkład pola turbulentnej energii kinetycznej k przy napływie na płasko-ściętą płytę zamieszczono na Rysunku 6.14 a), zaś wariancję temperatury przedstawia θ'^2 Rysunek 6.14 b).

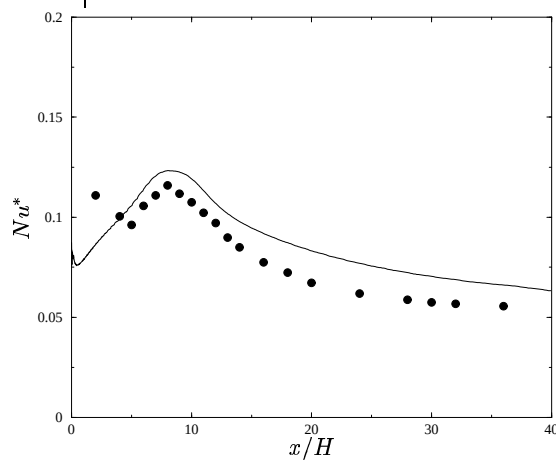
Wreszcie na Rysunku 6.15 przedstawiono zmiany liczby Nusselta normalizowanej przez $Re^{2/3}$ na ścianie płyty. Tak jak można było przewidzieć maksymalną wartość



Rysunek 6.13: Profile temperatury normalizowanej $(T - T_{\infty}) / (T_w - T_{\infty})$ dla różnych przekrojów x/h ((*punkty* - dane pomiarowe wg [30, 31], *linia* - wyniki obliczeń)



Rysunek 6.14: Porównanie dystrybucji a) turbulentnej energii kinetycznej k i b) wariancji temperatury $\overline{\theta'^2}$



Rysunek 6.15: Zmiana znormalizowanej liczby Nusselta na płycie ((*punkty* - dane pomiarowe wg [30, 31], *linia* - wyniki obliczeń)

liczby Nusselta notuje się w punkcie przyklejenia przepływu. Maksymalna wartość obliczona Nu jest przeszacowana o około 10%, jednak charakter zmian wzdłuż ścianki w stosunku do danych eksperymentalnych jest zachowany.

6.1.3 Wnioski

Wyniki analiz przeprowadzonych dla przepływów turbulentnych z wymianą ciepła potwierdziły przydatność modelu $\overline{v'^2}$ - f , połączonego z dwurównaniowym domknięciem turbulentnego strumienia ciepła $\overline{\theta'^2}$ - ϵ_θ dla tego typu zagadnień. Model ten prawidłowo modeluje wielkość oderwań, poziom naprężeń turbulentnych (mimo stosowania hipotezy Boussinesqa), a także zmiany liczby Nusselta na ścianie dla zagadnień z wymianą ciepła. Należy zauważyć, iż weryfikacji dokonano jedynie dla dwuwymiarowych zagadnień obliczeniowych, gdyż takie posłużą do modelowania procesów cieplno-przepływowych w dyfuzorze termicznym w Rozdziale 7.

Rozdział 7

Analiza pracy dyfuzorów termicznych

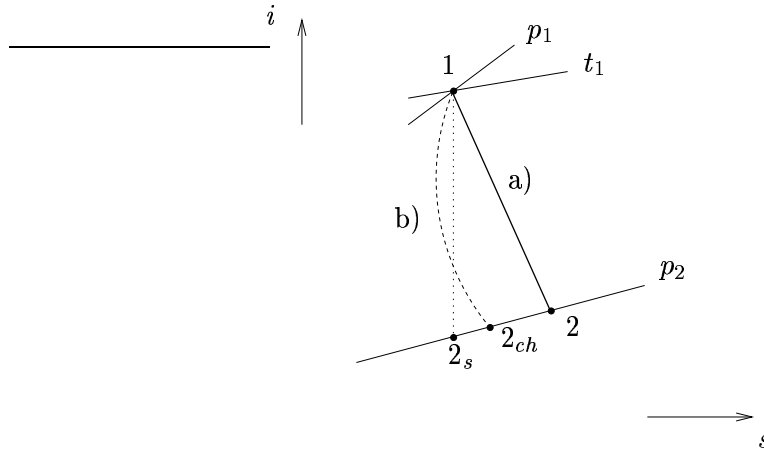
Problematyka dyfuzorów i konfuzorów termicznych sprowadza się do zagadnienia wpływu pola temperatur na pole prędkości. Niezależne rozpatrywanie obu pól w przepływach turbinowych, gdzie występują zarówno duże prędkości jak i duże gradienty temperatury, jest sporym uproszczeniem [58].

Dyfuzor termiczny jest elementem, w którym występuje szczególny wpływ temperatury na pole prędkości. Parametrem kontrolującym efekty hamowania jest zmiana gęstości, a więc zmiana objętości właściwej ochładzanego czynnika. Krytycznym elementem procesu chłodzenia łopatki jest rozwój warstwy przyściennej i temperatura przepływu głównego. Warstwa przyścienna stanowi pewną barierę dla procesów wymiany ciepła. Osobnym zagadnieniem jest wymiana ciepła pomiędzy dwoma czynnikami o różnej temperaturze tj. strugą chłodzącą i przepływem głównym. Bariera w postaci powierzchniowej wymiany ciepła zanika, następuje więc intensyfikacja procesu.

Z punktu widzenia turbulentnych przepływów z wymianą ciepła, najlepszym urządzeniem do analizy termicznych efektów dyfuzorowych jest turbina gazowa w której występuje zarówno wiele stref dyfuzorowych [154], [55], jak i obszarów o bardzo zróżnicowanej temperaturze [58] – od maksymalnych wartości rzędu 2000 K w komorze spalania i pierwszych stopni turbinowych do minimalnych rzędu 600 K w miejscu wtrysku chłodzącej pary lub 900 K przy wtrysku powietrza [155].

W przypadku chłodzenia filmowego, doprowadzenie do strumienia głównego strugi chłodzącej, powoduje z jednej strony pewne jego ochłodzenie, przekładające się na wyhamowanie przepływu, z drugiej zaś strony następuje przyspieszenie czynnika na wskutek zwiększenia całkowitego strumienia masy w kanale międzyłopatkowym. Z tego względu rzeczywista ekspansja spalin w warunkach intensywnego chłodzenia, odbiega od ekspansji idealnej. Uwzględnienie tych zjawisk jest niezmiernie ważne w procesie projektowym chłodzonych palisad łopatkowych. Przebieg ekspansji w stopniu chłodzonym turbiny gazowej przedstawiono na Rysunku 7.1. Kanał międzyłopatkowy chłodzonej turbiny gazowej jest więc przykładem pewnego typu dyfuzora kombinowanego, w którym nakładają się efekty mechaniczne (od obrotów palisady wirnikowej), geometryczne związane z rozszerzeniem się kanału, termiczne od chłodzenia i upustowe¹ od doprowadzenia dodatkowego strumienia masy czynnika.

¹ W zasadzie odwrotne do upustowych



Rysunek 7.1: Linie ekspansji adiabatycznej a) i z chłodzeniem b) – na podstawie monografii Chmielniaka i innych [57]. Strata entropii turbiny chłodzonej jest niższa niż turbiny niechłodzonej.

7.1 Właściwości ruchu płynu w dyfuzorze termicznym

7.1.1 Równania gazodynamiki

Opisu przemian stanu czynnika ściśliwego płynącego przez kanały o przekroju stałym i zmiennym, którego ścianki są grzane lub chłodzone, dokonuje się najczęściej w ujęciu *zerowymiarowym*, dla średnich wartości parametrów termodynamicznych w danym przekroju kanału [4], [3], [1], [156], [2].

Zakładając, iż rozpatrywany czynnik jest gazem idealnym, podlegającym termicznemu równaniu stanu oraz wykorzystując zależności przemiany izentropowej można zapisać szereg podstawowych zależności gazodynamiki, które wiążą wybrane parametry termodynamiczne czynnika podlegającego przemianie, a które wynikają z równań zachowania masy, pędu i energii zapisanych w ujęciu *zerowymiarowym*.

Podstawowe wzory dla procesu izentropowego przedstawia się w formie [157], [84]:

- termiczne równanie stanu gazu doskonałego

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad , \quad (7.1)$$

- kaloryczne równanie stanu doskonałego

$$i = c_p T \quad , \quad (7.2)$$

- równanie przemiany izentropowej

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = const \quad , \quad (7.3)$$

- prędkość dźwięku

$$a = \sqrt{\kappa R T} \quad . \quad (7.4)$$

Parametrem charakterystycznym przepływu ściśliwego jest liczba Macha definiowana jako stosunek średniej prędkości płynu c do lokalnej prędkości dźwięku a :

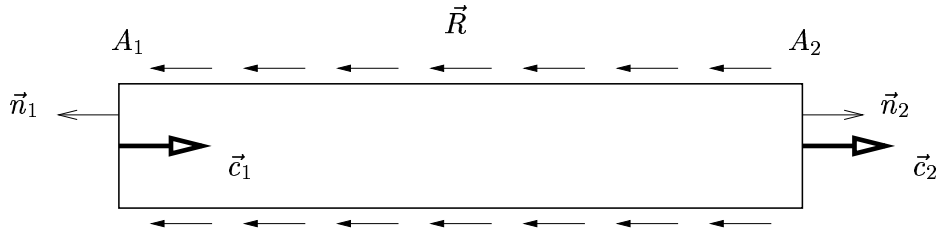
$$Ma = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{\kappa RT}} \quad . \quad (7.5)$$

Innym parametrem charakterystycznym jest współczynnik prędkości (liczba Lavalà) λ , która określa stosunek prędkości do krytycznej prędkości dźwięku a^* i charakteryzuje stopień oddalenia parametrów przepływu od stanu krytycznego [158].

$$\lambda = \frac{c}{a^*} = \frac{c}{\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1}RT}} \quad . \quad (7.6)$$

Pomiędzy liczbą Macha i Lavalà zachodzi następująca relacja [84]:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\kappa+1}{2}} \frac{Ma}{\sqrt{1 + \frac{\kappa-1}{2}Ma^2}} \quad . \quad (7.7)$$



Rysunek 7.2: Hipotetyczny kanał przepływowy

Równanie ciągłości Równanie ciągłości w najprostszej postaci dla odizolowanego układu przepływowego zawierającego wlot 1 – 1 i wylot 2 – 2, jak na Rysunku 7.2, przybiera postać:

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = \rho_1 c_1 A_1 - \rho_2 c_2 A_2 = 0 \quad . \quad (7.8)$$

Przy założeniu stałego przekroju kanału $A_1 = A_2$ powyższe równanie redukuje się do zapisu:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad . \quad (7.9)$$

Równanie zachowania pędu Równanie bilansu sił w obrębie kanału można przedstawić w ogólnej formie [4]:

$$\vec{R} = (\dot{m}_1 \vec{c}_1 - \dot{m}_2 \vec{c}_2) + (\vec{N}_1 - \vec{N}_2) + \vec{F}_M \quad , \quad (7.10)$$

gdzie siła $\vec{N}$ pochodzi od ciśnienia statycznego działającego w przekroju kanału tj. $\vec{N} = p\vec{n}A$. Postępując podobnie jak dla równania ciągłości tzn. upraszczając zagadnienie do kanałów o stałym przekroju $A_1 = A_2$ oraz zakładając, iż siła masowa $\vec{F}_M$ oraz reakcja (siła tarcia) $\vec{R}$ są równe zeru można wykorzystując zależność (7.9) zapisać [2]:

$$\rho c_1^2 + p_1 = \rho c_2^2 + p_2 \quad . \quad (7.11)$$

Równanie zachowania energii Równanie energii dla kanału z odprowadzaniem ciepła Δq można przedstawić w sposób następujący:

$$i_{1c} = i_{2c} + \Delta q + \Delta q_R \quad , \quad (7.12)$$

gdzie i_c oznacza entalpię całkowitą, a $\Delta q_R = 0$ jest ciepłem doprowadzonym na skutek występowania tarcia. Przyrost ciepła pomiędzy przekrojem wlotowym i wylotowym kanału odpowiada zmianie temperatury całkowitej w tych przekrojach i przy założeniu, iż ciepło właściwe $c_p = \text{const}$ można przyrost ciepła określić jako równy

$$\Delta q = \Delta i_T = c_p (T_{01} - T_{02}) \quad , \quad (7.13)$$

gdzie T_{01} oraz T_{02} stanowią odpowiednio średnią temperaturę spiętrzenia na wlocie i wylocie z kanału. Rozpisując dalej zależność (7.12) przy jednoczesnym wykorzystaniu definicji $R = c_p - c_v$, $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$, równania entalpii (7.2) oraz równania stanu (7.1) i pominięciu wpływu tarcia otrzymuje się w rezultacie:

$$\frac{c_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{c_2^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \Delta q \quad . \quad (7.14)$$

Z uproszczonych równań bilansowych ciągłości (7.9), pędu (7.11) i energii (7.14) wynika szereg współzależności, wiążących ze sobą parametry termodynamiczne w przekrojach wlotowym i wylotowym kanału, które określają [2]:

- zmiany ciśnienia statycznego

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \kappa Ma_1^2}{1 + \kappa Ma_2^2} \quad , \quad (7.15)$$

- zmiany prędkości

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{p_1}{p_2} \frac{T_2}{T_1} = \frac{Ma_1^2 (1 + \kappa Ma_2^2)}{Ma_2^2 (1 + \kappa Ma_1^2)} \quad , \quad (7.16)$$

- zmiany temperatury

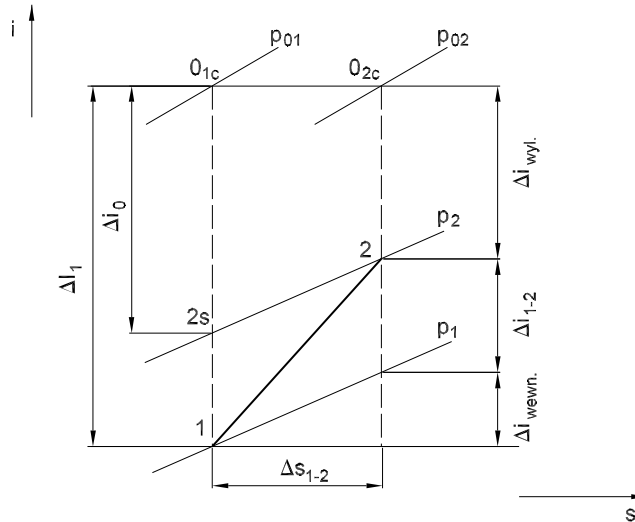
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{Ma_2^2 p_2^2}{Ma_1^2 p_1^2} = \frac{Ma_2^2}{Ma_1^2} \left[\frac{1 + \kappa Ma_1^2}{1 + \kappa Ma_2^2} \right]^2 \quad . \quad (7.17)$$

Powyższe wyprowadzenia są ważne jedynie dla pełnej odwracalności procesu, przy założeniu iż czynnik roboczy jest gazem doskonałym.

7.1.2 Charakterystyka przepływów dyfuzorowych

W literaturze można znaleźć różne definicje przepływów dyfuzorowych. Klasyczną definicją jest określanie mianem przepływu dyfuzorowego takiego, w którym następuje zamiana części energii kinetycznej czynnika na energię potencjalną reprezentowaną przez ciśnienie [1], [55], [159], [2]. Za przepływ dyfuzorowy uważa się taki, który występuje przy dodatnim wzdłużnym gradiencie ciśnienia $dp/dx > 0$. Cechą charakterystyczną przepływów z dodatnim wzdłużnym gradientem ciśnienia jest szybkie narastanie grubości warstwy przyściennej, które może przy odpowiednich warunkach prowadzić do oderwania strumienia. Główny nacisk w badaniach dyfuzorów jest więc skierowany na minimalizację strat oraz na zapobieganie powstawaniu oderwania [55].

Praktycznie, najważniejszym zadaniem dyfuzorów pozostaje jednak wyhamowanie czynnika, najczęściej w celu zmniejszenia straty wylotowej jak to ma miejsce w przypadku króćców wylotowych turbin [66], [55], [54], czy też uspokojenia przepływu i wyrównanie profilu prędkości tak jak w dyfuzorach zaworowych [55], [160], [161], [162] czy w obszarze rozszerzonych na wylocie kanałów doprowadzających chłodziwo przy filmowym chłodzeniu turbin gazowych [163], [164], [165].



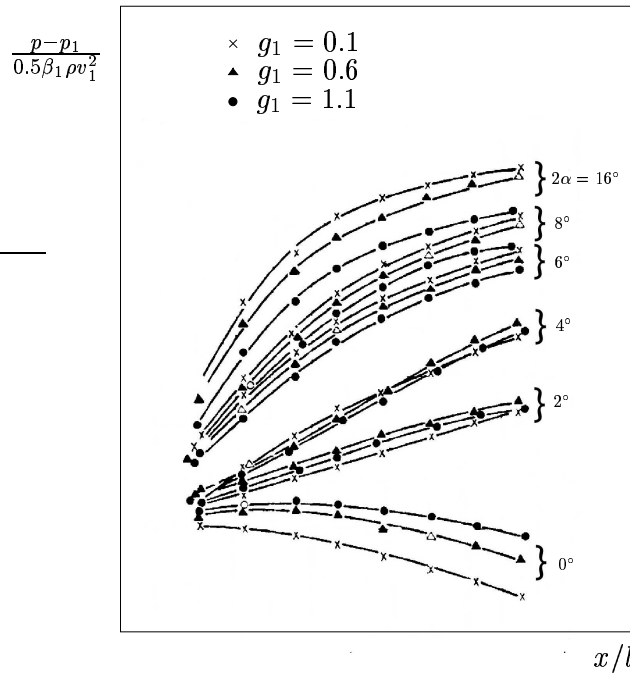
Rysunek 7.3: Schemat teoretycznego procesu sprężania w dyfuzorze geometrycznym w układzie i - s , w którym $i_{1c} = i_{2c}$ [55], [54]. Z powyższego Rysunku wynika, iż wlotowa energia kinetyczna czynnika ΔI została na wylocie zmniejszona do energii kinetycznej $\Delta i_{wyl.}$ w zamian za zwiększenie ciśnienia statycznego od p_1 do p_2 i podniesienie entalpii statycznej od i_1 do i_2 .

Nie ma możliwości opóźnienia czynnika w dyfuzorze do zera, zawsze więc istnieje strata wylotowa, reprezentowana na Rysunku 7.3 przez $\Delta i_{wyl.}$, która wyraża się wartością energii kinetycznej wypływającego z dyfuzora strumienia czynnika. Diagram 7.3 przedstawia sytuację dla przepływu przez kanał dyfuzorowy, bez wymiany ciepła z otoczeniem, kiedy poziom entalpii całkowitej pozostaje identyczny zarówno na początku jak i końcu procesu sprężania. Przyrost entalpii statycznej w dyfuzorze, związany z konwersją energii kinetycznej w energię potencjalną, reprezentuje Δi_{1-2} , zaś straty wewnętrzne związane między innymi z tarciem $\Delta i_{wewn.}$. Równanie bilansu energii można sprowadzić do uproszczonej postaci [55]:

$$i_{c1} - i_1 = \Delta I_1 = \Delta i_{wewn.} + \Delta i_{1-2} + \Delta i_{wyl.} \quad . \quad (7.18)$$

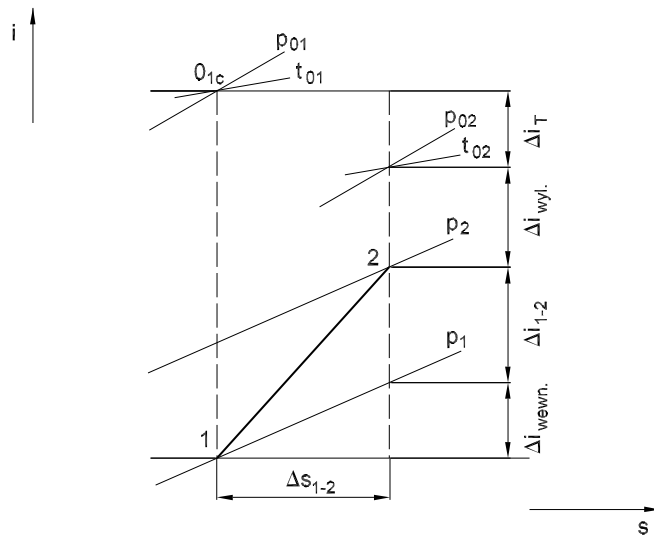
Przyrost ciśnienia, a więc i stopień hamowania przepływu w dyfuzorze geometrycznym jest determinowany głównie poprzez kąt rozwarcia ścianek dyfuzora i wartość prędkości wlotowej, co uwidacznia Rysunek 7.4. Ciekawym aspektem jest spadek ciśnienia dla kąta $\alpha = 0$, to jest dla przepływu w rurze, będący efektem występowania sił tarcia.

Uproszczona analiza zerowymiarowa, prowadząca do szeregu zależności (7.15), (7.16) czy (7.17), wskazuje iż wyhamowania czynnika można dokonać nie tylko poprzez odpowiednie kształtowanie kanału przepływowego, ale także dzięki jego chłodzeniu. Schemat



Rysunek 7.4: Rozkład ciśnień w dyfuzorze, wyrażony zależnością wielkości $(p - p_1) / \frac{1}{2}\beta_1\rho v_r$ od współrzędnej x/l , kąta rozwarcia α i gradientu prędkości g_1 – na podstawie monografii Tuliszki [159]. Dla kąta rozwarcia dyfuzora $\alpha = 0$ otrzymujemy zamiast przyrostów - spadek ciśnienia wzdłuż kanału.

teoretycznego procesu sprężania zachodzącego w dyfuzorze termicznym przedstawiono na Rysunku 7.5. W stosunku do procesu zachodzącego w dyfuzorze geometrycznym,



Rysunek 7.5: Schemat teoretycznego procesu sprężania w dyfuzorze termicznym w układzie $i-s$ [54]

w przypadku dyfuzora termicznego pojawiają się dodatkowo straty ciepłe związane

z chłodzeniem kanału [1]. Chłodzenie czynnika powoduje zmniejszenie poziomu entalpii całkowitej, a w rezultacie spadek energii rozporządzalnej na wylocie. Bilans energii przyjmuje postać:

$$\Delta I = \Delta i_{wewn.} + \Delta i_{1-2} + \Delta i_{wyl.} + \Delta i_T \quad . \quad (7.19)$$

Współczynnik strat całkowitych wyznacza się na podstawie równania energii po odniesieniu poszczególnych członów do energii rozporządzalnej na wlocie ΔI .

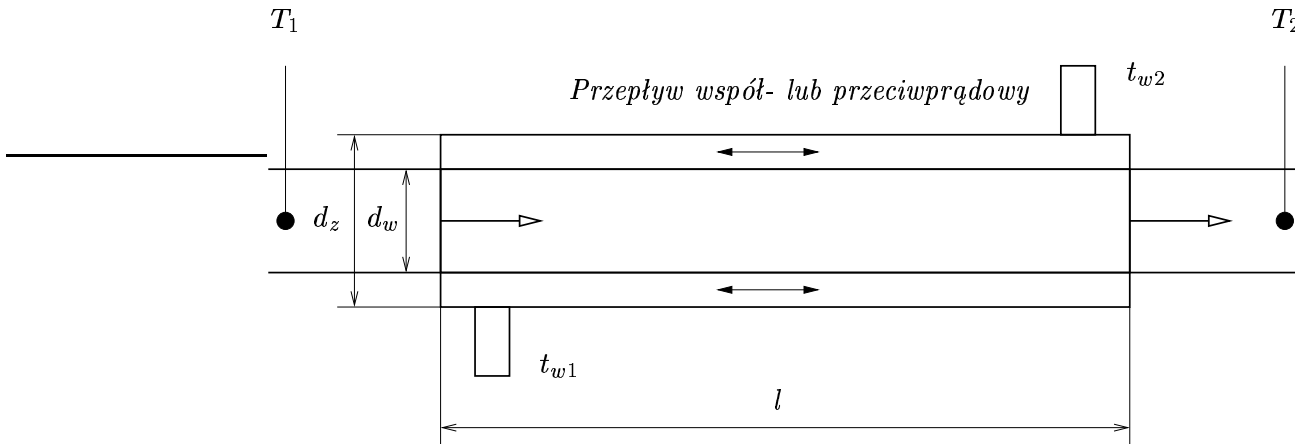
$$\zeta_c = \frac{\Delta i_{wewn.} + \Delta i_{wyl.} + \Delta i_T}{\Delta I} = \zeta_{wewn.} + \zeta_{wyl.} + \zeta_T \quad . \quad (7.20)$$

Silne chłodzenie w obszarze przyściennym prowadzi do zmiany profilu prędkości czynnika w kanale. Profil prędkości odpowiada kształtem profilom uzyskiwanym w dyfuzorze geometrycznym.

7.2 Dyfuzory termiczne na przykładzie rury chłodzonej powierzchniowo

7.2.1 Opis badań

Badania numeryczne dyfuzora termicznego wykonano w sposób zbliżony do warunków eksperymentalnych przedstawionych w pracy Jesionka i Wiewiórkowskiej [56]. W pracy tej podano wyniki pomiarów oraz obliczeń analitycznych dla siedmiu przebiegów zestawione tabelarycznie w Tabeli 7.1. Przedstawiono także w sposób graficzny na Rysunku 7.8 rozkład ciśnienia wzdłuż chłodzonej rury oraz zmianę profili prędkości na wlocie i wylocie z kanału - Rysunek 7.7.



Rysunek 7.6: Schemat badanego dyfuzora termicznego [56]

Parametr S opisany w ostatniej kolumnie Tabeli 7.1 jest bezwymiarowym parametrem kryterialnym, dzięki któremu można określić charakter przepływu z wymianą ciepła w kanałach o stałym przekroju poprzecznym². W pracy [56] kryterium S zdefi-

²W przypadku $S < 1$ ruch płynu odbywa się przy dominującym oddziaływaniu pracy tarcia. Jako, że prędkość w kierunku wylotu rośnie kanał jest konfuzorem. Dla $S > 1$ głównym oddziaływaniem jest odprowadzanie ciepła, przez co w kanale zachodzi przepływ dyfuzorowy [56]

Lp.	$T_1[^\circ C]$	$c_1[\frac{m}{s}]$	$T_2[^\circ C]$	$c_2[\frac{m}{s}]$	$\Delta t[^\circ C]$	$\frac{c_2}{c_1}$	S
1	67	45.8	42.4	40.8	24.6	0.8908	3.4
2	107	48.3	56.0	39.1	51.0	0.8095	6.3
3	142	53.1	69.0	39.3	73.0	0.7401	7.4
4	160	55.2	75.8	39.5	84.2	0.7156	7.9
5	70	22.0	39.0	20.6	31.0	0.9364	18.4
6	100	25.0	48.0	21.1	52.0	0.8444	24.8
7	210	30.0	71.0	21.8	139.0	0.7262	44.3

Tabela 7.1: Zestawienie wyników pomiarów i obliczeń - przepływ współprądowy

niowano w sposób następujący:

$$S = \frac{2(\kappa - 1)}{\kappa \lambda_f l} \cdot \frac{c_p \Delta T_0 d}{c_1^2} \quad (7.21)$$

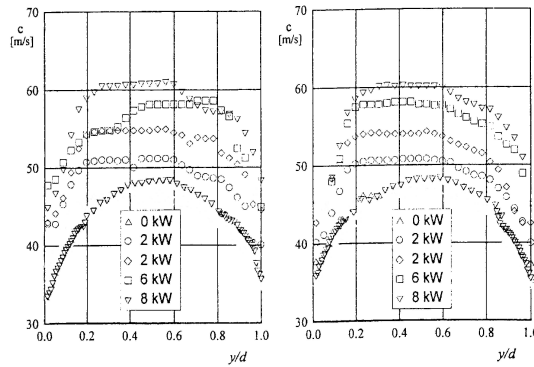
W równaniu powyższym poszczególne wielkości oznaczają kolejno: κ - wykładnik adiabaty, λ_f - współczynnik oporu tarcia, c_p - ciepło właściwe, l - długość rury, d - średnica rury, c^2 - prędkość średnia w przekroju wlotowym. Przyjęto, że parametr S określa się dla wielkości na wlocie. Przekształcając wyrażenie (7.21) poprzez wykorzystanie zależności przemiany izentropowej i wzoru Darcy'ego-Weisbacha [158]:

$$\Delta p = \rho \lambda_f \frac{l}{d} \frac{c^2}{2} \quad (7.22)$$

który definiuje spadek ciśnienia na wskutek oporów tarcia, można otrzymać inaczej wyrażoną zależność dla parametru kryterialnego S :

$$S = \rho R \left(\frac{\Delta T_0}{\Delta p} \right) \quad (7.23)$$

W zależności (7.23) wielkość R jest stałą gazową.

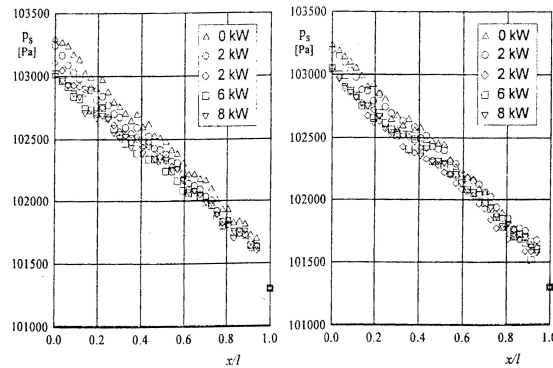


Rysunek 7.7: Profile prędkości w chłodzonej rurze w przepływie współprądowym (lewa strona) i przeciwprądowym (prawa strona) dla różnych wartości odebranego strumienia ciepła $\dot{Q}_{1-2} = \dot{m} \Delta q$ – na podstawie pracy [56]

Na Rysunku 7.7 przedstawiono rozkłady prędkości w przekroju wylotowym dla wszystkich obciążeń cieplnych zarówno układu współ- jak i przeciwprądowego. Profil prędkości w przekroju wylotowym jest symetryczny i równomierny. Dla zrealizowanego

zakresu eksperymentu rozwój profilu prędkości zbliżony jest we wszystkich przypadkach.

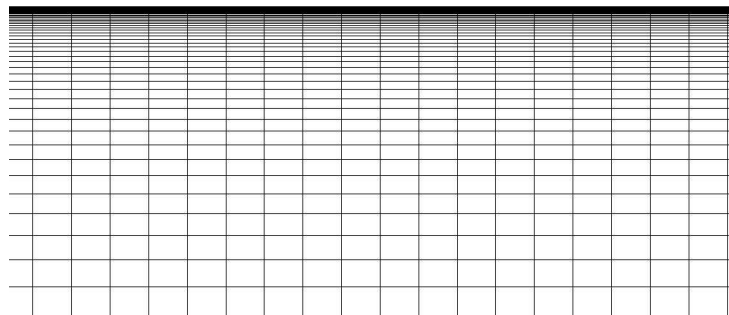
Efekt dyfuzorowy określany stosunkiem $\frac{c_2}{c_1}$ osiągnął w warunkach eksperymentalnych wartość 0.7.



Rysunek 7.8: Rozkład ciśnienia statycznego w chłodzonej rurze w przepływie współprądowym (lewa strona) i przeciwproudowym (prawa strona) dla różnych wartości odebranego strumienia ciepła $\dot{Q}$ – na podstawie pracy [56]

Na Rysunku 7.8 przedstawiono spadek ciśnienia statycznego w dyfuzorze termicznym w funkcji długości kanału pomierzone dla pięciu różnych temperatur powietrza na wlocie. Rozkład ciśnień statycznych ma charakter liniowy dla każdej wartości dostarczonej mocy cieplnej. Wraz ze wzrostem obciążenia cieplnego dyfuzora termicznego spadek ciśnienia jest coraz mniejszy, co jest wynikiem malejącej w coraz większym stopniu straty ciśnienia pomiędzy przekrojami kontrolnymi.

Eksperyment numeryczny Geometrię ograniczono do osiowosymetrycznego obszaru symetrycznego. Zastosowano podobną jak w eksperymencie [56] względną długość rury³ $l/d = 100$. W celu pełnego rozwinięcia warstwy przyściennej zastosowano odcinek wlotowy o długości odpowiadającej $40d$.



Rysunek 7.9: Osiowosymetryczna siatka numeryczna na części obszaru obliczeniowego

³Odniesioną do średnicy rury d

Niniejszą analizę wykonano dla szerszego niż w eksperymencie [56] zakresu liczb Macha na wlocie do sekcji chłodzonej $Ma_1 = 0.05 \div 0.7$. Rurę „chłodzoną” przy założeniu stałej temperatury na ścianie. Jako czynnik roboczy zastosowano powietrze o temperaturze na wlocie do kanału zbliżonej do temperatury spotykanej w pierwszych łopatkach turbiny gazowej $T_1 = 1500\text{K}$. Do badań wykorzystano model $V2F-\overline{\theta'^2}-\epsilon_\theta$, który przedstawiono i zweryfikowano w Rozdziale 5 i Rozdziale 6. Model ten z założenia ma pracować poprawnie w obszarach przepływu dyfuzorowego z wymianą ciepła. Podobnie jak dla analiz przeprowadzonych w Rozdziale 5 i 6, współczynnik lepkości molekularnej μ , ciepło właściwe c_p oraz molekularny współczynnik dyfuzji ciepła przedstawiono w funkcji temperatury. Dla ustalonej długości i średnicy rury zmieniano obciążenie cieplne ścianki poprzez zmianę jej temperatury i badano wpływ tych zmian na rozkład prędkości i ciśnienia. Obciążenie wyrażano poprzez współczynnik intensywności chłodzenia zdefiniowany w pracy [2]:

$$\bar{q} = 1 - \frac{T_{02}}{T_{01}} \quad . \quad (7.24)$$

7.2.2 Analiza wyników

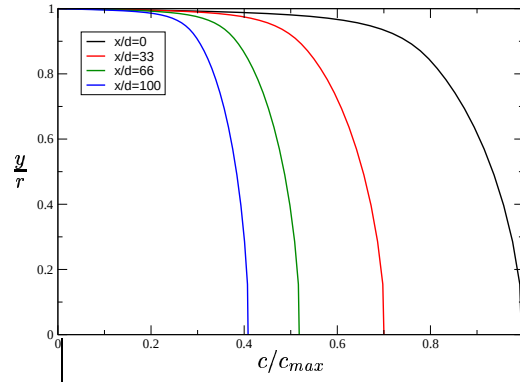
Najważniejsze zmiany dokonują się w obszarze rozbiegu termicznego rury chłodzonej, tam gdzie gradient temperatury pomiędzy ścianką, a przepływającym czynnikiem jest największy. Taka sytuacja może mieć miejsce na przykład przy aptywie gorącego czynnika roboczego z komory spalania na chłodzone łopatki pierwszych stopni turbiny. Różnice temperatury pomiędzy oboma czynnikami przekraczają 500 K, stąd i intensywność procesów dyfuzorowych w obszarze warstwy przyściennej na łopatkę powinna być zauważalna.

Rozpatrując zwykły przepływ przez rurę chłodzoną, można dojść do ciekawych wniosków. W rurze poddanej intensywnemu chłodzeniu nie następuje zauważalny przyrost ciśnienia statycznego, będący efektem istnienia warunków dyfuzorowych, a który wynika z zależności (7.15). Jest on niwelowany poprzez tarcie w rurze, podobnie jak na Rysunku 7.4. Porównanie teoretycznych i obliczonych zmian ciśnienia statycznego w kanale przedstawiono na Rysunku 7.11. Jednak na wskutek zmian parametrów czynnika, a szczególnie spadku objętości właściwej v następuje wyhamowanie prędkości w rurze chłodzonej, jak na Rysunku 7.10.

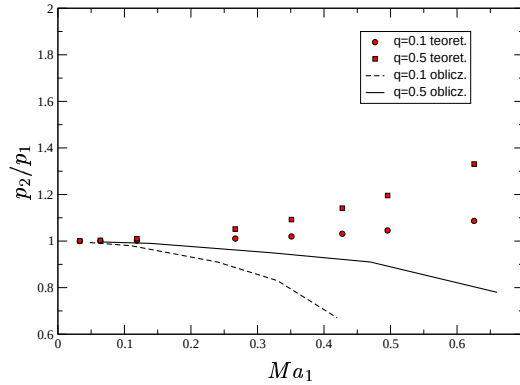
Na kolejnych diagramach przedstawiono zmiany parametrów termodynamicznych przy przepływie przez rurę chłodzoną, dla zmieniającej się liczby Macha Ma_1 na wlocie i różnym obciążeniu cieplnym, reprezentowanym przez współczynnik intensywności chłodzenia $\bar{q}$.

Na Rysunku 7.12 przedstawiono odniesione zmiany ciśnienia statycznego p_2/p_1 . Wraz ze wzrostem liczby Macha na wlocie ciśnienie statyczne w przekroju wylotowym maleje w sposób gwałtowny. Jak widać wzrost intensywności chłodzenia $\bar{q}$ przyczynia się do zmniejszenia spadku p_2/p_1 . Dla wartości intensywności chłodzenia $\bar{q} \approx 0.6$ i przy niskiej wlotowej liczbie Macha Ma_1 następuje wyrównanie tarcowego spadku ciśnienia przez wzrost ciśnienia wywołany wyhamowaniem przepływu, stąd p_2 pozostaje w przybliżeniu takie same jak p_1 .

Spadek prędkości c_2/c_1 na odcinku chłodzenia przedstawiono na Rysunku 7.13. Spadek prędkości jest proporcjonalny do obciążenia cieplnego dyfuzora termicznego. Dla wyższych liczb Macha Ma_1 i małych wartości współczynnika $\bar{q}$ zamiast spadku prędkości czynnik ulega przyspieszeniu.



Rysunek 7.10: Profile prędkości normalizowanej c/c_{max} , dla czterech przekrojów położonych w odległości $x/d = 0, 33, 66$ i 100 od początku obszaru chłodzenia rury dla przypadku, gdy $Ma_1 = 0.2$ i $\bar{q} = 0.6$

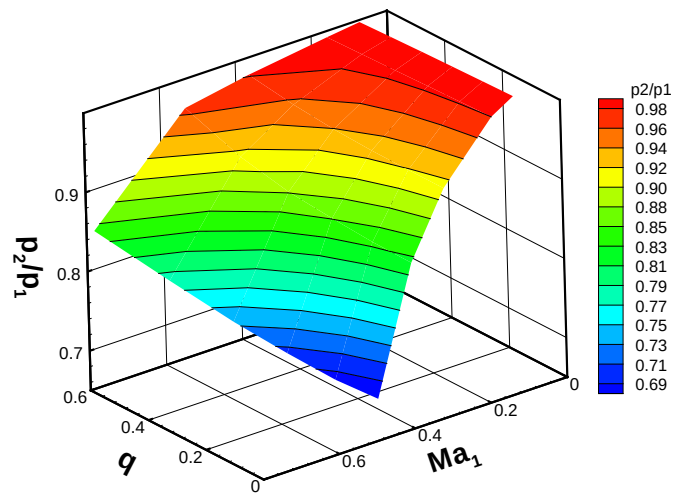


Rysunek 7.11: Zmiana odniesionego ciśnienia statycznego p_2/p_1 w funkcji liczby Ma_1 na wlocie dla różnych wartości współczynnika intensywności chłodzenia $\bar{q}$. Wielkości teoretyczne uzyskano z wzoru (7.15).

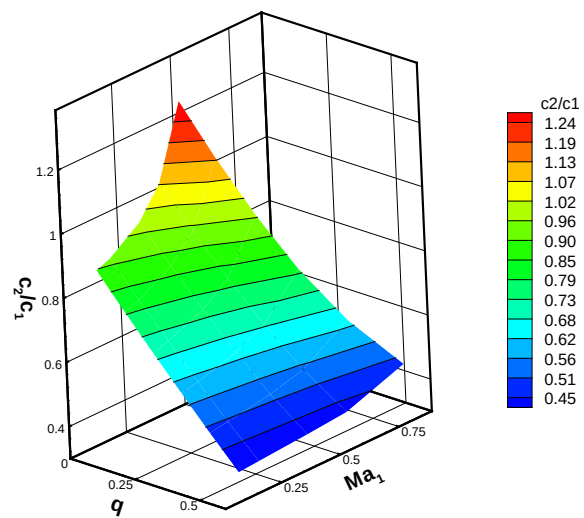
Zmiany odniesionej temperatury statycznej T_2/T_1 dla zrealizowanego zakresu obliczeniowego przedstawiono na Rysunku 7.14. W rozpatrywanym zakresie Ma_1 wartości T_2/T_1 odpowiadające różnym $\bar{q}$ są w zasadzie stałe.

Spadek współczynnika prędkości (liczby Laval'a) od λ_1 do λ_2 jest charakterystyczną wielkością dyfuzora termicznego [2]. Na Rysunku 7.15 przedstawiono zmiany prędkości λ_2 w przekroju wylotowym rury chłodzonej przy różnej intensywności chłodzenia $\bar{q}$.

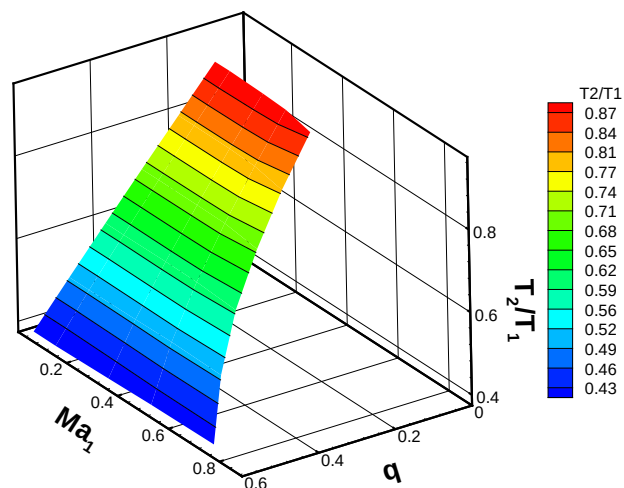
Dodatkowo na Rysunku 7.16 zobrazowano zmiany bezwymiarowej liczby S obliczonej według zależności (7.23). Wzrost obciążenia cieplnego dyfuzora termicznego prowadzi do gwałtownego wzrostu S szczególnie dla niskich wartości Ma_1 na wlocie.



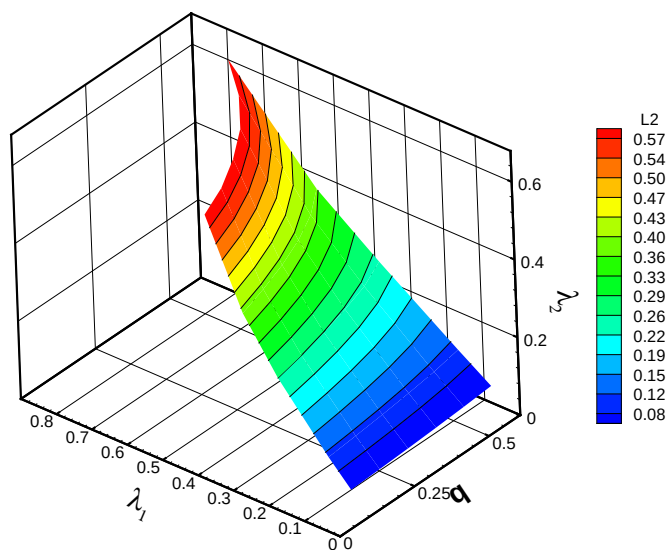
Rysunek 7.12: Zmiana odniesionego ciśnienia statycznego p_2/p_1 w funkcji liczby Ma_1 na wlocie dla różnych wartości współczynnika intensywności chłodzenia $\bar{q}$



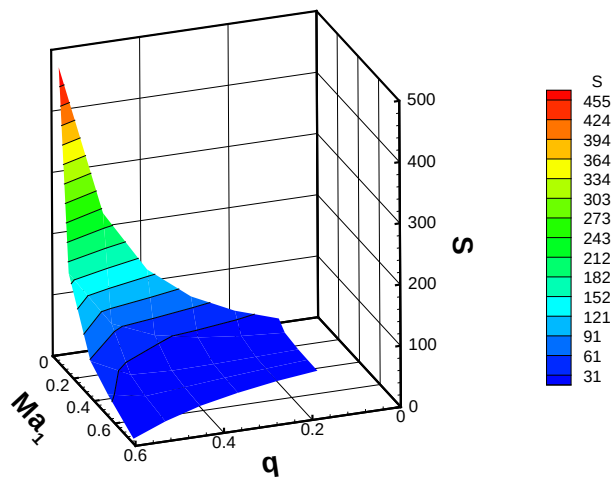
Rysunek 7.13: Zmiana bezwymiarowej prędkości c_2/c_1 w funkcji liczby Ma_1 na wlocie dla różnych wartości współczynnika intensywności chłodzenia $\bar{q}$



Rysunek 7.14: Zmiana bezwymiarowej temperatury statycznej w funkcji liczby Ma_1 na wlocie dla różnych wartości współczynnika intensywności chłodzenia $\bar{q}$



Rysunek 7.15: Zmiana liczby λ_2 na wylocie w funkcji prędkości λ_1 na wlocie dla różnych wartości współczynnika intensywności chłodzenia $\bar{q}$



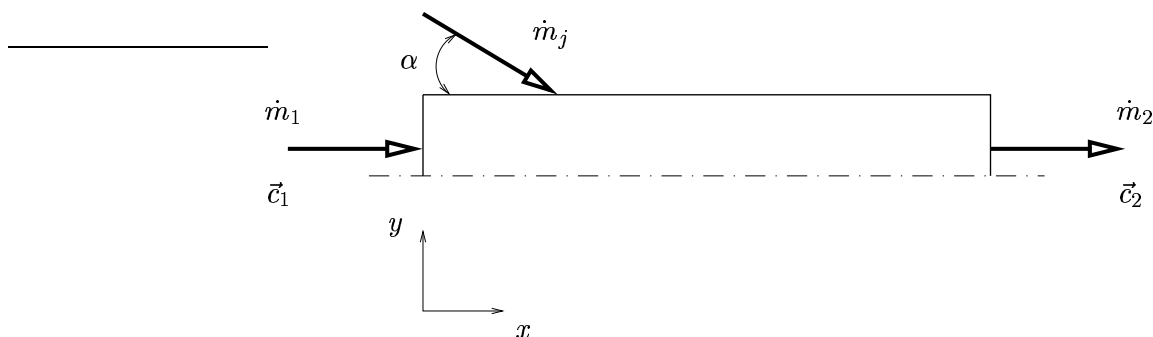
Rysunek 7.16: Zmiana bezwymiarowego parametru S (według zależności (7.23)) w funkcji liczby Ma_1 na wlocie dla różnych wartości współczynnika intensywności chłodzenia $\bar{q}$. Z diagramu wynika, iż największą sprawność dyfuzora termicznego uzyskujemy dla małych prędkości przepływu na wlocie i zwiększonej intensywności chłodzenia.

7.3 Dyfuzory termiczne na przykładzie rury chłodzonej filmowo

7.3.1 Opis badań

W poprzednim podrozdziale przedstawiono wyniki obliczeń dla przepływu w rurze chłodzonego powierzchniowo tj. poprzez zadanie odpowiednio niskiej temperatury ścianki rury. Niniejsza analiza dotyczy innego zagadnienia, w którym gorące powietrze płynące w rurze o promieniu r_0 jest chłodzone strumieniem wtryskiwanego powietrza zimnego. Dla celów analizy zmieniano zarówno kąt wtrysku powietrza chłodzącego α , jak i ilość wtryskiwanego czynnika $\dot{m}_j$. Kąt wtrysku zmieniano w granicach $\alpha = 20 \div 50$, zaś strumień chłodziwa w zakresie $\dot{m}_j/\dot{m} = 5 \div 25\%$.

Schemat obszaru obliczeniowego przedstawiono na Rysunku 7.17. Miejsce wtrysku powietrza chłodzącego zlokalizowano w odległości $x/d = 5$ od wlotu głównego.



Rysunek 7.17: Szkic osiowoosymetrycznej rury z wtryskiem powietrza chłodzącego $\dot{m}_j$ pod kątem α

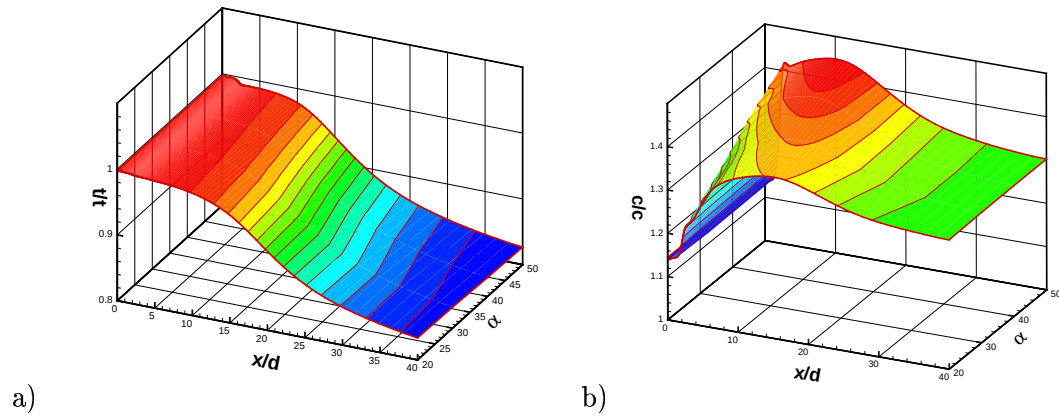
Obszar obliczeniowy dykretyzowano strukturalną siatką numeryczną. Do analizy wykorzystano, podobnie jak w przypadku rury chłodzonej powierzchniowo, kombinowany model $V2F-\overline{\theta'^2}-\epsilon_\theta$ opisany w Rozdziale 5 i zweryfikowany w Rozdziale ???. Podobnie jak dla wcześniejszych obliczeń zastosowano odpowiednie funkcje temperatury dla współczynnika lepkości molekularnej μ , przewodności cieplnej λ oraz ciepła właściwego c_p .

Przyjęto identyczną procedurę obliczeniową, tj. schematy drugiego rzędu dla dyskretyzacji równań zachowania oraz metodę SIMPLE sprzężenia ciśnienia i prędkości. Na wlocie do rury założono rozwinięty profil prędkości. Liczba Macha na wlocie do rury była stała i nie przekraczała wielkości $Ma = 0.3$. Temperatura na wlocie odpowiadała temperaturze spotykanej w pierwszych stopniach turbiny gazowej tj. $T_1 = 1500K$ [155]. Do układu wtryskiwano powietrze chłodzące o temperaturze $T_j = 300K$.

7.3.2 Analiza wyników

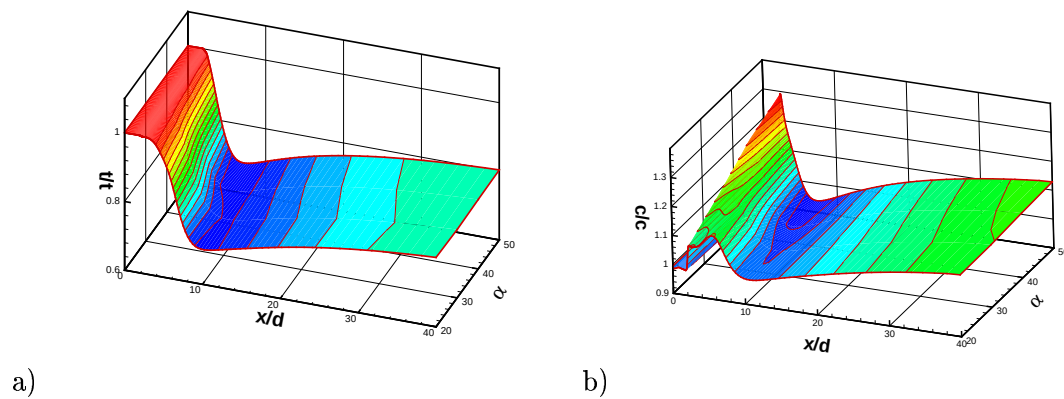
Wyniki zaprezentowano na zbiorczych diagramach prędkości i temperatury⁴. Rysunki 7.18 i 7.19 przedstawiają wyniki przy zmianie kąta wtrysku powietrza chłodzącego, zaś Rysunki 7.20 i 7.21 obrazują rezultaty uzyskane przy zmianie wielkości strumienia powietrza chłodzącego. Wyróżnienie przekrojów $r/r_0 = 0.04$ i $r/r_0 = 0.08$ jest celowe ze względu na zobrazowanie lokalnego wpływ strugi chłodzącej na przepływ główny.

⁴Obie wielkości odnoszono do parametrów na wlocie do układu.



Rysunek 7.18: Porównanie dystrybucji a) temperatury i b) prędkości odniesionej do parametrów na wlocie. Wyniki dla linii przekroju $r/r_0 = 0.4$ i różnych kątów wtrysku powietrza chłodzącego α

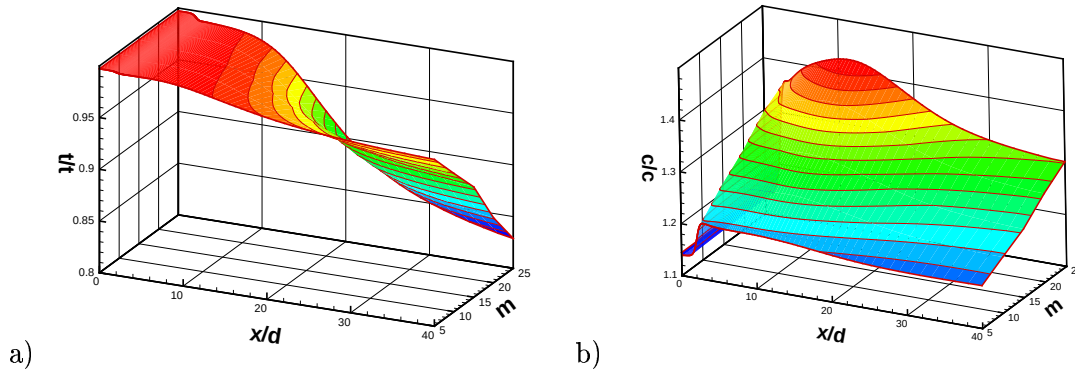
Wtrysk powietrza chłodzącego do przepływu głównego w rurze powoduje, iż w różnych przekrojach następują różne zmiany parametrów czynnika. W obszarze oddalonym od ścianki rury, a więc i miejsca wtrysku, jak dla przekroju $r/r_0 = 0.4$, gorący przepływ główny ulega wymieszaniu z powietrzem chłodzącym, co powoduje zmniejszenie temperatury wzdłuż rury w tym przekroju. Jednocześnie ze spadkiem temperatury, następuje wzrost gęstości i w rezultacie wyhamowanie przepływu. Jest to proces niezależny od kąta α wtryskiwanego powietrza chłodzącego, co stanowi pewne zaskoczenie, gdyż wydawałoby się, iż wyższe kąty wtrysku, przy stałym strumieniu chłodziwa, powinny generować wyższy poziom mieszania turbulentnego, a więc i intensywniejsze chłodzenie, czego w przekroju $r/r_0 = 0.4$ nie zaobserwowano. Sytuację tę obrazuje Rysunek 7.18.



Rysunek 7.19: Porównanie dystrybucji a) temperatury i b) prędkości odniesionej do parametrów na wlocie. Wyniki dla linii przekroju $r/r_0 = 0.8$ i różnych kątów wtrysku powietrza chłodzącego α

Odwrotna sytuacja zachodzi w przekroju $r/r_0 = 0.8$, usytuowanym bliżej miejsca wtrysku. Tutaj gwałtowny spadek temperatury obrazuje „przejście” od przepływu

głównego do strugi chłodzącej. Czynnik chłodzący na skutek mieszania z przepływem głównym ulega ogrzaniu, co przekłada się na przyspieszanie przepływu w obszarze ścianki, jak na Rysunku 7.19. I w tym wypadku nie widać wpływu kąta wtrysku na proces wymiany ciepła.



Rysunek 7.20: Porównanie dystrybucji a) temperatury i b) prędkości odniesionej do parametrów na wlocie. Wyniki dla linii przekroju $r/r_0 = 0.4$ i różnych strumieni powietrza chłodzącego $\dot{m}_j$

W przypadku zmiany strumienia masy wtryskiwanego powietrza chłodzącego⁵ istnieje bezpośredni związek pomiędzy wielkością tego strumienia, a zmianą temperatury czynnika w przekroju $r/r_0 = 0.4$. Większy strumień przekłada się oczywiście na intensywniejsze schłodzenie przepływu głównego i gwałtowniejsze wyhamowanie czynnika w dalszej części rury, jak na Rysunku 7.20. Gwałtowny wzrost prędkości w miejscu wtrysku związany jest z przyrostem całkowitego strumienia masowego wewnątrz rury o stałym przekroju.

Dla przekroju $r/r_0 = 0.8$, na Rysunku 7.21, notuje się gwałtowny spadek temperatury w obszarze wtrysku (tym gwałtowniejszy im wyższy jest strumień wtryskiwanego chłodziwa) i powolne ogrzewanie strugi chłodzącej od przepływu głównego w dalszej części rury. Ogrzewanie prowadzi w rezultacie do pewnego przyspieszenia czynnika.

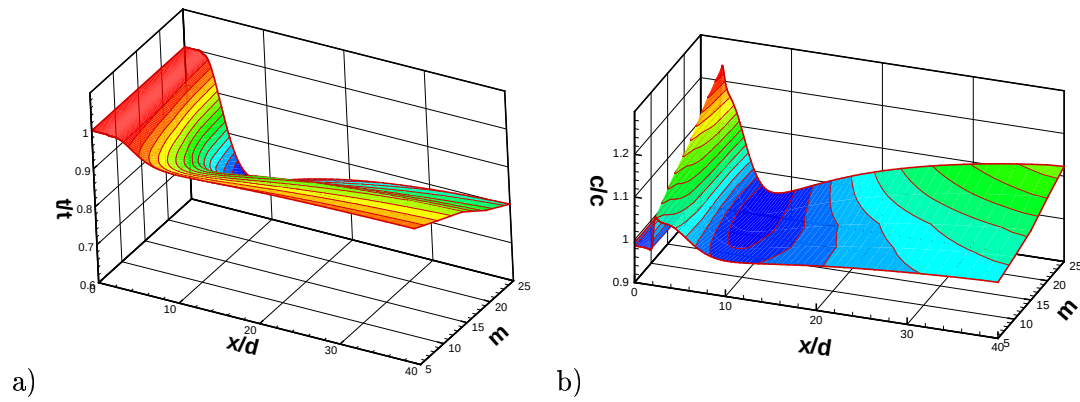
Zmiany w poszczególnych przekrojach ulegają przy uśrednieniu pewnej niwelacji. Na odcinku mieszania obu strug nie zauważa się istotnych zmian prędkości uśrednionej w przekrojach poprzecznych.

7.3.3 Wnioski

W przypadku chłodzenia powierzchniowego, dla zadanych parametrów przepływowych, cieplnych i geometrycznych dyfuzora termicznego uzyskano znaczne spadki prędkości w obszarze chłodzenia rury. Opory ruchu turbulentnego pozostają na tyle jednak wysokie, iż nie pozwalają na uzyskanie dodatniego przyrostu ciśnienia nawet przy znacznym obciążeniu cieplnym dyfuzora.

Dla niskich liczb Macha i znacznych różnic temperatur w układzie, należałoby bezpośrednio w równaniu transportu turbulentnej energii kinetycznej k zastosować między innymi człon generacji związany z wyporem termicznym, którego nie uwzględniono w

⁵Zmianę strumienia przedstawiono w procentach jako stosunek strumienia chłodziwa do całkowitego strumienia na wlocie z rury.



Rysunek 7.21: Porównanie dystrybucji a) temperatury i b) prędkości odniesionej do parametrów na wlocie. Wyniki dla linii przekroju $r/r_0 = 0.8$ i różnych strumieni powietrza chłodzącego $\dot{m}_j$

modelu $V2F$. Człon następującej postaci [86]:

$$G_b = \beta g_j \alpha_t \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}, \quad (7.25)$$

gdzie β to współczynnik rozszerzalności termicznej, a α_t jest współczynnikiem turbulentnej dyfuzji ciepła, uwzględnia bezpośredni wpływ pola temperatur na pole prędkości.

W przypadku chłodzenia filmowego rury nie zaobserwowano istotnego wpływu kąta wtrysku na otrzymywane rezultaty. Gwałtowne zmiany parametrów związane są głównie z ilością wtryskiwanego czynnika.

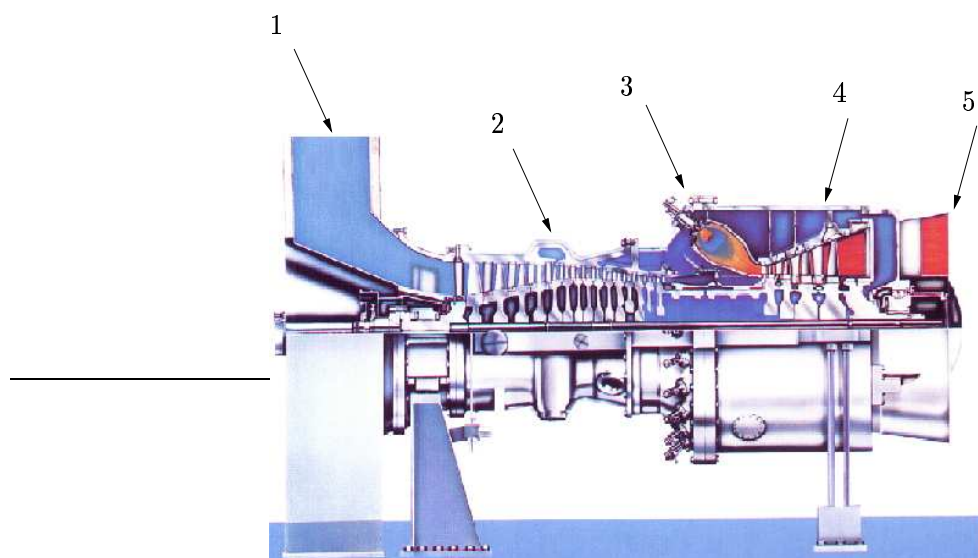
Przy małej ilości czynnika chłodzącego w granicach $5 \div 10\%$, niewielkich rozmiarach powierzchni chłodzonych i wysokich prędkościach w palisadach łopatkowych turbin gazowych oraz przy uwzględnieniu powyższych wyników należy przypuszczać, iż wpływ chłodzenia na pole prędkości jest niewielki i lokalny.

Rozdział 8

O chłodzeniu elementów turbiny gazowej

8.1 Potrzeba chłodzenia

Nowoczesna turbina gazowa przedstawia wysublimowaną konstrukcję, dopracowaną dzięki dziesiątkom lat doświadczeń konstrukcyjnych i eksploatacyjnych. Mimo to sam obieg turbiny gazowej od początków jej stosowania pozostaje stosunkowo prosty. Schematyczny przekrój przez turbinę gazową pracującą w układzie otwartym zamieszczono na Rysunku 8.1.



Rysunek 8.1: Schematyczny przekrój przez turbinę gazową V84.3A firmy SIEMENS (na podstawie [166]). Oznaczenia: 1 - konfuzor wlotowy, 2 - sprężarka, 3 - komora spalania, 4 - turbina, 5 - dyfuzor wylotowy.

Głównymi elementami urządzenia są sprężarka (oznaczona jako 2), komora spalania (3) i turbina gazowa (4). Sprężarka (2), zasysająca powietrze z otoczenia przez kanał wlotowy (1), ma zadanie dostarczyć sprężone powietrze do komory spalania (3), gdzie ulega ono wymieszaniu z paliwem i podlega procesowi spalania. Na skutek tych procesów entalpia gazu gwałtownie wzrasta. W turbinie gazowej (4) gorący czynnik ekspandując wykonuje pracę na łopatkach wirnikowych, która to praca użytkowana

jest w części do napędu kompresora (2), a w części do napędu np. generatora. Spaliny opuszczają turbinę kanałem wylotowym (5).

Ze znanej zależności na sprawność silnika Carnota wynika, iż najprostszą drogą do uzyskania wyższych sprawności jest zwiększenie temperatury na dolocie do urządzenia. Naturalnie rozwój szeroko rozumianej techniki turbinowej nie mógł się obejść bez ciągłego podwyższania temperatury wlotowej gazu¹ do pierwszych stopni turbiny gazowej.

Wzrost obciążenia cieplnego elementów turbiny, a zwłaszcza łopatek pierwszego stopnia, także przyczynił się do znacznego skomplikowania ich konstrukcji między innymi ze względu na konieczność stosowania chłodzenia². Innym sposobem przedłużenia żywotności turbiny jest stosowanie ulepszonych żaro-wytrzymałych materiałów, jednak możliwości w tym kierunku wydają się jeszcze ograniczone. Zastosowanie coraz to bardziej wyszukanych technik chłodzenia oraz ciągle ulepszanie materiałów konstrukcyjnych spowodowało, iż temperatura wlotowa gazu wzrosła od 700 K w 1960 roku do 1800 K i więcej³, co ma obecnie miejsce w nowoczesnych silnikach lotniczych [58].

Oczekiwana wyższa temperatura gazu na wlocie przenosi się automatycznie na większe obciążenie komór spalania, ścianek, tarcz, a zwłaszcza łopatek turbinowych, zarówno kierownicy jak i wirnika. Wszystkie te elementy wymagają intensywnego chłodzenia, by zapewnić ciągłą i możliwie długą, bezawaryjną pracę turbiny.

Chłodzenia wymaga także sprężane w kompresorze powietrze, tak by w efekcie zwiększyć moc turbiny. W tym względzie stosuje się najczęściej dwie metody chłodzenia tj. zewnętrzne międzystopniowe oraz wewnętrzne „mokre”⁴. Pierwsze sprowadza się do zastosowania wymienników ciepła drugi zaś związany jest z wtryskiem odmineralizowanej wody do zasysanego przez sprężarkę powietrza.

Wodę wtryskuje się także do komory spalania, głównie w celu obniżenia emisji NO_X oraz do wylotu turbiny gazowej w celu zwiększenia przyrostu ciśnienia.

8.2 Technologie chłodzenia

Najczęściej wykorzystywanym czynnikiem chłodzącym jest powietrze dostarczane bezpośrednio z kompresora. Zmniejszenie ilości czynnika pracującego w układzie turbiny gazowej poprzez jego odprowadzenie do chłodzenia przyczynia się jednakowoż do spadku generowanej mocy⁵, zastosowanie zaś w kanałach chłodzących różnego rodzaju turbulizatorów intensyfikujących proces wymiany ciepła oraz jednocześnie zakrzywianie tych kanałów, zwiększa wydatnie opory przepływu. Celem prowadzonych badań jest więc głównie optymalizacja procesu chłodzenia, dzięki której zyski z jego wprowadzenia zawsze będą przewyższały wspomniane wyżej straty⁶ [169, 57].

¹TET – *Turbine Entry Temperature*; RIT – *Rotor Inlet Temperature*

²Interesujący przykład ewolucji konstrukcji turbiny gazowej MS900A firmy GE, na przestrzeni lat 1976 - 1994, można znaleźć w pracy [167]

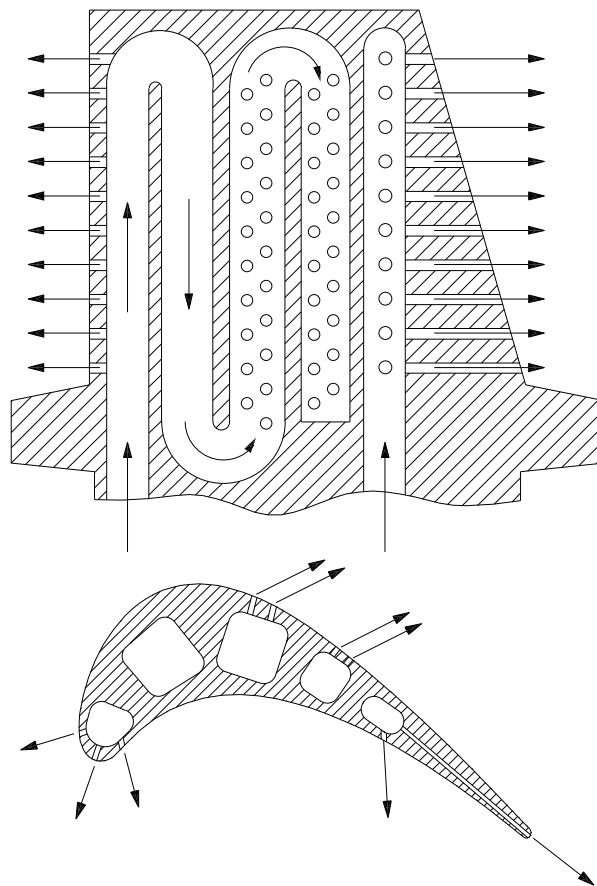
³Grubo powyżej temperatury topnienia metalu

⁴z ang. *wet compression*

⁵Ilość czynnika pobieranego z kompresora do chłodzenia stanowi nawet do 5% i więcej całkowitego strumienia powietrza [168, 58]. Ta część strumienia nie zostaje *podgrzana* w komorze spalania, omija także jeden lub dwa pierwsze stopnie turbiny gazowej, zmniejszając w następstwie pracę dodaną do układu.

⁶Do szkodliwego oddziaływania chłodzenia można zaliczyć dodatkowo za [169] m.in.:

- wzrost kosztów wytwarzania chłodzonych łopatek,
- zmniejszenie poziomu niezawodności urządzenia,
- straty mieszania strugi chłodzącej i gorących spalin.



Rysunek 8.2: Schematyczny przekrój przez chłodzoną łopatkę turbinową (na podstawie [57, 88])

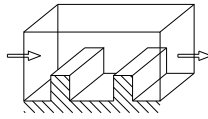
Na Rysunku 8.2 przedstawiono schematycznie kombinowany układ chłodzenia stosowany w dzisiejszej łopatce turbinowej. Wewnątrz takiej łopatki występuje szereg kanałów, którymi czynnik chłodzący jest transportowany do najbardziej obciążonych cieplnie regionów. Czynnik ten jest następnie kierowany na gorące powierzchnie lub wtryskiwany bezpośrednio do strumienia gorącego czynnika roboczego, poprzez system otworów i szczelin, w celu wytworzenia bariery chłodzącej w postaci chłodnego filmu powietrznego na powierzchni łopatki.

Wyróżnia się dwa główne sposoby chłodzenia łopatek - wewnętrzne i zewnętrzne, inaczej określane jako chłodzenie w układzie zamkniętym i otwartym. Pierwszy z nich jest głównie chłodzeniem konwekcyjnym w uźebrowanych, zakrzywionych kanałach wewnątrz łopatkowych przedstawiony schematycznie na Rysunkach 8.2 i 8.3, drugi zaś może być chłodzeniem natryskowym⁷ (Rysunek 8.4) lub filmowym⁸ zarówno lokalnym jednoszczelinowym (Rysunek 8.5 a) oraz wieloszczelinowym Rysunek (8.5 b) jak i z wykorzystaniem elementów porowatych Rysunek (8.5 c), czy też chłodzeniem transpiracyjnym [57].

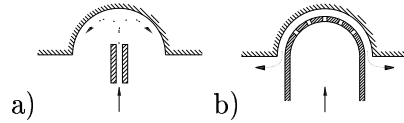
Cały szereg zagadnień poświęcony jest problematyce wymiany ciepła w turbinie

⁷Stosuje się wszakże układy chłodzenia wewnętrznych z natryskiem strug chłodzących [10]

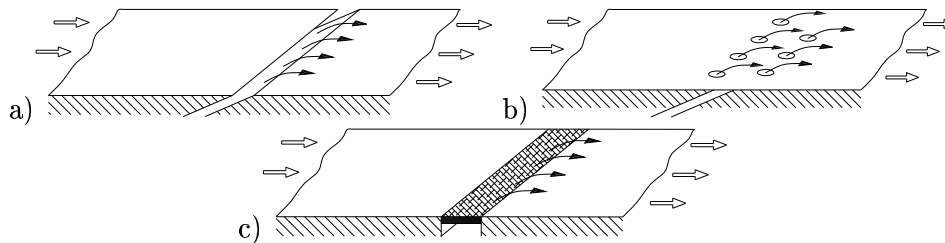
⁸Tego typu chłodzenie określa się także mianem chłodzenia błonowego [57]



Rysunek 8.3: Chłodzenie konwekcyjne w uźebrowanych kanałach wewnętrznych łopatek (na podstawie [57])



Rysunek 8.4: Chłodzenie strumieniowe (na podstawie [57])



Rysunek 8.5: Chłodzenie filmowe a) szczelinowe, b) z otworami, c) z elementem porowatym, (na podstawie [57])

gazowej. Większość pojawiających się w literaturze prac eksperymentalnych oraz ich numerycznych weryfikacji dotyczy chłodzenia łopatek turbinowych. Szczególnie liczną reprezentację literaturową mają zagadnienia dotyczące chłodzenia błonowego i strumieniowego oraz wymiany ciepła w kanałach uźebrowanych prostych i zakrzywionych. Jako prace przeglądowe dla całej problematyki chłodzenia można wymienić książki Lakshminarayana [58] i Chmielniaka, Rusina i Czwirtni [57], a także artykuł Weiganda [10].

W niniejszym rozdziale przeanalizowano stan badań nad technologią chłodzenia elementów turbiny gazowej, sklasyfikowanych w zależności od typu zagadnienia oraz scharakteryzowano najważniejsze problemy projektowe i optymalizacyjne procesu chłodzenia.

8.2.1 Chłodzenie filmowe

Wydaje się, iż chłodzenie filmowe (błonowe), szczególnie w powiązaniu z chłodzeniem strumieniowym (natryskowym) ma wciąż największą potencjalnie możliwość zwiększenia współczynnika wymiany ciepła⁹. Taki sposób chłodzenia jest szczególnie atrakcyjny w regionie krawędzi natarcia łopatki, gdzie obciążenie cieplne ścianki jest największe, a jednocześnie grubszy przekrój łopatki w tym miejscu umożliwia łatwe doprowadzenie kanałów chłodzących jak na Rysunku 8.2.

⁹Wzrost współczynnika wymiany ciepła na drodze *ścianka–chłodziwo* jest oczywiście korzystny, w przeciwieństwie do przyrostu tego współczynnika od strony *gorący gaz–ścianka*, który jest zjawiskiem szkodliwym. Dlatego też lepiej operować definicją efektywności chłodzenia.

Chłodzenie filmowe stosuje się w celu wytworzenia pomiędzy ścianką komory spalania¹⁰ czy łopatki turbiny gazowej, a gorącym czynnikiem roboczym izolującej warstwy chłodziwa. Dokonuje się tego zazwyczaj poprzez wtrysk powietrza, dostarczanego z kompresora do komory spalania czy kanału międzyłopatkowego turbiny, poprzez szczeliny lub otwory w łopatkach jak na Rysunku 8.5.

Pomimo, iż chłodzenie typu błonowego łopatek stosowane jest już stosunkowo długo, wciąż nie dysponujemy wystarczającą wiedzą na temat jego wpływu na turbulentną wymianę ciepła, a także aerodynamikę turbiny i generowanie strat przepływu w czasie wtrysku czynnika chłodzącego, powodującego intensywne mieszanie ze strumieniem głównym ekspandujących spalin. Wpływający strumień chłodziwa działa blokująco na przepływ główny, z tego powodu więc od strony napływu¹¹ powstaje pewien obszar spiętrzenia i wzrostu ciśnienia, zaś na na spływie¹² obszar obniżonego ciśnienia. Różnica ciśnień powoduje istotne zaburzenie przepływu głównego, który jest zasysany pod strugę chłodzącą w obszarze krawędzi spływu [171], co prowadzi do powstania przeciwnych wirów. Turbulentne interakcje strug czynnika chłodzącego z przepływem głównym stanowią podstawowy problem badawczy chłodzenia filmowego [172]. Najlepiej dobrane systemy chłodzenia filmowego to takie, które jednocześnie minimalizują intensywność mieszania i zapewniają „izolację” dla maksymalnej powierzchni chłodzonej przy jak najmniejszym wykorzystaniu powietrza chłodzącego z kompresora [168, 173, 174, 163]. Kontrola ilości strumienia czynnika chłodzącego jest możliwa odpowiednim kształtowaniem otworów oraz szczelin, dobieraniem ich liczby i rozmiarów.

Wyróżnić można parametry geometryczne i przepływowe, które mogą mieć wpływ osobno jak i w kombinacji z pozostałymi na efektywność procesu chłodzenia filmowego. Do pierwszej grupy zalicza się głównie:

kąt nachylenia kanału chłodzącego względem chłodzonej ścianki¹³ α ,

kąt ustawienia osi kanału chłodzącego względem kierunku przepływu strumienia głównego spalin¹⁴ β ,

kąt rozwarcia kanału chłodzącego na wylocie δ ,

stosunek długości kanału chłodzącego do charakterystycznego wymiaru jego przekroju L/d ,

podziałka S/d – odstęp pomiędzy otworami,

Przedstawiono je schematycznie na Rysunku 8.6.

Ważniejsze czynniki przepływowe to zaś:

stosunek gęstości strugi chłodzącej do przepływu głównego¹⁵

$$DR = \frac{\rho_j}{\rho_\infty} \quad , \quad (8.1)$$

prędkość względna strugi chłodzącej do przepływu głównego¹⁶

$$VR = \frac{v_j}{v_\infty} \quad , \quad (8.2)$$

¹⁰Chłodzenie filmowe obniża temperaturę w komorze spalania wpływając pośrednio na redukcję NO_x

¹¹Tę krawędź otworu wtryskowego nazywa się krawędzią natarcia [170]

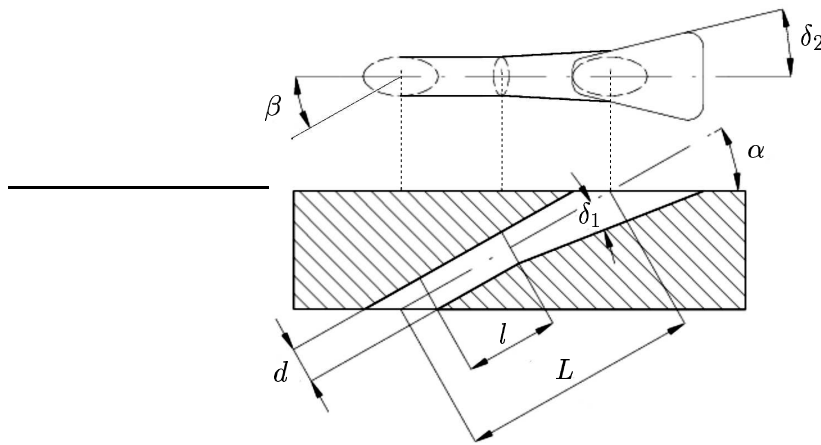
¹²Analogicznie określane mianem krawędzi spływowej [170]

¹³ang. *inclination angle*

¹⁴ang. *lateral angle*

¹⁵ang. *density ratio*

¹⁶ang. *velocity ratio*



Rysunek 8.6: Konfiguracja geometryczna układu chłodzenia filmowego typu kombinowanego

wydatek względny strugi chłodzącej do przepływu głównego¹⁷

$$M = \frac{(\rho v)_j}{(\rho v)_\infty} \quad , \quad (8.3)$$

względny strumień pędu strugi chłodzącej do przepływu głównego¹⁸

$$I = \frac{(\rho v^2)_j}{(\rho v^2)_\infty} = DR(VR)^2 \quad , \quad (8.4)$$

współczynnik wydatku ¹⁹ c_d ,

poziom zawirowania strugi chłodzącej,

intensywność turbulencji Tu przepływu głównego.

Kąt nachylenia kanału α wpływa głównie na intensyfikację procesów mieszania oraz ewentualną separację przepływu na wylocie. Najlepiej więc kiedy α ma jak najmniejsze wartości, gdyż wtedy czynnik chłodzący wpływa stycznie do strumienia głównego czynnika roboczego i nie powoduje oderwania od ścianki. Niestety istniejące ograniczenia technologiczne i projektowe powodują, iż najczęściej przyjmuje się wartości α zbliżone do $30 \div 35^\circ$, a nawet i wyższe [165, 175, 176, 174, 177, 178, 170, 179, 180, 173, 181].

Od kąta ustawienia osi kanału β zależy stopień rozprzestrzeniania się chłodziwa na powierzchni chłodzonej. Im wyższe kąty tym zapewniają one „izolowanie” większej powierzchni. Ujemnym efektem zwiększania kąta ustawienia jest jednak intensyfikacja procesów mieszania, a co za tym idzie zwiększanie strat przepływu i spadek efektywności chłodzenia w dalszej odległości od otworów chłodzących. W praktyce stosuje się różne wartości kąta β od 0° do 90° , najczęściej jednak z zakresu $30 \div 60^\circ$ [165, 175, 174]. Optymalnie stosuje się jednocześnie kombinację dwóch kątów nachylenia α i ustawienia β kanału²⁰.

¹⁷ang. *blowing ratio*

¹⁸ang. *momentum flux ratio*

¹⁹ang. *discharge coefficient*

²⁰Kombinację obu kątów określa się w literaturze anglojęzycznej mianem *compound angle*

Odpowiedni kąt rozwarcia wylotu kanału chłodzącego δ zapewnia łagodne wyhamowanie przepływu na skutek efektu dyfuzorowego i równomierny rozptyw na powierzchni chłodzonej. Rozróżnić można dwa kąty rozwarcia kanału jak na Rysunku 8.6. Pierwszy δ_1 związany z rozszerzeniem w kierunku wzdłużnym oraz drugi δ_2 w kierunku poprzecznym. Powiązanie obu kątów wraz z kątem ustawienia wpływa znacząco na poprawę efektywności chłodzenia, przy relatywnie niewielkim wzroście współczynnika wymiany ciepła [179, 182]. Najczęściej przyjmuje się kąty o takiej wartości, które nie powodują jeszcze oderwania przepływu na dyfuzorowym odcinku kanału, czyli w praktyce maksymalnie $10 \div 15^\circ$ [165, 183, 179, 163].

Ważnym zagadnieniem jest także długość kanału doprowadzającego powietrze chłodzące do powierzchni chłodzonej, a związane jest to z częstym występowaniem oderwania na jego wlocie. Zbyt krótki kanał bowiem nie zapewnia ponownego przyklejenia przepływu wewnątrz kanału, a co za tym następuje wyrównania pola prędkości strugi. Powoduje to natychmiastową separację przepływu na wylocie z kanału chłodzącego i w efekcie wzrost intensywności turbulencji, a co za tym następuje spadek efektywności chłodzenia na skutek wzmożonego procesu mieszania strugi i przepływu głównego [184]. Takie zjawisko ma miejsce szczególnie przy chłodzeniu komór spalania turbin gazowych gdzie $L/d < 1$ [168]. W przypadku chłodzonych łopatek turbinowych stosunek długości kanału do jego średnicy zawiera się najczęściej w przedziale zapewniającym już przyklejenie przepływu, ale nie zawsze wyrównanie pola prędkości czyli $2 < L/d < 8$ [165, 168, 177, 183, 185]. Zagadnieniem optymalizacji długości kanału chłodzącego zajmowali się szczegółowo Hale et al. [176] oraz Leylek et al. [180].

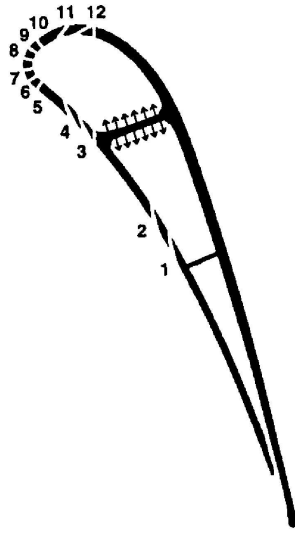
Odpowiednie rozstawienie otworów jest ważne ze względu na to, iż obszar pomiędzy nimi jest stosunkowo słabo chłodzony szczególnie przy mniejszych kątach β , stąd mogą wynikać problemy związane ze zbyt wysokim poziomem naprężeń w materiale [165]. Najczęściej stosowane podziałki rozstawienia otworów na powierzchni chłodzonej pochodzą z zakresu $S/d = 3 \div 6$ [186, 177, 180, 187].

Rozmieszczenie otworów chłodzących na łopatkę turbinową, które schematycznie przedstawiono na Rysunku 8.2 i Rysunku 8.7 jest także ważnym elementem wpływającym na efektywność chłodzenia łopatki. Najbardziej narażoną strefą intensywniej wymiany ciepła jest obszar krawędzi natarcia, gdzie też przewiduje się stosowanie większej ilości otworów [188]. Niezbyt fortunnie na Rysunku 8.7 nie ujęto otworów na stronie ssącej profilu łopatkowego, które są ważne ze względu na mniejszą grubość warstwy przyściennej w tym obszarze związaną z przyspieszaniem czynnika roboczego, w więc i narażeniem na wyższe obciążenia cieplne [183]. Czasem konieczne jest także chłodzenie wierzchołka łopatki, czyli obszaru przecieku wewnętrznego turbiny [189].

W układach chłodzenia błonowego wykorzystuje się przede wszystkim otwory wylotowe okrągłe. Rzadziej spotyka się badania kanałów o innym kształcie przekroju np. prostokątnym [174]. Różnice pomiędzy otworami o różnym kształcie uwidaczniają się poprzez intensywność mieszania, która dla kształtów prostokątnych jest większa [186]. Nie ma jednak jednoznacznych przesłanek co do wyższości jednego z rozwiązań nad drugim.

Najczęściej stosowanymi parametrami przepływowymi, które charakteryzują konfigurację układu chłodzenia filmowego są wydatek względny M oraz stosunek gęstości DR . W większości publikacji pojawia się także względny strumień pędu I oraz prędkość względna VR .

Wydatek względny ma najczęściej wartości z zakresu $M = 0.25 \div 2.2$ [175, 176, 163, 180]. Mniejsze wartości M związane są głównie z wyższą efektywnością chłodzenia [188, 176], chociaż dla wyższych kątów ustawienia β trend jest odwrotny [175], podobnie



Rysunek 8.7: Rozmieszczenie otworów chłodzących na przekroju łopatki (na podstawie [190])

jak dla otworów z rozszerzonym wylotem [163].

Stosunek gęstości DR związany jest przede wszystkim z różnicą temperatur między strugą chłodzącą i gorącymi spalinami. W rzeczywistych turbinach gazowych stosunek gęstości ma wartości grubo powyżej jedności [173]. W badaniach eksperymentalnych z racji niższych różnic temperatur, a co następuje niższych różnic gęstości, stosuje się DR bliskie jedności, najczęściej z zakresu $DR = 0.85 \div 2$ [175, 174, 176, 180, 177]. Czasem jednak, gdy w badaniach wykorzystuje się zamiast chłodnego powietrza inny czynnik gazowy (np. propan, dwutlenek węgla), różnice gęstości mogą być wyższe. Wyższe wartości DR związane są przeważnie z lepszą efektywnością chłodzenia, bowiem czynnik mając mniejszy pęd pozostaje bliżej chronionej powierzchni [175].

Względny strumień pędu I jest ważnym parametrem determinującym charakter pola prędkości i temperatur przy strugach swobodnych wtryskiwanych do przepływu poprzecznego. W rzeczywistych układach chłodzenia filmowego łopatek turbinowych I pozostaje zazwyczaj na niskim poziomie $I < 1$, chociaż badania przeprowadzane są nawet dla zakresu $I = 0.25 \div 2.25$ [186].

Prędkość względna pozostaje w podobnym zakresie $VR = 0.5 \div 1.5$ [186]. Małe wartości VR związane są ze strugami czynnika chłodzącego, który pozostaje blisko chłodzonej ścianki. Wyższe wartości prędkości względnej mogą powodować penetrację strugi ponad warstwę przyścienną i jej odchylenie w kierunku przepływu głównego. Dodatkowo wewnątrz strugi tworzą się wówczas dwa przeciwstawne wiry [186].

Współczynnik wydatku c_d związany jest bezpośrednio z kształtem oraz długością L/d kanału chłodzącego. Dla małych wartości L/d , kiedy przepływ wewnątrz kanału jest nierównomierny, współczynnik wydatku definiowany jako stosunek rzeczywiste wypływającego strumienia masy do strumienia idealnego²¹ przyjmuje wartości niskie. Szczegółowo problematykę współczynnika zajęli się Hay i Lampard [168] oraz Thole et al. [184]. W drugiej pracy zwrócono szczególną uwagę na efekty generowane od przepływu wewnątrz komory doprowadzającej czynnik chłodzący do kanału. Tematykę

²¹Zazwyczaj idealny strumień masy definiuje się w oparciu o prędkość średnią przepływu.

oddziaływania przepływu wewnętrznego na efektywność chłodzenia podjęli także Wilfert i Wolff [185]. W tej pracy podkreśla się szczególnie wpływ generatora wirów, na wlocie do kanału doprowadzającego chłodziwo do powierzchni chronionej, na efektywność chłodzenia poprzez zwiększenie obszaru rozpościerania się chłodziwa.

Intensywność turbulencji Tu przepływu głównego czynnika roboczego jest także bardzo ważnym zagadnieniem wpływającym na proces mieszania strugi chłodzącej z gorącymi spalinami, a w rezultacie na efektywność procesu chłodzenia. Pierwsze stopnie turbiny gazowej są omywane strumieniem czynnika, którego poziom intensywności turbulencji może sięgać nawet $7 \div 20\%$ [191, 192], co ma też związek z nierównomiernym napływem spalin z komory spalania. Także w dalszych stopniach ważną rolę odgrywają ślady spływowe z poprzedniej palisady [188]. Wpływ intensywności turbulencji Tu omówiono w pracy [191], w powiązaniu z długością kanału chłodzącego L/d w publikacji [193], a w powiązaniu z gęstością czynnika chłodzącego w [188]. W obu wyraźnie podkreśla się spadek efektywności chłodzenia postępujący wraz ze wzrostem intensywności turbulencji. Jedynie w obszarze pomiędzy otworami zwiększenie Tu może spowodować wzrost efektywności chłodzenia [175].

Do oceny jakości danej metody chłodzenia służy głównie współczynnik efektywności chłodzenia η :

$$\eta = \frac{T - T_\infty}{T_j - T_\infty} \quad , \quad (8.5)$$

gdzie T oznacza temperaturę w danym punkcie, T_j jest temperaturą strugi chłodzącej, zaś T_∞ to temperatura przepływu głównego na wlocie do układu.

Rzadziej, bo cel w układach chłodzenia filmowego jest odmienny, stosuje się standardowy współczynnik wymiany ciepła h :

$$h = \frac{q_w}{T_w - T_\infty} \quad , \quad (8.6)$$

gdzie q_w jest strumieniem ciepła na ścianie, a T_w temperaturą ścianki.

Zamiennie wykorzystywana jest liczba Nusselta Nu :

$$Nu = \frac{hL_{ref}}{\lambda} \quad , \quad (8.7)$$

gdzie L_{ref} jest wymiarem charakterystycznym. Często stosuje się także inną bezwymiarową wielkość określaną mianem liczby Stanton'a St :

$$St = \frac{h}{\rho v_{ref} c_p} \quad , \quad (8.8)$$

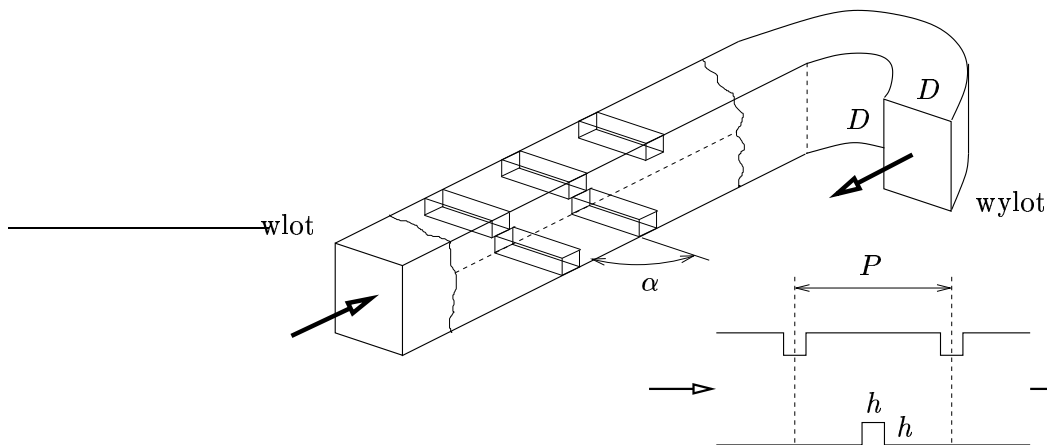
gdzie v_{ref} jest charakterystyczną prędkością, a c_p oznacza ciepło właściwe.

8.2.2 Wymiana ciepła w kanałach uźebrowanych

Chłodzenie filmowe przedstawione powyżej zalicza się do systemów chłodzenia zewnętrznego. Chłodzenie wewnętrzne zaś ma miejsce wtedy, gdy nie ma bezpośredniego kontaktu pomiędzy czynnikiem chłodzącym i spalinami roboczymi. Wymiana ciepła pomiędzy czynnikiem gazowym, a ścianką gładkiego kanału jest stosunkowo słaba. Jedynie zastosowanie wielu kanałów chłodzących o najróżniejszym kształcie wraz z umieszczonymi wewnątrz elementami turbulizacyjnymi powoduje w konsekwencji wzrost powierzchni wymiany ciepła jak i współczynnika wymiany ciepła [57, 194]. W tej klasie

badania można wyodrębnić cztery główne grupy tj. prace dotyczące kanałów uźebrowanych, badania cieplno-przepływowe zakrzywionych kanałów typu U, chłodzenie natryskowe powierzchni oraz zawirowanie przepływu w kanałach wewnętrznych [10]. Pierwsza grupa prac związana jest z układem powierzchni z naniesionymi żebrami, które powodują separację przepływu, wzrost poziomu turbulencji czynnika przenoszący się na przyrost współczynnika wymiany ciepła, jak i niestety wzrost oporów przepływu. Zagadnieniem szczególnym jest więc optymalizacja procesu chłodzenia, tak by maksymalnie zintensyfikować turbulentną wymianę ciepła, przy najmniejszych stratach przepływowych. Z tej grupy prac wywodzą się eksperymenty, które służą jednocześnie do weryfikacji kodów numerycznych [150]. Druga grupa badań dotyczy obszaru „nawrotu” przepływu czynnika chłodzącego wewnątrz łopatki. Silna krzywizna kanału generuje bowiem przepływy wtórne, które trudno jest prawidłowo zamodelować numerycznie. Trzecia grupa związana jest z chłodzeniem natryskowym strugami czynnika chłodzącego powierzchni łopatek od strony kanału wewnętrznego. Ta metoda jest szczególnie przydatna w obszarze krawędzi natarcia łopatki, gdzie obciążenia cieplne są największe, a wymiary przekroju odpowiednie do zastosowania chłodzenia natryskowego. Ostatnia grupa dotyczy zastosowania stycznych strug powodujących zawirowanie przepływu czynnika chłodzącego w kanale wewnętrznym łopatki.

Chłodzenie wewnętrzne wymaga jednak przede wszystkim zastosowania turbulizatorów (żeber, wklęsłości powierzchni itp.), które okresowo zaburzają przepływ. Intensywność zaburzeń determinowana jest głównie kształtem turbulizatora, podziałką pomiędzy kolejnymi żebrami ich wysokością oraz kątem ustawienia względem przepływu głównego. Typową konfigurację uźebrowanego kanału wewnątrz-łopatkowego przedstawiono schematycznie na Rysunku 8.8.



Rysunek 8.8: Geometria trójwymiarowego kanału uźebrowanego naprzemiennie

Najczęściej w badaniach eksperymentalnych stosuje się żebra, rozmieszczone na jednej ścianie lub dwóch przeciwległych ściankach kanału, których wysokość h stanowi w przybliżeniu 10% wysokości kanału przepływowego D . Wysokość żeber wpływa na stopień turbulizowania przepływu i intensywność wymiany ciepła. Zbyt wysokie żebra powodują jednak blokowanie przepływu i gwałtowny wzrost oporów przepływu czynnika chłodzącego. Podziałka względna, którą definiuje się najczęściej jako stosunek odległości kolejnych żeber P do ich wysokości h , zawiera się w granicach od 5 do 15. Dolna granica związana jest głównie z ograniczeniem wynikającym z długości oderwania przepływu za żebrami. Żebra turbulizujące przepływ ustawione są najczęściej pod kątem $\alpha = 90^\circ$.

względem kierunku przepływu głównego, tak jak na Rysunku 8.8. Można jednakże znaleźć przykłady ustawień pod kątem 45° [195, 196, 197], jak i 60° , [198].

Najpowszechniej rozpatruje się kanały wewnętrzne o stałym przekroju prostokątnym lub kołowym. Jest to jednak sporym uproszczeniem zważywszy na fakt, iż kształt kanału zawsze jest determinowany ograniczoną geometrią łopatki, stąd i jego przekrój musi zmieniać się wraz z długością. Takie uproszczenia wprowadza się by umożliwić eksperymentalne zbadanie danego układu, a wyniki służą głównie do weryfikacji stosowanych w obliczeniach modeli turbulencji [199]. W praktyce stosuje się kanały prostokątne o zmiennym przekroju i nieprostokątnym kącie ustawienia względem osi obrotu [195].

Ważnym uproszczeniem jest także nie uwzględnianie obrotu układu. Wynika to z faktu oczywistych trudności związanych z przeprowadzeniem wiarygodnych badań eksperymentalnych. Dopiero niedawno zaczęły pojawiać się prace zarówno eksperymentalne jak i numeryczne, w których układ badany podlega wirowaniu [197, 195, 115, 200, 201]. Siły związane z obrotami generują w kanałach wewnętrznych przepływy wtórne, które zaburzają przepływ główny i stanowią dodatkowe źródło turbulencji [88, 115].

Metodyka obliczeń także podlega ewolucji wynikającej z postępu techniki komputerowej. Główną zmianą jest przechodzenie od periodycznego obliczania sekcji kanału chłodzącego w kierunku bardziej czasochłonnego, ale też bardziej dokładnego modelowania całego kanału wewnętrznego łopatki [202, 195, 197, 203].

8.3 Modelowanie chłodzenia wewnętrznego

8.3.1 Kanał uzebrowany

Tematyka związana z obliczaniem przepływów z wymianą ciepła w kanałach uzebrowanych jest mocno obecna w literaturze potwierdzając, iż jest to zagadnienie niezmiernie ważne, a jednocześnie trudne do zamodelowania zarówno w przypadku dwuwymiarowym [88, 151, 150, 103] jak i trójwymiarowym [196, 50, 197, 115, 199, 204, 198]. Najlepsze rezultaty obliczeń dotychczas przeprowadzonych daje zastosowanie modeli drugiego rzędu, czyli transportu naprężeń Reynoldsa, i to pomimo dużej liczby stosowanych domknięć równania 3.39 oraz pewnych trudności związanych procesem obliczeniowym [195, 199, 204, 198]. Przewaga modelu RSM nad modelami wykorzystującymi hipotezę lepkości turbulentnej wynika przede wszystkim z faktu dokładniejszego odwzorowania przepływów wtórnych i uwzględniania anizotropii turbulencji.

Ważnym uproszczeniem stosowanym przy obliczeniach układów chłodzenia turbiny gazowej jest przedstawianie turbulentnego strumienia ciepła poprzez algebraiczny związek stałej turbulentnej liczby Prandtla i współczynnika lepkości turbulentnej. Błądność owego założenia sprowadza się przede wszystkim do przedstawienia współczynnika turbulentnej dyfuzji ciepła w funkcji jedynie pola prędkości oraz założeniu współliniowości turbulentnego strumienia ciepła i gradientu temperatury.

Do celów niniejszej analizy wykorzystano więc model transportu składowych tensora naprężeń turbulentnych. Pełną postać RSM przedstawia równanie (3.38). Wybrane człony równania (3.38) czyli turbulentna dyfuzja D_{ij}^t , redystrybucja ciśnienia Φ_{ij} , generacja na skutek działania sił masowych od wyporu termicznego G_{ij}^θ oraz dyssypacja lepkościowa ϵ_{ij} , wymagają zastosowania odpowiednich domknięć. Opis modelu RSM zastosowanego w pakiecie Fluent, przedstawiono w Rozdziale 3.

Turbulentny strumień ciepła modelowano na podstawie dwurównaniowego domknięcia $\theta'^2 - \epsilon_\theta$ DWX według Deng et al. [49], który zaimplementowano do solvera Fluent

poprzez własne podprogramy (jak w Rozdziale 6 oraz Dodatku C). Postać równań transportu wariancji temperatury $\overline{\theta'^2}$ i jej prędkości destrukcji ϵ_θ w modelu DWX przedstawiono w Rozdziale 4 i Rozdziale 5, stąd nie ma potrzeby ich ponownego wypisywania. Współczynnik turbulentnej dyfuzyjności cieplnej jest reprezentowany formułą identyczną do (4.9). Zastosowano także identyczny zestaw stałych i funkcji tłumiących co w oryginalnym sformułowaniu DWX.

Opis eksperymentu

Wyniki pomiarów, które wykorzystano w niniejszej analizie numerycznej, pochodzą z eksperymentu referencyjnego ERCOFTAC [59], a który był przedmiotem seminarium ERCOFTAC/IAHR w 1998 roku. Eksperyment ten jest często wykorzystywany do weryfikacji modeli turbulencji przez grupę H. Iacovidesa z UMIST [204, 115].

Geometria rozpatrywanego układu jest identyczna do przedstawionego schematycznie na Rysunku 8.8. W rzeczywistym eksperymencie pełną geometrię stanowił kanał typu U uźebrowany naprzemiennie, jednak wyniki prezentowano tylko dla obszaru przepływu rozwiniętego z założeniem periodyczności przepływu w dalszych sekcjach. Jedna sekcja zawierała się od krawędzi natarcia żebra do krawędzi natarcia kolejnego żebra turbulizacyjnego na tej samej powierzchni kanału jak na Rysunku 8.8. Wymiary charakterystyczne badanego kanału:

- szerokość i wysokość kanału $D = 5$ cm,
- stosunek podziałki do wysokości żebra $P/h = 10$,
- względna wysokość żebra $h/D = 0.1$.

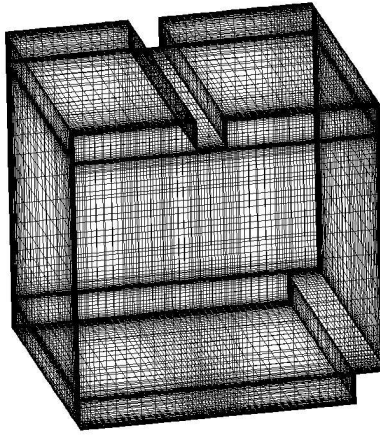
Eksperyment przeprowadzono dla liczby Reynoldsa $Re = 10^5$, która bazuje na wysokości kanału D i prędkości referencyjnej v_{ref} . Do celów niniejszej analizy dysponowano jedynie danymi pomiarowymi bez wirowania układu. Pełen eksperyment zawiera także pomiary dla wirującego układu z $Ro = \omega D/v_{ref} = 0.2$. Danych tych jednakże nie udało się uzyskać.

W rezultacie dysponowano składowymi prędkościami, składową styczną naprężeniem turbulentnym $\overline{u'v'}$ oraz składowymi naprężeniami normalnymi $\overline{uu}$ i $\overline{vv}$. Poprzez zastosowanie grzania ścianki przy założeniu stałego strumienia ciepła $q = const$, dysponowano także rozkładem liczby Nusselta wzdłuż dolnej ścianki, ale z pominięciem żeber.

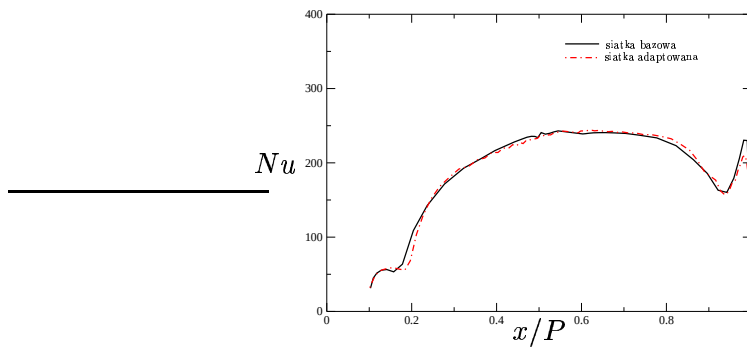
Charakterystyka obliczeń

Jako, iż dysponowano danymi dla przypadku bez wirowania układu, analizę ograniczono tylko do zagadnienia stacjonarnego. Założenie periodyczności przepływu w kolejnych sekcjach pomiędzy żebrami, rzutowało z kolei na ograniczenie obszaru obliczeniowego do jednej sekcji jak na Rysunku 8.9. Przygotowano siatkę wykładniczo zagęszczoną do powierzchni z zachowaniem warunku, aby odległość od ścianki pierwszej komórki była rzędu 10^{-3} średnicy hydraulicznej [195], którą w tym wypadku jest szerokość kanału D . Odpowiadało to wartości bezwymiarowej odległości od ścianki $y^+ < 1$. Przedstawiona siatka strukturalna zawiera 140 tysięcy objętości skończonych.

Siatkę numeryczną odpowiednio adaptowano w celu sprawdzenia niezależności otrzymywanych wyników od gęstości siatki. Dwukrotne zagęszczenie siatki, zwiększające liczbę objętości do 450 tysięcy nie wpłynęło zasadniczo na jakość rozwiązań. Na wykresie 8.10 porównano przebieg zmian liczby Nusselta dla obu siatek. Porównując oba przebiegi, można założyć, iż gęstość siatki bazowej jest już wystarczająca.



Rysunek 8.9: Wieloblokowa siatka numeryczna układu obliczeniowego



Rysunek 8.10: Dystrybucja liczby Nusselta wg modelu DWX wzdłuż dolnej ścianki dla siatki bazowej i adaptowanej

Do modelowania turbulentnego strumienia pędu wykorzystano model transportu naprężeń Reynoldsa, zaś turbulentny strumień energii modelowano na cztery sposoby. Pierwszy z założeniem stałej turbulentnej liczby Prandtla $Pr_t = 0.85$, drugi przy przyjęciu algebraicznej funkcji turbulentnej liczby Prandtla wg formuły Kaysa–Crawforda [9], trzeci z wykorzystaniem dwurównaniowego domknięcia $\overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ wg Deng et al. [49] oraz czwarty analogiczny do trzeciego różniczkowy model wg Abe et al. [44]. Trzy ostatnie modele zaimplementowano do kodu numerycznego poprzez własne podprogramy. Systematyzując można zapisać:

Wariant A $\alpha_t = \nu_t / Pr_t$, gdzie $Pr_t = 0.85$,

Wariant B $\alpha_t = \nu_t / Pr_t$, gdzie $Pr_t = var$ wg formuły:

$$\frac{1}{0.5882 + 0.228 (\nu_t / \nu) - 0.0441 (\nu_t / \nu)^2 \left[1 - \exp \left(\frac{-5.165}{(\nu_t / \nu)} \right) \right]} , \quad (8.9)$$

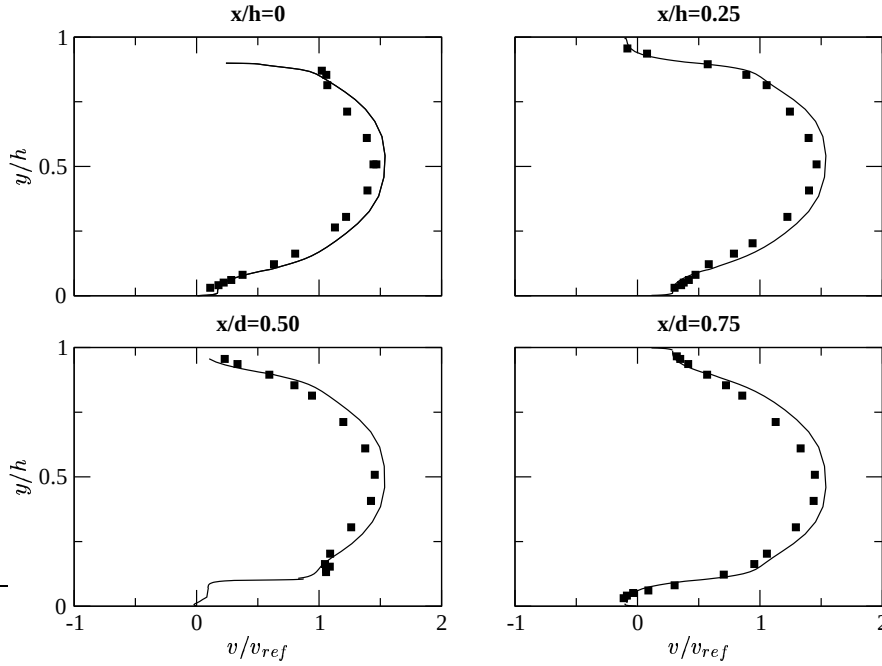
Wariant C $\alpha_t = C_\lambda f_\lambda k (k/\epsilon)^l \left(\overline{\theta'^2} / \epsilon_\theta \right)^m$, gdzie wariancja temperatury $\overline{\theta'^2}$ i jej szybkość destrukcji ϵ_θ wyznaczone są z dodatkowych różniczkowych równań transportu według modelu DWX,

Wariant D

$$\alpha_t = C_\lambda \left[\frac{k^2}{\epsilon} \left(\frac{2R}{C_m + R} \right) + 3k^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{(2R)^{\frac{1}{2}}}{Pr} f_d \right] \times \left[1 - \exp \left(-\frac{y^*}{14} \right) \right] \left[1 - \exp \left(-\frac{Pr^{\frac{1}{2}} y^*}{14} \right) \right], \quad (8.10)$$

gdzie wariancja temperatury $\overline{\theta'^2}$ i jej szybkość destrukcji ϵ_θ wyznaczone są z dodatkowych różniczkowych równań transportu według modelu AKN.

Na Rysunku 8.11 przedstawiono profile prędkości normalizowanej u/v_{ref} dla różnych położeń x/h . Widać dobrą zgodność wyników uzyskanych modelem transportu naprężeń turbulentnych RSM z danymi eksperymentalnymi.



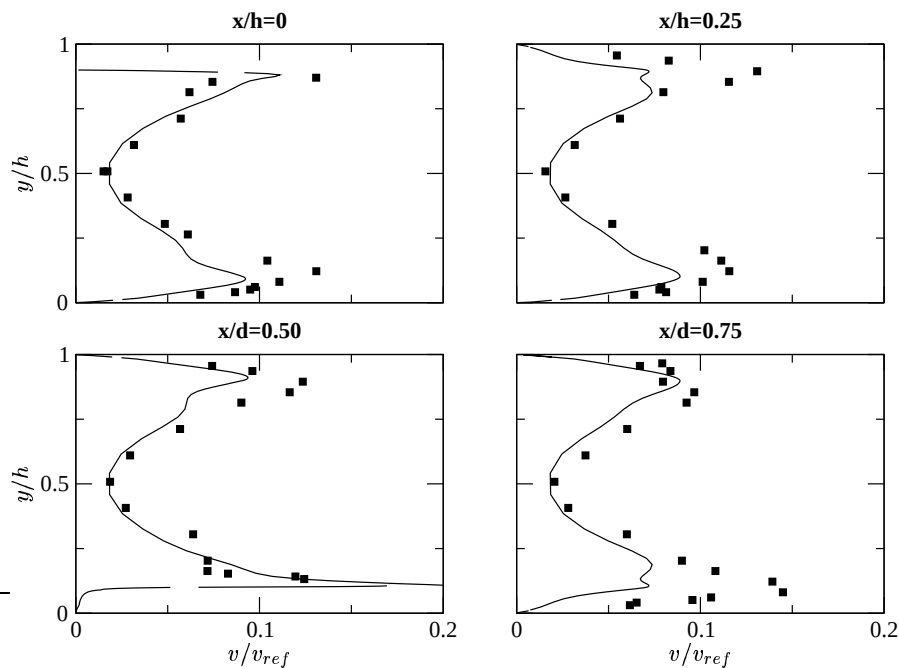
Rysunek 8.11: Profile prędkości względnej (punkty – dane eksperymentalne, linia ciągła – rezultaty obliczeń)

Podobnie na Rysunkach 8.12, 8.13 i 8.14 zamieszczono odpowiednio profile normalizowanych składowych tensora naprężeń Reynoldsa $\overline{u'u'}/v_{ref}^2$, $\overline{u'v'}/v_{ref}^2$ oraz $\overline{v'v'}/v_{ref}^2$. Także i w tym wypadku zgodność z danymi eksperymentalnymi jest zadowalająca.

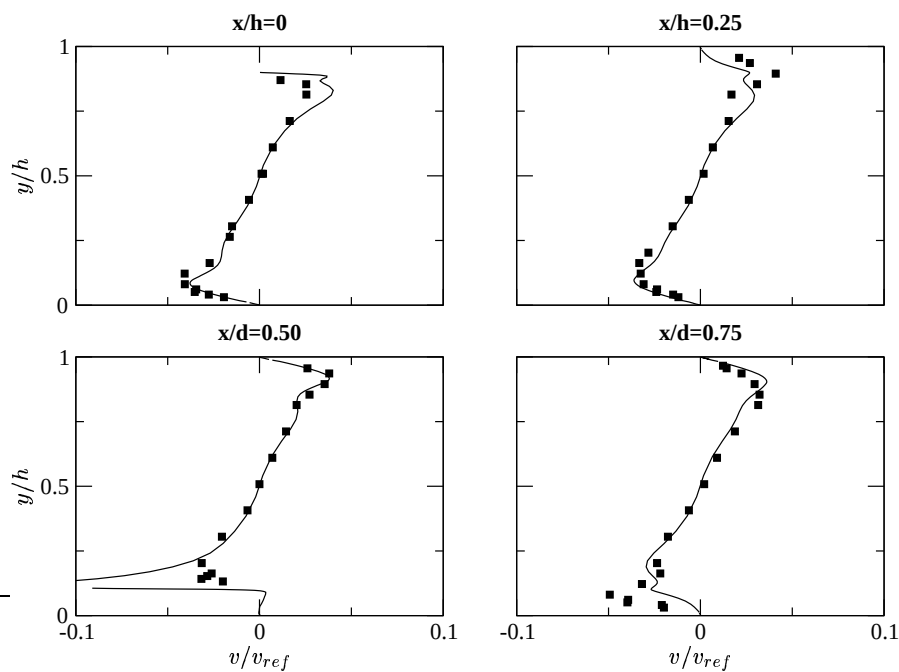
Zmianę liczby Nusselta definiowaną w oparciu o wysokość kanału D przedstawiono na Rysunku 8.15. Wyniki uzyskane czterema różnymi domknięciami turbulentnego strumienia ciepła w zasadzie można uznać za identyczne²². W stosunku do danych eksperymentalnych wartość Nu pozostaje w znacznym stopniu niedoszacowana (nawet w granicach 50%).

Uzyskane wyniki zarówno w odniesieniu do profili prędkości, składowych tensora naprężeń oraz liczby Nusselta, pozostają także w zgodności do większości rezultatów zaprezentowanych w pracach [88, 204, 115]. Lepszą zgodność przebiegu zmian liczby

²²Za wyjątkiem modelu AKN, choć i tutaj wyniki są niezadowalające.

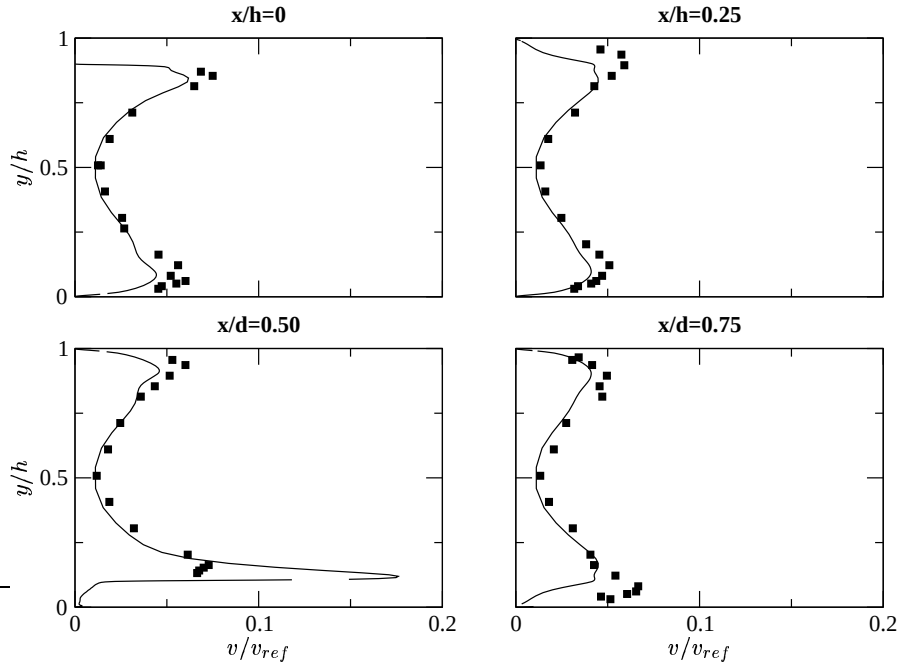


Rysunek 8.12: Profile składowej $\overline{u'u'}$ tensora naprężeń turbulentnych (punkty – dane eksperymentalne, linia ciągła – rezultaty obliczeń)

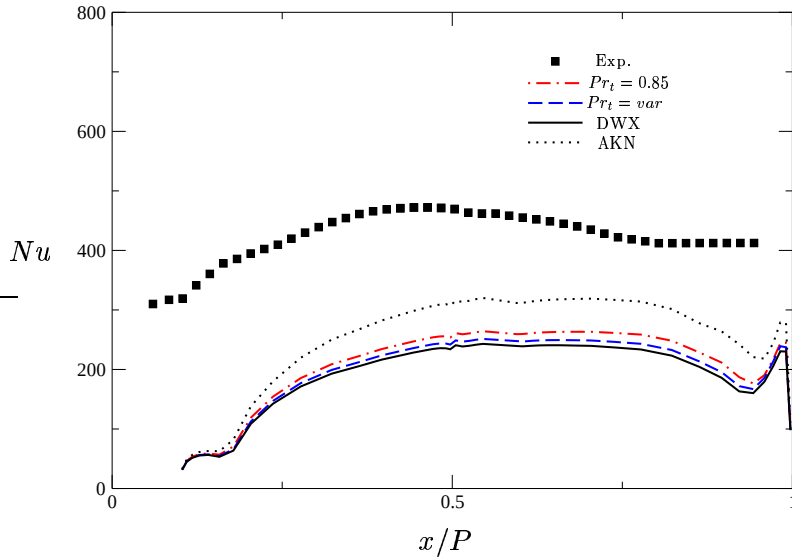


Rysunek 8.13: Profile składowej $\overline{u'v'}$ tensora naprężeń turbulentnych (punkty – dane eksperymentalne, linia ciągła – rezultaty obliczeń)

Nusselta na ścianie w stosunku do danych eksperymentalnych uzyskano w pracy [204] także dla modelu turbulencji drugiego rzędu z jednoczesnym zastosowaniem korekcji równania ewolucji ϵ według Yapa i przy wykorzystaniu uogólnionej hipotezy gradien-



Rysunek 8.14: Profile składowej $\overline{v'v'}$ tensora naprężeń turbulentnych (punkty – dane eksperymentalne, linia ciągła – rezultaty obliczeń)

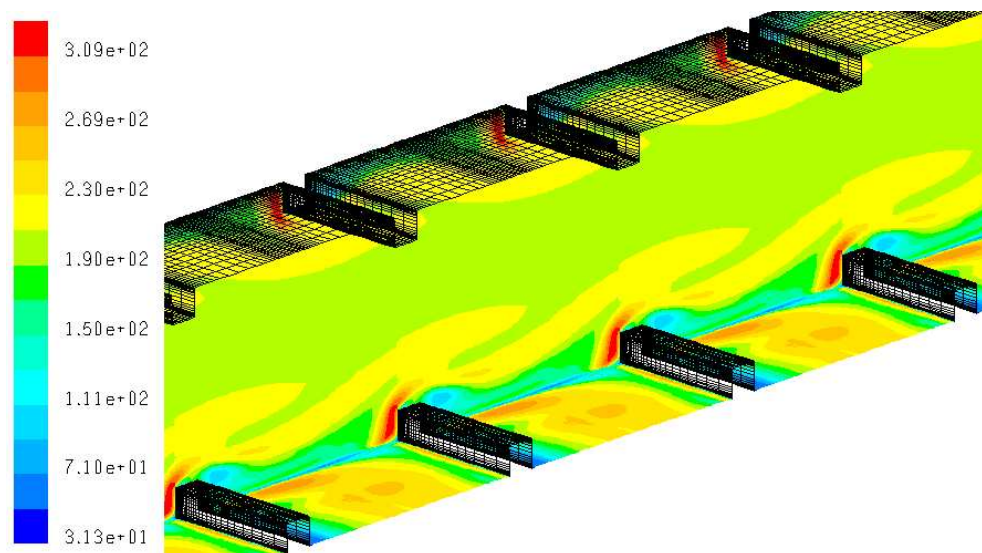


Rysunek 8.15: Dystrybucja liczby Nusselta wzdłuż dolnej ścianki w płaszczyźnie symetrii

towej dla modelowania turbulentnego strumienia ciepła.

Różnice pomiędzy wynikami obliczeń, które są niedoszacowane, a danymi eksperymentalnymi liczby Nusselta tłumaczy się przy zastosowaniu modeli dwuwarstwowych i $Pr_t = const$ tym, iż turbulentne skale długości np. w modelu Wolfsteina zależą od odległości od ścianki, co przykładowo w obszarach separacji przepływu jest założeniem błędnym [204]. W niniejszej analizie do wyznaczenia turbulentnego współczynnika dyfuzji wykorzystano model Deng et al. DWX i Abe et al. AKN, w których turbulentna

skala długości wyznaczana jest w oparciu o skalę Kołmogorowa [49], z jednoczesnym uwzględnieniem kombinowanej mechaniczno-termicznej skali czasowej. Mimo to jednak nie uzyskano żadnej poprawy wyników. Świadczy to o decydującym wpływie pola prędkości i mechanicznej skali czasowej k/ϵ na wymianę ciepła w obszarze przyściennym, szczególnie dla niskich różnic temperatur. Stąd sprawą kluczową jest zastosowanie odpowiedniego modelu turbulencji przyściennej. Na Rysunku 8.16 przedstawiono widok



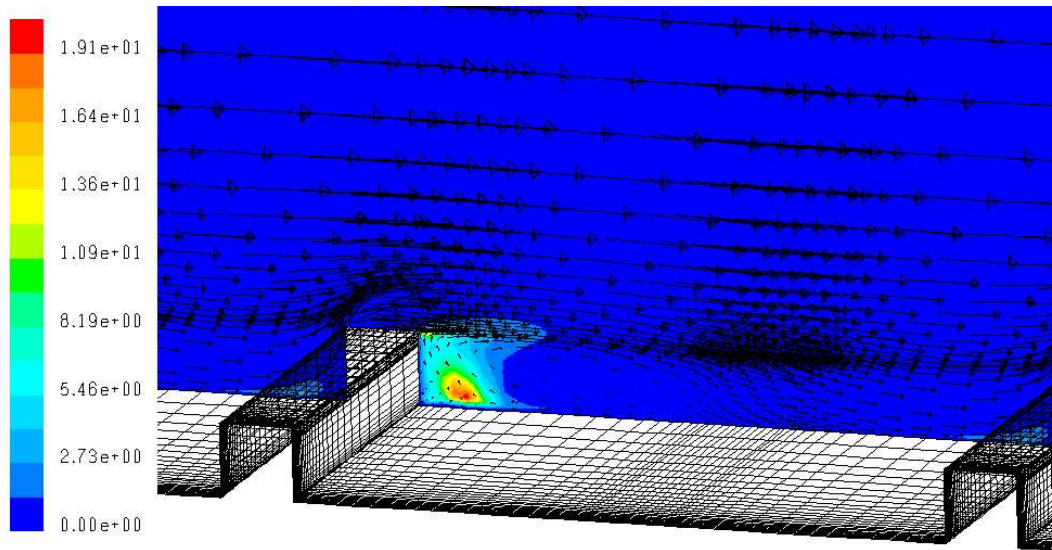
Rysunek 8.16: Rozkład liczby Nusselta na ściankach dolnej i bocznej

zmian liczby Nusselta na ściankach dolnej i bocznej, zaś na Rysunku 8.17 zamieszczono dystrybucję wariancji temperatury według modelu DWX. Największe wartości liczby Nusselta notuje się na ścianie bocznej bezpośrednio przy napływie na żebro. Odwrotnie zaś, maksymalne wartości $\overline{\theta'^2}$ występują tuż za żebrem w obszarze silnej recyrkulacji oderwanego przepływu. Podobne cechy można zaobserwować na Rysunku 6.9 zamieszczonego w Rozdziale 6, dla dwuwymiarowego kanału uźebrowanego.

Wnioski

Uzyskane wyniki potwierdzają przydatność modeli drugiego rzędu do modelowania przepływu przez trójwymiarowe kanały uźebrowane. Niestety zastosowanie różnych modeli wymiany ciepła nie wpływa na poprawę wyników w zakresie wymiany ciepła. Liczba Nusselta pomierzona eksperymentalnie jest dwukrotnie wyższa od uzyskanej w sposób numeryczny, chociaż przebiegi krzywych na Rysunku 8.15 są jakościowo zbliżone dla wszystkich przypadków. Podobne wyniki zaprezentowano także na seminarium ERCO-FTAC/IAHR w 1998 roku oraz w pracy Iacovidisa i Raisee [204].

W świetle wyników przedstawionych w Rozdziale 6 dla kanału dwuwymiarowego przy wykorzystaniu modelu $V2F$ oraz analizy zamieszczonej w pracy [204], widać wyraźnie iż decydującą rolę, przy obliczaniu zagadnień turbulentnej wymiany ciepła w kanałach uźebrowanych, odgrywa zastosowanie odpowiedniego modelu przyściennej turbulencji mechanicznej.



Rysunek 8.17: Wektory prędkości naniesione na pole wariancji temperatury $\overline{\theta'^2}$

8.4 Modelowanie chłodzenia zewnętrznego

Większość prac dotyczących numerycznej symulacji chłodzenia filmowego wykonuje się w dalszym ciągu z wykorzystaniem dwurównaniowych modeli turbulencji mechanicznej, najczęściej wersje *low-Re-number* $k-\epsilon$ i $k-\omega$ [205, 189, 206, 165, 207, 190, 178, 171, 180]. Związane jest to po pierwsze z ograniczeniem czasu pracy komputerów, po drugie zaś zakładano, iż zastosowanie modeli transportu naprężeń turbulentnych nie wpłynie znacząco na poprawę rezultatów obliczeń²³ [206]. Nieliczne prace dowodzą jednak, iż pełne modele RSM są na tyle dopracowane, by można było już zrezygnować z domknięć dwurównaniowych [50, 208], podobnie jak dla obliczeń chłodzenia wewnętrznego. W publikacji [172] porównano dla przykładu wyniki obliczeń aerodynamicznych modelami grupy $k-\epsilon$ oraz RSM z danymi eksperymentalnymi na łopatkę jeszcze bez zastosowanego chłodzenia. Uśredniony współczynnik strat $\bar{\zeta}$ dla $k-\epsilon$ był równy 7.05%, zaś dla RSM 4.54% przy pomierzonym 4.58%.

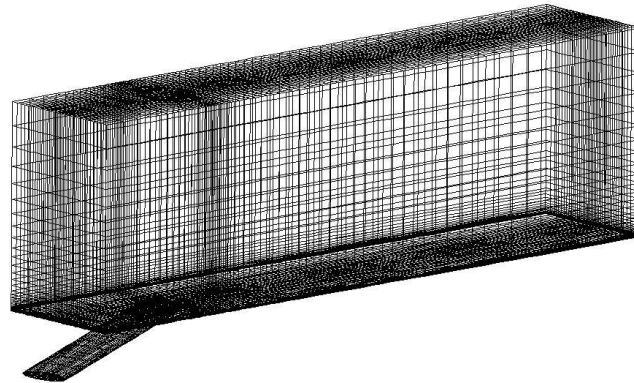
8.4.1 Płyta z wtryskiem $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$

Opis eksperymentu

Dane eksperymentalne wykorzystane w niniejszej analizie zaczerpnięto z pracy [178], w której także przedstawiono porównanie z obliczeniami z wykorzystaniem modelu $k-\epsilon$ z funkcjami ścianek i w konfiguracji dwuwarstwowej z jednorównaniowym modelem Wolfsteina w obszarze przyściennym. Eksperyment przeprowadzony przez Honami et al. dotyczył pomiarów pola prędkości i temperatury w przekrojach zlokalizowanych za otworem doprowadzającym zimne powietrze nad chłodzoną płaską płytą. Zastosowano kanały chłodzące o przekroju kołowym, których średnica była równa $d = 10$ mm, a rozstaw pomiędzy osiami sąsiadujących kanałów, czyli podziałka wynosiła $S/d = 5$. Kanały ustawiono pod kątem $\beta = 90^\circ$ w stosunku do kierunku przepływu

²³Zakładano tak pomimo, iż wiadomym jest, że turbulentne oddziaływanie pomiędzy wpływającą strugą chłodzącą i przepływem głównym są silnie anizotropowe [181], a zwykle modele wykorzystujące hipotezę Boussinesqa z założenia są izotropowe.

głównego nad płytą i nachylono względem powierzchni płyty pod kątem $\alpha = 30^\circ$. Geometrię badanego układu wraz z siatką numeryczną na powierzchni przedstawiono na Rysunku 8.18. Eksperyment przeprowadzono dla trzech wydatków względnych



Rysunek 8.18: Wieloblokowa siatka numeryczna układu obliczeniowego

$M = (\rho v)_j / (\rho v)_\infty = 0.5, 0.85$ oraz 1.2 . Różnica temperatur pomiędzy czynnikiem „chłodzącym” i „roboczym” dla każdego z pomiarów była identyczna i wynosiła 55° . Poziom turbulencji wlotowej czynnika głównego wynosił $Tu = 5\%$.

Charakterystyka obliczeń

Obliczenia przeprowadzono z wykorzystaniem kodu Fluent [86]. Zastosowano model transportu naprężeń turbulentnych RSM z jednorównaniowym domknięciem przyściennym. Do modelowania turbulentnego strumienia ciepła wykorzystano dwurównaniowe domknięcie $\overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ DWX [49] zaimplementowane do kodu poprzez własny podprogram. Stąd zadanie wymagało rozwiązania w każdym kroku iteracyjnym czternastu równań transportu, dla każdej objętości kontrolnej. Z powodu periodyczności układu zastosowano geometrię związaną z jednym kanałem chłodzącym i warunkami periodyczności w połowie odległości pomiędzy poszczególnymi otworami chłodzącymi.

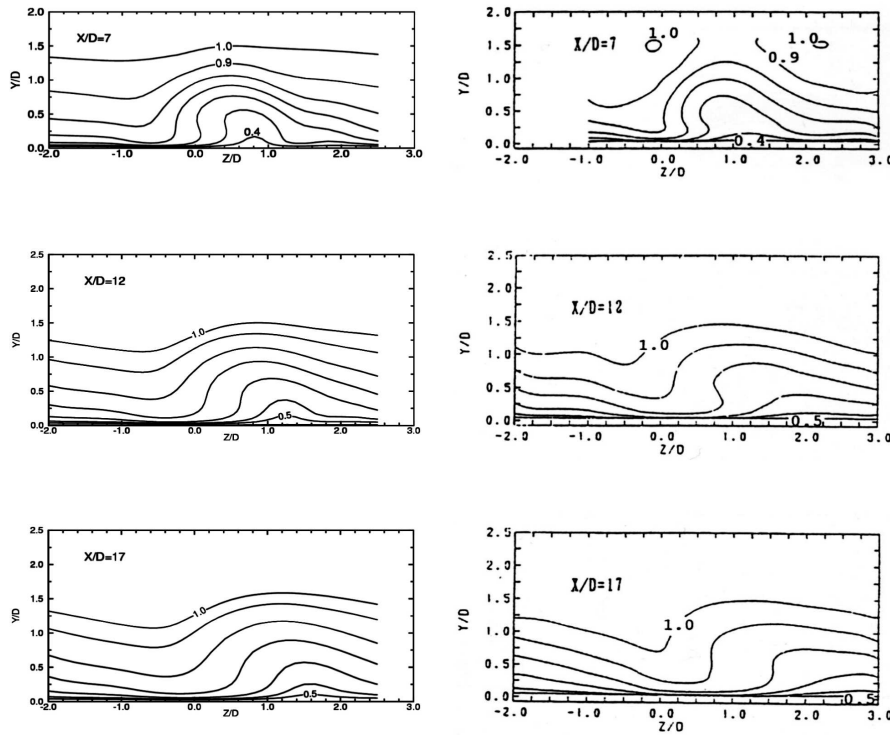
Strukturalną siatkę numeryczną widoczną na Rysunku 8.18 przygotowano w programie Gambit w postaci oddzielnych bloków. Zawiera ona łącznie 200 tysięcy objętości kontrolnych, co pozwala już na uzyskanie wyników, które nie zmieniają się w trakcie kolejnego zagęszczania siatki (w pracy [178] do analogicznych obliczeń stosowano siatki o wymiarze 165 tysięcy objętości).

Jak sugeruje się w pracach [180, 193] obliczenia układów bez uwzględniania komory doprowadzającej chłodziwo do kanału chłodzącego mogą być obarczone znacznym błędem wynikającym z braku uwzględnienia separacji przepływu na wlocie do kanału. W tym jednak wypadku eksperyment był przeprowadzony z założeniem $L/d = 33$, czyli wystarczająco długiego²⁴, by przepływ był już rozwinięty na wylocie z kanału. Na wlocie do kanału chłodzącego i głównego zastosowano więc profile prędkości, temperatury oraz k , ϵ , $\overline{\theta'^2}$ i ϵ_θ jak dla przepływów w pełni rozwiniętych.

Powietrze traktowano jako gaz idealny, a jego moldekularną lepkość, przewodność i ciepło właściwe modelowano odpowiednimi funkcjami temperatury²⁵. Do sprężenia

²⁴I zupełnie nie przystającego do warunków rzeczywistych turbiny gazowej

²⁵Identycznymi jak w obliczeniach przedstawionych w Rozdziale 5 i 6



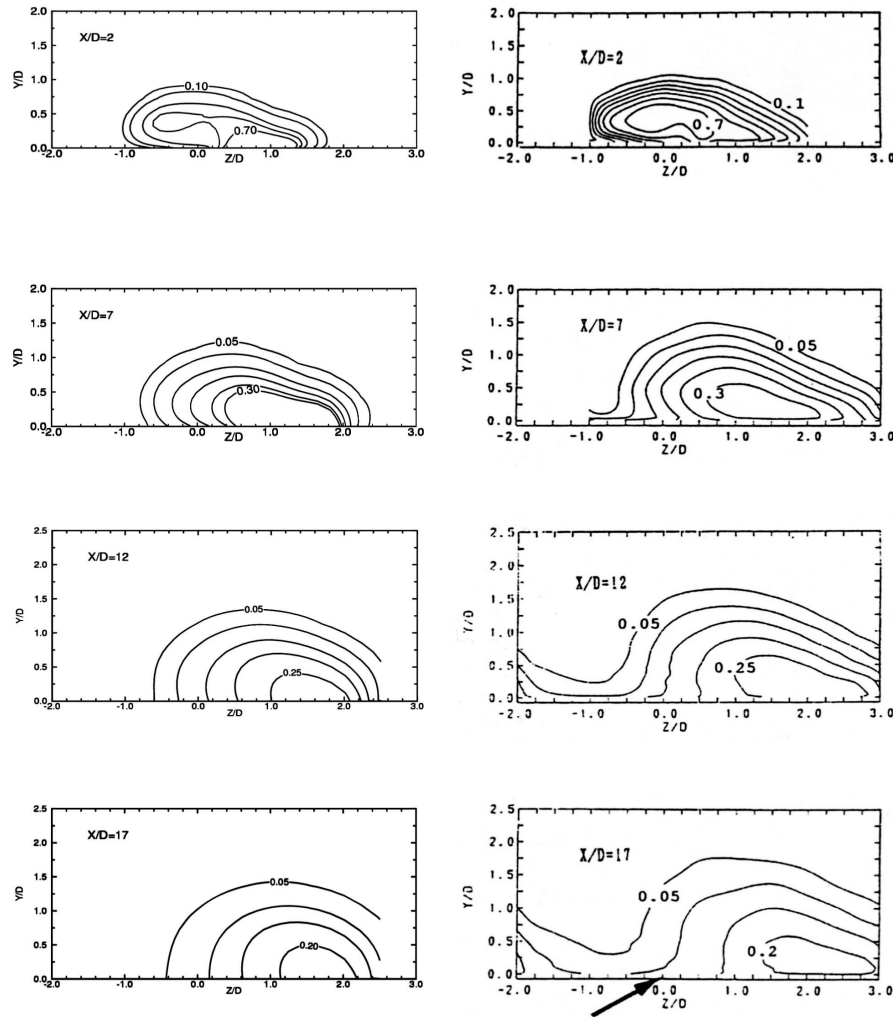
Rysunek 8.19: Kontur prędkości względnej v/v_∞ dla $M = 0.50$ - z lewej strony obliczenia [62], z prawej dane eksperymentalne [178]

ciśnienie-prędkość zastosowano metodę SIMPLEC, zaś do rozwiązania równań transportu wykorzystano schematy drugiego rzędu. Proces iteracyjny uznawano za zakończony w momencie uzyskania względnych residuów równań na poziomie niższym niż 10^{-3} (dla równania energii 10^{-6}), a także zbilansowania strumieni masy i energii dla całego obszaru całkowania na poziomie 0.5% oraz ustania oscylacji monitorowanego współczynnika oporu na ścianie.

W celu lepszego porównania z danymi eksperymentalnymi i wcześniejszymi obliczeniami wyniki zaprezentowano w formie identycznej z przedstawionymi w pracy Lakehal et al. [178]. Dotyczą one pól prędkości względnej v/v_∞ oraz temperatury (efektywności chłodzenia) $\eta = (T - T_\infty) / (T_j - T_\infty)$, przedstawionych na przekrojach dla $x/d = 2, 7, 12$, oraz 17 względem otworu wylotowego kanału chłodzącego.

Na Rysunku 8.19 przedstawiono kontur pola prędkości dla wydatku względnego $M = 0.50$. Jako, iż powietrze chłodzące dostarczane jest kanałem ustawionym pod kątem $\beta = 90^\circ$, widać wyraźną asymetrię przepływu z dominującym pojedynczym wirym. Jest to typowe dla układów z kątem ustawienia $\beta > 15^\circ$ [174]. Przy mniejszych wartościach kąta β , lub wyższym wydatku względnym M występują dwa przeciwstawne wiry, typowe dla strug swobodnych [209].

Intensywne mieszanie wtryskiwanej strugi czynnika chłodzącego z przepływem głównym w obszarze otworu powoduje, iż wraz z oddalaniem się od niego spadek temperatury względnej jest coraz mniejszy tzn. na Rysunku 8.20 dla $x/d = 2$ maksymalna rejestrowana wartość $\eta = 0.6$, dla $x/d = 7$ już tylko $\eta = 0.35$, zaś dla $x/d = 12$ spada

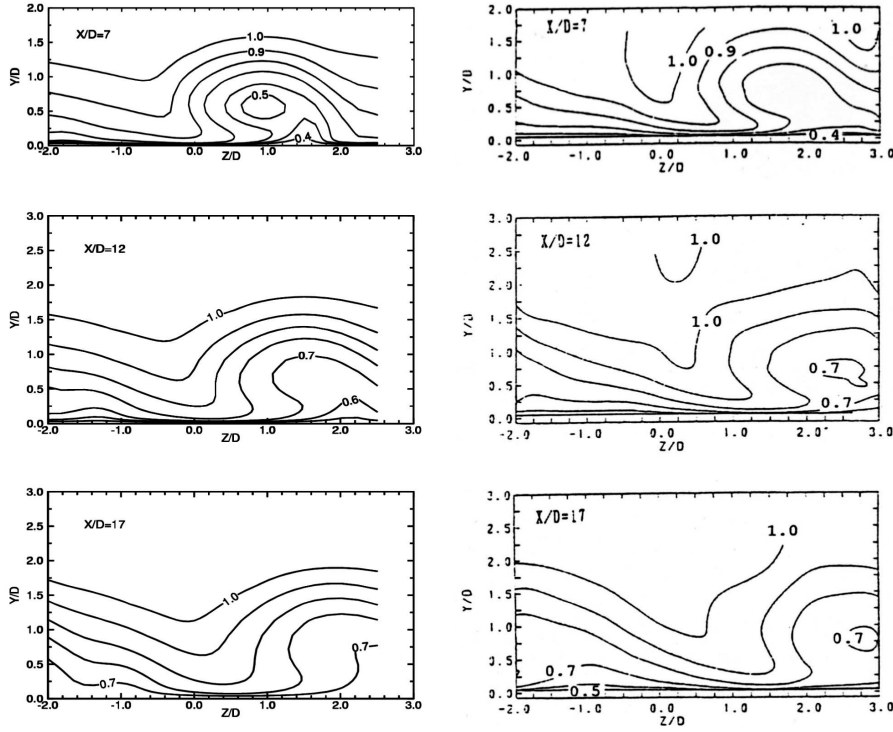


Rysunek 8.20: Kontur efektywności chłodzenia dla $M = 0.50$ - z lewej strony obliczenia [62], z prawej dane eksperymentalne [178]

jedynie do $\eta = 0.20$. W porównaniu do wyników przedstawionych w pracy [178], które uzyskano przy zastosowaniu dwurównaniowego modelu turbulencji mechanicznej $k-\epsilon$ wraz z turbulentną liczbą Prandtla $Pr_t = 0.9$, widać istotną poprawę, szczególnie dla „zasięgu” izolinii temperatury względnej η , zarówno po wysokości jak i szerokości kanału. Dla przykładu różnica pomiędzy pomierzoną i obliczoną wysokością maksymalną y/d izolinii $\eta = 0.05$ dla modelu $RSM-\theta'^2-\epsilon_\theta$ wynosi $15 \div 20\%$, zaś w prezentowanym w [178] przypadku modelu turbulencji $k-\epsilon$ sięga nawet 40% .

Dla wyższego wydatku względnego tj. $M = 0.85$ pomiary rejestrują obecność intensywniejszych struktur wirowych wewnątrz wtryskiwanej strugi chłodzącej. Model RSM Rysunek 8.21 prawidłowo odwzorowuje zarówno rozmieszczenie jak i intensywność tych wirów.

Na wykresie efektywności chłodzenia Rysunek 8.22 widać dość dobrą zgodność danych eksperymentalnych i wyników obliczeń. Różnice pomiędzy obecnymi wynikami, a



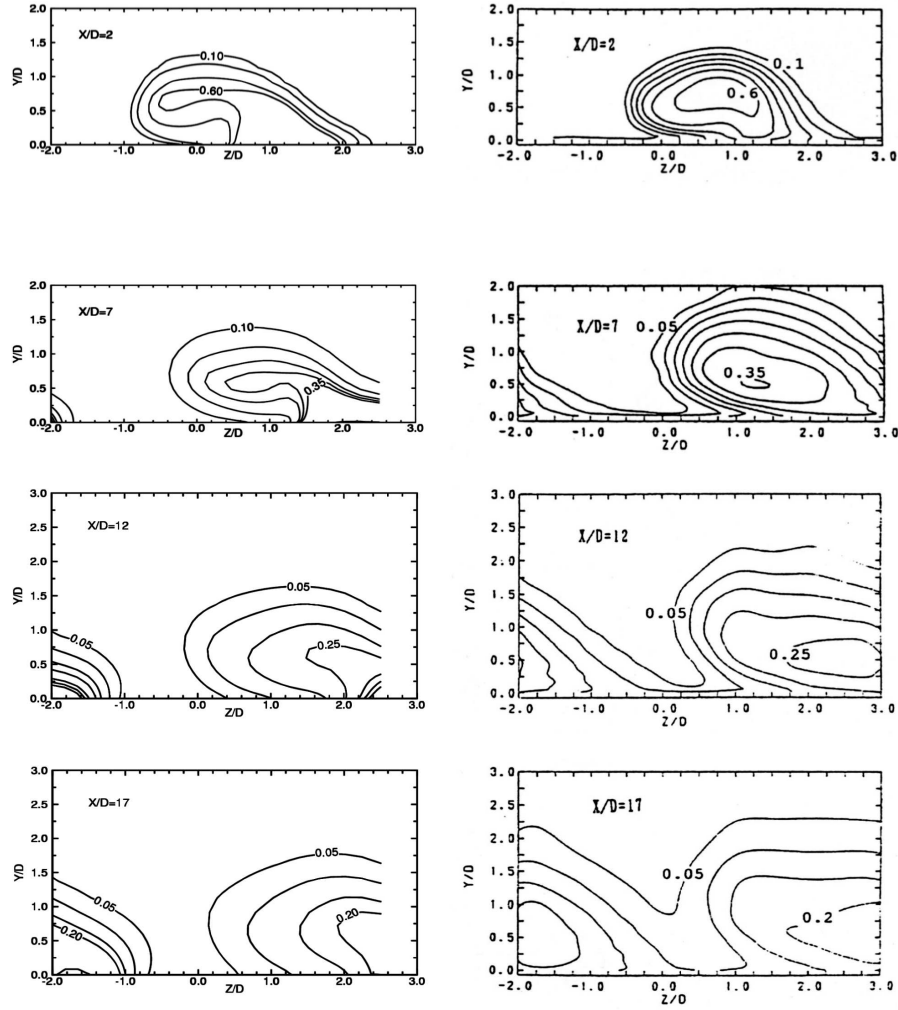
Rysunek 8.21: Kontur prędkości względnej v/v_∞ dla $M = 0.85$ - z lewej strony obliczenia [62], z prawej dane eksperymentalne [178]

danymi z pracy [178] są dużo mniejsze niż w przypadku $M = 0.50$, jednak w dalszej odległości od otworu dla $x/d = 12$ i 17 , zauważa się lepszą pracę modelu RSM- $\overline{\theta'^2}-\epsilon_\theta$ w odniesieniu do „rozpościerania się” izolinii η po szerokości kanału.

W przypadku najwyższego rozpatrywanego w niniejszej analizie wydatku względnego $M = 1.20$ widać znów bardzo dobrą zgodność obliczeń modelem transportu naprężeń turbulentnych i pomiarów eksperymentalnych związanych z wizualizacją pola prędkości względnej zaprezentowanych na Rysunku 8.23. Dla tej wartości wydatku względnego, widać szczególnie wyraźnie przewagę modelu RSM nad dwurównaniowym modelem $k-\epsilon$ z pracy [178].

Na Rysunku 8.24 przedstawiono kontur efektywności chłodzenia η . Wyniki uzyskane modelem RSM z dwurównaniowym domknięciem $\overline{\theta'^2}-\epsilon_\theta$ dobrze odwzorowują spadek temperatury względnej na poszczególnych przekrojach oraz wielkość i położenie maksymalnych wartości η , jednak podobnie jak model $k-\epsilon$ ze stałą turbulentną liczbą Prandtla „zasięg” poszczególnych izolinii η jest zbyt mały, głównie po wysokości kanału. Wynika z tego, iż turbulentna dyfuzja ciepła w tym kierunku jest niedoszacowana przez modele wykorzystujące hipotezę dyfuzyjności turbulentnej. Wydaje się więc, iż poprawę rezultatów obliczeń można uzyskać jedynie poprzez wykorzystanie do obliczeń pełnego modelu transportu składowych wektora turbulentnego strumienia ciepła.

Na Rysunku 8.25 przedstawiono dodatkowo pole fluktuacji temperatury θ'_{rms} nor-

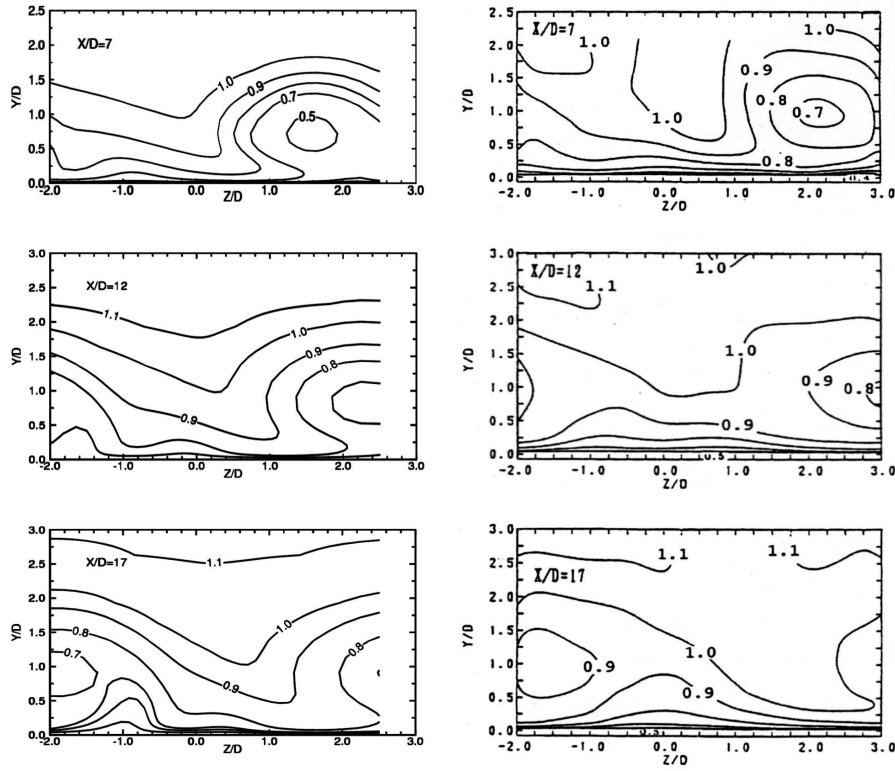


Rysunek 8.22: Kontur efektywności chłodzenia dla $M = 0.85$ - z lewej strony obliczenia [62], z prawej dane eksperymentalne [178]

malizowanej według formuły:

$$\theta'_{rms} = \frac{\sqrt{\theta'^2}}{(T_j - T_\infty)} \quad . \quad (8.11)$$

Maksymalna rejestrowana wartość dla wydatku względnego $M = 0.85$ wynosi $\theta'_{rms} = 0.27$. Pozostaje to w dobrej zgodności z danymi eksperymentalnymi zaprezentowanymi w pracach Kohli et al. [177, 191], gdzie najwyższą pomierzoną wartością normalizowanej fluktuacji temperatury oszacowano na $\theta'_{rms} \geq 0.25$ i to niezależnie od poziomu turbulencji na wlocie do układu. Także lokalizacja maksimum jest identyczna mimo tego, iż przedstawione w tych publikacjach rezultaty dotyczą wtrysku poprzez kanały nachylone o $\alpha = 30^\circ$ i które są ustawione równolegle względem przepływu głównego $\beta = 0^\circ$, a nie pod kątem prostym. Największy poziom fluktuacji θ'_{rms} znajduje się bowiem w obszarze intensywnego mieszania na granicy strugi swobodnej powietrza chłodzącego i



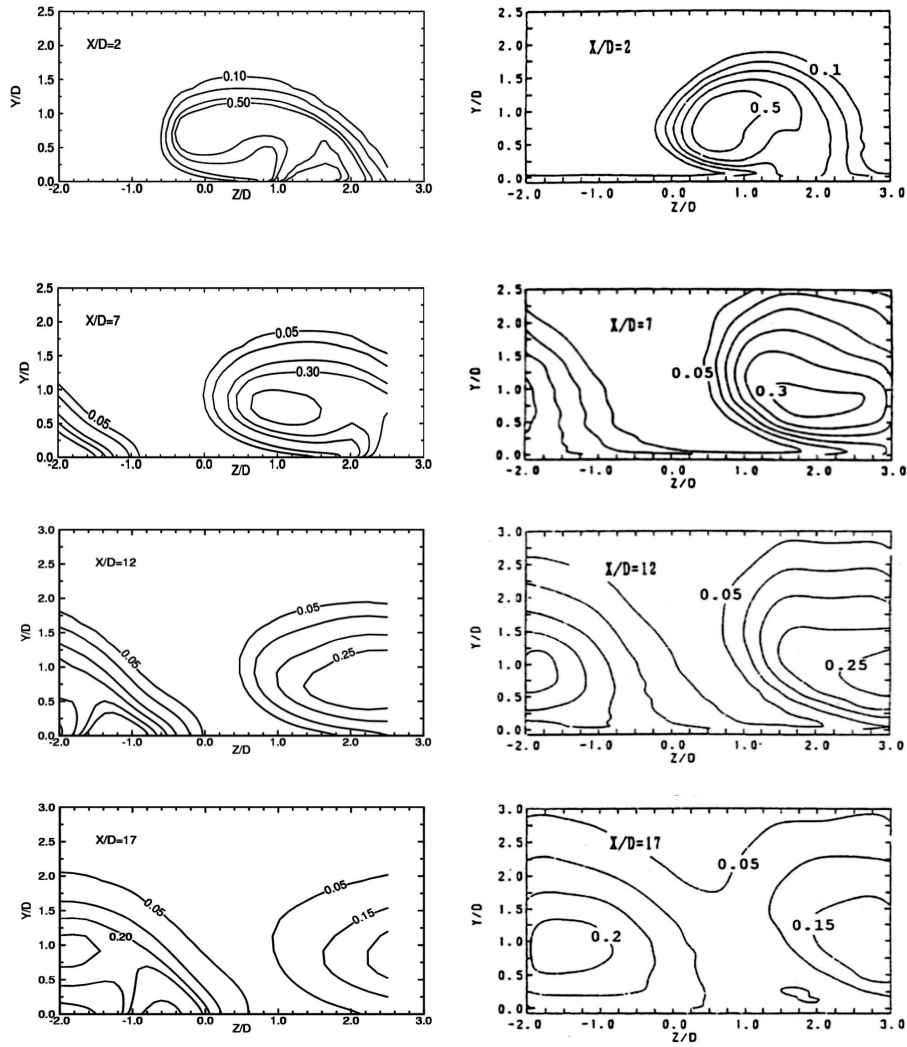
Rysunek 8.23: Kontur prędkości względnej v/v_∞ dla $M = 1.20$ - z lewej strony obliczenia [62], z prawej dane eksperymentalne [178]

napływającego strumienia głównego czynnika roboczego, tam gdzie występują znaczne gradienty prędkości i temperatur. Silne interakcje turbulentne na „powierzchni granicznej” strugi swobodnej tłumaczy się niestabilnością warstwy ścinającej generującą struktury wirowe. Te struktury wirowe są odpowiedzialne za szybkie „rozcieńczenie” czynnika powietrza chłodzącego czynnikiem gorącym [177, 191] i w rezultacie gwałtowny spadek efektywności chłodzenia w bezpośrednim sąsiedztwie otworu wtryskowego.

Wnioski

Uzyskane wyniki świadczą o dobrym odwzorowaniu poprzez domknięcie $\overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$, powiązane z modelem transportu naprężeń turbulentnych, procesów cieplno-przepływowych przy chłodzeniu filmowym elementów turbiny gazowej. Szczególnie położenie i wartości maksimum prędkości względnej jak i efektywności chłodzenia są modelowane w sposób zadowalający w stosunku do rezultatów pomiarów Honami et al. i obliczeń zaprezentowanych przez Lakehala et al. [178]. Także „spadek” efektywności chłodzenia wzdłuż płyty jest odwzorowany prawidłowo. Największe zastrzeżenia można mieć jedynie do „zasięgu” izol linii η po wysokości kanału, ale tylko przy wyższych wartościach wydatku względnego M .

Ciekawe wyniki związane są z rozkładem normalizowanych fluktuacji temperatury θ'_{rms} wyznaczonych na podstawie zaimplementowanego równania transportu wariancji temperatury $\overline{\theta'^2}$. W porównaniu do prac Kohli et al. [177, 191] uzyskano zgodność



Rysunek 8.24: Kontur efektywności chłodzenia dla $M = 1.20$ - z lewej strony obliczenia [62], z prawej dane eksperymentalne [178]

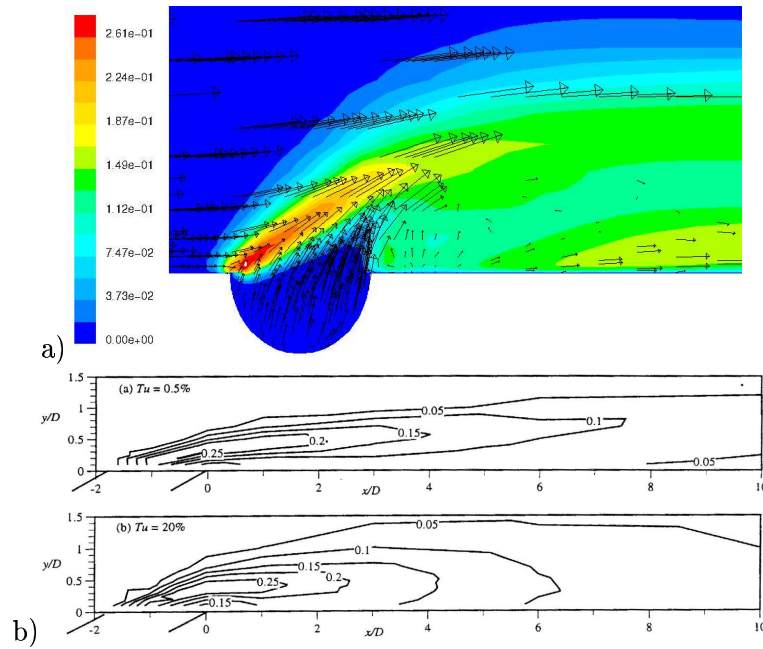
zarówno co do maksymalnych wartości θ'_{rms} , jak i ich lokalizacji.

8.4.2 Płyta z wtryskiem $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$

Niniejsza analiza związana jest z wyznaczaniem efektywności chłodzenia η na chłodzonej płycie. Do tego celu wykorzystano rezultaty pomiarów wykonanych przez Gartshore et al. [174]. Analizę numeryczną wykonano analogicznie jak dla przypadku kanału chłodzącego z kątem nachylenia $\alpha = 30^\circ$ i ustawienia $\alpha = 90^\circ$, przedstawionego w poprzednim podrozdziale.

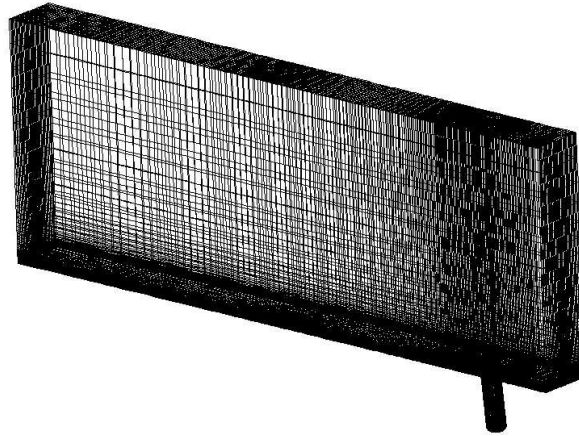
Opis eksperymentu i charakterystyka obliczeń

Eksperyment został opisany w pracy [174]. Dotyczy on badań nad kształtem kanału doprowadzającego powietrze chłodzące do układu. Analizowano kanały o przekroju



Rysunek 8.25: Kontur θ'_{rms} dla wydatku względnego $M = 0.85$ i $Tu = 5\%$ a) obliczenia z naniesionymi wektorami pola prędkości, b) zbliżony eksperyment Kohli et al. [177, 191]

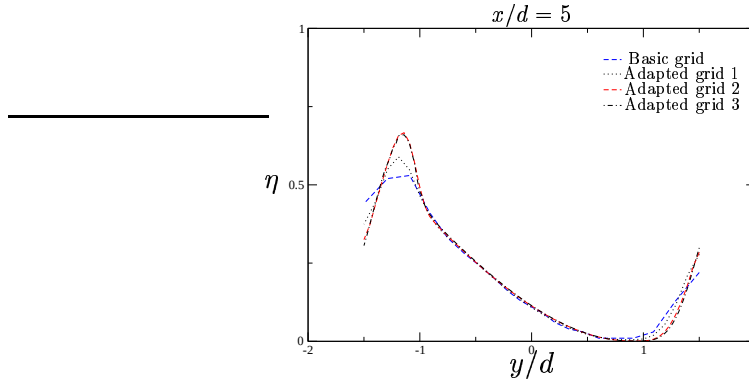
prostokątnym $d = 12.7$ mm i kołowym $d = 14.4$ mm nachylone w stosunku do płyty chłodzonej pod kątem $\alpha = 30^\circ$ i ustawione względem przepływu głównego nad płytą pod kątem $\beta = 45^\circ$. Dla obu konfiguracji stosowano identyczną, najczęściej spotykaną w badaniach podziałkę $S/d = 3$ oraz taką samą długość kanału $L/d = 4$. Stosunek gęstości chłodziwa do czynnika roboczego był równy $DR = 1$, zaś prędkość względną zmieniano od $VR = 0.5$, przez 1.0, aż do 1.5. 8.26.



Rysunek 8.26: Wieloblokowa siatka numeryczna układu obliczeniowego

Do obliczeń wybrano wariant z otworami okrągłymi, tak by mieć bezpośrednie odniesienie do wyników przedstawionych w poprzednim podrozdziale. Geometrię obszaru obliczeniowego zdyskretyzowano wieloblokową siatką strukturalną, której zarys zaprezentowano na Rysunku

Siatka początkowa miała wymiar $35 \times 35 \times 30$ w głównym bloku przepływowym, co odpowiadało całkowitej liczbie objętości równej 100 tys. Siatkę tę trzykrotnie zagęszczano, głównie w obszarze wlotu kanału chłodzącego, tak by wyniki nie zmieniały się już w trakcie dalszych obliczeń. Wpływ adaptacji siatki na otrzymane wyniki przedstawiono na Rysunku 8.27 na przykładzie zmian efektywności chłodzenia η w dwóch przekrojach kontrolnych $x/d = 1$ oraz $x/d = 5$. Widać, iż dwukrotna adaptacja jest już wystarczająca, stąd nie ma potrzeby stosowania siatki trzykrotnie adaptowanej. Ostatecznie liczba objętości kontrolnych zwiększono do 180 tys. i ta właśnie siatka posłużyła do dalszej analizy numerycznej.



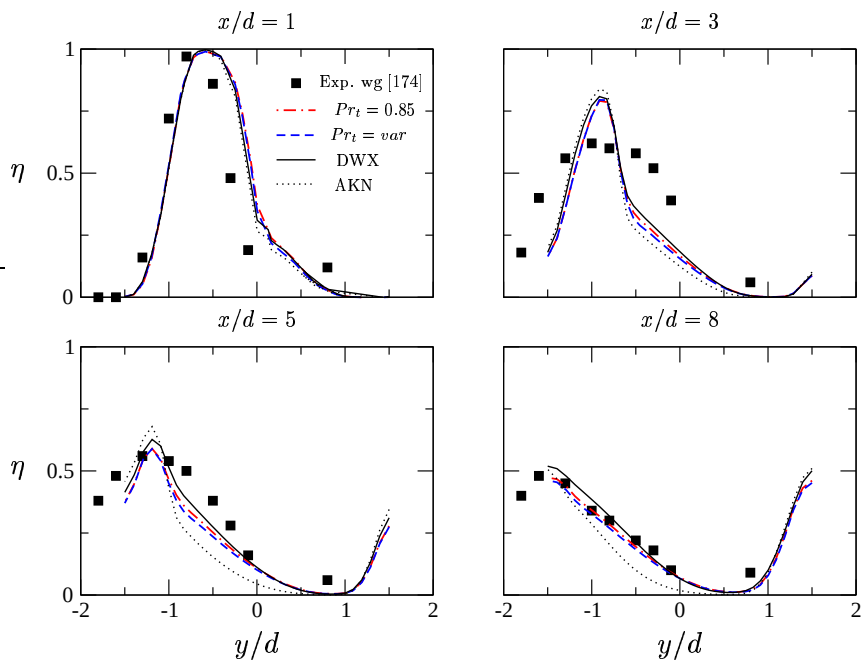
Rysunek 8.27: Wpływ adaptacji siatki na wyniki efektywności chłodzenia η dla przekroju $x/d = 5$

Do obliczeń wykorzystano identyczne założenia dotyczące szacowania warunków brzegowych, modelowania własności powietrza jak dla przypadku z $\alpha = 30^\circ$ i $\alpha = 90^\circ$. Do modelowania turbulentnego strumienia pędu wykorzystano model transportu naprężeń Reynoldsa, zaś turbulentny strumień energii modelowano na **cztery sposoby** tak jak przy obliczaniu trójwymiarowego kanału uźebrowanego. Pierwszy z założeniem stałej turbulentnej liczby Prandtla $Pr_t = 0.85$, drugi przy przyjęciu algebraicznej funkcji turbulentnej liczby Prandtla według formuły Kaysa–Crawforda [9], trzeci z wykorzystaniem dwurównaniowego domknięcia $\overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ według Deng et al. [49] oraz czwarty analogiczny do trzeciego różniczkowy model Abe et al. [44]. Trzy ostatnie modele zaimplementowano do kodu numerycznego poprzez własne podprogramy. Szczegółowy opis modeli można znaleźć w Rozdziale 4 oraz przy okazji analizy kanału uźebrowanego w Rozdziale 8.

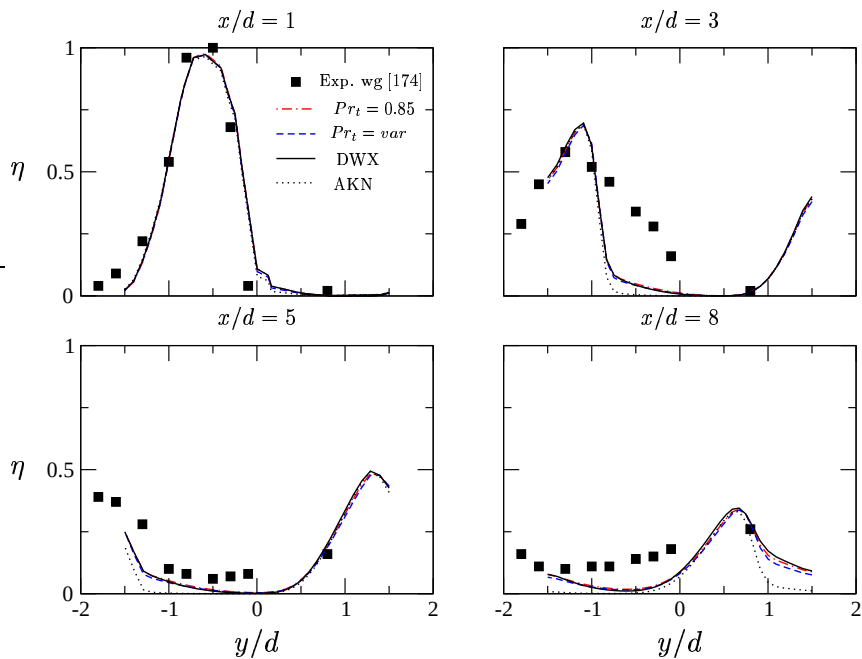
Wyniki obliczeń dla poszczególnych wartości prędkości względnej VR zostaną przedstawione na wykresach wzdłuż szerokości kanału dla czterech położów płaszczyzn przekroju $x/d = 1, 3, 5$ oraz 8 .

Rezultaty dla $VR = 0.5$ przedstawiono na Rysunku 8.28. Podobnie jak w przypadku obliczeń wcześniejszych dla kąta nachylenia $\alpha = 30^\circ$ i ustawienia $\alpha = 90^\circ$ wartości maksymalne efektywności chłodzenia η pozostają w przybliżeniu w zgodności z danymi eksperymentalnymi.

Podobne wnioski można wysnuć obserwując wyniki dla prędkości względnej $VR = 1.0$ na Rysunku 8.29 oraz $VR = 1.5$ na Rysunku 8.30. We wszystkich przypadkach największe rozbieżności notuje się jedynie w przekroju $x/d = 3$, gdzie kształt krzywej η wyraźnie odstaje od przebiegu danych pomiarowych. Jest to najprawdopodobniej efekt niedoszacowania procesu dyfuzji ciepła w kierunku poprzecznym względem przepływu



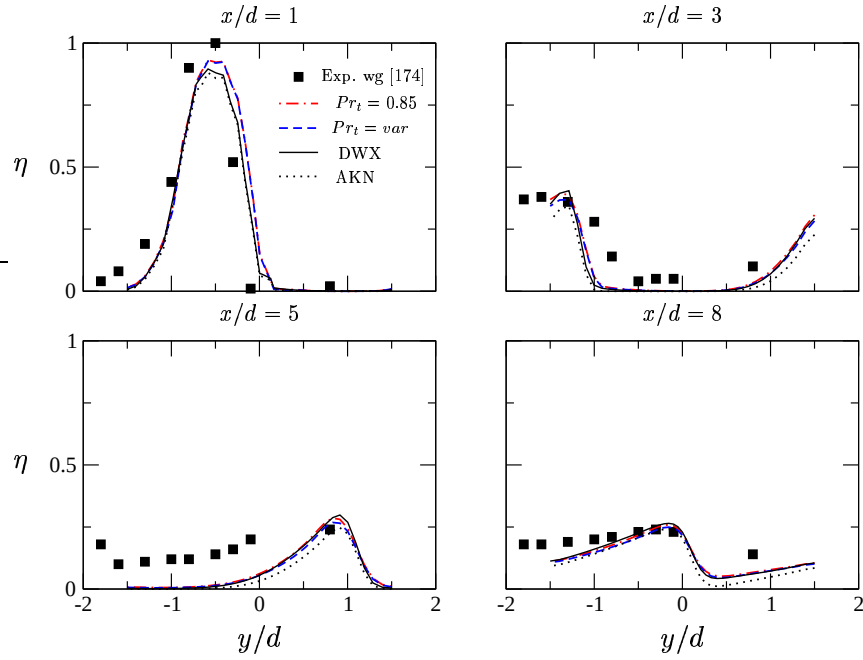
Rysunek 8.28: Efektywność chłodzenia dla prędkości względnej $VR = 0.5$ (punkty - dane pomiarowe wg [174])



Rysunek 8.29: Efektywność chłodzenia dla prędkości względnej $VR = 1.0$ (punkty - dane pomiarowe wg [174])

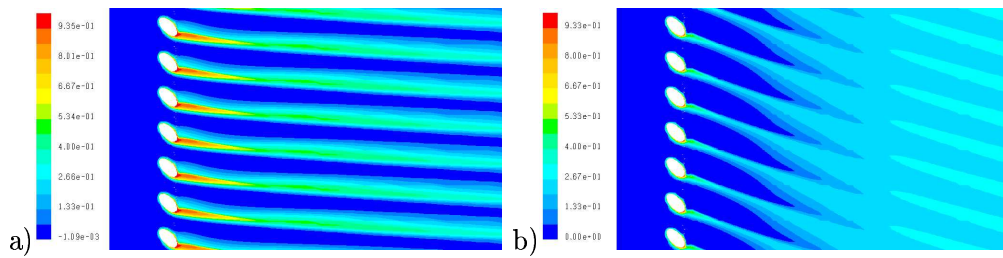
głównego.

Na Rysunku 8.31 zaprezentowano kontur współczynnika efektywności chłodzenia η dla prędkości względnej $VR = 0.5$ i $VR = 1.5$. Wyższa prędkość strugi chłodzącej



Rysunek 8.30: Efektywność chłodzenia dla prędkości względnej $VR = 1.5$ (punkty - dane pomiarowe wg [174])

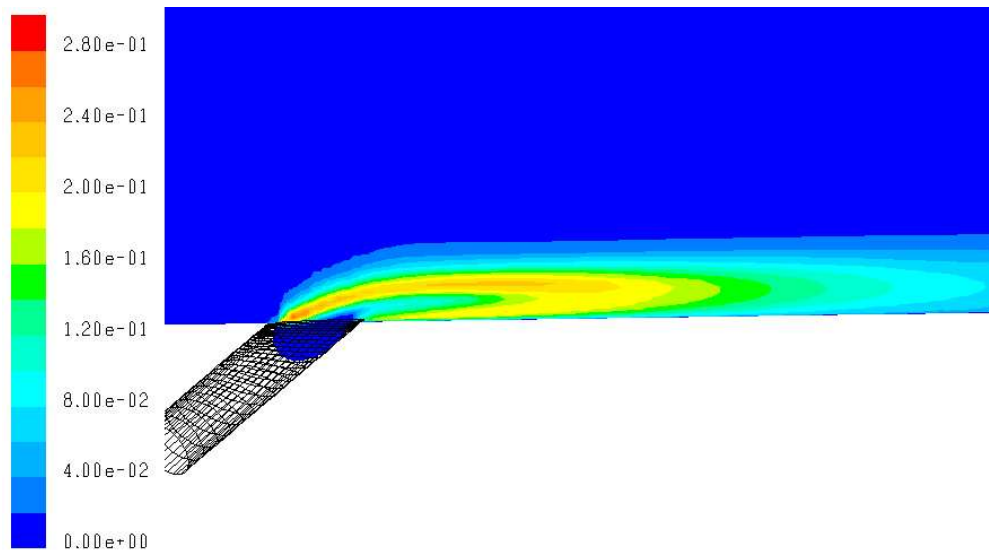
na wylocie z otworu powoduje natychmiastową separację przepływu i w efekcie słabe chłodzenie w obszarze bezpośrednio za miejscem wtrysku. W dalszej odległości czynnik chłodzący zaczyna *pokrywać* większą powierzchnię płyty, przyczyniając się do równomiernej dystrybucji współczynnika efektywności chłodzenia. Dla prędkości niższych struga chłodząca zachowuje w przybliżeniu swój profil na całej długości płyty. Efektem jest lepsze chłodzenie obszaru bezpośrednio za otworem oraz duża nierównomierność dystrybucji η w dalszej odległości od miejsca wtrysku. Zakrzywienie przepływu w obu przypadkach związane jest z oddziaływaniem przepływu głównego na strugę chłodzącą, która jest wtryskiwana pod kątem ustawienia kanału $\beta = 45^\circ$.



Rysunek 8.31: Dystrybucja współczynnika efektywności chłodzenia na płycie dla a) $VR = 0.5$ oraz b) $VR = 1.5$

Kontur normalizowanych fluktuacji temperatury θ'_{rms} w obszarze wtrysku powietrza chłodzącego przedstawiono na Rysunku 8.32. Podobnie jak dla poprzedniego przykładu obliczeniowego z kątem nachylenia $\alpha = 30^\circ$ i ustawienia $\alpha = 90^\circ$, największy poziom fluktuacji notuje się na krawędzi natarcia otworu chłodzącego i dalej w obszarze intensywnego mieszania na granicy strumienia głównego i wtryskiwanej strugi powietrza

chłodzącego.



Rysunek 8.32: Kontur normalizowanych fluktuacji temperatury θ'_{rms}

Wnioski

Zastosowanie modelu transportu naprężeń turbulentnych RSM wpływa na lepszą zgodność obliczeń i danych eksperymentalnych, w porównaniu do wyników przedstawionych w pracy [174] dla dwurównaniowego modelu $k-\epsilon$. Szczególną poprawę notuje się dla przekrojów ułożonych w dalszej odległości od wlotu powietrza chłodzącego. Zastosowanie modelu $\overline{\theta'^2}-\epsilon_\theta$ nie wykazuje szczególnej poprawy wyników w stosunku do prostych algebraicznych modeli. Ma to związek przede wszystkim z założoną niewielką różnicą temperatur pomiędzy czynnikiem chłodzącym i chłodzonym. Widać jednakże, iż oba modele mogą być z powodzeniem wykorzystywane do analizy chłodzenia filmowego, bez straty dokładności wyznaczania współczynnika efektywności chłodzenia.

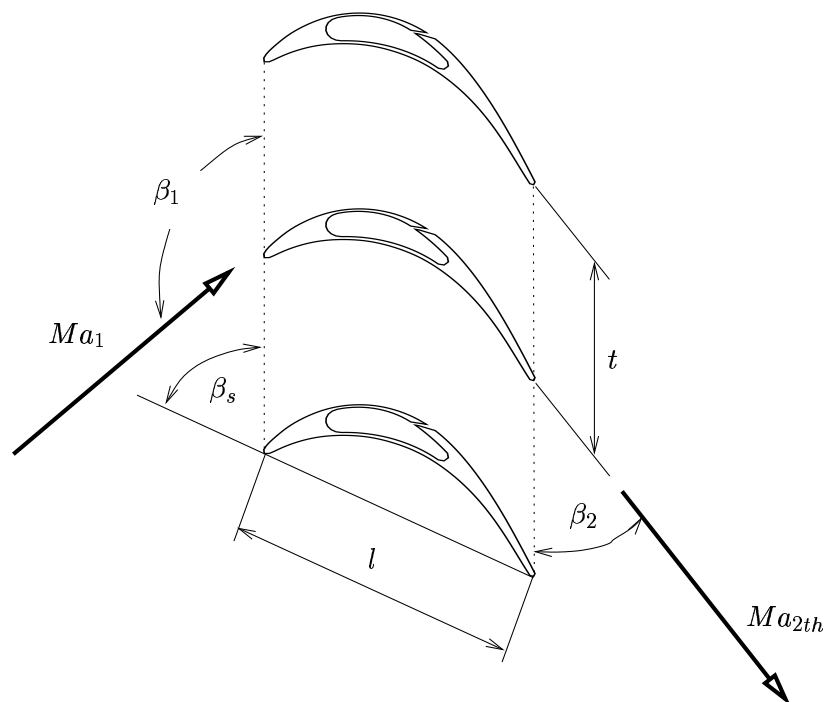
8.4.3 Łopátka chłodzona powietrzem

Poprzednie analizy dotyczyły układów chłodzenia zredukowanych do zagadnienia wtrysku strug powietrza nad płaską płytę. Jako, iż problematyka chłodzenia filmowego związana jest przede wszystkim z łopatkami turbin gazowych, koniecznym jest przeprowadzenie podobnej analizy dla układu łopatkowego.

Opis eksperymentu

Do numerycznej analizy układu chłodzenia wykorzystano wyniki badań przeprowadzonych na Uniwersytecie Bundeswhery w Monachium przez H. Brandta et al. [183]. Eksperyment dotyczył układu chłodzenia filmowego łopátki w palisadzie turbinowej T106-300.

Geometryczną konfigurację palisady przedstawiono na Rysunku 8.33. Szczegółową charakterystykę palisady modelowej oraz stanowiska pomiarowego można znaleźć w pracy [210]. W palisadzie zamontowano trzy łopátki. Długość cięciwy badanej łopátki



Rysunek 8.33: Konfiguracja badanej palisady wg [183]

wynosi $c = 300$ mm, jej wysokość $h = 300$ mm, kąt ustawienia profilu $\beta_s = 59.28^\circ$, a podziałka odległości między kolejnymi łopatkami $t/d = 0.799$.

Otwory chłodzące umieszczono w miejscu odpowiadającym 40% długości cięciwy jak na Rysunku 8.33. Badania przeprowadzono dla pięciu różnych kształtów otworu chłodzącego. Do celów niniejszej analizy dysponowano wynikami dla okrągłego otworu chłodzącego z rozszerzonym wylotem, identycznego jak na Rysunku 8.6. Średnica wlotowa otworu wynosi $d = 3$ mm, całkowita względna długość kanału chłodzącego jest równa $L/d = 5$, zaś stosunek długości całkowitej do długości części cylindrycznej kanału o stałym przekroju $L/l = 5$. W badaniach zastosowano niestandardową podziałkę otworów chłodzących $S/d = 15$. Kąt nachylenia kanału chłodzącego jest równy $\alpha = 30^\circ$. Kanał ustawiono w kierunku wzdłużnym przepływu głównego, czyli dla kąta $\beta = 0^\circ$. Zastosowano rozszerzenie kanału chłodzącego w części wylotowej w kierunku wzdłużnym i poprzecznym. Odpowiednie kąty mają równą wartość $\delta_1 = \delta_2 = 10^\circ$.

Eksperyment przeprowadzono dla dwóch wartości wydátku względnego $M = 1.0$ i 2.0 . Poziom turbulencji równy 3.6% na wlocie zapewniano poprzez zastosowanie odpowiedniego generatora. Stosowane w eksperymencie warunki brzegowe przedstawiono dla wlotu w Tabeli 8.1, dla wylotu w Tabeli 8.2 i dla komory wewnętrznej w Tabeli 8.3, na podstawie [183].

W rezultacie dysponowano eksperymentalnymi wynikami dla lokalnego współczynnika ciśnienia C_p obliczanego zależnością (8.12), a także izentropowej liczby Macha Ma_{is} na ścianie łopatki według zależności (8.13). Na ściankach ustawiono stały strumień ciepła q , dzięki czemu możliwy był jednoczesny pomiar współczynnika wymiany

β_1	127.7°
Ma_1	0.275
p_{t1}	15.2 kPa
p_1	14.4 kPa
$\theta_{t1} = \theta_t$	303 K
$Tu = \theta_t$	3.6%

Tabela 8.1: Warunki brzegowe na wlocie do palisady

$p_2 = p_K$	12.0 kPa
-------------	----------

Tabela 8.2: Warunki brzegowe na wylocie z palisady

$\theta_{t,3}$	303 K
$p_{t,3(M=1.0)}$	13.22 kPa
$p_{t,3(M=2.0)}$	16.65 kPa

Tabela 8.3: Warunki brzegowe w komorze wewnętrznej łopatki

ciepła h .

$$C_p = \frac{p - p_K}{p_{t1} - p_{t2}} \quad , \quad (8.12)$$

$$Ma_{is} = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \cdot \left[\left(\frac{p_{t1}}{p} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} - 1 \right]} \quad . \quad (8.13)$$

W rzeczywistym układzie dystrybucja efektywności chłodzenia ma obraz odmienny. Szczególnie ważny jest obszar wierzchołka i stopy łopatki, gdzie dominują silne przepływy wtórne oraz wiry podkowiate, które zaburzają film chłodzący [112]

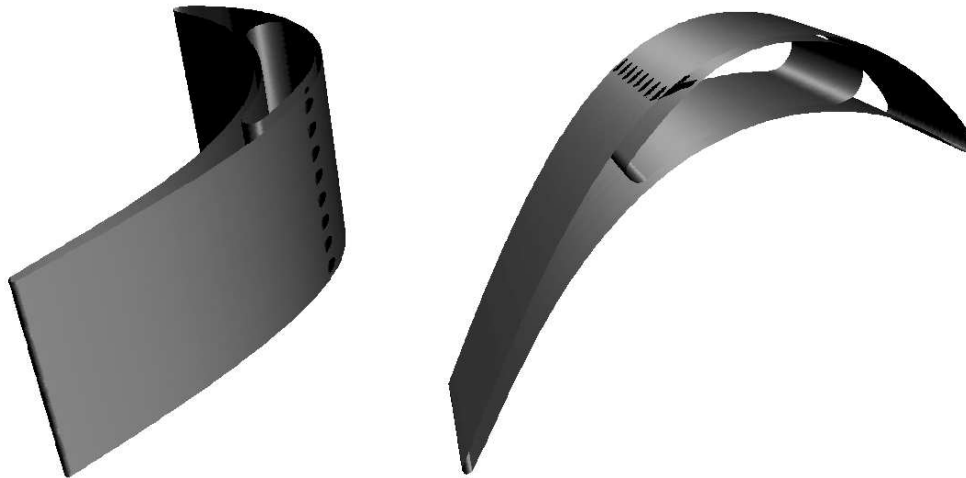
Charakterystyka obliczeń

Zastosowano analogiczną procedurę obliczeniową jak dla numerycznej analizy chłodzenia filmowego płaskiej płyty. Do modelowania turbulentnego strumienia pędu wykorzystano model RSM, zaś do wyznaczenia turbulentnego strumienia ciepła dwurównaniowe domknięcie DWX $\overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ zaproponowane przez Denga et al.

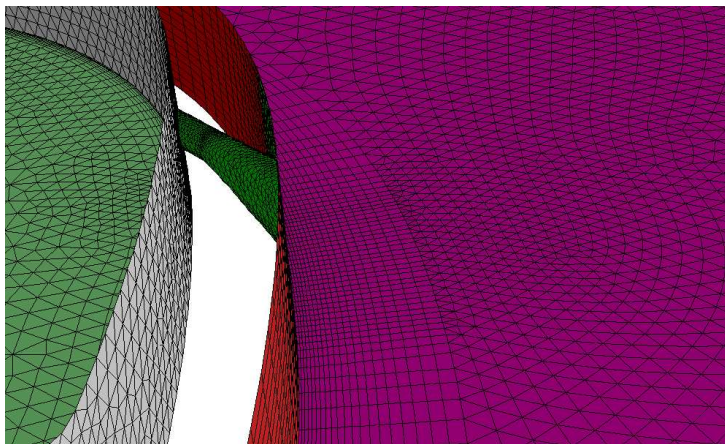
Trójwymiarową geometrię chłodzonej łopatki palisady T106-300 zaprezentowano na Rysunku 8.34.

Obszar obliczeniowy obejmował jeden kanał międzyłopatkowy oraz w celu uproszczenia jeden kanał doprowadzający czynnik chłodzący. Na bocznych ograniczeniach kanału zastosowano warunki okresowości przepływu, zaś na ograniczeniach dolnym i górnym kanału wprowadzono warunki symetrii.

Do zdyskretyzowania obszaru obliczeniowego wykorzystano siatkę hybrydową tzn. strukturalną w obszarze przyściennym i niestructuralną w dalszej odległości od ścianki. Początkowa ilość objętości skończonych wynosiła 390 tys. Po adaptacji całkowita ilość objętości sięgnęła dla badanego układu 650 tys. Taka gęstość siatki zapewniała odpowiednią wartość bezwymiarowej wielkości $y^+ < 5$ na każdej ścianie badanej łopatki.



Rysunek 8.34: Wizualizacja zamodelowanej geometrii łopatki T106-300

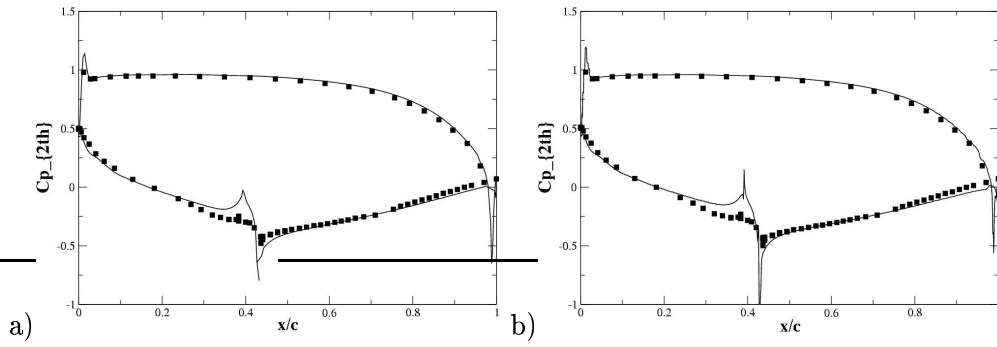


Rysunek 8.35: Hybrydowa siatka powierzchniowa na elementach palisady T106-300 przed adaptacją

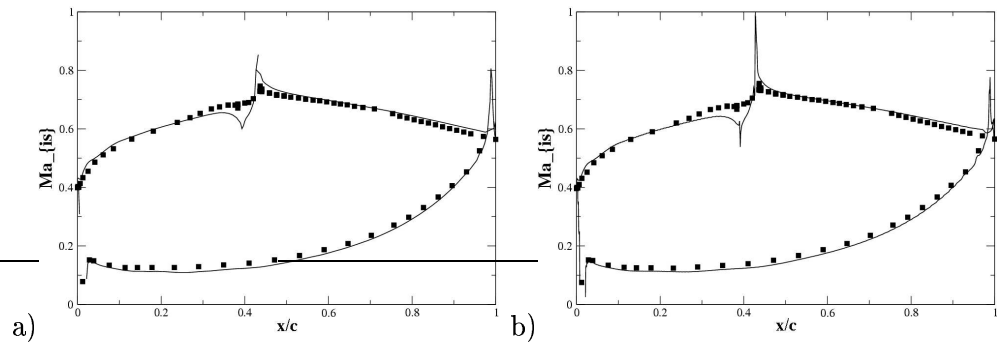
Poprawność wykonanej siatki potwierdzają wyniki obliczeń przepływowych zaprezentowane na Rysunku 8.36 w postaci zmian lokalnego współczynnika ciśnienia C_p definiowanego zależnością (8.12) oraz na Rysunku 8.37 dla zmian izentropowej liczby Macha na profilu opisanej zależnością (8.13).

Obraz wektorów prędkości w obszarze kanału doprowadzającego powietrze chłodzące na powierzchnię łopatki – Rysunek 8.38 – potwierdza duży wpływ odpowiedniego modelowania komory wewnętrznej łopatki. Rysunek ten pozostaje w zgodności z obrazem zaprezentowanym w pracy [190], przy okazji trójwymiarowych obliczeń chłodzenia łopatki z otworami chłodzącymi na stronie ciśnieniowej, krawędzi natarcia oraz krawędzi spływu. Błąd związany z pomijaniem modelowania obszaru wlotu do kanału, na który wskazywano w pracach [180, 171] powoduje istotne rozbieżności w wynikach w dalszej części obszaru obliczeniowego.

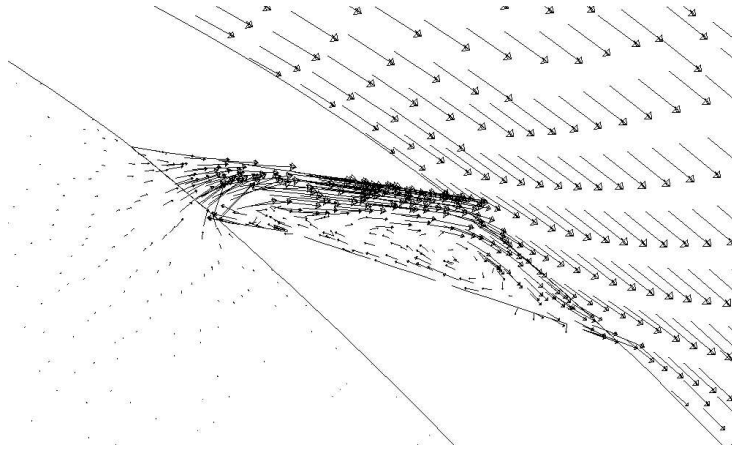
Porównując kontur normalizowanych fluktuacji temperatury przedstawiony na Rysunku 8.40 z identycznymi konturami, wykonanymi dla chłodzonej płyty płaskiej widać,



Rysunek 8.36: Wykres zmian współczynnika ciśnienia C_p na powierzchni łopatki w płaszczyźnie przekroju otworu chłodzącego dla różnych wydatków względnych a) $M = 1.0$ i b) $M = 2.0$ (*punkty* - dane pomiarowe wg [183], *linie* - wynik obliczeń)

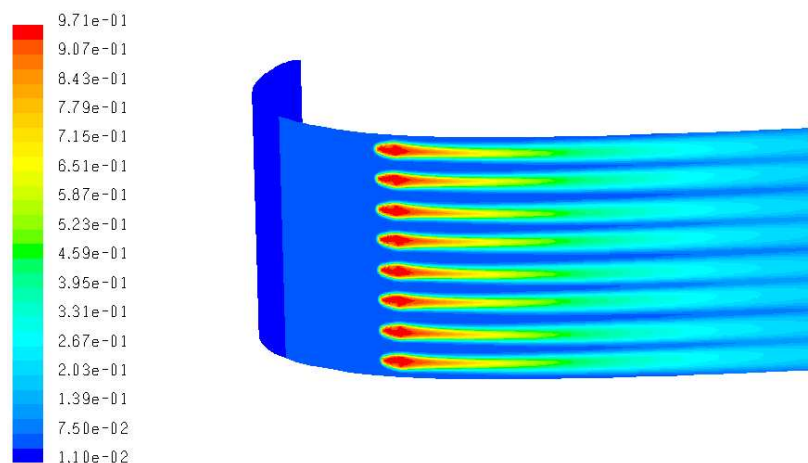


Rysunek 8.37: Wykres zmian izentropowej liczby Macha na powierzchni łopatki w płaszczyźnie przekroju otworu chłodzącego dla a) $M = 1.0$ i b) $M = 2.0$ (*punkty* - dane pomiarowe wg [183], *linie* - wynik obliczeń)



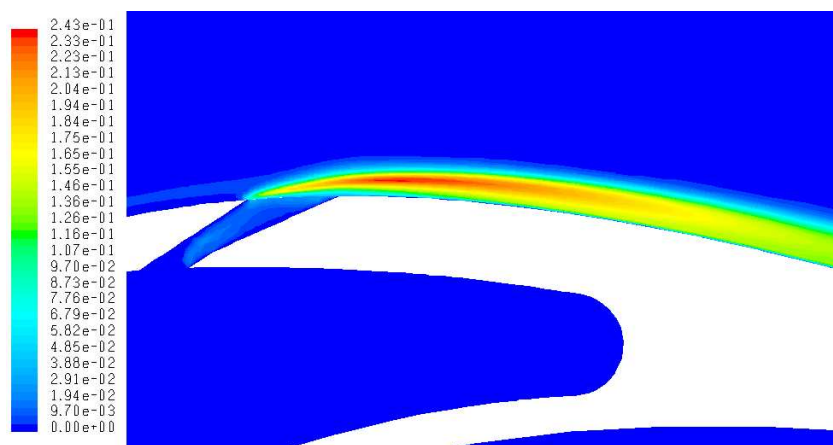
Rysunek 8.38: Wektory prędkości całkowitej w obszarze kanału doprowadzającego powietrze chłodzące w płaszczyźnie przekroju otworu dla $M = 1.0$

iz główna różnica sprowadza się do rozbieżności maksymalnych wartości $\overline{\theta'^2}_{rms}$, które dla płaskiej płyty z otworami okrągłymi sięgały 0.28, a dla rzeczywistego profilu z



Rysunek 8.39: Kontur efektywności chłodzenia dla względnego wydatku $M = 1.0$

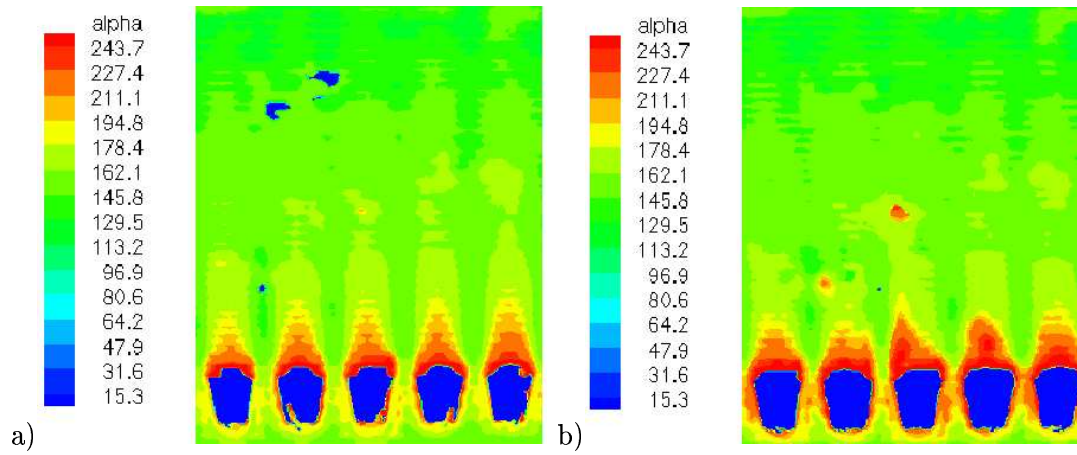
otworami z rozszerzonym wylotem są mniejsze i wynoszą 0.24 w przypadku wydatku względnego $M = 2.0$. Dla mniejszego wydatku $M = 1.0$, poziom normalizowanych fluktuacji jest jeszcze niższy i wynosi maksymalnie 0.20. Zmniejszenie poziomu fluktuacji temperatury jest, analogicznie jak w przypadku fluktuacji prędkości, efektem wyhamowania przepływu w części dyfuzorowej kanału doprowadzającego powietrze chłodzące. Mniejsza prędkość i poziom turbulencji, powoduje mniej intensywne mieszanie z przepływem głównym, co prowadzi do wzrostu efektywności chłodzenia w stosunku do kanałów o stałym przekroju. Efekt ten jest potwierdzany zarówno w badaniach eksperymentalnych jak [184, 192] i analizach numerycznych [179, 182].



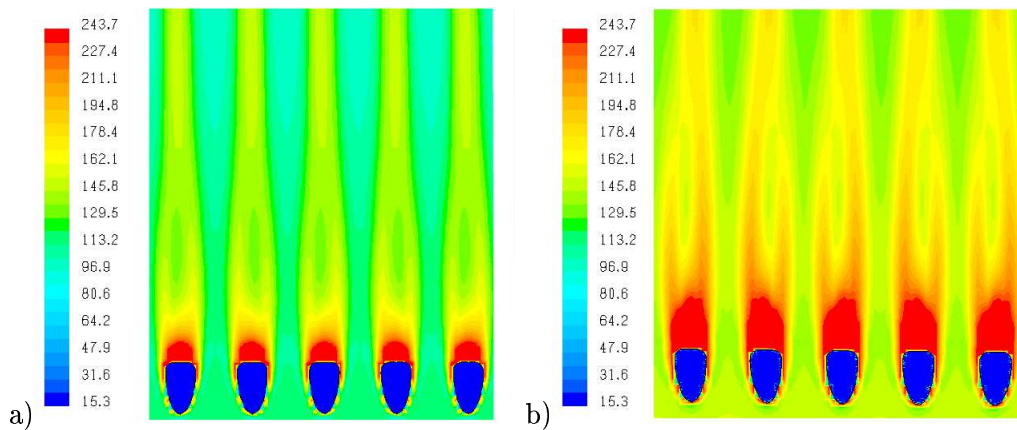
Rysunek 8.40: Dystrybucja normalizowanych fluktuacji temperatury $\overline{\theta'^2}_{rms}$ w płaszczyźnie przekroju otworu dla wydatku $M = 2.0$

Na Rysunku 8.41 przedstawiono kontur współczynnika wymiany ciepła h pomierzonego eksperymentalnie. Analogicznie na Rysunku 8.42 zaprezentowano dystrybucję współczynnika h uzyskanego numerycznie. W celu ułatwienia porównań na obu diagramach zastosowano taki sam zakres wartości h .

Dla względnego wydatku $M = 1.0$, reprezentowanego na Rysunkach 8.41 i 8.42 przez diagramy a), rozkład współczynnika wymiany ciepła jest równomierny. Struga



Rysunek 8.41: Współczynnik wymiany ciepła h na powierzchni łopatki dla wydatku względnego a) $M = 1.0$ i b) $M = 2.0$ wyznaczony eksperymentalnie [183]



Rysunek 8.42: Współczynnik wymiany ciepła h na powierzchni łopatki dla wydatku względnego a) $M = 1.0$ i b) $M = 2.0$ wyznaczony numerycznie

czynnika chłodzącego wypływająca z kanału z rozszerzającym się wylotem, nie *odrywa się* od powierzchni łopatki (co potwierdza także obraz wektorów prędkości przedstawiony na Rysunku 8.38) i w rezultacie efekt mieszania z przepływem głównym nie jest intensywny. Strefa maksymalnych wartości współczynnika h dotyczy obszaru tuż za wylotem. Maksymalna obliczona wartość współczynnika wymiany ciepła sięgała $h \approx 400 \text{ W/m}^2\text{K}$, przy pomierzonym $h \approx 250 \text{ W/m}^2\text{K}$.

Dla wydatku względnego $M = 2.0$ (diagramy b) na Rysunkach 8.41 i 8.42) także nie pojawia się oderwanie przepływu²⁶. Strefa podwyższonych wartości współczynnika wymiany ciepła jest wyraźnie większa od analogicznej dla $M = 1.0$. Dystrybucja współczynnika h na powierzchni łopatki wykazuje dużą nierównomierność. Wyższe wartości wydatku względnego powodują, iż struga czynnika chłodzącego bardziej spe-

²⁶Zazwyczaj przy takich wartościach M oderwanie przepływu za wylotem może wystąpić, ale przeważnie dla otworów o niezmiennym przekroju [171, 170, 174]. Zastosowanie rozszerzających się wylotów prowadzi do wyhamowania przepływu i wprowadzenia czynnika chłodzącego stycznie do powierzchni łopatki, co w znacznym stopniu eliminuje możliwość oderwania, nawet dla wyższych wartości względnego wydatku M [163, 182, 179].

netruje przepływ główny w większym stopniu i to zarówno w kierunku wzdłużnym jak i poprzecznym. Wynikiem tego jest wzajemne oddziaływanie poszczególnych strug powodujące nierównomierność pola prędkości i temperatur oraz powiększanie obszaru powierzchni chłodzonej, a także podwyższony stopień mieszania strug chłodzących, prowadzący do intensyfikacji procesu wymiany ciepła. Maksymalna obliczona wartość współczynnika h sięgała dla $M = 2.0$ wartości $h \approx 600 \text{ W/m}^2\text{K}$. Odbywa się to jednak kosztem spadku współczynnika efektywności chłodzenia η .

Wnioski

Zaprezentowane wyniki obliczeń numerycznych potwierdzają złożoność procesu chłodzenia filmowego. Porównanie z danymi eksperymentalnymi potwierdza przydatność modelu turbulencji drugiego rzędu RSM do trójwymiarowych obliczeń przepływowych. Zastosowanie dwurównaniowego domknięcia DWX umożliwia wyznaczanie z dużym przybliżeniem poziomu fluktuacji temperatury θ'_{rms} . Niestety, obliczony współczynnik wymiany ciepła h mimo, iż jego dystrybucja jest odwzorowana w sposób prawidłowy, przewyższa maksymalne wartości pomierzone w eksperymencie i to prawie dwukrotnie w przypadku wyższego wydatku względnego $M = 2.0$.

Rozdział 9

Podsumowanie i wnioski

9.1 Podsumowanie

W pracy wyprowadzono ogólne zasady bilansu masy, pędu i energii dla objętości skończonej w opisie Eulera. Szczegółowo scharakteryzowano najczęściej wykorzystywane domknięcia turbulentnego strumienia pędu i energii.

Analiza literaturowa modeli turbulencji mechanicznej pod kątem pracy w obszarze z wzdłużnym dodatnim gradientem ciśnienia oraz przy separacji przepływu, pozwoliła wybrać czterorównaniowe domknięcie $k-\epsilon-\overline{v'^2}-f$ wg Durbina wykorzystujące zmodyfikowaną zależność na współczynnik lepkości turbulentnej ν_t oraz dodatkowe równanie eliptycznej relaksacji f , dzięki któremu pomija się całkowicie zastosowanie przyściennych funkcji tłumiących opartych o geometrię.

Na podstawie analizy modeli turbulencji termicznej wybrano do dalszej implementacji model dwurównaniowy $\overline{\theta'^2}-\epsilon_\theta$ wg Denga et al., w którym współczynnik turbulentnej dyfuzji ciepła α_t wyrażany jest nie tylko w funkcji mechanicznej skali czasowej tak jak w przypadku modeli algebraicznych wykorzystujących koncepcję turbulentnej liczby Prandtla Pr_t , ale także poprzez termiczną skalę czasową.

Domknięcie $\overline{\theta'^2}-\epsilon_\theta$ odpowiednio zmodyfikowano, zmieniając między innymi formułę na współczynnik turbulentnej dyfuzyjności cieplnej α_t oraz dobierając nowy zestaw stałych i funkcji modelu, tak by współpracowało ono poprawnie z domknięciem $\overline{v'^2}-f$.

Zaimplementowany sześciórównaniowy model zweryfikowano na dostępnych w bazach danych eksperymentach referencyjnych zarówno dla przypadku bez jak i z wymianą ciepła.

Na podstawie zweryfikowanego już modelu wykonano szereg obliczeń dla dyfuzora termicznego na przykładzie rury chłodzonej powierzchniowo. Głównym zadaniem tych obliczeń była odpowiedź na pytanie czy intensywne chłodzenie może spowodować efekty dyfuzorowe, które wynikają z analizy teoretycznej dla przemian izotropowych.

W końcowej części pracy opisano szczegółowo technologię chłodzenia łopatek turbin gazowych. Przeprowadzono także trójwymiarowe obliczenia numeryczne typowych układów chłodzenia wewnętrznego i zewnętrznego dla geometrii uproszczonych stosowanych do weryfikacji modeli turbulencji (kanał uźebrowany, chłodzona filmowo płyta płaska) oraz geometrii rzeczywistej (modelowa łopátka chłodzona filmowo). Do obliczeń wykorzystano model turbulencji drugiego rzędu wraz z czterema, implementowanymi do solvera, domknięciami turbulentnego strumienia ciepła: a) algebraicznym $Pr_t = const$, b) algebraicznym $Pr_t = var$ wg Kaysa et al. [9], c) dwurównaniowy $\overline{\theta'^2}-\epsilon_\theta$ wg Denga et al. [49] oraz d) dwurównaniowy $\overline{\theta'^2}-\epsilon_\theta$ wg Abe et al. [44].

Zestawienie wszystkich symulacji wykonanych na potrzeby niniejszej pracy przedstawiono w Tabeli 9.1.

Lp.	Rodzaj eksperymentu	Rozdział Publikacje	Eksperyment referencyjny	Zastosowane modele
1.	Rozbieg termiczny w rurze (2D)	§5.2.1 [211, 68, 62]	Autor: Nagano et al. [25] Baza: DATHET [60]	a) $\overline{low-Re} \text{ AKN} + \overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ b) $\overline{v'^2} - f + \overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ ver. 1 c) $\overline{v'^2} - f + \overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ ver. 2
2.	Przepływ grzany w kanale płaskim (2D)	§5.2.2 [211, 68, 62]	Autor: Kasagi et al. [35] Baza: DATHET [60]	a) $\overline{low-Re} \text{ AKN} + \overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ b) $\overline{v'^2} - f + \overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ ver. 1 c) $\overline{v'^2} - f + \overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ ver. 2
3.	Dyfuzor niesymetryczny (2D)	[144, 62]	Autor: Buice et al. [212] Baza: ERCOFTAC [59]	a) $\overline{low-Re} \text{ AKN}$ b) RNG $k-\epsilon$ c) $\overline{v'^2} - f$
4.	Kanał z uskokiem geometrycznym (2D)	[144, 62]	Autor: Driver et al. [213] Baza: ERCOFTAC [59]	a) $\overline{low-Re} \text{ AKN}$ b) RNG $k-\epsilon$ c) $\overline{v'^2} - f$
5.	Kanał uźebrowany grzany (2D)	§6.3.1 [62]	Autor: Liou et al. [150] Baza: ERCOFTAC [59]	a) $\overline{low-Re} \text{ AKN } Pr_t = 0.85$ b) RNG $k-\epsilon Pr_t = 0.85$ c) $\overline{v'^2} - f + \overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ ver. 2 d) $\overline{v'^2} - f Pr_t = 0.85$
6.	Napływ na płytę grzaną (2D)	§6.3.2 [62]	Autor: Ota et al. [30] Baza: DATHET [60]	a) $\overline{v'^2} - f + \overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ ver. 2
7.	Dyfuzor termiczny (2D)	§7.2 §7.3 [62]	brak	a) $\overline{v'^2} - f + \overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ ver. 2
8.	Kanał uźebrowany grzany (3D)	§8.3.1 [62]	Autor: Cheah et al. [200] Baza: ERCOFTAC [59]	a) RSM $Pr_t = 0.85$ b) RSM $Pr_t = var$ c) RSM $+\overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ wg DWX d) RSM $+\overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ wg AKN
9.	Płyta chłodzona filmowo $\alpha = 30^\circ, \beta = 90^\circ$ (3D)	§8.4.1 [62]	Autor: Honami et al. [178]	a) RSM $+\overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ wg DWX
10.	Płyta chłodzona filmowo $\alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ$ (3D)	§8.4.2 [67, 62]	Autor: Gartshore et al. [174]	a) RSM $Pr_t = 0.85$ b) RSM $Pr_t = var$ c) RSM $+\overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ wg DWX d) RSM $+\overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ wg AKN
11.	Łopatką chłodzona filmowo (3D)	§8.5 [62]	Autor: Brandt et al. [183]	a) RSM $+\overline{\theta'^2} - \epsilon_\theta$ wg DWX

Tabela 9.1: Zestawienie wykonanych eksperymentów numerycznych

9.2 Wnioski

Szczegółowe wnioski przedstawiano przy okazji kolejnych analiz wyników obliczeń, jednakże warto podkreślić najważniejsze uwagi wynikające z rezultatów niniejszej pracy.

- Analiza wyników obliczeń według eksperymentów referencyjnych wskazuje, iż kombinowane domknięcie oparte o model $\overline{v'^2}$ - f zaproponowany przez Durbina i zmodyfikowany model $\overline{\theta'^2}$ - ϵ_θ wg Denga et al. dobrze oddaje charakter przyściennych zmian pola temperatur i ich fluktuacji w zakresie testowania.
- Dla zadanych parametrów przepływowych, cieplnych i geometrycznych dyfuzora termicznego uzyskano znaczne spadki prędkości w obszarze chłodzenia rury. Opory ruchu turbulentnego pozostają na tyle jednak wysokie, iż nie pozwalają na uzyskanie dodatniego przyrostu ciśnienia nawet przy znacznym obciążeniu cieplnym dyfuzora.
- Wyniki analizy numerycznej układów chłodzenia elementów turbiny gazowej wskazują, iż modele drugiego rzędu RSM są wystarczająco efektywne przy modelowaniu pól prędkości i turbulencji. Zanotowano wysoką zgodność wyników obliczeń z danymi eksperymentalnymi
- Z punktu widzenia zastosowań technicznych, zastosowanie różnych modeli turbulentnego strumienia ciepła nie wpływa szczególnie na poprawę otrzymywanych rezultatów w stosunku do tradycyjnej koncepcji stałej turbulentnej liczby Prandtla, jednakże pozwala w przypadku domknięć dwurównaniowych na uzyskania dodatkowych informacji o strukturze przepływu takich jak termiczne skale czasowe czy też poziom fluktuacji temperatur, który można określać eksperymentalnie. Domknięcie dwurównaniowe turbulentnego strumienia ciepła jest szczególnie ważne w przypadku nowych, jeszcze nie rozpoznanych technologii chłodzenia, gdzie występują złożone struktury przepływu, a proces wymiany ciepła charakteryzują własne termiczne skale czasowe.
- Wprawdzie analizowany sześciórównaniowy model k - ϵ - $\overline{v'^2}$ - f - $\overline{\theta'^2}$ - ϵ_θ przetestowano z zadowalającym rezultatem na sześciu dwuwymiarowych eksperymentach referencyjnych, nie mniej jednak interesująca byłaby rozbudowa do modelu wieloskalowego zarówno dla turbulentnego pola prędkości jak i temperatury. Jak sygnalizują dane literaturowe podejście wieloskalowe może być szczególnie przydatne w przypadku badania strug swobodnych przy chłodzeniu filmowym turbin.

W przypadku modelu k - ϵ - $\overline{v'^2}$ - f możliwa jest także modyfikacja równania ewolucji turbulentnej energii kinetycznej w celu uwzględnienia bezpośredniego wpływu pola temperatury na turbulencję np poprzez dodanie czlonu związanego z wyporem termicznym.

Spis literatury

- [1] M.E. Dejcz, A.E. Zariankin. *Gidrogazodinamika*. Energoatomizdat, Moskwa, 1984.
- [2] A.E. Zariankin, L.A. Ignatievskaja, K.J. Jesionek, M.M. Wiewiórkowska. Właściwości fizyczne ruchu płynu w dyfuzorach termicznych. *Materiały X Krajowej Konferencji Mechaniki Płynów*, strony 247–252, Gdańsk-Sarnówek, 1992. IMP PAN i Politechnika Gdańska.
- [3] J. Dowkontt. *Teoria Silników Ciepłych*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1962.
- [4] W.R. Gundlach. *Maszyny przepływowe cz.II*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1971.
- [5] O. Reynolds. On the extent and action of the heating surface for steam boilers. *Proc. Literary Philosophical Soc. Manchester*, 14:7–13, 1875.
- [6] T.E. Stanton. On the passage of heat between metal surfaces and liquids in contact with them. *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, A190:67–88, 1898.
- [7] L. Prandtl. Eine beziehung zwischen warmetausch und stromungswiderstand der flussigkeiten. *Physikalische Zeitschrift*, 11:1072–1078, 1910.
- [8] C.G. Speziale, R.M.C So. *The Handbook of Fluid Dynamics*, rozdział Turbulence Modelling and Simulation, strony 695–714. CRC Press, Springer, 1998.
- [9] W.M. Kays. Turbulent Prandtl number - Where are we? *ASME Journal of Heat Transfer*, 116:284–295, 1994.
- [10] B. Weigand, J. Von Wolfersdorf, S.O. Neumann. Internal cooling for industrial gas turbines: Present state and novel approaches. *Proceedings of 5th International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows*, strony 67–78, Gdańsk, September 2001. Edited by P. Doerffer.
- [11] A.J. Reynolds. The prediction of turbulent Prandtl and Schmidt numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 18:1055–1068, 1975.
- [12] A.J. Reynolds. The variation of turbulent Prandtl and Schmidt numbers in wakes and jets. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 19:757–764, 1976.
- [13] M. Jischa, H.B. Rieke. About the prediction of turbulent Prandtl and Schmidt numbers from modeled transport equations. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 22:1547–1555, 1978.

-
- [14] D.M. McEligot, P.E. Picket, M.F. Taylor. Measurement of wall region turbulent Prandtl numbers in small tubes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 19:799–803, 1976.
 - [15] K. Bremhorst, L. Krebs. Experimentally determined turbulent Prandtl numbers in liquid sodium at low Reynolds numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 35(2):351–359, 1992.
 - [16] R.A. Antonia, J. Kim. Turbulent Prandtl number in the near-wall region of a turbulent channel flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 34:1905–1908, 1991.
 - [17] R.A. Antonia, L.W.B. Browne. Conventional and conditional Prandtl number in a turbulent plane wake. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 30:2023–2030, 1987.
 - [18] R.A. Antonia. Behaviour of the turbulent Prandtl number near the wall. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 23:906–908, 1980.
 - [19] B. Weigand, J.R. Ferguson, M.E. Crawford. An extended Kays and Crawford turbulent Prandtl number model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40:4191–4196, 1997.
 - [20] D. Mikielwicz, E. Ichnatowicz. Turbulence modelling using various turbulent Prandtl number models. *The Transactions of the Institute of Fluid-Flow Machinery*, 100:141–154, 1996.
 - [21] K. Rup, M. Soczówka. Turbulentny przepływ wody ze zmienną liczbą Pr_t . *Czasopismo Techniczne Politechniki Krakowskiej*, 2M:45–61, 2000.
 - [22] K. Rup, M. Soczówka. An improved low Reynolds number $k - \epsilon$ model for heat transfer calculations. *Forschung im Ingenieurwesen*, 65:225–235, 2000.
 - [23] K. Rup, P. Wais. An application of the $k - \epsilon$ model with variable Prandtl number to heat transfer computations in air flows. *Heat and Mass Transfer*, 34:503–508, 1999.
 - [24] K. Rup, L. Danys. Wpływ zaburzenia w przekroju wlotowym rury na kształtowanie się obszaru przejścia laminarno-turbulentnego w nieizotermicznym przepływie schłodzonej cieczy. *Materiały XIII Krajowej Konferencji Mechaniki Płynów*, strony 123–128, 2001.
 - [25] M. Hishida, Y. Nagano. Structure of turbulent velocity and temperature fluctuations in fully developed pipe flow. *ASME Journal of Heat Transfer*, 101:15–22, 1979.
 - [26] Y. Nagano, M. Tagawa. Statistical characteristics of wall turbulence with passive scalar. *Journal of Fluid Mechanics*, 196:157–185, 1988.
 - [27] I.N.G. Wardana, T. Ueda, M. Mizomoto. Structure of turbulent two-dimensional channel flow with strongly heated wall. *Experiments in Fluids*, 13:17–25, 1992.
 - [28] I.N.G. Wardana, T. Ueda, M. Mizomoto. Effect of strong wall heating on turbulence statistics of a channel flow. *Experiments in Fluids*, 18:87–94, 1994.

- [29] I.N.G. Wardana, T. Ueda, M. Mizomoto. Velocity–temperature correlation in strongly heated channel flow. *Experiments in Fluids*, 18:454–461, 1995.
- [30] T. Ota, N. Kon. Heat transfer in the separated and reattached flow on a blunt flat plate. *ASME Journal of Heat Transfer*, 78:459–462, 1974.
- [31] T. Ota, N. Kon. Turbulent transfer of momentum and heat in a separated and reattached flow over a blunt flat plate. *ASME Journal of Heat Transfer*, 102:459–462, 1980.
- [32] H. Maekawa, Y. Kawada, M. Kobayashi, H. Yamaguchi. An experimental study on the spanwise eddy diffusivity of heat in a flat plate turbulent boundary layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 34(8):1991–1998, 1991.
- [33] R.A. Antonia, H.Q. Danh, A. Prabhu. Response of a turbulent boundary layer to a step change in surface heat flux. *Journal of Fluid Mechanics*, 80:153–157, 1977.
- [34] T. Tsuji, Y. Nagano. Natural convective vertical boundary layer flow. *ASME Journal of Heat Transfer*, 101:15–22, 1989.
- [35] N. Kasagi, Y. Tomita, A. Kuroda. Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow. *ASME Journal of Heat Transfer*, strony 598–606, 1992.
- [36] N. Kasagi, O. Iida. Progress in direct numerical simulation of turbulent heat transfer. *Proceedings of the 5th ASME/JSME Joint Thermal Engineering Conference*, March 1999.
- [37] T.P. Sommer, R.M.C. So, H.S. Zhang. Heat transfer modeling and the assumption of zero wall temperature fluctuations. *ASME Journal of Heat Transfer*, 116:855–863, 1994.
- [38] T.P. Sommer, R.M.C. So, Y.G. Lai. A near-wall two-equation model for turbulent heat fluxes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 35(12):3375–3387, 1994.
- [39] R.M.C. So, T.P. Sommer. A near-wall eddy conductivity model for fluids with different Prandtl numbers. *ASME Journal of Heat Transfer*, 116:844–854, 1994.
- [40] T.P. Sommer, R.M.C. So, J. Zhang. Modeling nonequilibrium and history effects of homogeneous turbulence in a stably stratified medium. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 18:29–37, 1997.
- [41] Y. Nagano, M. Shimada. *Computational Fluid Dynamics Review*, rozdzia/1 Computational Modeling and Simulation of Turbulent Flows, strony 695–714. John Wiley & Sons, 1995.
- [42] Y. Nagano, C. Kim. A two–equation model for heat transport in wall turbulent shear flows. *ASME Journal of Heat Transfer*, 110:583–589, 1988.
- [43] Y. Nagano, M. Shimada. Development of a two-equation heat transfer model based on direct simulations of turbulent flows with different Prandtl numbers. *ASME Journal of Heat Transfer*, 110:583–589, 1988.

- [44] K. Abe, T. Kondoh, Y. Nagano. A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows - Part 2 thermal field calculations. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38:1467–1481, 1995.
- [45] M.S. Youssef, Y. Nagano, M. Tagawa. A two-equation heat transfer model for predicting turbulent thermal fields under arbitrary wall thermal conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 35:3095–3104, 1992.
- [46] G.H. Rhee, H.J. Sung. A low-reynolds-number, four-equation heat transfer model for turbulent separated and reattaching flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 18:38–44, 1997.
- [47] G.H. Rhee, H.J. Sung. A nonlinear low-Reynolds-number heat transfer model for turbulent separated and reattaching flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43:1439–1448, 2000.
- [48] M.K. Chung, H.J. Sung. Four-equation turbulence model for prediction of the turbulent boundary layer affected by buoyancy force over a flat plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 27:2387–2395, 1984.
- [49] B. Deng, W. Wu, S. Xi. A near-wall two-equation heat transfer model for wall turbulent flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44:691–698, 2000.
- [50] K. Hanjalić. Introduction to the modelling of turbulence. Second-Moment („Reynolds-Stress”) Turbulence Closures. *Lecture Series 2000-04*. von Karman Institute for Fluid Dynamics, March 2000.
- [51] Y. Nagano. Modelling heat transfer in near-wall flows. *Proceedings of Conference on Closure Strategies for Modelling Turbulent and Transitional Flows*, strony 1–52, Cambridge, April 1999. Isaac Newton Institute for Mathematical Science.
- [52] B.E. Launder. On the computation of convective heat transfer in complex turbulent flows. *ASME Journal of Heat Transfer*, 110:1112–1128, 1988.
- [53] J. Pozorski. Modelowanie fluktuacji termicznych w przepływie turbulentnym. *Materiały XV Krajowej Konferencji Mechaniki Płynów*, Augustów, Wrzesień 2002.
- [54] A.E. Zariankin, B.P. Simonov. *Wychłopyje patrubki parowych i gazowych turbin*. Izdatelstwo MEI, Moskwa, 2002.
- [55] K.J. Jesionek. Prognozowanie oderwania strumienia i możliwości jego ograniczenia w przepływach maszynach energetycznych. *Prace Naukowe Instytutu Techniki Ciepłej i Mechaniki Płynów Politechniki Wrocławskiej*, (51), 1998.
- [56] K.J. Jesionek, M.M. Wiewiórkowska. Badania wstępne przepływu w dyfuzorze termicznym. *Materiały XVII Zjazdu Termodynamików*, strony 543–552, Kraków, 1999. Politechnika Krakowska.
- [57] T. Chmielniak, A. Rusin, K. Czwiertnia. *Turbiny gazowe. Maszyny Przepływowe*, Tom 25. Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, 2001.

- [58] B. Lakshminarayana. *Fluid Dynamics and Heat Transfer of Turbomachinery*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996.
- [59] <http://www.ercftac.org>.
- [60] <http://www.jsme.or.jp/ted/htdb/dathet.html>.
- [61] <http://www.thtlab.t.u-tokyo.ac.jp/dns/dns-database.html>.
- [62] M. Karcz. *Analiza pracy dyfuzorów termicznych w aspekcie chłodzenia turbin gazowych*. Praca doktorska, Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Zakład Przepływów z Reakcjami Chemicznymi, Gdańsk, 2003.
- [63] J. Badur, M. Banaszekiewicz, M. Karcz, M. Winowiecki. Numerical simulation of 3D flow through a control valves. *International Conference SYMKOM'99, Turbomachinery No. 15*, strony 29–36, Łódź, November 1999.
- [64] M. Bielecki, M. Karcz, W. Radulski, J. Badur. Thermo-mechanical coupling between the flow of steam and deformation of the valve during start-up of the 200 MW turbine. *TASK Quarterly*, 5(2):125–140, 2001.
- [65] A. Gardzilewicz, M. Karcz, S. Marcinkowski, J. Badur, M. Bielecki, A. Malec, M. Banaszekiewicz. Proposal of modernisation of a steam turbine stage before extraction, CFD and CSD analysis. *TASK Quarterly*, 6(4):577–589, 2002.
- [66] A. Gardzilewicz, M. Karcz, S. Marcinkowski, J. Badur, R. Karpiuk, C. Szyrejko, D. Obrzut. Modernizacje króćca wylotowego turbin parowych 360 MW. *Materiały V Konferencji Naukowo-Technicznej, Elektrownie ciepłne, Eksploatacja-Modernizacje-Remonty*, strony 65–75, Słok-Belchatów, Wrzesień 2001.
- [67] M. Karcz, J. Badur. An alternative heat flux modelling for gas turbine cooling application. *Transaction of IFFM PAS-ci*, 113:201–212, 2003.
- [68] M. Karcz, J. Badur. A turbulent heat flux two-equation $\overline{\theta'^2}$ - ϵ_θ closure based on the V2F turbulence model. *TASK Quarterly*, 7(3):371–383, 2003.
- [69] J. Badur, T. Ochrymiuk. Numeryczne modelowanie turbulentnego spalania gazów z uwzględnieniem zredukowanej i pełnej kinetyki reakcji chemicznych. *Zeszyty Naukowe IMP PAN*, (491/1456), 1998.
- [70] J. Badur, D.J. Jackson. Uwagi o *Sub-mechanice wszechświata* Osborne'a Reynolds'a. *The Transactions of the Institute of Fluid-Flow Machinery*, 99:127–150, 1995.
- [71] T. Chmielniak. Przepływy transoniczne. Równania zachowania. *Materiały wykładowe IX Szkoły Letniej Mechaniki Płynów*, strony 3–41, Nowa Kaletka, 1996. Sekcja Mechaniki Płynów Komitetu Mechaniki PAN, Wydział Mechaniczny Akademii Rolniczo-Technicznej w Olsztynie.
- [72] J. Mikielewicz. *Modelowanie procesów cieplno-przepływowych*. Maszyny Przepływowe, Tom 17. Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, 1995.

- [73] J. Mikieliewicz. Podstawy klasycznej termodynamiki procesów odwracalnych i nieodwracalnych. *VII Letnia Szkoła Termodynamiki, Współczesne Kierunki w Termodynamice*, strony 7–48, Gdańsk, September 1997. Wydawnictwo IMP PAN.
- [74] J. Madejski. *Teoria wymiany ciepła*. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin, 1998.
- [75] S. Ochęduszko. *Termodynamika stosowana*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1967.
- [76] S.S. Kutateladze. *Fundamentals of Heat Transfer*. Edward Arnold Ltd., 1963.
- [77] J. Pozorski. Zagadnienia turbulencji w mechanice płynów. *Zeszyty Naukowe IMP PAN*, (515/1474), 2000.
- [78] J. Badur, J. Marcinkiewicz. On modelling anisotropy in turbulence. *Proceedings of Conference on Modelling and Design in Fluid-Flow Machinery*, strony 17–26, Gdańsk, 1997. Wydawnictwo IMP PAN, Edited by J. Badur et al.
- [79] S. Drobnia, A. Jarża. Review of turbulence modelling methods for single phase flows. *Turbulence*, 4:67–81, 1998.
- [80] O. Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A186:123–164, 1895.
- [81] J. Badur, Z. Bilicki. Some problems of turbulence in two-phase flow. *Turbulence*, 4:33–54, 1998.
- [82] L. Davidson. An introduction to turbulence modelling. Publication 97/2, Department of Thermo and Fluids Dynamics, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, January 2003.
- [83] J.O. Hinze. *Turbulence*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959.
- [84] R. Puzerewski, J. Sawicki. *Podstawy mechaniki płynów i hydrauliki*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 2000.
- [85] J. Kaczyński. Seminarium pt. *Modelowanie Turbulencji w Zastosowaniach Technicznych* - przegląd ważniejszych modeli wykorzystywanych w programach obliczeniowych do rozwiązywania równań Reynoldsa. *Zeszyty Naukowe IMP PAN*, (486/1448):27–50, 1997.
- [86] Fluent Inc., Lebanon, USA. *FLUENT User's Guide*, 1997-2002.
- [87] B.E. Launder, D.B. Spalding. The numerical computations of turbulent flows. *Computations Methods in Applied Mechanics Engineering*, 3:269–289, 1974.
- [88] J. Bredberg. *Prediction of Flow and Heat Transfer Inside Turbine Blades Using EARSM, k - ϵ and k - ω Turbulence Models*. Praca doktorska, Chalmers University of Technology, Department of Thermo and Fluid Dynamics, Goteborg, 1999.
- [89] A. Yakhot, I. Staroselsky, S.A. Orszag. Asymptotic behavior of solutions of the renormalization group k - ϵ turbulence model. *AIAA Journal*, 32(5):1087–1089, 1994.

- [90] V.C. Patel, W. Rodi, G. Scheuerer. Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: A review. *AIAA Journal*, 23(9):1308–1319, 1985.
- [91] D.C. Wilcox. Simulation of transition with a two-equation turbulence model. *AIAA Journal*, 32(2):247–255, 1994.
- [92] F.R. Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence model for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8):1598–1605, 1994.
- [93] J. Larsson. *Numerical Simulation of Turbulent Flows for Turbine Blade Heat Transfer Applications*. Praca doktorska, Chalmers University of Technology, Department of Thermo and Fluid Dynamics, Goteborg, 1998.
- [94] P.A. Durbin. Application of a near-wall turbulence model to boundary layers and heat transfer. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 14:316–323, 1993.
- [95] P.A. Durbin. Separated flow computations with the $k-\epsilon-\overline{v^2}$ model. *AIAA Journal*, 33:659–664, 1995.
- [96] M. Behnia, S. Parneix. Prediction of heat transfer in an axisymmetric turbulent jet impinging on a flat plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41(12):1845–1855, 1998.
- [97] P.A. Durbin. A Reynolds stress model for near-wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 249:465–498, 1993.
- [98] G. Iaccarino. Prediction of a turbulent separated flow using commercial CFD codes. *ASME Journal of Fluid Engineering*, 123:819–828, 2001.
- [99] R.M. Jones. Advanced turbulence modeling for industrial applications. *ME Graduate Student Conference*, strony 24–25, 2002.
- [100] G. Kalitzin. Application of the $\overline{v^2}-f$ model to aerospace configurations. *Annual Research Briefs of Center for Turbulence Research of Stanford University*, 1999:289–300, 1999.
- [101] G. Kalitzin. An implementation of the $\overline{v^2}-f$ model with application to transonic flows. *Annual Research Briefs of Center for Turbulence Research of Stanford University*, 1998:171–184, 1998.
- [102] A. Ooi, G. Iaccarino, M. Behnia. Heat transfer predictions in cavities. *Annual Research Briefs of Center for Turbulence Research of Stanford University*, 1998:185–196, 1998.
- [103] R. Manceau, S. Parneix, D. Laurence. Turbulent heat transfer predictions using the $\overline{v^2}-f$ model on unstructured grids. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 21:320–328, 2000.
- [104] S. Parneix, P.A. Durbin, M. Behnia. Computation of 3-D turbulent boundary layers using the V2F model. *Flow, Turbulence and Combustion*, 60:16–46, 1998.
- [105] B.A. Reif, P.A. Durbin, A. Ooi. Model rotational effects in eddy-viscosity closures. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 20:563–573, 1998.

- [106] C.P. Chen. Multiple-scale turbulence model in confined swirling jet predictions. *AIAA Journal*, 24(10):1717–1719, 1986.
- [107] Y. Nagano, M. Kondoh, M. Shimada. Multiple time-scale turbulence model for wall and homogenous shear flows based on direct numerical simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 18(4):346–359, 1997.
- [108] R. Schiestel. Multiple-time-scale modeling of turbulent flows in one point closure. *Physics of Fluids*, 30(3):722–731, 1987.
- [109] S.W. Kim. Calculation of divergent channel flows with a multiple-time-scale turbulence model. *AIAA Journal*, 29(4):547–554, 1991.
- [110] S.W. Kim. Calculation of a circular jet in crossflow with a multiple-time-scale turbulence model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 35(10):2357–2365, 1992.
- [111] R. Rubinstein. Formulation of a two-scale model of turbulence. ICASE Report 2000-5, NASA/CR-2000-209853, February 2000.
- [112] R.J. Simoneau, F.F. Simon. Heat transfer in the turbine gas path. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 14(2):104–128, 1993.
- [113] G.H. Rhee, H.J. Sung. A nonlinear low-Reynolds-number k - ϵ model for turbulent separated and reattaching flows – II. Thermal field computations. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39:3465–3474, 1996.
- [114] M.M. Gibson. An algebraic stress and heat-flux model for turbulent shear flow with streamline curvature. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 21:1609–1617, 1978.
- [115] H. Iacovides. Computation of flow and heat transfer through rotating ribbed passages. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 19:393–400, 1998.
- [116] B.J. Daly, F.H. Harlow. Transport equation in turbulence. *Physics of Fluids*, 13(11):2634–2649, 1970.
- [117] M.M. Gibson, B.E. Launder. On the calculation of horizontal, turbulent, free shear flows under gravitational influence. *ASME Journal of Heat Transfer*, 98:81–87, February 1976.
- [118] R. Puzyrewski. Seminarium pt. *Modelowanie Turbulencji w Zastosowaniach Technicznych* - uwagi do dyskusji na temat modelowania turbulencji dla modeli obliczeniowych typu 3D. *Zeszyty Naukowe IMP PAN*, (486/1448):79–93, 1997.
- [119] Y. Sumitani, N. Kasagi. Direct numerical simulation of turbulent transport with uniform wall injection and suction. *AIAA Journal*, 33(7):1220–1228, 1995.
- [120] H. Kawamura, K. Ohsaka, H. Abe, K. Yamamoto. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high Prandtl number fluid. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 19:482–491, 1998.
- [121] H. Kawamura, H. Abe, Y. Matsuo. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effects. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 20:196–207, 1999.

- [122] P. Bradshaw. Understanding and prediction of turbulent flow – 1996. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 18(1):45–54, 1996.
- [123] R. Manceau, K. Hanjalić. Elliptic blending model: A new near-wall Reynolds-stress turbulence closure. *Physics of Fluid*, 14(2):744–754, 2002.
- [124] R. Manceau. Reproducing the blocking effect of the wall in one-point turbulence models. *Proceedings of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2000*, strony 543–552, Barcelona, September 2000.
- [125] G. Iaccarino. Complex flows and heat transfer calculations using an advanced turbulence model in FLUENT. *1999 FLUENT User’s Group Meeting*, 1999.
- [126] M. Wolfshtein. The velocity and temperature distribution in one-dimensional flow with turbulence augmentation and pressure gradient. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 12:301–318, 1969.
- [127] K. Abe, T. Kondoh, Y. Nagano. A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows - Part 1 flow field calculations. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 37:139–151, 1994.
- [128] K.C. Chang, W.D. Hsieh, C.S. Chen. A modified low-reynolds-number turbulence model applicable to recirculating flow in pipe expansion. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 117:417–423, 1995.
- [129] W.D. Hsieh, K.C. Chang. Calculation of wall heat transfer in pipe-expansion turbulent flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39(18):3813–3822, 1996.
- [130] W.D. Hsieh, K.C. Chang. Two-layer approach combining Reynolds stress and low-Reynolds-number $k-\epsilon$ models. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39(18):3813–3822, 1996.
- [131] Z. Yang, T.H. Shih. New time scale based $k - \epsilon$ model for near-wall turbulence. *AIAA Journal*, 31(7):1191–1198, 1993.
- [132] R. Manceau, M. Wang, D. Laurence. Inhomogeneity and anisotropy effects on the redistribution term. *Journal of Fluid Mechanics*, 438:307–338, 2001.
- [133] M. Waławczyk, J. Pozorski. Modelling of turbulent flow in the near-wall region using PDF method. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 41(1):3–17, 2003.
- [134] B.E. Launder. *Topics in Applied Physics – Turbulence*, rozdział Heat and Mass Transport, strony 695–714. Springer-Verlag, 1976.
- [135] J. Larsson. Two-equation turbulence models for turbine blade heat transfer simulations. *Submitted to Aeronautics and Astronautics Paper*, strony 1–9, 1997.
- [136] M. Karcz. Numeryczna analiza i porównanie modeli algebraicznych turbulentnej wymiany ciepła na przykładzie przepływu w rurze. *Opracowanie Wewnętrzne IMP PAN*, (1549):1–10, 2001.

-
- [137] M. Karcz. Numeryczna analiza i porównanie modeli algebraicznych turbulentnej wymiany ciepła na przykładzie nieustalonego przepływu w rurze. *Opracowanie Wewnętrzne IMP PAN*, (1590):1–7, 2001.
 - [138] S.E. Elgobashi, B.E. Launder. Turbulent time scales and the dissipation rate of temperature variance in the thermal mixing layer. *Physics of Fluids*, 26(9):2415–2419, 1983.
 - [139] W.P. Jones, P. Musonge. Closure of the Reynolds stress and scalar flux equations. *Physics of Fluids*, 31(12):3589–3604, 1988.
 - [140] M. Karcz. O modelowaniu wymiany ciepła w przepływie. *Opracowanie Wewnętrzne IMP PAN*, (1548):1–23, 2001.
 - [141] Y.G. Lai, R.M.C. So. A near-wall modeling of turbulent heat fluxes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 33(7):1429–1440, 1990.
 - [142] H.S. Dol, K. Hanjalic, T.A.M. Versteegh. A DNS-based thermal second-moment closure for buoyant convection at vertical walls. *Journal of Fluid Mechanics*, 391:211–247, 1999.
 - [143] G. Iaccarino. Prediction of the turbulent flow in a diffuser with commercial CFD codes. *Annual Research Briefs of Center for Turbulence Research of Stanford University*, 2000:271–278, 2000.
 - [144] M. Karcz. Zastosowanie modelu turbulencji $k-\overline{v'^2}-f$ dla przepływów dyfuzorowych z oderwaniem. *Opracowanie Wewnętrzne IMP PAN*, (2366):1–16, 2002.
 - [145] L. Casara, T. Arts. Aero-thermall performance investigation of an internal cooling channel with high blockage ratio. *Proceedings of 5th Conference on Turbomachinery, Fluid Dynamics and Thermodynamics*, strony 401–411, Praha, 2003. Edited by M. Stastny et al.
 - [146] M. Karcz. Eksperymenty dotyczące turbulentnej wymiany ciepła oraz przepływów w dyfuzorze termicznym. *Opracowanie Wewnętrzne IMP PAN*, (1080):1–32, 2001.
 - [147] B. Gebhart. *Heat Transfer*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1977.
 - [148] ERCOFTAC. *Best Practice Guidelines*, wydanie 1, 2000.
 - [149] <http://netsrv.frccs.sut.ac.jp:8001/kawaftp/dns/dns.html>.
 - [150] T.M. Liou, J.J. Hwang, S.H. Chen. Simulation and measurements of enhanced heat transfer in a channel with periodic ribs on one principal wall. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36:507–517, 1993.
 - [151] J. Bredberg. Prediction of flow and heat transfer in a stationary two-dimensional rib roughened passage using low-re turbulent models. *Proceedings of 3rd European Conference on Turbomachinery*. IMech C557/074/99, 1999.
 - [152] T. Chmielniak, A. Rusin, W. Wróblewski, H. Łukowicz, G. Nowak. Chłodzenie układów łopatkowych turbin gazowych. *I Sympozjum Wymiany Masy i Ciepła*, strony 79–86, 2001.

- [153] T. Chmielniak, A. Rusin, W. Wróblewski, G. Nowak, D. Węcel. Sprężone zagadnienie ciepło-przepływowe chłodzenia łopatek turbin gazowych. *Materiały XV Krajowej Konferencji Mechaniki Płynów*, Augustów, Wrzesień 2002.
- [154] R.G. Dominy, D.A. Kirkham, A.D. Smith. Flow development through interturbine diffusers. *ASME Journal of Turbomachinery*, 120:298–304, 1998.
- [155] J. Woisetschlager, H. Jericha, W. Sanz, H.P. Pirker, A. Seyr, T. Ruckebauer. Experimental investigation of transonic wall-jet film cooling in a linear cascade. *Proceedings of 2nd Conference on Turbomachinery, Fluid Dynamics and Thermodynamics*, strony 447–451, Antwerpen, 1997.
- [156] W. Jungowski. *Podstawy Dynamiki Gazów*. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1975.
- [157] S. Perycz. *Turbiny parowe i gazowe. Maszyny Przepływowe*, Tom 10. Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, 1992.
- [158] R. Gryboś. *Podstawy mechaniki płynów cz. I i II*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1998.
- [159] E. Tulisza. *Sprężarki, dmuchawy i wentylatory*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1976.
- [160] M. Stastny, J. Brich, J. Polansky. Numerical modelling of the steam flow through a balanced control valve. *Proceedings of Conference on Modelling and Design in Fluid-Flow Machinery*, strony 117–182, Gdańsk, 1997. Wydawnictwo IMP PAN, Edited by J. Badur et al.
- [161] M. Stastny, L. Bednar, L. Tajc, P. Kolar, P. Martinu, R. Matas. Pulsating flows in the inlet of a nuclear steam turbine. *Proceedings of 5th Conference on Turbomachinery, Fluid Dynamics and Thermodynamics*, strony 677–686, Praha, 2003. Edited by M. Stastny et al.
- [162] B.N. Agaphonov, V.D. Goryachev, V.G. Kolyanov, V.V. Ris, E.M. Smirnov, D.K. Zaitsev. Simulation of 3D turbulent flow through steam-turbine control valves. *Report of Technical University of Tversk*, 1999:1–10, 1999.
- [163] K.A. Thole, M. Gritsh, A. Schulz, S. Wittig. Flowfield measurements for film-cooling holes with expanded exits. *ASME Journal of Turbomachinery*, 120:327–336, 1998.
- [164] B. Sen, D.L. Schmidt, D.G. Bogard. Film cooling with compound angle holes: Heat transfer. *ASME Journal of Turbomachinery*, 118:800–806, 1996.
- [165] H.H. Cho, D.H. Rhee, B.G. Kim. Enhancement of film cooling performance using a shaped film cooling hole with compound angle injection. *JSME International Journal, Series B*, 44(1):99–110, 2001.
- [166] The V94.2A gas turbine a further development of proven technology. Folder Reklamowy Siemens Power Generation, 1997.
- [167] J.E. Gill. Uprate options for the MS900A heavy-duty gas turbine. *Technical Paper GE Power Systems*, (GER-3928A):1–18, 1995.

-
- [168] N. Hay, D. Lampard. Discharge coefficient of turbine cooling holes: A review. *ASME Journal of Turbomachinery*, 120:314–319, 1998.
 - [169] W. Bathie. *Fundamentals of Gas Turbines*. John Willey & Sons, New York, 1980.
 - [170] K.T. McGovern, J.H. Leylek. A detailed analysis of film-cooling physics: Part II – compound-angle injection with cylindrical holes. *ASME Journal of Turbomachinery*, 122:113–121, 2000.
 - [171] D.K. Walters, J.H. Leylek. A detailed analysis of film-cooling physics: Part I – streamwise injection with cylindrical holes. *ASME Journal of Turbomachinery*, 122:102–112, 2000.
 - [172] D.K. Walters, J.H. Leylek. Impact of film-cooling jets on turbine aerodynamic losses. *ASME Journal of Turbomachinery*, 122:537–545, 2000.
 - [173] H.A. Rydholm. An experimental investigation of the velocity and temperature fields of cold jets into a hot crossflow. *ASME Journal of Turbomachinery*, 120:320–326, 1998.
 - [174] I. Gartshore, M. Salcudean, I. Hassan. Film cooling injection hole geometry: Hole shape comparison for cooling orientation. *AIAA Journal*, 39(8):1493–1499, 2001.
 - [175] S.V. Ekkad, D. Zapata, J.C. Han. Film effectiveness over a flat surface with air and CO₂ injection through compound angle holes using a transient liquid crystal image method. *ASME Journal of Turbomachinery*, 119:587–593, 1997.
 - [176] C.A. Hale, M.W. Plesniak, S. Ramadhyani. Film cooling effectiveness for short film cooling holes fed by a narrow plenum. *ASME Journal of Turbomachinery*, 122:553–557, 2000.
 - [177] A. Kohli, D.G. Bogard. Fluctuating thermal field in the near-hole region for film cooling flows. *ASME Journal of Turbomachinery*, 120:86–91, 1998.
 - [178] D. Lakehal, G.S. Theodoridis, W. Rodi. Computation of film cooling of a flat plate by lateral injection from a row of holes. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 19:418–430, 1998.
 - [179] D.G. Hyams, J.H. Leylek. A detailed analysis of film-cooling physics: Part III – streamwise injection with shaped holes. *ASME Journal of Turbomachinery*, 122:122–132, 2000.
 - [180] J.H. Leylek, R.D. Zerkle. Discrete-jet cooling: A comparison of computational results with experiments. *ASME Journal of Turbomachinery*, 116:358–368, 1994.
 - [181] D.K. Walters, J.H. Leylek. A systematic computational methodology applied to a three-dimensional film-cooling flowfield. *ASME Journal of Turbomachinery*, 119:777–785, 1997.
 - [182] R.A. Brittingham, J.H. Leylek. A detailed analysis of film-cooling physics: Part IV – compound-angle injection with shaped holes. *ASME Journal of Turbomachinery*, 122:133–145, 2000.

- [183] H. Brandt. Suction side film cooling on the turbine cascade T106-300 - aerodynamic and heat transfer measurements. *Test Case Documentation, Unversitat der Bundeswehr, Monachium*, (LRT-WE12-01/03):1–23, 2001.
- [184] K.A. Thole, M. Gritsh, A. Schulz, S. Wittig. Effect of a crossflow at the entrance to a film-cooling hole. *ASME Journal of Turbomachinery*, 119:533–540, 1997.
- [185] G. Wilfert, S. Wolff. Influence of internal flow on film cooling effectiveness. *ASME Journal of Turbomachinery*, 122:327–333, 2000.
- [186] M.J. Findlay, M. Salcudean, I.S. Gartshore. Jets in a crossflow: Effects of geometry and blowing ratio. *ASME Journal of Fluids Engineering*, 121:373–378, 1999.
- [187] D.L. Schmidt, B. Sen, D.G. Bogard. Film cooling with compound angle holes: Adiabatic effectiveness. *ASME Journal of Turbomachinery*, 118:807–813, 1996.
- [188] S.V. Ekkad, J.C. Han, H. Du. Detailed film cooling measurements on a cylindrical leading edge model: Effect of free-stream turbulence and coolant density. *ASME Journal of Turbomachinery*, 120:799–807, 1998.
- [189] A.A. Ameri, D.L. Rigby. A numerical analysis of heat transfer and effectiveness on film cooled turbine blade tip models. *Report of NASA/CR-1999-209165*, strongy 1–7, 1999.
- [190] J.D. Heidmann, A.A. Ameri, D.L. Rigby. A three-dimensional coupled internal/external simulation of a film-cooled turbine vane. *ASME Journal of Turbomachinery*, 122:348–359, 2000.
- [191] A. Kohli, D.G. Bogard. Effects of very high free-stream turbulence on the jet-mainstream interaction in a film cooling flow. *ASME Journal of Turbomachinery*, 120:785–790, 1998.
- [192] C. Saumweber, A. Schulz, S. Wittig. Free-stream turbulence effects on film cooling with shaped holes. *ASME Journal of Turbomachinery*, 125:65–73, 2003.
- [193] S.W. Burd, R.W. Kaszeta, T.W. Simon. Measurements in film cooling flows: Hole l/d and turbulence intensity effects. *ASME Journal of Turbomachinery*, 120:791–798, 1998.
- [194] M.A. Habib, A.M. Mobarak, M.A. Sallak, E.A. Abdel-Hadi, R.I. Affify. Experimental investigation of heat transfer and flow over baffles of different heights. *ASME Journal of Heat Transfer*, 116:363–368, 1994.
- [195] M. Al-Qahtani, H.C. Chen, J.C. Han. A numerical study of flow and heat transfer in rotating rectangular channels ($AR=4$) with 45 deg rib turbulators by reynolds stress turbulence model. *ASME Journal of Heat Transfer*, 125:19–26, 2003.
- [196] B. Bonhoff, S. Parneix, J. Leusch, B.V. Johnson, J. Schabacker, A. Bolcs. Experimental and numerical study of developed flow and heat transfer in coolant channels with 45 degree ribs. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 20:311–319, 1999.

-
- [197] A. Haasenritter, M. Weisschuh, B. Weigand. Numerical investigations on the effect of rotation in cooling channels. *Proceedings of 5th Conference on Turbomachinery, Fluid Dynamics and Thermodynamics*, strony 413–421, Praha, 2003. Edited by M. Stastny et al.
 - [198] Y.J. Jang, H.C. Chen, J.C. Han. Computation of flow and heat transfer in two-pass channels with 60 deg ribs. *ASME Journal of Heat Transfer*, 123:563–575, 2001.
 - [199] H. Iacovides, B.E. Launder. Computational fluid dynamics applied to internal gas-turbine blade cooling: A review. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 16:454–470, 1995.
 - [200] S.C. Cheah, H. Iacovides, D.C. Jackson, H. Ji, B.E. Launder. LDA investigation of the flow development through rotating U-ducts. *ASME Journal of Turbomachinery*, 118:590–596, 1996.
 - [201] S. Mochizuki, J. Takamura, S. Yamawaki, W.J. Yang. Heat transfer in serpentine flow passages with rotation. *ASME Journal of Turbomachinery*, 116:133–140, 1994.
 - [202] N. Abuaf, D.M. Kercher. Heat transfer and turbulence in a turbulated blade cooling circuit. *ASME Journal of Turbomachinery*, 116:169–177, 1994.
 - [203] D. Thurman, P. Poinsatte. Experimental heat transfer and bulk air temperature measurements for a multipass internal cooling model with ribs and bleed. *Report of NASA/TM-2000-209772*, strony 1–7, 2000.
 - [204] H. Iacovides, M. Raisee. Recent progress in the computation of flow and heat transfer in internal cooling passages of turbine blades. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 20:320–328, 1999.
 - [205] P. Adami, E. Belardini, F. Martinelli. Three dimensional unsteady investigation of cooled HP turbine stages. *Proceedings of 5th Conference on Turbomachinery, Fluid Dynamics and Thermodynamics*, strony 535–549, Praha, 2003. Edited by M. Stastny et al.
 - [206] A. Azzi, D. Lakehal. Perspective modeling film cooling of turbine blades by transcending conventional two-equation turbulence models. *ASME Journal of Turbomachinery*, 124:472–484, 2002.
 - [207] V.K. Garg, D.L. Rigby. Heat transfer on a film-cooled blade - effect of hole physics. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 20:10–25, 1999.
 - [208] J. Thevenin, M. Amaral, H. Malvos, L. Mauillon. Computation of a three-dimensional swirling jet into a crossflow using a Reynolds stress turbulence model. *Proceedings of ECCOMAS'98*, strony 1082–1087. John Wiley & Sons, Ltd, 1998.
 - [209] B.A. Haven, M. Kurosaka. Kidney and anti-kidney vortices in crossflow jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 352:27–64, 1997.
 - [210] G. Wilfert, L. Fottner. The aerodynamic mixing effect of discrete cooling jets with mainstream flow on a highly loaded turbine blade. *ASME Journal of Turbomachinery*, 118:468–478, 1996.

- [211] M. Karcz. Powiązanie modelu turbulencji dynamicznej $k-\overline{v'^2}-f$ z termicznym $\overline{\theta'^2}-\epsilon_\theta$. *Opracowanie Wewnętrzne IMP PAN*, (2660):1–24, 2002.
- [212] C.U. Buice, J.K. Eaton. Experimental investigation of flow through an asymmetric plane diffuser. *Annual Research Briefs of Center for Turbulence Research of Stanford University*, (1995):117–120, 1995.
- [213] D.M. Driver, H.L. Seegmiller. Features of a reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow. *AIAA Journal*, 23:163–171, 1985.

Dodatek A

Wyprowadzenie równań transportu turbulentnego strumienia ciepła

A.1 Uśrednianie klasyczne

Uśrednianie klasyczne nazywane przez większą część badaczy *reynoldsowskim*, jest najczęściej wykorzystywaną formą uśredniania równań zachowania. Zmienną zachowawczą $\psi_n = \psi_n(x_j, t)$ na przykład prędkość v_j czy temperaturę¹ θ można zdekomponować na jej wartość średnią i fluktuacje. Postulat ten przedstawia następująca relacja [77, 88]:

$$\psi(x_j, t) = \bar{\psi}(x_j) + \psi'(x_j, t) \quad . \quad (\text{A.1})$$

Średnią wartość w danym punkcie $\vec{x}$, wykorzystując uśrednianie względem czasu określa zależność:

$$\bar{\psi} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \psi(t) dt \quad . \quad (\text{A.2})$$

Przedział czasu, na którym dokonuje się całkowania, musi być zdecydowanie większy od czasu fluktuacji danej wielkości. Ponieważ w takim przedziale czasowym fluktuacje w różnych kierunkach się wzajemnie znoszą, ważna pozostaje też relacja:

$$\int_{\Delta t} \psi' dt = 0 \quad . \quad (\text{A.3})$$

Zasady uśredniania klasycznego sprowadzają się w skrócie do zerowania uśrednionych fluktuacji, ale nie ich iloczynu. Także uśrednianie wartości wcześniej uśrednionej nie wpływa na jej wartość. Ogólnie można zapisać za [8]:

$$\psi = \bar{\psi} + \psi' \quad , \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{\psi}' = \bar{\phi}' = 0 \quad , \quad (\text{A.5})$$

$$\overline{\bar{\phi}\psi'} = \overline{\bar{\psi}\phi'} = 0 \quad , \quad (\text{A.6})$$

$$\overline{\psi\phi} = \bar{\psi} \bar{\phi} + \overline{\psi'\phi'} \quad . \quad (\text{A.7})$$

¹W celu uczynienia zapisu bardziej czytelnym, zrezygnowano tutaj całkowicie z oznaczania temperatury przez T na rzecz wielkości θ

A.2 Postać niezachowawcza równań ewolucji

Równania transportu dla turbulentnego strumienia ciepła oraz ϵ_θ wyprowadzone zostają w analogiczny do równań transportu dla naprężeń Reynoldsa oraz dyssypacji turbulentnej energii kinetycznej ϵ . Jedynie równanie ewolucji $\overline{\theta'^2}$ wyprowadzane jest nie przez zwięźenie do śladu tensora w równaniu transportu naprężeń Reynoldsa jak to ma miejsce w przypadku energii kinetycznej turbulencji, a przez uśrednienie równania powstałego z sumy dwóch równań energii w postaci temperaturowej przemnożonych przez fluktuacje temperatury. Można więc zapisać kolejno za [8, 88] postać niezachowawczą tych równań:

- równanie transportu turbulentnego strumienia ciepła

$$\overline{v'_i \mathcal{T}(\theta) + \mathcal{N}(v_i) \theta'} = 0 \quad , \quad (\text{A.8})$$

- równanie transportu wariancji temperatury

$$\overline{\theta' \mathcal{T}(\theta) + \mathcal{T}(\theta) \theta'} = 0 \quad , \quad (\text{A.9})$$

- równanie transportu szybkości dyssypacji fluktuacji temperatury

$$2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{T}(\theta')} = 0 \quad . \quad (\text{A.10})$$

W podanych powyżej zależnościach zapis $\mathcal{N}(v_i)$ i $\mathcal{T}(\theta)$ oznacza odpowiednio równanie pędu Naviera-Stokesa i równanie energii w postaci temperaturowej Fouriera-Kirchhoffa. Mają one postać natępującą:

- równanie pędu

$$\mathcal{N}(v_i) = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} - g_i - g_i \beta \theta = 0 \quad . \quad (\text{A.11})$$

Dla przepływów nieściśliwych $\rho = \text{const}$ człon reprezentujący strumień naprężeń lepkich można przedstawić w formie uproszczonej:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (\text{A.12})$$

- równanie energii w postaci temperaturowej

$$\mathcal{T}(\theta) = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial v_j \theta}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} v_j) = 0 \quad . \quad (\text{A.13})$$

A.3 Równanie ewolucji turbulentnego strumienia ciepła

$$-\overline{v'_j \theta'}$$

Łącząc zależności (A.8), (A.11) oraz (A.13) można zapisać, iż:

$$\begin{aligned} \overline{v'_i \mathcal{T}(\theta) + \theta' \mathcal{N}(v_i)} = & \overline{v'_i \frac{\partial \theta}{\partial t} + v'_i \frac{\partial v_j \theta}{\partial x_j} - v'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - v'_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} v_i) +} \\ & \overline{\theta' \frac{\partial v_i}{\partial t} + \theta' \frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j} + \theta' \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ji} - \theta' \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \theta' g_i \beta \theta} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

W celu łatwiejszego dokonywania przekształceń powyższe równanie podzielono na różne człony tj. lokalny, konwekcyjny, dyssypacyjny i związany z polem sił. Człon zawierający mechaniczny strumień energii² $\overleftrightarrow{\tau} \cdot \vec{v}$ pomija się rozważaniach szczegółowych³. Zostanie on uwzględniony bezpośrednio w równaniu na turbulentny strumień ciepła poprzez człon źródłowy w postaci:

$$\overline{v'_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} v_i)} = \overline{v'_i S_\theta} \quad . \quad (\text{A.15})$$

A.3.1 Człon lokalny

Na człon lokalny składają się następujące elementy równania (A.14):

$$\overline{v'_i \frac{\partial \theta}{\partial t}} + \overline{\theta' \frac{\partial v_i}{\partial t}} \quad . \quad (\text{A.16})$$

Dekomponując prędkość i temperaturę w powyższej zależności na wartość średnią i fluktuacje mamy:

$$\overline{v'_i \frac{\partial \theta}{\partial t}} + \overline{v'_i \frac{\partial \theta'}{\partial t}} + \overline{\theta' \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t}} + \overline{\theta' \frac{\partial v'_i}{\partial t}} \quad . \quad (\text{A.17})$$

Eliminując człony z pojedynczymi fluktuacjami zgodnie z zasadami uśredniania klasycznego wykorzystując komutowanie operacji uśredniania i pochodnej po czasie oraz przekształcając otrzymane wyrażenia otrzymujemy:

$$\overline{v'_i \frac{\partial \theta'}{\partial t}} + \overline{\theta' \frac{\partial v'_i}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial v'_i \theta'}{\partial t}} \quad . \quad (\text{A.18})$$

A.3.2 Człon konwekcyjny

Człon konwekcyjny równania (A.14) to zależność:

$$\overline{v'_i \frac{\partial v_j \theta}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j}} \quad . \quad (\text{A.19})$$

Podobnie jak dla członu lokalnego stosujemy dekompozycję Reynoldsa, dzięki czemu otrzymujemy:

$$\overline{v'_i \frac{\partial \bar{v}_j \bar{\theta}}{\partial x_j}} + \overline{v'_i \frac{\partial v'_j \bar{\theta}}{\partial x_j}} + \overline{v'_i \frac{\partial \bar{v}_j \theta'}{\partial x_j}} + \overline{v'_i \frac{\partial v'_j \theta'}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v'_i \bar{v}_j}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial \bar{v}_i v'_j}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v'_i v'_j}{\partial x_j}} \quad . \quad (\text{A.20})$$

Postępując tak jak wcześniej, czyli eliminując człony z pojedynczymi fluktuacjami i „łącząc w pary” człony o analogicznej postaci mamy:

$$\underbrace{\overline{v'_i \frac{\partial v'_j \bar{\theta}}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial \bar{v}_i v'_j}{\partial x_j}}}_{\text{człony 1}} + \underbrace{\overline{v'_i \frac{\partial \bar{v}_j \theta'}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v'_i \bar{v}_j}{\partial x_j}}}_{\text{człony 2}} + \underbrace{\overline{v'_i \frac{\partial v'_j \theta'}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v'_i v'_j}{\partial x_j}}}_{\text{człony 3}} \quad . \quad (\text{A.21})$$

Człony z pierwszej pary można przekształcić z wykorzystaniem zasad różniczkowania przy założeniu nieściśliwości turbulentnej fazy płynu:

²Jednakowoż bez ciśnienia

³Założenie eliminujące ten człon z równań jest słuszne zakładając, iż czynnik nie będzie osiągał prędkości około i nad dźwiękowych, kiedy dyssypacja lepkościowa jest największa. Powoduje to znaczne ułatwienie dalszych wyprowadzeń.

$$\overline{v'_i \frac{\partial v'_j \bar{\theta}}{\partial x_j}} = \overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \underbrace{\overline{v'_i \bar{\theta} \frac{\partial v'_j}{\partial x_j}}}_{=0} , \quad (\text{A.22})$$

$$\overline{\theta' \frac{\partial \bar{v}_i v'_j}{\partial x_j}} = \overline{\theta' v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \underbrace{\overline{\theta' \bar{v}_i \frac{\partial v'_j}{\partial x_j}}}_{=0} . \quad (\text{A.23})$$

Pozostałe człony przekształca się do postaci:

$$\overline{v'_i \frac{\partial \bar{v}_j \theta'}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v'_i \bar{v}_j}{\partial x_j}} + \overline{v'_i \frac{\partial v'_j \theta'}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v'_i v'_j}{\partial x_j}} = \bar{v}_j \frac{\partial \overline{v'_i \theta'}}{\partial x_j} + \overline{v'_j \frac{\partial v'_i \theta'}{\partial x_j}} . \quad (\text{A.24})$$

Ostatni człon powyższej zależności można rozwinąć w jeszcze inną postać tzn.:

$$\overline{v'_j \frac{\partial v'_i \theta'}{\partial x_j}} + \underbrace{\overline{v'_i \theta' \frac{\partial v'_j}{\partial x_j}}}_{=0} = \overline{\frac{\partial v'_j v'_i \theta'}{\partial x_j}} . \quad (\text{A.25})$$

Zapisując razem wszystkie elementy członu konwekcyjnego otrzymuje się zależność:

$$\overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \overline{\theta' v'_j} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \bar{v}_j \frac{\partial \overline{v'_i \theta'}}{\partial x_j} + \overline{\frac{\partial v'_j v'_i \theta'}{\partial x_j}} . \quad (\text{A.26})$$

A.3.3 Człon dyfuzyjny

Człon dyfuzyjny równania transportu turbulentnego strumienia ciepła reprezentują następujące elementy równania (A.14):

$$-v'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) . \quad (\text{A.27})$$

Konsekwentnie dokonuje się dekompozycji prędkości i temperatury na część średnią i fluktuacje.

$$-v'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right) - v'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right) - \theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right) - \theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) . \quad (\text{A.28})$$

Eliminując człony z pojedynczymi fluktuacjami otrzymuje się:

$$-v'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right) - \theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) . \quad (\text{A.29})$$

Zakładając stałość współczynników dyfuzji molekularnej zarówno pędu ν jak i ciepła α , wykorzystując komutowanie operacji uśredniania z operacjami pochodnych przestrzennych oraz zawężając nasze rozważania jedynie do płynów z nieściśliwą fazą turbulentną można zapisać, że:

$$\nu \theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\theta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right) - \nu \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} . \quad (\text{A.30})$$

$$\alpha v'_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right) = \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v'_i \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right) - \alpha \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} . \quad (\text{A.31})$$

Stąd wynika ostateczna postać członu dyfuzyjnego równania transportu turbulentnego strumienia ciepła:

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\nu \theta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} + \overline{\alpha v'_i \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} \right] + (\nu + \alpha) \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} . \quad (\text{A.32})$$

A.3.4 Człon ciśnieniowy

Poniżej przedstawiono człon ciśnieniowy równania (A.14).

$$-\overline{\theta' \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ji}} . \quad (\text{A.33})$$

Analogicznie jak dla pozostałych członów stosuje się dekompozycję wielkości na część średnią i fluktuacje:

$$-\overline{\theta' \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \delta_{ji}} + \overline{\theta' \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} \delta_{ji}} . \quad (\text{A.34})$$

Eliminując wyrażenia z pojedynczymi fluktuacjami otrzymujemy postać członu ciśnieniowego równania transportu turbulentnego strumienia ciepła:

$$-\overline{\theta' \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} \delta_{ji}} . \quad (\text{A.35})$$

A.3.5 Człon związany z polem sił

Człon związany z polem sił zewnętrznych równania (A.14) przedstawia poniższa zależność:

$$-\overline{\theta'_i g_i \beta \theta} . \quad (\text{A.36})$$

Po dekompozycji jest:

$$-\overline{\theta'_i g_i \beta \bar{\theta}} - \overline{\theta' g_i \beta \theta'} . \quad (\text{A.37})$$

Eliminując wyrażenia z pojedynczymi fluktuacjami:

$$-g_i \beta \overline{\theta'^2} . \quad (\text{A.38})$$

A.3.6 Równanie transportu trubulentnego strumienia ciepła

Dysponując powyższymi wyprowadzeniami można poszczególne elementy tj. zależności (A.18), (A.26), (A.32), (A.35), (A.38) oraz (A.15) połączyć w równanie ewolucji turbulentnego strumienia ciepła, które w ten sposób przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{v'_i \theta'}}{\partial t} + \overline{v_j \frac{\partial v'_i \theta'}{\partial x_j}} = & \\ & - \overline{\theta' \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} \delta_{ji}} - \overline{v'_i v'_j \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}} - \overline{\theta' v'_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}} - \frac{\partial \overline{v'_j v'_i \theta'}}{\partial x_j} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\nu \theta' \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} + \overline{\alpha v'_i \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} \right] - (\nu + \alpha) \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + g_i \beta \overline{\theta'^2} + \overline{v'_i S_\theta} . \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Oznaczając turbulentny strumień ciepła jako q_i^T równanie powyższe można zapisać w formie skróconej⁴:

$$\frac{Dq_i^T}{Dt} = \Phi_{i\theta} + P_{i\theta}^T + P_{i\theta}^M + D_{i\theta}^t + D_{i\theta} - \epsilon_{i\theta} + S \quad . \quad (\text{A.40})$$

W równaniu (A.40) poszczególne symbole oznaczają kolejno:

- Konwekcja $\frac{Dq_i^T}{Dt}$

$$\frac{Dq_i^T}{Dt} = \frac{\partial \overline{v_i' \theta'}}{\partial t} + \overline{v_j} \frac{\partial \overline{v_i' \theta'}}{\partial x_j} \quad , \quad (\text{A.41})$$

- Człon ciśnieniowy $\Phi_{i\theta}$

$$\Phi_{i\theta} = -\overline{\theta' \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} \delta_{ji}} \quad , \quad (\text{A.42})$$

- Produkcja *termiczna* $P_{i\theta}^T$

$$P_{i\theta}^T = -\overline{v_i' v_j'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} \quad , \quad (\text{A.43})$$

- Produkcja *mechaniczna* $P_{i\theta}^M$

$$P_{i\theta}^M = -\overline{\theta' v_j'} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} \quad , \quad (\text{A.44})$$

- Dyfuzja turbulentna $D_{i\theta}^t$

$$D_{i\theta}^t = -\frac{\partial \overline{v_j' v_i' \theta'}}{\partial x_j} \quad , \quad (\text{A.45})$$

- Dyfuzja molekularna $D_{i\theta}$

$$D_{i\theta} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\nu \theta' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}} + \alpha \overline{v_i' \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} \right] \quad , \quad (\text{A.46})$$

- Dyssypacja molekularna $\epsilon_{i\theta}$

$$\epsilon_{i\theta} = (\nu + \alpha) \frac{\partial \overline{\theta'}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{v_i'}}{\partial x_j} \quad , \quad (\text{A.47})$$

- Człon źródłowy S od fluktuacji naprężeń całkowitych i fluktuacji gradientu prędkości

$$S = \overline{v_i' S_\theta} \quad . \quad (\text{A.48})$$

⁴Pomijając ostatni człon

A.4 Równanie ewolucji wariancji temperatury $\overline{\theta'^2}$

Podobnie jak w przypadku równania ewolucji dla turbulentnego strumienia ciepła podstawiając do równania (A.9) zależność (A.13) można zapisać, że:

$$\begin{aligned} \overline{\theta' \mathcal{T}(\theta)} + \overline{\mathcal{T}(\theta) \theta'} = \\ \overline{\theta' \frac{\partial \theta}{\partial t} + \theta' \frac{\partial \theta v_j}{\partial x_j} - \theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \theta' \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} v_i)} + \\ + \overline{\theta' \frac{\partial \theta}{\partial t} + \theta' \frac{\partial \theta v_j}{\partial x_j} - \theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \theta' \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} v_i)} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Podobnie też powyższe równanie podzielono na różne człony tj. lokalny, konwekcyjny oraz dyssypacyjny. Zrezygnowano także z wyprowadzenia członów zawierających mechaniczny strumień energii, które uwzględniono bezpośrednio w równaniu ewolucji wariancji temperatury poprzez człon źródłowy:

$$\overline{2\theta' \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} v_i)} = 2\overline{\theta' S_\theta} \quad . \quad (\text{A.50})$$

A.4.1 Człon lokalny

Na człon lokalny składają się następujące elementy równania (A.49):

$$\overline{\theta' \frac{\partial \theta}{\partial t} + \theta' \frac{\partial \theta}{\partial t}} \quad (\text{A.51})$$

Dekomponując temperaturę na część średnią i fluktuacje otrzymujemy natępującą zależność:

$$\overline{\theta' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}} + \overline{\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial t}} + \overline{\theta' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t}} + \overline{\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial t}} \quad . \quad (\text{A.52})$$

Eliminując człony z pojedynczymi fluktuacjami otrzymujemy:

$$\overline{\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial t}} + \overline{\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial t}} \quad . \quad (\text{A.53})$$

Zależność powyższa jest pochodną cząstkową wyrażenia:

$$\frac{\partial \overline{\theta' \theta'}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial t} \quad . \quad (\text{A.54})$$

A.4.2 Człon konwekcyjny

Na człon konwekcyjny składają się następujące elementy równania (A.49):

$$\overline{\theta' \frac{\partial v_j \theta}{\partial x_j} + \theta' \frac{\partial v_j \theta}{\partial x_j}} \quad . \quad (\text{A.55})$$

Dekomponując temperaturę i prędkość na część średnią i fluktuacje otrzymujemy natępującą zależność:

$$\begin{aligned} \overline{\theta' \frac{\partial \bar{v}_j \bar{\theta}}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial \bar{v}_j \theta'}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v'_j \bar{\theta}}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v'_j \theta'}{\partial x_j}} + \\ + \overline{\theta' \frac{\partial \bar{v}_j \bar{\theta}}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial \bar{v}_j \theta'}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v'_j \bar{\theta}}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v'_j \theta'}{\partial x_j}} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

Eliminując człony z pojedynczymi fluktuacjami otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \overline{\theta' \frac{\partial \bar{v}_j \theta'}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v_j' \bar{\theta}}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v_j' \theta'}{\partial x_j}} + \\ & \overline{\theta' \frac{\partial \bar{v}_j \theta'}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v_j' \bar{\theta}}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v_j' \theta'}{\partial x_j}} . \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Powyższą zależność można przekształcić do postaci:

$$\left[\overline{\theta' \frac{\partial \bar{v}_j \theta'}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial \bar{v}_j \theta'}{\partial x_j}} \right] + \underbrace{\left[\overline{\theta' \frac{\partial v_j' \bar{\theta}}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v_j' \bar{\theta}}{\partial x_j}} \right]}_{2 \overline{v_j' \theta' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}}} + \left[\overline{\theta' \frac{\partial v_j' \theta'}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v_j' \theta'}{\partial x_j}} \right] . \quad (\text{A.58})$$

Wyrażenia z pierwszego i ostatniego nawiasu można zapisać razem, dzięki czemu otrzymujemy:

$$\overline{\theta' \frac{\partial \bar{v}_j \theta'}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial \bar{v}_j \theta'}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v_j' \theta'}{\partial x_j}} + \overline{\theta' \frac{\partial v_j' \theta'}{\partial x_j}} = \bar{v}_j \frac{\partial \overline{\theta' \theta'}}{\partial x_j} + v_j' \frac{\partial \overline{\theta' \theta'}}{\partial x_j} . \quad (\text{A.59})$$

Zakładając nieściśliwość turbulentnej fazy płynu ostatni człon przekształca się wykorzystując realcję:

$$\overline{v_j' \frac{\partial \overline{\theta' \theta'}}{\partial x_j}} + \underbrace{\overline{\theta' \frac{\partial v_j'}{\partial x_j}}}_{=0} = \overline{\frac{\partial v_j' \theta' \theta'}{\partial x_j}} . \quad (\text{A.60})$$

Dodając wszystkie poszczególne człony równania otrzymujemy człon konwekcyjny równania transportu wariancji temperatury:

$$2 \overline{v_j' \theta' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial v_j' \theta' \theta'}{\partial x_j}} + \bar{v}_j \frac{\partial \overline{\theta' \theta'}}{\partial x_j} . \quad (\text{A.61})$$

Zależność powyższa ma następującą postać, przy podstawieniu za wyrażenie $\theta' \theta' = \theta'^2$:

$$2 \overline{v_j' \theta' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j}} + \overline{\frac{\partial v_j' \theta'^2}{\partial x_j}} + \bar{v}_j \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} . \quad (\text{A.62})$$

A.4.3 Człon dyfuzyjny

Na człon dyfuzyjny składają się następujące elementy równania (A.49):

$$-\overline{\theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right)} - \overline{\theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right)} . \quad (\text{A.63})$$

Tak jak wcześniej dekomponujemy temperaturę na część średnią i fluktuację:

$$-\overline{\theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right)} - \overline{\theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right)} - \overline{\theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right)} - \overline{\theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right)} . \quad (\text{A.64})$$

Eliminując człony z pojedynczymi fluktuacjami otrzymuje się:

$$-\overline{\theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right)} - \overline{\theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right)} . \quad (\text{A.65})$$

Ponadto zakładając stałość dyfuzyjności molekularnej oraz wykorzystując zasady różniczkowania i komutowania mamy:

$$-\alpha \overline{\theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right)} - \alpha \overline{\theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right)} \quad . \quad (\text{A.66})$$

Każdy człon z powyższej zależności można rozpisać jako:

$$-\alpha \overline{\theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right)} = -\alpha \overline{\theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right)} - \alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} \quad . \quad (\text{A.67})$$

Otrzymuje się więc zależność:

$$\underbrace{-\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} \right) - \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\theta' \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} \right)}_{-\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial \theta' \theta'}{\partial x_j}} \right)} + 2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} \quad . \quad (\text{A.68})$$

W konsekwencji człon dyfuzyjny można przedstawić jako:

$$-\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial \theta' \theta'}{\partial x_j}} \right) + 2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} \quad . \quad (\text{A.69})$$

Zależność powyższa ma następującą postać, przy podstawieniu za wyrażenie $\theta' \theta' = \theta'^2$:

$$-\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial \theta'^2}{\partial x_j}} \right) + 2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} \quad . \quad (\text{A.70})$$

A.4.4 Równanie transportu $\overline{\theta'^2}$

Równanie ewolucji wariancji temperatury $k_\theta = \overline{\theta'^2}/2$ jest więc sumą wszystkich wyprowadzonych powyżej członów tj. lokalnego (A.54), konwekcyjnego (A.62), dyfuzyjnego (A.70) oraz źródła (A.50). Jego postać jest następująca:

$$\frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial t} + \overline{v_j} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{v_j' \theta'^2} \right) - 2\overline{v_j' \theta'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} - 2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} + 2\overline{\theta' S_\theta} \quad . \quad (\text{A.71})$$

Po prawej stronie równości (A.71) znajdują się członów, które można określić kolejno jako reprezentujące dyfuzję molekularną $D_{\theta j}^\alpha$, dyfuzję turbulentną $D_{\theta j}$, produkcję P_θ , dyssypację ϵ_θ i źródło S . W skrócie równanie (A.71) można zatem zapisać⁵ jako:

$$\frac{D \overline{\theta'^2}}{Dt} = D_{\theta j}^\alpha + D_{\theta j}^t + P_\theta - \epsilon_\theta + S \quad . \quad (\text{A.72})$$

⁵Przy założeniu iż $k_\theta = \overline{\theta'^2}$

A.5 Równanie ewolucji szybkości destrukcji fluktuacji temperatury ϵ_θ

Szybkość destrukcji fluktuacji temperatury pojawia się przy wyprowadzaniu równania (A.71). Jest to zależność:

$$\epsilon_\theta = \alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} . \quad (\text{A.73})$$

Równanie ewolucji szybkości destrukcji fluktuacji temperatury oparte jest na równaniu energii dla fluktuacji temperatury oraz gradientu fluktuacji temperatury.

$$2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{T}(\theta')} = 0 . \quad (\text{A.74})$$

Równanie energii dla fluktuacji temperatury uzyskać można poprzez odjęcie od równania energii jej postaci uśrednionej, dla $\theta = \bar{\theta} + \theta'$:

$$\mathcal{T}(\theta') = \mathcal{T}(\theta) - \overline{\mathcal{T}(\theta)} . \quad (\text{A.75})$$

Stąd też można kolejno zapisać⁶ iż:

$$\frac{\partial(\bar{\theta} + \theta')}{\partial t} - \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \frac{\partial \theta'}{\partial t} , \quad (\text{A.76})$$

$$\frac{\partial(\bar{v}_j + v'_j)(\bar{\theta} + \theta')}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{v}_j \bar{\theta}}{\partial x_j} = \frac{\partial v'_j \bar{\theta}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j \theta'}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j \theta'}{\partial x_j} , \quad (\text{A.77})$$

$$0 - \frac{\partial \bar{v}_j \theta'}{\partial x_j} = - \frac{\partial \overline{v'_j \theta'}}{\partial x_j} , \quad (\text{A.78})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial(\bar{\theta} + \theta')}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right) . \quad (\text{A.79})$$

Pełne równanie energii dla fluktuacji temperatury ma więc postać:

$$\mathcal{T}(\theta') = \frac{\partial \theta'}{\partial t} + \frac{\partial v'_k \bar{\theta}}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k \theta'}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k \theta'}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{v'_k \theta'}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right) = 0 . \quad (\text{A.80})$$

Podstawiając powyższe równanie do wyjściowej zależności (A.74) otrzymuje się wyrażenie:

$$2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \frac{\partial v'_k \bar{\theta}}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k \theta'}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k \theta'}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{v'_k \theta'}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right) \right]} = 0 . \quad (\text{A.81})$$

Podobnie jak wcześniej w celu ułatwienia wyprowadzenia powyższego równania można je przedstawić w postaci członów lokalnego, konwekcyjnego i dyfuzyjnego⁷ W celu uproszczenia wyprowadzeń człon zawierający mechaniczny strumień energii przedstawia się bezpośrednio w równaniu transportu jako człon źródłowy o postaci:

$$2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{S_\theta}{\partial x_j}} . \quad (\text{A.83})$$

⁶Z pominięciem członu zawierającego mechaniczny strumień energii

⁷Człon związany z turbulentnym strumieniem energii można wyeliminować jeśli przyjmie się warunek obciążenia równań do równań rzędu drugiego.

$$2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{v'_k \theta'}}{\partial x_k} \right)} \approx 0 . \quad (\text{A.82})$$

A.5.1 Człon lokalny

Człon lokalny równania (A.81) stanowi wyrażenie:

$$2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial t}} . \quad (\text{A.84})$$

Można je przekształcić do postaci ostatecznej, poprzez wykorzystanie zależności na ϵ_θ (A.73):

$$2\alpha \frac{\partial}{\partial t} \overline{\left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right)} = \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial t} . \quad (\text{A.85})$$

A.5.2 Człon konwekcyjny

Na człon konwekcyjny równania (A.81) składają się trzy wyrażenia, które będą rozpatrywane osobno. Określać je będziemy mianem pierwszego, drugiego oraz trzeciego członu konwekcyjnego. Mimo podobieństwa swojej formy mają one całkowicie odmienne znaczenie fizyczne.

Pierwszy człon konwekcyjny

$$2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{v}_k \theta'}{\partial x_k} \right)} = 2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} + 2\alpha \bar{v}_k \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right)} . \quad (\text{A.86})$$

Pierwszy człon powyższego wyrażenia pozostaje już bez zmian, drugi zaś można przekształcić do postaci:

$$2\alpha \bar{v}_k \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right)} = 2\alpha \bar{v}_k \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right)} = \bar{v}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} \right) = \bar{v}_k \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial x_k} . \quad (\text{A.87})$$

Stąd ostatecznie można obie wyznaczone zależności określać jako człon odpowiadający za konwekcję oraz turbulentną produkcję, zapisać jako:

$$\bar{v}_k \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial x_k} + 2\alpha \overline{\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} . \quad (\text{A.88})$$

Drugi człon konwekcyjny

$$2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v'_k \bar{\theta}}{\partial x_k} \right)} = 2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k}} + 2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} v'_k \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j \partial x_k}} . \quad (\text{A.89})$$

W zasadzie po drobnej zamianie miejsc jest to ostateczna postać drugiego członu konwekcyjnego, który obejmuje dwa człony odpowiadające za produkcję szybkości destrukcji fluktuacji temperatury.

$$2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k}} + 2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} v'_k \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j \partial x_k}} . \quad (\text{A.90})$$

Trzeci człon konwekcyjny

$$2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v'_k \theta'}{\partial x_k} \right)} = 2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} + 2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} v'_k \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j \partial x_k}} \quad (\text{A.91})$$

Pierwszy człon ma postać ostateczną, drugi zaś należy przekształcić w celu uzyskania bardziej zwężonej formy:

$$= 2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} v'_k \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j \partial x_k}} = 2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v'_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right)} - 2\alpha \underbrace{\overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}}}_{=0} \quad (\text{A.92})$$

Człon, który nie ulega zerowaniu przy założeniu nieściśliwości fazy turbulentnej czynnika można rozwinąć dalej do postaci:

$$2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v'_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \right)} = \alpha \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{v'_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} \right) \quad (\text{A.93})$$

Stąd ostatecznie można zapisać elementy trzeciego członu konwekcyjnego na którego składają się turbulentna produkcja oraz transport.

$$2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} + \alpha \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{v'_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} \right) \quad (\text{A.94})$$

A.5.3 Człon dyfuzyjny

Człon dyfuzyjny równania (A.81) to wyrażenie:

$$2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right) \right]} \quad (\text{A.95})$$

Powyższą postać można, przy założeniu nieściśliwości oraz stałości współczynnika dyfuzji termicznej, zapisać jako:

$$2\alpha^2 \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \right)} = \underbrace{\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} \right)}_{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\alpha \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} \right) \right]} - 2\alpha^2 \overline{\frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j \partial x_k}} \quad (\text{A.96})$$

W konsekwencji można zapisać ostateczną wersję członu dyfuzyjnego równania (A.81), wykorzystując formułę (A.73):

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial x_j} \right) - 2 \overline{\left(\alpha \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \quad (\text{A.97})$$

A.5.4 Równanie transportu ϵ_θ

Równanie ewolucji szybkości destrukcji fluktuacji temperatury ϵ_θ jest sumą wprowadzonych powyżej członów tj. lokalnego (A.85), konwekcyjnych (A.88), (A.90), (A.94) oraz dyfuzyjnego (A.97). Uwzględniając człon źródłowy (A.83) równanie ma

postać następującą:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial t} + \overline{v_k} \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial x_k} = & \\ & \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial x_j} \right) - \alpha \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{v'_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} \right) - \\ & 2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j}} - 2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k}} - 2\alpha \overline{v'_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j \partial x_k}} - 2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} + \\ & 2 \left(\alpha \overline{\frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j \partial x_k}} \right)^2 + 2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{S_\theta}{\partial x_j}} . \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

To samo równanie można zapisać w bardziej ogólnej formie skróconej:

$$\frac{D\epsilon_\theta}{Dt} = D_{\epsilon_\theta}^\alpha + D_{\epsilon_\theta}^t + P_{\epsilon_\theta}^M + P_{\epsilon_\theta}^T + P_{\epsilon_\theta}^G + P_{\epsilon_\theta}^t - \epsilon_{\epsilon_\theta} + S \quad . \quad (\text{A.99})$$

W równaniu (A.99) poszczególne symbole oznaczają kolejno:

- Konwekcja $\frac{D\epsilon_\theta}{Dt}$

$$\frac{D\epsilon_\theta}{Dt} = \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial t} + \overline{v_k} \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial x_k} \quad , \quad (\text{A.100})$$

- Dyfuzja molekularna $D_{\epsilon_\theta}^\alpha$

$$D_{\epsilon_\theta}^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \epsilon_\theta}{\partial x_j} \right) \quad , \quad (\text{A.101})$$

- Dyfuzja turbulentna $D_{\epsilon_\theta}^t$

$$D_{\epsilon_\theta}^t = -\alpha \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{v'_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}} \right) \quad , \quad (\text{A.102})$$

- Produkcja *mechaniczna* $P_{\epsilon_\theta}^M$

$$P_{\epsilon_\theta}^M = -2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j}} \quad , \quad (\text{A.103})$$

- Produkcja *termiczna* $P_{\epsilon_\theta}^T$

$$P_{\epsilon_\theta}^T = -2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k}} \quad , \quad (\text{A.104})$$

- Produkcja *gradientowa* $P_{\epsilon_\theta}^G$

$$P_{\epsilon_\theta}^G = -2\alpha \overline{v'_k \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x_j \partial x_k}} \quad , \quad (\text{A.105})$$

- Produkcja *turbulentna* $P_{\epsilon_\theta}^t$

$$P_{\epsilon_\theta}^t = -2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} \quad , \quad (\text{A.106})$$

- Dyssypacja molekularna $\epsilon_{\epsilon\theta}$

$$\epsilon_{\epsilon\theta} = 2 \overline{\left(\alpha \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} , \quad (\text{A.107})$$

- Człon źródłowy S

$$S = 2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{S_\theta}{\partial x_j}} . \quad (\text{A.108})$$